arXiv:2602.01950v1 [math.NT] 2 Feb 2026

L扭模形式的函数中心值与局部多项式

Charlotte Dombrowsky

摘要

本文研究扭模形式的 L函数的两个中心值之积。我们证明，只需计算有限个点处的局部多项式，即可判定该乘积是否为零。为证明这一点，我们利用局部调和 Maass 形式，并以志村-新谷对应为基础，将局部多项式与 L 函数之积联系起来。这推广了 Ehlen 、 Guerzhoy 、 Kane 和 Rolen，以及 Males、Mono、Rolen 和 Wagner 的结果。

引言与结果陈述

数论中的一个深刻结果，是整数权扭模形式的函数中心值与半整数权特定模形式的系数之间的关系。Waldspurger 首先观察到这一联系 [23] ，Zagier 和 Kohnen 随后对其进行了进一步发展 [9],[7]。Sakata 将 Kohnen 定理推广到了更一般的情形 [16], [17] ，去除了层必须为无平方因子的条件。

由 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想可知，研究扭曲的 L 函数的中心值，有助于了解椭圆曲线在二次扩张上的秩。Tunnell [19] 利用这一观察，找到了一个判定准则，用以判断一个整数是否为全等数，也就是说，是否是边长为有理数的直角三角形的面积。这个问题等价于在一族椭圆曲线的二次扭曲中寻找非挠点。Tunnell 证明，一个整数是全等数，当且仅当某些二元二次型在整数上的解的个数相同。此方法只考虑权 2 模形式；然而，Bloch–Kato 猜想将 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想推广到了更高权的模形式。

虽然 Kohnen 和 Sakata 给出了在已知一个整权形式时计算中心值的优美公式，但寻找相应的半整数权形式可能十分费力。Purkait 的 MAGMA 代码 [15] 计算半整数权形式空间的志村分解，从而有助于确定相应的半整数权函数。然而，即使是这种算法，完成计算也需要很长时间（尤其是在层较高时）。我们的主定理建立在 Zagier [9], 、Kohnen [7] 和

Sakata [17], 的工作之上，给出了一个有效算法，用于确定扭模形式的 L函数的中心值何时为零。

该陈述是 Ehlen、Guerzhoy、Kane 和 Rolen 的一个定理的推广。在 [5] 中，他们构造了一个局部调和 Maass 形式，用于研究权 2 尖点形式的 L-函数。利用这个函数，他们将两个扭曲的 L-函数在中心值处的乘积是否为零，与一个依赖于某些二元二次型的局部多项式联系起来。在尖点形式空间的层为 N 且权为 2 时维数为 1 的假设下，他们证明，当且仅当该局部多项式在两个给定有理数处的取值相同时，这个乘积才为零。Kong 在其博士论文 [10], 中推广了这一结果：他利用海克算子，去除了对维数的条件。

我们不会显式计算半整数权形式，而将证明，得益于 Kohnen 和 Sakata 的工作，可以将两个扭曲的 L-函数的中心值之积与一个局部调和 Maass 形式的行为联系起来。局部调和 Maass 形式是调和 Maass 形式的推广。它们具有给定的权 k，是模的，被权 k 双曲拉普拉斯算子湮灭，并且在趋于无穷远时至多呈多项式增长。不过，它们与调和 Maass 形式的不同之处在于，前者允许在上半平面内某个例外集上存在奇点。局部调和 Maass 形式最初由 Bringmann、Kane 和 Kohnen 在 [4], 中引入，之后又由 L¨ohbrich、Schwagenscheidt [11] 和 Mono [14]等人进一步研究。

我们将定义一种局部调和 Maass 形式，它本质上是对 [4] 中定义的形式进行扭曲所得。该形式分为三部分：全纯部分、非全纯部分，以及一个局部多项式，后者刻画了局部调和 Maass 形式沿例外集的跳跃。我们的定理本质上指出，两个扭曲的 L-函数的中心值之积为零，当且仅当（某个投影后的）局部调和 Maass 形式等于（某个投影后的）局部多项式；换言之，全纯部分和非全纯部分均消失。

本项目受到 Males、Mono、Rolen 和 Wagner 的预印本 [12] 的启发。作者证明了一个与下文结论类似的命题，但假设层无平方因子。我们的目标是将他们的结果推广到一般的合成层。然而，他们的证明存在错误，源于对 $\mathcal{P}_{\mathrm{k,\ N,\ D,\ D_0}}$ 的性质存在误解。我们给出了一种新的证明，得到了适用范围更广的判据。
在我们的论证中，我们使用来自 [12], 的对象，并经常对其重新归一化，以使一些技术步骤顺利进行。我们的陈述修正了他们的断言，并将其推广到一般的合成层。此外，我们去掉了判别式 D 和 D_0 都必须是模 $4N$ 的平方这一条件。

我们的定理将 L-函数的乘积与如下定义的局部多项式联系起来：

$$P_{k,N,D,D_0}(x) := c_{k,N,D,D_0,\infty} + c_{k,DD_0} \sum_{\substack{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0} \\ a<0<Q(x,1)}} \chi_{D_0}(Q)Q(x,1)^{k-1}. \quad (1)$$

这里，$\mathcal{Q}_{N,\ DD_0}$ 是判别式为 DD_0 且 N 整除首项系数的二元二次型集合：

$$\mathcal{Q}_{N,DD_0} := \{Q = [a,b,c] : b^2 - 4ac = DD_0, \quad N|a\}.$$

此外，$c_{k,\ N,\ D,\ D_0,\ \infty}$ 和$c_{k,\ DD_0}$ 是依赖于权k、层 N 以及两个判别式 D 和 D_0 的显式常数（见公式（17））。给定一个新形式 $F \in S_{2k}(N)$，令 $\prod_i(T_{p_i} - a_{p_i})$ 为海克算子的乘积，使得

$$\mathbb{T} := \prod_i (T_{p_i} - a_{p_i}) : S_{2k}(N) \to \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{F\}$$

$\tilde{}$不是零映射。将 T 的提升记为 T，其定义如下：

$$\tilde{\mathbb{T}} := \prod_i (T_{p_i} - p_i^{1-2k} a_{p_i}).$$

本文的主定理如下：

定理 1. 设 $k > 1$ 为整数。设 N 为奇整数。设 D、D_0 为两个基本判别式，满足 $(D, N) = (D_0, N) = 1$，DD_0不是平方数，$D(-1)^k, D_0(-1)^k > 0$，并且对所有 $p|N$，都有 $\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D_0}{p}\right)$。令$F \in S_{2k}(N)$为一个新形式。记$\tau$：$\{p$ 是一个素数，$p|N\} \to \{\pm 1\}$为 F的 ***Atkin-Lehner*** 特征值系。我们假设

$$\tau(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } ord_p(N) \text{ is even,} \\ \left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D_0}{p}\right), & \text{if } ord_p(N) \text{ is odd.} \end{cases}$$

以下条件等价

(i) $L(F \otimes \chi_D, k)L(F \otimes \chi_{D_0}, k) = 0$ (ii) $P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T}|_{2-2k}\gamma(x) = P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T}(x)$ $\forall x \in$ 有理数域 $\gamma \in \Gamma_0(N)$ (iii) $P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T}(x) = 0, \quad x \sim_{\Gamma_0(N)} 0.$

注 2. 关于 ***Atkin–Lehner*** 对合特征值的条件可归结为：

- 对于 N 无平方因子：

$$\forall p|N : \quad \tau(p) = \left(\frac{D}{p}\right).$$

- 对于 $N = p^m$ 素数的幂，其中 $m > 2$：

$$\tau(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } m \text{ even,} \\ \left(\frac{D}{p}\right), & \text{if } m \text{ odd.} \end{cases}$$

注意，由于 F 是新形式，因此特别是海克算子的特征形式，我们总能像定理中那样选取一个海克算子乘积。这个乘积并不唯一。我们将在第 2.3 节详细说明如何选择海克算子。从证明中可以得出，我们只需计算少数有理数 $x \sim_{\Gamma_0(N)} 0$ 对应的$\tilde{P}_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T}(x)$，即可检验它是否处处为零。

我们的定理简化了 L-函数中心值的计算：寻找一个半整数权模形式，使其系数如 Kohnen 和 Sakata 所描述的那样编码 L-函数的中心值，可能需要付出大量努力。然而，寻找合适的海克算子并不费力，而$\tilde{}$计算$P_{k,\ N,\ D,\ D_0}|_{2-2k}\mathrm{T}(x)$ 只需很短的时间。这使得该判据易于应用。下面的例子可以说明这一点（更多细节见 5.3）：

例 3。 令 $F := q+q^2+7q^3-7q^4+7q^6+6q^7-15q^8+22q^9+O(q^{11}) \in S_4(25)$。则 $F|W_{25} = F$。此外，可以计算得到

$$L(F \otimes \chi_{21}, 2) \approx 1.62649, \quad L(F \otimes \chi_{56}, 2) \approx 0.37350, \ and \ L(F \otimes \chi_{69}, 2) = 0.$$

我们设 $P(x) := P_{2,\ 25,\ D,\ 21}|_{-2}(T_7 + 7^{-3} \cdot 6)(T_2 + 2^{-3} \cdot 4)(x)$。于是，对于局部多项式，我们有如下结果：

D	$P(1)$	$P(1/4)$	$P(2/7)$	$P(4/9)$	$P(9/14)$	$P(13/18)$	$P(16/19)$
56	*0*	*-25/343*	*-1160/16807*	*-400/3969*	*-2475/33614*	*-565/7938*	*-800/17689*
69	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

我们的证明依赖于这样一个观察：$L(F\otimes\chi_D, k)L(F\otimes\chi_{D_0}, k)$为零，当且仅当内积 $\langle F, f_{k,N,D,D_0}\rangle = 0$为零。这里，$f_{k,N,D,D_0}$ 是由 Kohnen 引入的一个显式模形式。在层为无平方因子的情形下，这可直接由 Kohnen[7] 得出；对于合成层的情形，则可利用 Sakata [17]的结果加以证明。接着，我们定义一个局部调和 Maass 形式，用以检测该内积是否为零。本质上，我们有：

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0} = \mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}} + f^*_{k,N,D,D_0} + \mathcal{P}_{k,N,D,D_0}$$

这里，$\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}}$ 和f^*_{k,N,D,D_0} 分别是模形式f_{k,N,D,D_0}的全纯艾希勒积分和非全纯艾希勒积分。当 $S_{2k}(N)$的维数等于一时，$\langle F, f_{k,N,D,D_0}\rangle = 0$ 成立，当且仅当$f_{k,N,D,D_0} = 0$成立。这意味着$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0} = \mathcal{P}_{k,N,D,D_0}$。由于$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$ 是模的，因此$\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}$也是模的。可以证明，这意味着对于所有模 $\Gamma_0(N)$与 0 等价的有理数，它都为零。当维数大于 1 时，我们可以利用海克算子得到类似的结论。

提纲。 本文结构如下：在预备部分，我们回顾模形式、二元二次型以及志村–新谷对应的一些基础知识。我们还说明如何将整数权模形式的 L函数的中心值与某个特定半整数权形式的系数联系起来。预备部分最后，我们将讨论

（非）全纯艾希勒积分的模性误差。第 2 节中，我们研究一个特定的局部调和 Maass 形式。接着在第3节研究局部多项式。最后，在第4节证明主定理。随后，我们在第5节计算一些例子。附录将用于证明函数 $\mathcal{F}_{1\text{-k},\ N,\ D,\ D_0}$ 的一些性质。

致谢
作者谨此感谢 Andreas Mono，感谢他进行了许多有益的讨论。

1 预备知识

本节旨在将新形式 F 的 L 函数中心值的乘积与内积 $\langle F,\ f_{k,\ N,\ D,\ D_0}\rangle$ 联系起来。这里，$f_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 是一个显式的模形式。此外，我们研究全纯与非全纯艾希勒积分的模性误差。

1.1 模形式、扭曲与 L 函数

在本小节中，我们回顾关于模形式的一些基本定义，并确定记号。

1.1.1 整数权的模形式

全文中，我们用 $S_{2k}(N)$ 表示群 $\Gamma_0(N)$ 上权为 $2k$ 、具有平凡特征的尖点形式空间。新形式和旧形式空间分别记为 $S_{2k}^{new}(N)$ 和 $S_{2k}^{old}(N)$。

下文中，我们用 $F=\sum a_n q^n \in S_{2k}(N)$ 表示一个尖点形式。我们回顾海克算子和 Atkin–Lehner 算子的作用，以及 F 的扭曲及其 L-函数的定义。

(i) 设 p 为素数。则海克算子 T_p 对 F 的作用如下：

$$F(z)|_{2k}T_p = p^{2k-1}F(pz) + p^{-1}\sum_{j \bmod p} F\left(\frac{z+j}{p}\right).$$

(ii) 设 $Q|N$ 满足 $(Q,\ N/Q)=1$。令

$$W_Q = \begin{pmatrix} Q\alpha & \beta \\ N\gamma & Q\delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

行列式为 Q。作用在 $S_{2k}(N)$ 上的阿特金-莱纳算子定义为 $|_{2k}W_Q$。此作用与矩阵的选择无关。在

特别地，若 $Q = N$，则相应的阿特金-莱纳对合也称为 Fricke 对合，我们可以选择：

$$W_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$

明确地，我们得到：

$$F|_{2k} W_N(z) = \det(W_N)^k (Nz)^{-2k} F(-1/(Nz)) = N^{-k} z^{-2k} F(-1/(Nz)).$$

(iii) 设 D为一个基本判别式，并用 χ_D表示与之相关联的狄利克雷特征，即 $\chi_D(n) := \left(\frac{D}{n}\right)$，其中 $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ 表示克罗内克符号。设 $F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ 为一个新形式。我们将 F 与 χ_D 的扭曲记为：

$$F \otimes \chi_D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_D(n) q^n.$$

(iv) 最后，我们回顾海克特征形式 $F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{2k}^{new}(N)$ 的 L-函数由下式给出

$$L(F, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

对满足 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 的 s 成立，并且该 L-函数可解析延拓至复平面。

最后，我们回顾彼得森内积的定义：

定义 1.1. 对于两个函数 F、$G \in S_k(N)$，彼得森内积由下式给出：

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]} \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}} F(z) \overline{G(z)} y^{k-2} dx dy.$$

这里我们在 $\Gamma_0(N) \backslash$上半平面 的一个基本域上积分。

1.1.2 半整数权模形式

现在我们定义半整数权模形式。为了更深入地定义和研究新形式与旧形式的空间，我们在此给出完整定义：

定义 1.2. 设 k 和 N 为正整数。设 χ 为模数为 $4N$ 的狄利克雷特征。

(i) 全纯函数 f： 上半平面 $\to$ 复数域 是权为 $k + \frac{1}{2}$ 的$\Gamma_0(4N)$ 模形式，–当且仅当：

– 对于任意 $z \in$ 上半平面 以及任意 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$，有：

$$f(z) = f|_{k+\frac{1}{2}}\gamma(z) = \chi(d)^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{2k+1}\epsilon_d^{1-2k}(cz+d)^{-k-\frac{1}{2}}f(\gamma \cdot z).$$

这里我们令 $\sqrt{z}$ 为平方根的一个分支，其辐角取值于 $[\pi/2, -\pi/2)$。由此得到一个在去掉负实轴后的复平面上全纯的函数。我们定义 $z^{k/2} := (\sqrt{z})^k$。此外，$\left(\frac{c}{d}\right)$ 表示勒让德符号，并且

$$\epsilon_d := \begin{cases} 1 & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ i & \text{if } d \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

– 函数 f 在 $\Gamma_0(4N)$的所有尖点处全纯。

我们将权为 $k+\frac{1}{2}$、层为 $4N$且特征为χ 的模形式空间记为 $M_{k+1/2}(\Gamma_0(4N)\ \chi)$。

(ii) 若 f 在所有尖点处都为零，则 f 是尖点形式，属于空间$S_{k+1/2}(\Gamma_0(4N)\ \chi)$。

(iii) 对于平凡特征，我们令 $M_{k+1/2}(4N) := M_{k+1/2}(\Gamma_0(4N)\ \chi_{triv})$，并令 $S_{k+1/2}(4N) := S_{k+1/2}(\Gamma_0(4N)\ \chi_{triv})$。

我们回顾一下，对于素数 p，海克算子 T_{p^2} 按以下方式作用于半整数权模形式$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$：

$$f(z)|_{k+1/2}T_{p^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{p^2n} + \chi^*(p)\left(\frac{n}{p}\right)p^{k-1}a_n + \chi^*(p^2)p^{2k-1}a_{n/p^2})q^n$$

这里 $\chi^*(n) := \left(\frac{(-1)^k}{n}\right)\chi(n)$，并且如上所述，若 $p^2 \nmid n$，则 $a_{n/p^2} = 0$。稍后我们将看到，如何利用海克算子下的特征函数，在半整数权与整数权模形式空间之间建立对应关系。

定义 1.3. 对于两个函数 $f, g \in S_{k+1/2}(\Gamma_0(4N)\ \chi)$，我们定义：

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{[\Gamma_0(4) : \Gamma_0(N)]}\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^{k-3/2}dxdy.$$

1.2 二元二次型

这里我们定义二元二次型，并研究其一些性质。这有助于我们更好地定义和理解定理 1 陈述中的局部多项式。此外，这也使我们能够在下一小节中定义整数权模形式与半整数权模形式之间的映射。

设 $Q=[a,b,c]$ 是一个二元二次型，即一个整数三元组 a， b， $c\in$Z。我们定义：

$$[a,b,c](X,Y)=aX^2+bXY+cY^2.$$

对于任意 $r\in$ Z，我们称 r 被 Q 表示，如果存在 $x,y\in$ Z 使得$Q(x,y)=r$。
我们如下定义判别式固定为D 的二元二次型集合：

$$\mathcal{Q}_D:=\{Q=[a,b,c]:b^2-4ac=D\}.$$

群 SL_2(Z) 作用于 $\mathcal{Q}_D$。令 $\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$。则

$$([a,b,c]\circ\gamma)(x,y)=[a,b,c](\gamma_{11}x+\gamma_{12}y,\gamma_{21}x+\gamma_{22}y)$$

这一作用与以下意义下的 Möbius 变换相容：

$$([a,b,c]\circ\gamma)(z,1)=(\gamma_{21}z+\gamma_{22})^2[a,b,c](\gamma\cdot z,1),$$

其中 $z\in$ H。对于任意正整数 N，我们定义：

$$\mathcal{Q}_{N,D}:=\{Q=[a,b,c]:N|a,\quad b^2-4ac=D\}.$$

SL_2(Z) 的作用不保此集合。然而，将作用限制在同余子群 $\Gamma_0(N)$ 上时，此集合保持不变。

此外，我们可以在 $\mathcal{Q}_{N,D}$ 上定义 Fricke 对合。

$$[a,b,c]|W_N(x,y):=\frac{1}{N}[a,b,c]\circ\begin{pmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{pmatrix}(x,y)=[cN,-b,a/N](x,y)$$

那么，Fricke 对合保持判别式，并且可以验证它在$\mathcal{Q}_{N,\ DD_0}$上定义了一个双射。

我们引入 Kohnen 在 [7] 中定义的扩展属特征：

定义 1.4. 设 $D\equiv 0,1 \bmod 4$，并设 $Q=[a,b,c]$ 是一个二元型，满足 $D|b^2-4ac$。

$$\chi_D(Q)=\begin{cases}0 & \text{if } (a,b,c,D)>1\\ \left(\frac{D}{r}\right) & \text{if } (a,b,c,D)=1,\quad Q \text{ represents } r,\quad (r,D)=1.\end{cases}$$

这个特征与所选取的、由 Q 表示的数无关。

注 1.5. *Gross*、*Kohnen* 和 *Zagier* 在 *[26]* 中引入了这个函数的名称，并研究了它在二元二次型集合 $\mathcal{Q}_{N,\ DD_0}$ 上的性质，另有一个条件： D 和 D_0 模 $4N$ 同余于平方数。他们证明，在这些条件下，广义属特征是定义在本原形式上的经典属特征的一种扩展，见 Q_{DD_0}。

Kohnen 给出了以下显式公式：

命题 1.6 (见 [7]中的命题 6)。 设 $[a,b,c]$ 是一个二元二次型，满足 $b^2-4ac=|D|m$ 和 $a>0$。对于每个素数 p，我们令 $p^*=\pm p^l\in\mathbb{Z}$，其中某个 $l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足： $|p^*|$ 是整除 D 的 p 的精确幂，且 D/p^* 是基本判别式。那么

$$\chi_D([a,b,c])=\prod_{p^\nu||a}\left(\frac{D/p^*}{p^\nu}\right)\left(\frac{p^*}{ac/p^\nu}\right).$$

注记 1.7。 *Kohnen* 将 1 视为基本判别式。

在 [26] Gross、Kohnen 和 Zagier 中，作者在附加条件下证明了以下更有效的公式:

命题 1.8 （中的命题 1 [26]）。 设 $[aN,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}$，使得 D 和 D_0 都是模 $4N$ 的平方。设 N_1,N_2 为两个正整数，D_1,D_2 为两个判别式，使得 $N=N_1N_2$，$D=D_1D_2$，并且 $(D_1,N_1a)=(D_2,N_2c)=1$。那么

$$\chi_D([aN,b,c])=\left(\frac{D_2}{N_1a}\right)\left(\frac{D_2}{N_2c}\right)$$

如果不存在这样的分解，那么 $\chi_D([aN,b,c])=0$。

作者还证明，在相同假设下，$[a,b,c]$ 在 Fricke 对合下保持不变。我们有以下更一般的结果:

引理 1.9. 设 D、D_0 是基本判别式，且 $(D_0,N)=(D,N)=1$。设 $Q=[a,b,c]$ 是一个二次型，使得 $N|a$ 且 $b^2-4ac=DD_0$。那么

$$\chi_{D_0}(Q|W_N)=\left(\frac{D_0}{N}\right)\chi_{D_0}(Q).$$

注记 1.10. 若 D_0 是模 N 的平方，则可得回 *[26]* 中的结果。

证明. 我们有 $[a,b,c]|W_N=[cN,-b,a/N]$。分两种情形考虑：$(D_0,a,b,c)>1$ 或 $(D_0,a,b,c)=1$。
由于 $(N,D_0)=1$，可知 $(D_0,a,b,c)=1\Leftrightarrow(D_0,a/N,-b,cN)=1$。由此可得:

$$\chi_{D_0}(Q)=0\Leftrightarrow(D_0,a,b,c)>1\Leftrightarrow(D_0,a/N,-b,cN)>1\Leftrightarrow\chi_{D_0}(Q|W_N)=0$$

现在假设 $(D_0,a,b,c)=(D_0,a/N,b,cN)=1$。设 $(D_0,r)=1$，使得对某些整数 x, y:

$$[a,b,c](x,y)=ax^2+bxy+cy^2=r.$$

Then

$$[Nc,-b,a/N](-y,Nx)=cNy^2-b(-y)(Nx)+a/N(Nx)^2=Nr$$

由于 $(D_0,\ N)=1$，结论得证。 □

我们以对与二元二次型 $Q=[a,b,c]$ 相关的测地线的一些评论结束本节。对于 $z\in$ 上半平面，我们定义：

$$Q_z=[a,b,c]_z:=\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(a|z|^2+b\mathrm{Re}(z)+c).$$

令 $S_Q:=\{z\in\mathbf{H}:Q_z=0\}$ 为与 Q相关的测地线。我们将其在 $\Gamma_0(N)\setminus\mathbf{H}$ 中的像记为 C_Q。令 Γ_Q为 Q在 $\Gamma_0(N)$ 中的稳定子，则

$$C_Q=\Gamma_Q\setminus S_Q.$$

令 D 为 Q 的判别式，并令 (t,r) 为佩尔方程 $t^2-|D|mu^2=4$ 的最小正解，则 $\Gamma_Q/\{\pm1\}$ 由以下元素生成：

$$\begin{pmatrix}\frac{t-bu}{2} & -cr\\ au & \frac{t+bu}{2}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

1.3 志村-新谷对应

志村提升和新谷提升将半整数权尖点形式映射为整数权尖点形式，反之亦然，并保持 Hecke 特征值不变。本节中，我们定义这两个算子，并通过核算子给出其刻画。我们遵循 Kohnen [7]。需要指出的是，本节所述结果并不需要假设层 N 无平方因子。

Shimura 提升将半整数权形式映射为整数权形式。

定义 1.11. 设 N 为一个整数。设 $f=\sum c_nq^n\in S_{k+1/2}(4N,\chi)$ 与 t 为无平方因子整数。令：

$$\chi_t(d)=\chi(d)\left(\frac{(-1)^kt}{d}\right)$$

为模 $4Nt$ 的特征。定义

$$S_t(f):=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi_t(d)d^{k-1}c_{t(n/d)^2}\right)q^n.$$

则 $S_t(f)\in M_{2k}(2N,\chi^2)$ 是 f 的 t^{th}***Shimura*** 提升。

Shimura 提升具有如下性质：它在下述意义下保持 Hecke 特征值：

命题 1.12. 设 $f\in S_{k+1/2}(4N,\chi)$，并设 p 为一个素数。则：

$$S_t(f|_{k+1/2}T_{p^2})=S_t(f)|_{2k}T_p.$$

将整数权形式映射到半整数权形式的函数是新谷算子。基本上，它由对下述积分的求和给出：

定义 1.13. 设 $F \in S_{2k}(N)$。设 D 为基本判别式，使得$(-1)^k D > 0$。设 $m \in \mathbb{N}$ 满足$(-1)^k m \equiv 0$，模 4 余 1。我们定义：

$$r_{k,N,F,D,(-1)^k m} := \sum_{Q \in \Gamma_0(N) \backslash Q_{N,|D|m}} \chi_D(Q) \int_{\Gamma_Q \backslash S_Q} F(z) Q(z,1)^{k-1} dz.$$

这个积分使我们能够定义新谷提升：

定义 1.14. 令 $F \in S_{2k}(N)$。令 D 为基本判别式，使得 $(-1)^k D > 0$。令 $m \in \mathbb{N}$ 满足$(-1)^k m \equiv 0,1 \bmod 4$。设

$$F|S_D^* := \sum_{\substack{m \geq 1, \\ (-1)^k m \equiv 0,1 \mod 4}} \left(\sum_{t|N} \mu(t) \left(\frac{D}{t} \right) t^{k-1} r_{k,Nt,F,D,(-1)^k m t^2} \right) e^{2\pi i m t}.$$

其中 $\mu(t)$ 是莫比乌斯函数。则 $F|S_D^*$属于空间 $S_{k+1/2}(N)$.[1]

我们描述这两个函数如何通过一个核算子相互关联。这个核本质上是下列函数的彼得森内积之和：

定义 1.15. 令 $N \geq 1$。令 D, D_0 满足 $D, D_0 \equiv 0, 1 \bmod 4$ 且$(-1)^k D, (-1)^k D_0 > 0$。令 $k \geq 2$

$$f_{k,N,D,D_0}(z) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0} Q(z,1)^{-k}$$

这是一个权为 $2k$ 、关于 $\Gamma_0(N)$的尖点形式。

注 1.16. 容易证明，f_{k,N,D,D_0} 的q展开具有实系数。事实上，由于 $\chi_{D_0}([a,-b,c]) = \chi_{D_0}([a,b,c])$，我们可以将 $[a,b,c] \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}$ 映射到 $[a,-b,c] \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}$，从而得到

$$\overline{f_{k,N,D,D_0}(-\overline{z})} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0}(Q)(az^2 - bz + c)^{-k} = f_{k,N,D,D_0}(z).$$

核算子由下式给出：

定义 1.17. 设 N 为奇数， $k \geq 1$ 为整数，且 D 为基本判别式，并满足 $(-1)^k D > 0$。对于 z、$\tau \in$ 上半平面，我们定义：

$$\Omega_{k,N,D}(z,\tau) := i_N c_{k,D} \times \sum_{\substack{m \geq 1, \\ (-1)^k m \equiv 0,1 \mod 4}} m^{k-1/2} \left(\sum_{t|N} \mu(t) \left(\frac{D}{t} \right) t^{k-1} f_{k,N/t,D,(-1)^k m}(tz) \right) e^{2\pi i m \tau}.$$

[1]正如我们稍后将看到的，直接由此定义可知，Shintani 提升将 F映射到 Kohnen子空间（见定义 1.20），即 $F|S_D^* \in S_{k+1/2}^K(N)$。

Here

$$c_{k,D}=\left((-1)^{[k/2]}|D|^{-k+1/2}\pi\binom{2k-2}{k-1}2^{-3k+2}\right)^{-1},\quad i_N=[SL_2(\mathbb{Z}):\Gamma_0(N)].$$

现在我们可以陈述以下结果:

定理 1.18 （定理 2，见 [7]）。 志村提升与新谷提升是尖点形式上的伴随算子。此外，我们有:

- 对所有 $F\in S_{2k}(4N)$，我们有:

$$F|S_D^*(\tau)=\langle F,\Omega_{k,N,D,}(\cdot,-\overline{\tau})\rangle.$$

- 对所有 $f\in S_{k+1/2}(4N)$，我们有:

$$f|S_D(z)=\langle f,\Omega_{k,N,D,}(-\overline{z},\cdot)\rangle.$$

由于这个核算子，我们可以将新形式 F 的第 D 个新谷提升的第 D_0 个系数表示为一个内积:

引理 1.19. 设 $F\in S_{2k}^{new}(N)$ 是一个新形式。那么:

$$c_{|D_0|}(F|S_D^*)=i_Nc_{k,D}\langle F,f_{k,N,D,D_0}\rangle.$$

证明。 根据定理 1.18，我们有:

$$\begin{aligned}F|S_D^*(\tau)&=\langle F,\Omega_{k,N,D}(\cdot,-\overline{\tau})\rangle\\&=\langle F,i_Nc_{k,D}\sum_{\substack{b\geq 1,\\(-1)^kb\equiv 0,1 \mod 4}}b^{k-1/2}\left(\sum_{t|N}\mu(t)\left(\frac{D}{t}\right)t^{k-1}f_{k,N/t,D,(-1)^kb}\right)e^{-2\pi ib\overline{\tau}}\rangle\\&=i_Nc_{k,D}\sum_{\substack{b\geq 1,\\(-1)^kb\equiv 0,1 \mod 4}}b^{k-1/2}e^{2\pi ib\tau}\sum_{t|N}\mu(t)\left(\frac{D}{t}\right)t^{k-1}\langle F,f_{k,N/t,D,(-1)^kb}\rangle.\end{aligned}$$

因此，第 $|D_0|$个系数为

$$\begin{aligned}c_{|D_0|}(f|S_D^*)&=i_Nc_{k,D}\sum_{t|N}\mu(t)\left(\frac{D}{t}\right)t^{k-1}\langle F,f_{k,N/t,D,(-1)^kD_0}\rangle\\&=i_Nc_{k,D}\langle f,f_{k,N,D,(-1)^kD_0}\rangle\end{aligned}\tag{3}$$

这里最后一个方程成立，是因为所有其他内积均为零；由于 F 是一个新形式，而 $f_{k、N/t、D、(-1)^km}$ 的层为 N/t。 □

1.4 L-函数的中心值与半整数权模形式的系数

下面我们定义一个半整数权模形式子空间，它与整数权新形式一一对应。然后我们解释半整数权形式的系数如何编码整数权形式的 L-函数的扭曲的中心值。

层为无平方因子的情形已由Kohnen（[6],[7]）描述。此处我们遵循Ueda [22] 与Sakata [17]：前者推广了整数权形式与半整数权形式之间的对应，后者推广了Kohnen关于扭曲 L-函数中心值的论述。

1.4.1 半整数权新形式

我们首先定义半整数权新形式。

定义1.20. 设 $\chi = \left(\frac{N_0}{\cdot}\right)$ 为模 N的特征，即 $N_0|N$，并令$\epsilon := \left(\frac{-1}{N_0}\right)$。然后我们将*Kohnen*空间定义为：

$$S^K_{k+1/2}(\Gamma_0(4N),\chi) := \Bigg\{ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \in S_{k+1/2}(\Gamma_0(4N),\chi) \ s.t. \\ c_n = 0 \ for \ \epsilon(-1)^k n \equiv 2,3 \mod 4 \Bigg\}$$

现在我们定义提升映射：

定义 1.21. 设 $p|N$ 是一个奇素因子。那么

$$U_p : S_{K+1/2}(\Gamma_0(4N),\chi) \to S_{k+1/2}\left(\Gamma_0(4N), \chi\left(\frac{p}{\cdot}\right)\right), \\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \mapsto f|U_p := \sum_{n=1}^{\infty} c_{pn} q^n.$$

此外，我们定义：

定义 1.22. 设 d 是一个正整数。那么我们定义映射：

$$V_d : M_{k+1/2}(\Gamma_0(4N),\chi) \to M_{k+1/2}\left(\Gamma_0(4Nd), \chi\left(\frac{d}{\cdot}\right)\right) \\ f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \mapsto f|V_d(z) = f(dz) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{dn}.$$

最后，我们定义扭曲算子 R_p：

定义 1.23. 设 p 是一个奇素数。

$$S_{k+1/2}(\Gamma_0(4N),\chi)\to S_{k+1/2}\left(\Gamma_0(4Np),\chi\left(\frac{p^2}{\cdot}\right)\right),$$
$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_nq^n\mapsto f|R_p:=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{n}{p}\right)q^n.$$

若 $p^2|N$，则 R_p 保持层不变。

旧形式空间定义如下:

定义 1.24. 设 N 为奇整数。设 $k\geq 2$。我们将层为 $4N$、权为 $k+1/2$ 的旧形式空间定义为:

$$S^{K,old}_{k+1/2}(4N):=$$
$$\sum_{\substack{0<d_1|N\\ d_1\neq N}}\sum_{0<d_2|(N/d_1)}\sum_{\substack{\xi:(\mathbb{Z}/4d_1\mathbb{Z})^*\to\{\pm1\}\\ \xi\left(\frac{d_2}{\cdot}\right)=\mathbb{1}}}S^K_{k+1/2}(\Gamma_0(4d_1),\xi)|V_{d_2}$$
$$+\sum_{\substack{0<d_1|N\\ d_1\neq N}}\sum_{0<d_2|(N/d_1)^2}\sum_{\substack{\xi:(\mathbb{Z}/4d_1\mathbb{Z})^*\to\{\pm1\}\\ \xi\left(\frac{d_2}{\cdot}\right)=\mathbb{1}}}\sum_{\substack{0\leq e_l\leq 2\\ l\in II(N)}}\left(S^K_{k+1/2}(\Gamma_0(4d_1),\xi)|U_{d_2}\right)|\prod_{l\in II(N)}R_l^{e_l}$$

此处 $II(N):=\{p|N:\mathbf{ord}_p(N)\geq 2\}$。

层为 $4N$、权为 $k+1/2$ 的新形式空间定义为 $S^{K}{}^{old}_{,k+1/2}(4N)$ 的正交补，并记为 $S^{K}{}^{new}_{,k+1/2}(4N)$。

注记 1.25. *(i)* 若 N 无平方因子，则我们恢复 *Kohnen* 在 *[6]*中的定义。

(ii) 设 p 是一个奇素数。若 $m\geq 3$，则旧形式空间由下式给出:

$$S^{K,old}_{k+1/2}(4\cdot p^m)=S^K_{k+1/2}\left(4\cdot p^{m-1}\right)+S^K_{k+1/2}\left(\Gamma_0(4\cdot p^{m-1}),\left(\frac{p}{\cdot}\right)\right)|V_p$$

若 $m=2$，则

$$S^{K,old}_{k+1/2}(4\cdot p^2)=S^K_{k+1/2}\left(4\cdot p\right)+S^K_{k+1/2}\left(\Gamma_0(4\cdot p),\left(\frac{p}{\cdot}\right)\right)|V_p$$
$$+S^K_{k+1/2}\left(4\cdot p\right)|R_p+S^K_{k+1/2}\left(4\cdot p\right)|R_{p^2}$$

1.4.2 新形式的特征空间

为陈述这一对应关系，我们需要定义若干特征空间，包括整数权新形式的特征空间以及半整数权形式的特征空间。

为此，我们将区分以奇数次幂或偶数次幂整除层的素数。我们定义以下记号:

- $I(N):=\{p|N:\mathrm{ord}_p(N)=1\}$

- $II(N) := \{p|N : \mathrm{ord}_p(N) \geq 2\}$
- $II(N)_{even} := \{p|N : \mathrm{ord}_p(N) \geq 2 \text{ and } 2 \mid \mathrm{ord}_p(N)\}$
- $II(N)_{odd} := \{p|N : \mathrm{ord}_p(N) \geq 2 \text{ and } 2 \nmid \mathrm{ord}_p(N)\}$
- $II(N)_2 := \{p|N : \mathrm{ord}_p(N) = 2\}$
- $II(N)_2^* := \left\{p|N : \mathrm{ord}_p(N) = 2 \text{ and } \left(\frac{-1}{p}\right) = 1\right\}$

极新形式 在定义特征空间之前，我们先引入整数权新形式的一个子范畴。这些形式无法通过对较低层的模形式施加二次特征 $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ 的扭曲来构造:

定义 1.26。令 N' 为 N 和 p^2 的最小公倍数。那么

$$R_p : S_{2k}(N) \to S_{2k}(N'),$$
$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{n}{p}\right) q^n.$$

特别地，若 $p^2|N$，则此映射保持层。

此映射以如下方式扭曲特征函数的特征值：**引理 1.27** （ [2]，中的命题 3.2 和 3.4， [21] 中的命题 A.3）。令$F \in S_{2k}(N)$。令 p，l 为两个不同的素数。

(i) 若 $(l, N) = 1$，则

$$F|R_p|_{2k}T_l = \left(\frac{l}{p}\right) F|_{2k}T_l|R_p.$$

(ii) 若 $l^m||N$，则

$$F|R_p|W_{l^m} = \left(\frac{l^m}{p}\right) F|W_{l^m}|R_p.$$

(iii) 若 $p||N$，则:

$$F|R_p|W_{p^2} = \left(\frac{-1}{p}\right) F|R_p.$$

极新形式定义如下:

定义 1.28. 设 $F = \sum a_n q^n \in S_{2k}(N)$ 是一个新形式。 F是一个极新形式，当且仅当它属于层严格小于 N 的新形式在扭曲算子 R_p（其中 $p^2||N$）作用下提升所得空间的正交补，即属于以下正交补:

$$\sum_{0<d<N} \sum_{p^2||N} S_{2k}^{new}(d)|R_p.$$

我们将极新形式空间记为 $S_{2k}^*(N)$。

注 1.29. *(i)* 若 $p^3|N$，则对任意满足 $d<N$ 的 $F\in S_{2k}^{new}(d)$，形式$F|R_p$属于 $S_{2k}^{new}(N')$，其中 N'是 d与 p^2的最小公倍数。因此特别地 $N'<N$，从而 $F|R_p$不是层N的新形式。故 $\sum_{0<d<N}\sum_{p^2||N}S_{2k}^{new}(d)|R_p$ 在$S_{2k}^{new}(N)$ 中的正交补等于 $\sum_{0<d<N}\sum_{p^2|N}S_{2k}^{new}(d)|R$的正交补 $_p$.

(ii) 独立于 *Ueda*，其他数学家研究了非常新形式的空间。*Mao* 在 *[13]*（引理 *2.3*）中证明，F 是非常新形式，当且仅当对所有满足 $p^2|N$ 的素数 p，$F|R_p$都是新形式。因此我们有：

$$S_{2k}^{*}(N):=\{F\in S_{2k}^{new}(N):F|R_p\text{也是 }S_{2k}^{new}(N)\quad\forall p\text{中的新形式，且 }p^2|N\}.$$

注意，这一等价定义具有计算上的优势：检验给定新形式的扭曲是否也是新形式，要比检验它是否位于某些较低层模形式子空间的正交补中更容易。

整数权形式在 Atkin–Lehner 对合下的特征空间。我们将整数权新形式的空间按如下方式划分为子空间：设 F是层 N的新形式。设 $S=II(N)$或 $S=I(N)\cup II(N)$。则

$$\tau:S\to\{\pm1\}\tag{4}$$

描述 F 在对应于集合 S 的Atkin-Lehner算子下的特征值，如果

$$F|W_{p^{\mathrm{ord}_p(N)}}=\tau(p)F,\quad\forall p\in S.$$

我们用以下记号表示在Atkin-Lehner对合下具有固定特征值的子空间：

$$S_{2k}^{new,\tau}(N):=\{F\in S_{2k}^{new}(N):F|W_{p^{\mathrm{ord}_p(N)}}=\tau(p)F,\quad\forall p\in S\},$$
$$S_{2k}^{*,\tau}(N):=\{F\in S_{2k}^{*}(N):F|W_{p^{\mathrm{ord}_p(N)}}=\tau(p)F,\quad\forall p\in S\}.$$

半整数权形式在扭曲算子下的特征空间R_p 我们也利用扭曲算子 R_p定义半整数权形式的子空间。只需考虑其平方整除该层的那些素数，即集合 $II(N):=\{p:p^2|N\}$。设

$$\kappa:II(N)\to\{\pm1\}.\tag{5}$$

我们令：

$$S_{k+1/2}^{K,new,\kappa}(4N):=\left\{g\in S_{k+1/2}^{K,new}(4N):g|R_p=\kappa(p)g,\quad\forall p\in II(N)\right\}.$$

由以下引理可知，这些子空间彼此正交：

引理 1.30 （ [20]中的推论 1.10）。设 f、 $g \in S_{k+1/2}$（$4N$） 是两个半整数权尖点形式。设 χ 是奇数导数 M 的非平凡原始特征，且满足 $M^2|N$ 并使得 $\chi^2 = 1$。则

$$\langle f \otimes \chi, g \rangle = \langle f, g \otimes \chi \rangle.$$

我们通过证明如下事实来结束本小节：给定一个判别式 D，所有具有非零 $|D|$ 次系数的半整数权形式在扭曲算子下具有相同的特征值系。

引理 1.31。 设 N 为奇整数且 $k \geq 1$。令 κ： II（N） $\to \{\pm 1\}$，并令 $f_\kappa = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \in S^{K,\ k+1/2}_{new\ \kappa}$，（$4N$）。设 D 为基本判别式。若存在素数 $p_0 \in II$（N） 使得

$$\kappa(p_0) \neq \left(\frac{|D|}{p_0}\right),$$

then

$$c_{|D|} = 0.$$

证明。 我们知道， f 对所有 $p \in II$（N）均满足 $f_\kappa | R_p = \kappa(p) f_\kappa$ 。 对于 p_0，这意味着:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{p_0}\right) c_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(p_0) c_n q^n.$$

由于 $\kappa(p_0) \neq \left(\frac{|D|}{p_0}\right)$，这意味着 $c_{|D|} = 0$。

□

1.4.3 对应

现在我们可以陈述半整数权尖点形式空间与整数权尖点形式空间之间的同构。

定理 1.32 (定理 *1* 见 [17])。 设 $k > 1$。令 $N_1 = \prod_{p \in I(N)} p$ 为 N的无平方因子部分。令 κ： $II(N) \to \{\pm 1\}$ 为一个映射。我们定义一个映射τ_κ： $II(N) \to \{\pm 1\}$ 如下:

$$\tau_\kappa = \begin{cases} 1 & if\ p \in II(N)_{even}, \\ \kappa(p) \left(\frac{-1}{p}\right)^k & if\ p \in II(N)_{odd}. \end{cases}$$

令 $I, J, K \subset II(N)_2$为一个划分，其中 $I \cup J \neq \emptyset$且 $I, J \subset II(N)_2^* = \{p \in I(N)_2 | \left(\frac{-1}{p}\right) = -1\}$。对于一个固定的划分，令 $\tilde{\tau}_\kappa$遍历满足以下条件的映射$II(N) \setminus I \to \{\pm 1\}$:

$$\tilde{\tau}_\kappa(p) = \begin{cases} 1 & if\ p \in II(N)_{even} \setminus (I + J), \\ \kappa(p) \left(\frac{-1}{p}\right)^k \prod_{q \in I+J} \left(\frac{p}{q}\right) & if\ p \in II(N)_{odd}. \end{cases}$$

那么我们有如下作为 *Hecke*代数上的模的同构:

$$S^{K,\ k+1/2}{}^{new\ \kappa}_{,}(4N) \cong S^{*}_{,\ 2k}{}^{\tau_\kappa}(N) \bigoplus$$

$$\bigoplus_{\substack{II(N)_2=I\cup J\cup K \\ I\cup J\neq\emptyset,\quad I,\ J\subset II(N)_2^*}} \bigoplus_{\tilde{\tau}_\kappa} S_{2k}^{*,\tilde{\tau}_\kappa}\left(N_1\prod_{l\in J} l \prod_{II(N)-(I\cup J)} p^{ord_p(N)}\right) | \prod_{p\in I\cup J} R_p.$$

注 1.33. 请注意，*Sakata* 在陈述该定理时有两处笔误。首先，他断言 $\tilde{\tau}$ 在 $II(N)$ 上有定义，但此映射在 I 上并无定义。他还规定该映射在整个集合 $II(N)$ 上的条件，却没有排除集合 I 和 J。

我们通过研究右侧的空间，说明如何简化这一陈述。如果一个整权形式 F 是由一个低权形式扭曲得到的，那么它们在 Atkin-Lehner 对合下各自的特征值满足以下关系:

引理 1.34. 设 N 为正整数。设 N的无平方因子部分为 N_1，且 I和 $J\subset II(N)^*$为两个不交子集。设 $\tilde{\tau}$: $I(N)\cup II(N)\setminus I\to\{\pm 1\}$为一个映射，并假设

$$F\in S_{2k}^{*,\tilde{\tau}}\left(N_1\prod_{p\in J} p \prod_{p\in II(N)-(I\cup J)} p^{ord_p(N)}\right) | \prod_{p\in I\cup J} R_p \subset S_{2k}(N).$$

那么， $\tau(p)$: $I(N)\cup II(N)\to\{\pm 1\}$，即 F在 *Atkin-Lehner* 对合下的特征值系，满足:

$$\tau(p)=\begin{cases}\tilde{\tau}(p) & if\ p\in II(N)_{even}\setminus(I\cup J),\\ \tilde{\tau}(p)\prod_{q\in I\cup J}\left(\frac{p}{q}\right) & if\ p\in I(N)+II(N)_{odd},\\ 1 & if\ p\in I\cup J.\end{cases}$$

证明. 对所有满足 $p^m||N$的 $p\in I(N)\cup II(N)\setminus(I\cup J)$，利用引理 1.27 (ii)，我们得到:

$$F|\prod_{q\in I\cup J} R_q|W_{p^m}=\prod_{q\in I\cup J}\left(\frac{p^m}{q}\right)F|W_{p^m}|\prod_{q\in I\cup J} R_q=\tilde{\tau}(p)\prod_{q\in I\cup J}\left(\frac{p^m}{q}\right)F|\prod_{q\in I\cup J} R_q.$$

因此

$$\tau(p)=\begin{cases}\tilde{\tau}(p) & \text{if } m \text{ is even},\\ \tilde{\tau}(p)\prod_{q\in I\cup J}\left(\frac{p}{q}\right) & \text{if } m \text{ is odd}.\end{cases}$$

设 $p\in I\cup J\subset\left\{p|N:\ p^2||N, \underline{\left(\frac{-1}{p}\right)=1}\right\}$。则由引理 1.27 (ii) 和 (iii)

我们有:

$$\begin{aligned} F|\prod_{q\in I\cup J} R_q|W_{p^2} &= F|R_p|\prod_{q\in I\cup J\setminus\{p\}} R_q|W_{p^2} \\ &= \prod_{q\in I\cup J\setminus\{p\}}\left(\frac{p^2}{q}\right)F|R_p|W_{p^2}|\prod_{q\in I\cup J\setminus\{p\}} R_q \\ &= \prod_{q\in I\cup J\setminus\{p\}}\left(\frac{p^2}{q}\right)\left(\frac{-1}{p}\right)F|R_p|\prod_{q\in I\cup J\setminus\{p\}} R_q \end{aligned}$$

由于 $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$，我们有:

$$\tau(p)=1$$

□

引理 1.35. 采用定理 *1.32* 中相同的记号，令:

$$V_1 := S_{2k}^{*,\tau_\kappa}(N)\bigoplus \bigoplus_{\substack{II(N)_2=I\cup J\cup K\\ I\cup J\neq\emptyset,\quad I,J\subset II(N)_2^*}}\ \bigoplus_{\tilde{\tau}_\kappa} S_{2k}^{*,\tilde{\tau}_\kappa}\left(N_1\prod_{l\in J} l\prod_{II(N)-(I\cup J)} p^{ord_p(N)}\right)|\prod_{p\in I\cup J} R_p.$$

令 $V_2 := S^{new}_{\cdot,2k}{}^{\tau}(N)$ 其中

$$\tau(p)=\begin{cases}1, & p\in II(N)_{even},\\ \kappa(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^k & p\in II(N)_{odd}.\end{cases}$$

于是 $V_1=V_2$。

证明. 由引理 1.34 可知 $V_1\subset V_2$。现在假设存在一个形式 $F\in V_2\setminus V_1$。特别地，由于极新形式包含于 V_1，我们知道 F 的形式为 $F_0|R_p$，其中某个 $F_0\in S_{2k}(N_0)$ 满足 $N_0<N$ 且 $p^2||N$（另见定义 1.28）。假设 $p^2||N$ 满足 $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$。由引理 1.27，我们有:

$$F_0|R_p|W_{p^2}=\left(\frac{-1}{p}\right)F_0|R_p=-F.$$

因此 $F\notin V_2$。这就证明了该断言。 □

因此，我们得到定理 1.32 的以下推论:

推论 1.36。设 $k>1$。设 N 为整数。设 $\kappa:\ II\ (N)\ \to\{\pm1\}$ 为一个映射。设

$$\tau(p)=\begin{cases}1, & p\in II(N)_{even},\\ \kappa(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^k & p\in II(N)_{odd}.\end{cases}$$

那么，我们得到如下作为 *Hecke*代数上的模的同构：

$$S_{k+1/2}^{K,new,\kappa}(4N)\cong S_{2k}^{new,\tau}(N).$$

注 1.37. *(i)* 若 N 无平方因子，则这是 *[6]*中的定理 *2*。

(ii) 设 $k>1$ 和 p为奇素数。对于 $m>1$，我们有如下作为海克模的同构。

$$S_{k+1/2}^{K,new,\pm1}(4p^m)\simeq\begin{cases}S_{2k}^{new,+1}(p^m), & if\ m\ is\ even,\\ S_{2k}^{new,\pm\left(\frac{-1}{p}\right)^k}(p^m), & if\ m\ is\ odd.\end{cases}$$

1.4.4 L函数的中心值。

最后，我们可以陈述 Sakata [17], 的结果，该结果将 Kohnen 关于扭曲 L 函数及半整数权形式系数的结果推广到了一般层。以下性质将发挥重要作用：

定义 1.38. 设 $I,J\subset II(N)^*$为两个不交子集。设 $\kappa:\ II(N)\ \to\{\pm1\}$ 和 $\tilde{\tau}:\ II(N)\backslash I\to\{\pm1\}$ 为两个映射。我们称 τ 满足条件$(\tilde{\tau}_{odd})$，如果

$$\kappa(p)=\tilde{\tau}(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^k\prod_{q\in I\cup J}\left(\frac{p}{q}\right),\quad\forall p\in II(N)_{odd},\quad(\tilde{\tau}_{odd}).$$

现在我们陈述 Sakata 定理。由于他在论文中没有区分模形式的 Atkin-Lehner 特征值系与其扭曲，因此他究竟具体作了何种断言，多少有些含糊。借助推论 1.41，我们将他的结果表述得更加简洁明了。

定理 1.39 (定理 3，见 [17])。设 $k>1$。设 N 为一个无平方因子部分为 N_1 的整数，且 I、J是 $II(N)_2^*$中的两个不交子集。设

$$F\in S_{2k}^{*,\tilde{\tau}}\left(N_1\prod_{p\in J}p\prod_{p\in II(N)-(I\cup J)}p^{ord_p(N)}\right)|\prod_{p\in I\cup J}R_p\subset S_{2k}(N).$$

设 D 为一个基本判别式，满足$(-1)^kD>0$ 且$(D,N)=1$。记 τ 为 F 在*Atkin–Lehner*算子下的特征值系。假设 τ 满足：

$$\tau(p)=\begin{cases}\left(\frac{D}{p}\right) & if\ p\in I(N)+II(N)_{odd},\\ 1 & if\ p\in II(N)_{even}-(I+J).\end{cases}$$

则我们有：

$$\sum_{\substack{\kappa\in Map(II(N),\{\pm1\})\\ \kappa\ with\ (\tilde{\tau}_{odd})}} \frac{|c_{f_\kappa(|D|)}|^2}{\langle f_\kappa, f_\kappa\rangle} = 2^{\nu(N)}\frac{(k-1)!}{\pi^k}|D|^{k-1/2}\frac{L(F\otimes\chi_D,k)}{\langle F,F\rangle}.$$

这里的映射 f_κ 是 $S^{K\text{中}k+1/2}{}^{new\ \kappa}$ 的$(4N)$ 唯一的（差一个标量乘法）半整数权模形式，它对应于定理 *1.32* 中的 F 。此外， $\nu(N)$是 N的不同素因子的个数。

注意，在上一小节中（特别是在定理 1.32 和推论 1.36 中），我们只考虑了整权形式在对应于 II(*N*)中素数的 Atkin–Lehner 对合下的特征值。这里我们还固定了对应于 I(*N*)中素数的 Atkin-Lehner 对合的特征值。

注记 1.40。 *(i)* 特别地，如果 $J = I = \emptyset$，那么 F 是一个非常新形式。

(ii) 如前所述，*Sakata* 不区分 *Atkin-Lehner* 特征值系统 τ （对应于 F）与 $\tilde{\tau}$（对应于层较低、且其扭曲等于 F的形式）。这两个映射一般并不相同：由引理 *1.34* 可知，对于 $p \in I(N) \cup II(N)_{odd}$， $\tau(p) = \tilde{\tau}(p)\prod_{q\in I\cup J}\left(\frac{p}{q}\right)$，因此一般而言 $\tau(p) \neq \tilde{\tau}(p)$。这意味着 κ满足$_-(\tilde{\tau})_{odd}$还是（τ）$_{odd}$确实有所不同（见 *[17]*第 *76* 页）。

(iii) 根据引理 *1.34*，我们可以将关于 τ（ F 的特征值）的条件替换为以下关于 $\tilde{\tau}$ 的条件：

$$\tilde{\tau}(p) = \begin{cases} \left(\frac{D}{p}\right)\prod_{q\in I+J}\left(\frac{p}{q}\right) & if\ p \in I(N) + II(N)_{odd} \\ 1 & if\ p \in II(N)_{even}\setminus(I+J) \end{cases}$$

我们可以将定理 1.39 的表述简化如下：

推论 1.41。 设 $k > 1$。设 $F \in S_{2k}^{new}(N)$ 是一个新形式。设 D 是一个基本判别式，满足 $(-1)^k D > 0$ 且 $(D, N) = 1$。记 τ 为 F 在 *Atkin–Lehner* 算子下的特征值系。假设 τ 满足：

$$\tau(p) = \begin{cases} \left(\frac{D}{p}\right) & if\ p \in I(N) + II(N)_{odd}, \\ 1 & if\ p \in II(N)_{even}. \end{cases}$$

设 κ_0： II（N） $\to \{\pm1\}$ 定义如下：

$$\kappa_0(p) := \left(\frac{|D|}{p}\right) \quad \forall p \in II(N).$$

于是我们有：

$$\frac{|c_{f_{\kappa_0}}(|D|)|^2}{\langle f_{\kappa_0}, f_{\kappa_0}\rangle} = 2^{\nu(N)}\frac{(k-1)!}{\pi^k}|D|^{k-1/2}\frac{L(F\otimes\chi_D,k)}{\langle F,F\rangle}.$$

这里，映射 f_{κ_0} 是 $S^{K,new\ \kappa_0}_{,k+1/2}{}_{,(4N)}$ 中唯一的半整数权模形式（相差一个非零标量），它如定理 *1.32* 中所述与 F 对应。此外，$\nu(N)$ 是 N 的不同素因子个数。

证明。由引理 1.35 可知，对于任意满足 $\tau(p) = 1$ 的 $F \in S^{new}_{2k}(N)$（对所有 $p \in II(N)_{even}$），存在 $I, J \subset II(N)^*$，使得

$$F \in S^{*,\tilde{\tau}}_{2k}\left(N_1\prod_{p\in J}p\prod_{p\in II(N)-(I\cup J)}p^{ord_p(N)}\right)\ |\ \prod_{p\in I\cup J}R_p \subset S_{2k}(N).$$

现在我们说明，为什么 Sakata 原始表述中左边的求和会化简为单个系数。我们首先考察映射 $\kappa : II(N) \to \{\pm 1\}$ 满足 $(\tilde{\tau})_{odd}$ 的含义（见定义 1.38）。对于所有 $p \in II(N)_{odd}$，有：

$$\begin{aligned}\kappa(p) &= \tilde{\tau}(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^k\prod_{q\in I+J}\left(\frac{p}{q}\right) = \tau(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^k\left(\prod_{q\in I+J}\left(\frac{p}{q}\right)\right)^2\\ &= \tau(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^k = \left(\frac{|D|}{p}\right)\end{aligned}$$

这里我们利用引理 1.34 将 $\tilde{\tau}$ 替换为 $\tau(p)\prod_{q\in I+J}\left(\frac{p}{q}\right)$，并且根据假设有 $(-1)^k D > 0$。这尤其说明 κ_0 满足 $(\tilde{\tau})_{odd}$。由引理 1.31 可知，对于 $\kappa \neq \kappa_0$，系数 $c_{f_\kappa}(|D|)$ 为零。这就证明了该断言。

□

注记 1.42. 请注意，*Kohnen* 在 *[8]* 和 *Mao* 在 *[13]* 中证明了与推论 *1.41* 类似的论述。我们选择介绍 *Ueda* 和 *Sakata* 的方法，因为他们对层不为无平方因子时半整数权新形式的描述颇具启发性，并对其底层结构提供了最详尽的理解。

在主定理的证明中，我们需要用到以下事实：在中心值处取值的新形式 F 的两个扭曲的 L- 函数之积，可以表示为 F 与定义 1.15 中的尖点 $f_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 的内积。更准确地说，我们有以下结论：

定理 1.43。设 $k > 1$ 和 N 为奇整数。设 D, D_0 为两个基本判别式，使得 $(-1)^k D, (-1)^k D_0 > 0$ 并且 $(D, N) = (D_0, N) = 1$。我们假设对所有素数 $p \in II(N)$，都有 $\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D_0}{p}\right)$。令

$F \in S_{2k}^{new}(N)$ 为一个新形式，并假设其在 ***Atkin–Lehner*** 对合下的特征值系满足：

$$\tau(p) = \begin{cases} \left(\frac{D}{p}\right), & p \in I(N) + II(N)_{odd}, \\ 1, & p \in II(N)_{even}. \end{cases}$$

于是我们有：

$$\begin{aligned} &|i_N c_{k,D}\langle F, f_{k,N,D,(-1)^k D_0}\rangle|^2 \\ &\qquad = \left(\frac{2^{\nu(N)}(k-1)!}{\pi^k}\right)^2 |DD_0|^{k-1/2} L(F\otimes\chi_D, k) L(F\otimes\chi_{D_0}, k) \end{aligned}$$

这里， ν（N） 表示 N 的不同素因子的个数。特别地，我们有：

$$L(F\otimes\chi_D, k)L(F\otimes\chi_{D_0}, k) = 0 \Longleftrightarrow \langle F, f_{k,N,D,(-1)^k D_0}\rangle = 0.$$

证明。 我们将用两种不同的方式表示 F 的第 D_0个系数的第 D个新谷提升。根据引理 1.19，我们知道， F 的第 D个新谷提升的第 $|D_0|$个系数由下式给出

$$c_{|D_0|}(F|S_D^*) = i_N c_{k,D}\langle F, f_{k,N,D,(-1)^k D_0}\rangle \tag{6}$$

现在我们将 $c_{|D_0|}(F|S_D^*)$ 表示为半整数权模形式的系数。根据引理 1.35，我们知道存在 I， $J \subset II(N)^*$，使得

$$F \in S_{2k}^{*,\tilde{\tau}}\left(N_1 \prod_{p\in J} p \prod_{p\in II(N)-(I\cup J)} p^{ord_p(N)}\right) \mid \prod_{p\in I\cup J} R_p \subset S_{2k}(N).$$

记 $\{\kappa\colon II(N) \to \{\pm 1\}\}$ 为满足 $(\tilde{\tau})_{odd}$ 的所有函数组成的集合。特别地，我们令 $\kappa_0\colon II(N) \to \{\pm 1\}$ 为：

$$\kappa_0(p) := \left(\frac{|D|}{p}\right), \quad \forall p \in II(N)_{odd}.$$

如定理 1 的证明所示，41 κ_0 满足 $(\tilde{\tau})_{odd}$。我们可以将具有与 F 相同的 Hecke 特征值系的半整数权形式空间分解为若干子空间，这些子空间对应于它们在扭曲算子R_p作用下的行为：

$$S_{k+1/2}^{K,new}(N;F) = \bigoplus_{\substack{\kappa: II(N)\to\{\pm1\} \\ \kappa \text{ satisfies } (\tilde{\tau})_{odd}}} S_{k+1/2}^{K,\kappa}(N) \cap S_{k+1/2}^{K}(N;F)$$

令 $f_\kappa = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f_\kappa) q^n$ 为 $S^{K,\kappa}_{k+1/2}(N)$ 中唯一的形式（相差一个非零标量）。根据引理 1.30，对于 $\kappa_1 \neq \kappa_2$，有 $\langle f_{\kappa_1}, f_{\kappa_2}\rangle = 0$。因此，它们构成一个正交基。Shimura 提升满足：

$$f_\kappa | S_D = c_{|D|}(f_\kappa) F.$$

因此我们可以写成：

$$F|S_D^* = \sum_{\substack{\kappa: II(N)\to\{\pm 1\}\\ \kappa \text{ satisfies } (\tilde{\tau})_{odd}}} \frac{\langle F|S_D^*, f_\kappa\rangle}{\langle f_\kappa, f_\kappa\rangle} f_\kappa = \sum_{\substack{\kappa: II(N)\to\{\pm 1\}\\ \kappa \text{ satisfies } (\tilde{\tau})_{odd}}} \frac{\langle F, f_\kappa|S_D\rangle}{\langle f_\kappa, f_\kappa\rangle} f_\kappa$$
$$= \sum_{\substack{\kappa: II(N)\to\{\pm 1\}\\ \kappa \text{ satisfies } (\tilde{\tau})_{odd}}} \frac{\langle F, F\rangle}{\langle f_\kappa, f_\kappa\rangle} \overline{c_{|D|}(f_\kappa)} f_\kappa = \frac{\langle F, F\rangle}{\langle f_{\kappa_0}, f_{\kappa_0}\rangle} \overline{c_{|D|}(f_{\kappa_0})} f_{\kappa_0}$$

这里在最后一行用到了引理 1.31。因此

$$c_{|D_0|}(F|S_D^*) = \overline{c_{|D|}(f_{\kappa_0})} \frac{\langle F, F\rangle}{\langle f_{\kappa_0}, f_{\kappa_0}\rangle} c_{|D_0|}(f_{\kappa_0}) \tag{7}$$

结合方程 (6) 和 (7)，得到

$$\overline{c_{|D|}(f_{\kappa_0})} c_{|D_0|}(f_{\kappa_0}) \frac{\langle F, F\rangle}{\langle f_{\kappa_0}, f_{\kappa_0}\rangle} = i_N c_{k,D} \langle F, f_{k,N,D,(-1)^k D_0}\rangle$$

由定理 1.41 可知

$$\frac{|c_{|D|}(f_{\kappa_0}) c_{|D_0|}(f_{\kappa_0})|^2}{\langle f_{\kappa_0}, f_{\kappa_0}\rangle^2}$$
$$= \left(\frac{2^{\nu(N)}(k-1)!}{\pi^k}\right)^2 |DD_0|^{k-1/2} \frac{L(F\otimes\chi_D, k) L(F\otimes\chi_{D_0}, k)}{\langle F, F\rangle^2}$$

因此，最终得到：

$$|i_N c_{k,D} \langle F, f_{k,N,D,(-1)^k D_0}\rangle|^2$$
$$= \left(\frac{2^{\nu(N)}(k-1)!}{\pi^k}\right)^2 |DD_0|^{k-1/2} L(F\otimes\chi_D, k) L(F\otimes\chi_{D_0}, k)$$

这就证明了该结论。 □

1.5 全纯与非全纯艾希勒积分的模性误差

在第 2 节中，我们将构造一个局部调和 Maass 形式，它基本上分为三部分：一个局部多项式，以及函数$f_{k、N、D、D_0}$的全纯和非全纯艾希勒积分。本节中，我们定义艾希勒积分，并计算它们在矩阵$\gamma \in \Gamma_0(N)$作用下的模性误差。然后我们说明，艾希勒–志村理论如何推出：对于任意非零尖点形式，总存在一个矩阵 $\gamma \in \Gamma_0(N)$，使得误差项非零。

$_\infty$对于尖点形式 $F = \sum a_n q^n \in S_{2k}(N)$，我们将全纯艾希勒$_{n=1}$积分定义为：

$$\mathcal{E}_F(z) := -\frac{(2\pi i)^{2k-1}}{(2k-2)!} \int_z^{i\infty} F(w)(z-w)^{2k-2} dw = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{1-2k} q^n. \tag{8}$$

此外，非全纯Eichler积分定义为：

$$F^* = (2i)^{1-2k} \int_{-\overline{z}}^{i\infty} \overline{F(-\overline{w})}(w+z)^{2k-2} dw. \tag{9}$$

在模性算子作用下，全纯和非全纯艾希勒积分具有如下误差项：

引理 1.44. 设 $F \in S_{2k}(N)$ 是一个尖点形式。设 $\gamma \in \Gamma_0(N)$。

(i) $\mathcal{E}_F$ 的模性误差为：

$$\mathcal{E}_F|_{2-2k}(\gamma - 1)(z) = -\frac{(2\pi i)^{2k-1}}{(2k-2)!} \int_{i\infty}^{\gamma^{-1}(i\infty)} F(w)(z-w)^{2k-2} dw$$

(ii) F^* 的模性误差为：

$$F^*|_{2-2k}(\gamma - 1)(z) = (2i)^{1-2k} \int_{i\infty}^{-\gamma^{-1}(-i\infty)} \overline{F(-\overline{w})}(w+z)^{2k-2} dw$$

证明. 证明可由直接计算得到：分别将 w 替换为 $\gamma^{-1}(w)$ 和 $-(\gamma^{-1}(-w))$，并利用 F 是权为 $2k$ 的模形式。

□

证明定理 1 时，我们需要用到：若 F 是一个非零函数，则存在一个矩阵 $\gamma \in \Gamma_0(N)$，使得

$$\begin{aligned} z^{2k-2} N^{k-1} \Bigg(& \int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)} F(w) \left(\frac{-1}{Nz} - w \right)^{2k-2} dw \\ & - \int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))} F(w) \left(w + \frac{-1}{Nz} \right)^{2k-2} dw \Bigg) \end{aligned} \tag{10}$$

对所有 $z \in$上半平面都不为零。为了证明这一结论，我们引入艾希勒-志村理论。我们主要沿用 [1]中的论述。

我们将次数至多为 $2k-2$的复系数多项式空间记为 $V_{\mathbb{C}}$，即：

$$V_{\mathbb{C}} := \{P(z) \in \mathbb{C}[z] : \deg(P(z)) \leq 2k-2\}.$$

我们令 SL_2(Z) 以通常的作用作用于向量空间 $V_{\mathbb{C}}$：对于 $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \in SL_2$(Z)，我们规定：

$$\gamma \cdot P(z) = P|_{2-2k}\gamma^{-1}(z) = P\left(\frac{\gamma_{22}z - \gamma_{12}}{-\gamma_{21}z + \gamma_{11}} \right) (-\gamma_{21}z + \gamma_{11})^{2k-2}$$

我们考察将空间 $\Gamma_0(N)$ 映射到多项式的函数，即集合

$$\{\Gamma_0(N) \to V_{\mathbb{C}}\}.$$

注意，对于固定的形式 F，方程 (10) 定义了这样一个映射。我们将空间 $\{\Gamma_0(N) \to V_{\mathbb{C}}\}$ 的抛物同调群分解为两个子空间。回想，若 $SL_2(\mathbf{Z})$ 中某矩阵的迹等于 ± 2，则该矩阵为抛物矩阵。我们如下定义 1-上闭链空间：

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{C}} := \{\sigma : \Gamma_0(N) \to V_{\mathbb{C}} : \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(N) : \sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\gamma_1) + \gamma_1 \cdot \sigma(\gamma_2) \text{ and} \\ \forall \text{ parabolic } \gamma \in \Gamma_0(N), \exists P(z) \in V_{\mathbb{C}} \text{ such that } \sigma(\gamma) = P(z) - (\gamma \cdot P)(z)\}. \end{aligned}$$

此外，我们将 1-上边缘空间定义为：

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{C}} = \{\sigma : \Gamma_0(N) \to V_{\mathbb{C}} : &\exists P(z) \in V_{\mathbb{C}} \\ &\text{such that } \forall \gamma \in \Gamma_0(N) : \sigma(\gamma) = P(z) - (\gamma \cdot P)(z)\}. \end{aligned}$$

抛物上同调群由下式给出：

$$H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}}) = \frac{C_{\mathbb{C}}}{B_{\mathbb{C}}}.$$

我们希望在由该矩阵给出的对合作用下，将空间 $H^1_P(\Gamma_0(N)\ V_{\mathbb{C}})$ 分解为 ± 1 特征空间

$$\epsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

设 σ：$\Gamma_0(N) \to V_{\mathbb{C}}$ 为任意将矩阵映为多项式的映射，则我们令

$$\tilde{\sigma}(\gamma) = (\epsilon \cdot \sigma(\epsilon\gamma\epsilon))x = \sigma(\epsilon\gamma\epsilon)(-x)$$

我们可以如下在 $H^1_P(\Gamma_0(N)\ V_{\mathbb{C}})$ 上定义一个对合：

$$[\sigma] \mapsto [\tilde{\sigma}]$$

我们将 $H^1_P(\Gamma_0(N)\ V_{\mathbb{C}})$ 分解为此对合下的特征空间：

$$H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}}) = H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^+ \oplus H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^-.$$

根据艾希勒-志村同构 [18]，，复向量空间 $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ 与 $H^1_p(\Gamma_0(N)\ V_{\mathbb{R}})$ 之间存在一个同构。（其中 $V_{\mathbb{R}}$ 是次数至多为 $2k-2$ 且系数属于 R 的多项式空间。）Antoniadis[1] 将以下结论作为艾希勒-志村同构的推论提出。

命题 1.45 （ [1] 中的命题 1）。令 $F \in S_{2k}(\Gamma_0(N))$。设：

$$\pi_F(\gamma) = \int_0^{\gamma(0)} F(w)(z-w)^{2k-2}dw, \text{ and } \tilde{\pi}_F(\gamma) = \int_0^{-\gamma(0)} F(w)(z+w)^{2k-2}dw.$$

以下映射定义了同构：

$$\begin{aligned} &\Phi^+ : S_{2k}(\Gamma_0(N)) \to H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^+, \quad F \mapsto \frac{1}{2i}(\pi_F + \tilde{\pi}_F), \text{ and} \\ &\Phi^- : S_{2k}(\Gamma_0(N)) \to H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^-, \quad F \mapsto \frac{1}{2}(\pi_F - \tilde{\pi}_F). \end{aligned}$$

该命题的一个直接推论是:

推论 1.46。设 $F \in S_{2k}(\Gamma_0(N))$ 为任意非零函数。则存在一个矩阵 $\gamma \in \Gamma_0(N)$，使得

$$\int_0^{\gamma(0)} F(w)(z-w)^{2k-2}dw - \int_0^{-\gamma(0)} F(w)(z+w)^{2k-2}dw$$

不是 z中的零多项式。

如上文所述，为了证明定理 1，我们需要对表述稍作改写:

引理 1.47。设 $F \in S_{2k}(\Gamma_0(N))$ 是一个新形式。则存在一个矩阵$\gamma \in \Gamma_0(N)$，使得

$$z^{2k-2}N^{k-1}\left(\int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)} F(w)\left(\frac{-1}{Nz}-w\right)^{2k-2}dw \right.$$
$$\left. - \int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))} F(w)\left(w+\frac{-1}{Nz}\right)^{2k-2}dw\right)$$

不是零多项式。

证明。设 w_N 是 F 在 Fricke 对合下的特征值，令 $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}$ 并设 $\gamma_0 = \begin{pmatrix}\gamma_{22} & -\gamma_{21}/N\\ -\gamma_{12}N & \gamma_{11}\end{pmatrix}$。将 $w = -1/(Nw')$ 代入，并利用 F 在 Fricke 对合下是特征函数，直接计算可得:

$$\begin{aligned} &z^{2k-2}N^{k-1}\int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)} F(w)\left(\frac{-1}{Nz}-w\right)^{2k-2}dw \\ &\quad -z^{2k-2}N^{k-1}\int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))} F(w)\left(w+\frac{-1}{Nz}\right)^{2k-2}dw \\ &\quad = w_N\left(\int_0^{\gamma_0(0)} F(w)\,(z-w)^{2k-2}\,dw - \int_0^{-\gamma_0(0)} F(w)(w+z)^{2k-2}dw\right). \end{aligned}$$

于是结论由推论 1.46 得出。 □

2 局部调和 Maass 形式

本节旨在定义一个局部调和 Maass 形式，用以判断两个扭曲的 L-函数在中心值处的乘积是否为零。

2.1 局部调和 Maass 形式的定义

我们首先介绍局部调和 Maass 形式。对于 $k > 1$ 和一个非平方正判别式 D, Bringmann、Kane 和 Kohnen 在 [4] 中定义并研究了以下函数:

$$\mathcal{F}_{1-k,D}(z) := \frac{D^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}2\pi} \sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_D} \operatorname{sgn}(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\beta\left(\frac{Dy^2}{|Q(z,1)|^2}; k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

这里 $z = x + iy \in \mathrm{H}$。此外，对于 $s, w \in \mathrm{C}$ 且 $\mathrm{Re}(s)$,$\mathrm{Re}(w) > 0$，我们定义:

$$\beta(v; s, w) := \int_0^v u^{s-1}(1-u)^{w-1}du. \tag{11}$$

对于 $z \in$H，我们定义:

$$Q_z := \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(a|z|^2 + b\mathrm{Re}(z) + c). \tag{12}$$

回忆一下

$$\mathcal{Q}_D := \{[a,b,c] : b^2 - 4ac = D\}$$

函数 $\mathcal{F}_{1-k,D}$是关于 SL_2(Z) 的权 $2-2k$局部调和 Maass 形式，其例外集为

$$E_D := \{z \in \mathbb{H}| \quad \exists Q \in \mathcal{Q}_D \text{ such that } Q_z = 0\}.$$

其含义如下:

定义 2.1. 函数 $\mathcal{F}$: 上半平面 $\to$ 复数域 称为权 $2-2k$ 、同余子群 Γ 且例外集为 E 的局部调和 *Maass* 形式，如果:

(i) For every $\gamma \in \Gamma$, for every $z \in \mathbb{H}$: $\mathcal{F}|_{2-2k}\gamma(z) = \mathcal{F}(z)$.

(ii) 对每个 $z \in$ 上半平面 $\setminus E$，存在 z 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得 $\mathcal{F}$ 在其中是实解析的，并且 $\Delta_{2-2k}(\mathcal{F}) = 0$。

(iii) 对每个 $z \in E$，我们有:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2}\lim_{w\to 0^+}(\mathcal{F}(z+iw) + \mathcal{F}(z-iw)), \quad w \in \mathbb{R}.$$

(iv) 函数 $\mathcal{F}$ 在趋向 $i\infty$ 时至多呈现多项式增长。

此处权 k 拉普拉斯算子由下式给出:

$$\Delta_k := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Bringmann、Kane 和 Kohnen 证明，函数 $\mathcal{F}_{1-k,D}$ 可分解为三部分：全纯部分、非全纯部分和局部多项式。他们还研究了该函数在海克算子作用下的性质。我们将研究一种与$\mathcal{F}_{1-k,D}$ 类似且具有相应性质的形式。

2.2 函数$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$

设 $k>1$, N 为一个整数， D, D_0 为两个基本判别式，且$DD_0>0$ 不是完全平方数。令

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z) := \frac{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}2\pi} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0}(Q)\mathrm{sgn}(Q_z) \\ Q(z,1)^{k-1}\beta\left(\frac{DD_0y^2}{|Q(z,1)|^2}; k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

该函数已在 [12]中引入。请注意，我们采用的规范化方式与该文不同。下面我们描述函数$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0}$的一些性质。关于证明（它们通常与[4],中的证明非常相似），请参见附录 A。令

$$E_{N,DD_0} := \{z\in\mathbb{H} | \quad \exists Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0} : Q_z = 0\}.$$

我们将在定理A.12中证明，函数$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0}$ 是权为 $2-2k$、定义在 $\Gamma_0(N)$上的局部调和 Maass 形式，其例外集为$E_{N,\ DD_0}$。

现在我们说明函数$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0}$ 如何检测两个扭曲 L-函数乘积的消失。回顾定理 1.43，对于定理 1 中的 F 和$D,\ D_0$ ，我们有

$$L(F\otimes\chi_D, k)L(F\otimes\chi_{D_0}, k) = 0 \Longleftrightarrow \langle F, f_{k,N,D,D_0}\rangle = 0. \tag{14}$$

Here

$$f_{k,N,D,D_0}(z) := \frac{(DD_0)^{k-\frac{1}{2}}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{-k} \in S_{2k}(N). \tag{15}$$

注 2.2. 这里，我们将定义 *1.15* 中定义的函数乘以$(DD_0)^{k-\frac{1}{2}}\binom{2k-2}{k-1}\pi$ 。 [1]

由定理 A.10 可知，函数$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0}$ 可以写成$f_{k,\ N,\ D,\ D_0}$的全纯艾希勒积分、$f_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 的非全纯艾希勒积分以及一个局部多项式之和:

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z) = P_{k,N,D,D_0}(z) + (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} f^*_{k,N,D,D_0}(z) \\ - (DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}}(z). \tag{16}$$

Here

$$\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z) = c_{k,N,D,D_0,\infty} + c_{k,DD_0} \sum_{\substack{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\\ a<0<Q_z}} \chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{k-1}.$$

With

$$c_{k,N,D,D_0,\infty} := \frac{-2^{3-2k}}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N|a}} a^{-k} \sum_{\substack{b \bmod 2a,\\ b^2\equiv DD_0 \bmod 4a}} \chi_{D_0}\left(\left[a, b\frac{b^2-DD_0}{4a}\right]\right) \tag{17}$$

$$c_{k,DD_0} := (-1)^k 2^{3-2k}(DD_0)^{\frac{1}{2}-k} \tag{18}$$

回顾一下，我们将有理数上的局部多项式定义为

$$P_{k,N,D,D_0}(x) = c_{k,N,D,D_0,\infty} + c_{k,DD_0} \sum_{\substack{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\\ a<0<Q(x,1)}} \chi_{D_0}(Q)Q(x,1)^{k-1}. \tag{19}$$

注记 2.3. 我们将在引理 *3.1* 中证明$\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z) = P_{k,N,D,D_0}(x)$。

当 $\dim(S_{2k}(N)) = 1$ 时，$f_{k,N,D,D_0} = \alpha F$，其中某个 $\alpha \in$ 属于复数域 $\mathbb{C}$，因此:

$$\begin{aligned} L(F\otimes\chi_D,k)L(F\otimes\chi_{D_0},k) = 0 &\iff \langle F, f_{k,N,D,D_0}\rangle = 0 \\ &\iff f_{k,N,D,D_0} = 0 \\ &\iff \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z) = \mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z) \end{aligned} \tag{20}$$

如果 $\dim(S_{2k}(N)) > 1$，这一结论便不再成立。利用海克算子，我们可以在这种情形下证明一个类似的结论。因此，我们将在下一节研究海克算子。

2.3 海克算子

本节将说明如何像定理 1 中那样选取海克算子，并展示如何将海克算子从 f_{k,N,D,D_0} 提升到 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$。这基于 [10] 以及 [12] 的思想。

首先，我们说明如何通过选取适当的海克算子，在 $\dim(S_{2k}(N)) > 1$ 时恢复一个类似于方程 (20) 的结论。主要思路是将 f_{k,N,D,D_0} 投影到由新形式 F 张成的子空间，如下所示。

设 $F = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \in S_{2k}(N)$ 是一个归一化新形式。那么存在一组由特征形式组成的基 $\{F_n\}_n^m$，满足 $F = F_1$。对于每个 $n \neq 1$，都存在一个素数 p_n，使得 F_n 和 F 在海克算子 T_{p_n} 下具有不同的特征值。设 F_n 在 T_{p_n} 下的特征值为 a_{p_n}。那么

$$F_n|_{2k}(T_{p_n} - a_{p_n}) = 0, \text{ and } F|_{2k}(T_{p_n} - a_{p_n}) = (c_{p_n} - a_{p_n})F \neq 0.$$

因此

$$\mathbb{T} := \prod_{n=2}^{m}(T_{p_n} - a_{p_n}) : S_{2k}(N) \to \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{F\} \tag{21}$$

是一个非零映射。令 $G = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n F_n \in S_{2k}(N)$，其中$\alpha_n$为某些复数。那么

$$G|_{2k}\mathbb{T} = \alpha_1 \prod_{n=2}^{m} (c_{p_n} - a_{p_n}) F.$$

因此我们有

$$\langle F, G\rangle = \overline{\alpha_1}|F|^2 \text{ and } \langle F, G|_{2k}\mathbb{T}\rangle = \overline{\alpha_1} \prod_{n=2}^{n} \overline{(c_n - a_{p_n})}|F|^2$$

特别地，我们有:

$$\langle F, G\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \langle F, G|_{2k}\mathbb{T}\rangle = 0.$$

注 2.4. 注意，对于某个素数 p ，可能有多个特征函数具有相同的特征值，且该特征值不同于 F对应的特征值，在T_p下成立。在这种情形下，可以构造一个具有相同性质的算子$\mathbb{T}$ ，其因子少于 $m-1$ 个。第 *5.3* 小节中的例子便是这种情形。

现在我们说明如何将海克算子从$f_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 提升到$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0}$。

引理 2.5. 设 $k > 0$ ，并设 D、D_0 是两个基本判别式，满足$(-1)^k D$、$(-1)^k D_0 > 0$ ，且 DD_0 不是完全平方数。

设$\mathbb{T} = \prod_i (T_{p_i} - a_{p_i})$ 是海克算子乘积，并记 $\tilde{\mathbb{T}} = \prod_i (T_{p_i} - p^{1-2k} a_{p_i})$。于是

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}} = \mathcal{P}_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}} + (DD_0 \prod_i p_i^2)^{\frac{1}{2}-k}(f_{k,N,D,D_0}|_{2k}\mathbb{T})$$
$$- (DD_0 \prod_i p_i^2)^{\frac{1}{2}-k} \frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}} \mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}|_{2k}\mathbb{T}}.$$

特别地，我们有

$$f_{k,N,D,D_0}|_{2k}\mathbb{T} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}(z) = \mathcal{P}_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}(z).$$

对所有 $z \in$ 上半平面 $\setminus E_{N,DD_0}$。

证明。 直接计算可得，对于任意形式 $F \in S_{2k}$:

$$\mathcal{E}_F|_{2-2k}(T_p - p^{1-2k}a_p) = p^{1-2k}\mathcal{E}_{F|_{2k}(T_p - a_p)}$$
$$F^*|_{2-2k}(T_p - p^{1-2k}a_p) = p^{1-2k}(F|_{2k}(T_p - a_p))^*.$$

□

我们以提及$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$ 在 Fricke 对合下的行为来结束本节。在引理 A.15 中我们证明

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}\Big|_{2-2k}\left(W_N - \left(\frac{D_0}{N}\right)\ \mathrm{id}\right) = 0. \tag{22}$$

3 局部多项式

在证明主定理之前，我们描述局部多项式在有理数域上的非常数部分的一些性质。本节有两个目标：我们希望定义 $\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)$，并证明该定义是唯一合理的。此外，我们解释为何在某些情形中，$P_{k,N,D,D_0}(x)$ 对所有 $x\sim_{\Gamma_0(N)}0$ 都是常数。

为简化 $\Delta:=DD_0$ 的记号，我们设：

$$\mathcal{Q}_{N,\Delta}(x):=\{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}:a<0<Q(x,1)\}.$$

我们先按以下方式定义极限 $\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}$：

引理 3.1. 我们定义 $\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z):=\lim_{y\to 0^+}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(x+iy)$。于是有：

$$\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)=P_{k,N,D,D_0}(x).$$

证明。对于 $x,y\in\mathbb{R}$，其中 $y\geq 0$，我们设

$$\mathcal{Q}_{N,DD_0}(x+iy):=\{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}:a<0<a(x^2+y^2)+bx+c\}$$

设 $Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}$，其中 $a<0$。设 $x,y_1,y_2\in\mathbb{R}$，其中 $0\leq y_1<y_2$，则有：

$$a(x^2+y_1^2)+bx+c>a(x^2+y_2^2)+bx+c.$$

因此，如果 $Q_{x+iy_2}>0$，那么 $Q_{x+iy_1}>0$。这表明 $\mathcal{Q}_{N,\,DD_0}(x+iy_2)\subset\mathcal{Q}_{N,\,DD_0}(x+iy_1)$。对于 $x\in\mathbb{Q}$，我们知道 $\mathcal{Q}_{N,\,DD_0}(x)$ 是有限的。因此，存在 $y_0>0$，使得对所有 $0\leq y<y_0$：

$$\mathcal{Q}_{N,DD_0}(x)=\mathcal{Q}_{N,DD_0}(x+iy)$$

断言得证。 □

稍后我们将说明为什么不允许沿其他方向取极限。首先作如下观察：

设 $p_{k,\,N,\,D,\,D_0}$ 是 $P_{k,\,N,\,D,\,D_0}(x)$ 的非恒定部分，即对于 $x\in\mathbb{Q}$，我们定义：

$$p_{k,N,D,D_0}(x):=\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\\ a<0<Q(x,1)}}\chi_{D_0}(Q)Q(x,1)^{k-1}. \tag{23}$$

那么 $P_{k,\,N,\,D,\,D_0}(x)=c_{k,\,N,\,D,\,D_0,\,\infty}+c_{k,\,DD_0}p_{k,\,N,\,D,\,D_0}(x)$。由定理 1 可立即推出：

推论 3.2. 假设 $\dim(S_{2k}(N))=1$，且 $F\in S_{2k}(N)$ 非零。令 D,D_0 为定理 *1* 中的两个判别式，并满足 $L(F\otimes\chi_D,k)=0$，则 $p_{k,N,D,D_0}(x)$ 对所有 $x\sim_{\Gamma_0(N)}0$均为常数。

人们可能会天真地猜测，其原因在于，对于所有 $x_0 \in \mathbb{Q}$，和 $\sum_{Q \in \mathcal{Q}_{N,\ D D_0}} \chi_{D_0}(Q) Q(X,1)^{k-1}$ 都是 X inde-$_{a<0<Q(x_0,1)}$ 中与 x_0 无关的常数多项式。然而，通过计算可以验证，事实并非如此。

例 3.3. 当 $N = 9$, $D = 172$ 和 $D_0 = 13$ 时，我们可以验证，对于 x_0 的不同取值，局部多项式 $p_{k,\ N,\ D,\ D_0}(x_0)$ 是常数，而由 $\sum_{Q \in \mathcal{Q}_{N,\ D D_0}} \chi_{D_0}(Q) Q(X, 1)^{k-1}$ 给出的 X 中的多项式则不是。下表列出了一些$_{a<0<Q(x_0,\ 1)}$数值：

x_0	$\sum_{\substack{Q \in Q_{9,172\cdot 13} \\ a<0<Q(x_0,1)}} \chi_{13}(Q) Q(X,1)^{k-1}$	$p_{2,9,172,13}(x_0)$
0	$-3024X^2 + 336$	336
$1/2$	$-12096X^2 + 12096X - 2688$	336
$1/3$	$-12096X^2 + 8064X - 1008$	336
$1/5$	$-75600X^2 + 30240X - 2688$	336
$1/7$	$-148176X^2 + 42336X - 2688$	336
$1/9$	$-27216X^2 + 6048X$	336

表 1：多项式 $\sum_{Q \in Q_{9,\ 172\cdot 13}} \chi_{13}(Q) Q(X,$ 1) 和 $p_{2,\ 9,\ 172,\ 13}(x_0)_{a<0<Q(x_0,\ 1)}$

为什么在这些情形下，我们仍然可以预期 $p_{k,\ N,\ D,\ D_0}(x_0)$ 是常数？这个问题的答案，以及定义极限 $\lim_{z \to x} \mathcal{P}_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 的原因，都在集合$\mathcal{Q}_{N,\ D D_0}(x)$中。因此我们来研究它们。

只需考虑 $\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}(x)$，其中 $0 \le x \le 1/2$，因为我们有以下两个双射：

$$\mathcal{Q}_{N,\Delta}(x) \to \mathcal{Q}_{N,\Delta}(-x), \quad \text{and} \quad \mathcal{Q}_{N,\Delta}(x+1) \to \mathcal{Q}_{N,\Delta}(x) \tag{24}$$

$$[a,b,c] \mapsto [a,-b,c] \qquad [a,b,c] \mapsto [a, b+2a, a+b+c]. \tag{25}$$

此外，我们有以下结果：

引理 3.4。 假设 $\sqrt{\Delta} > N$。那么以下条件等价：

(i) $\mathcal{Q}_{N,\Delta} \neq \emptyset$.

(ii) 对所有 $x \in$有理数域，都有 $\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}(x) \neq \emptyset$。

证明。 显然，(*ii*) 蕴含 (*i*)。因此，我们只需证明 (*i*) 蕴含 (*ii*)。假设存在一个二元二次型 $Q = [a,b,c]$，满足$b^2 - 4ac = \Delta$、 $a < 0$ 和 $N | a$。不失一般性，我们可以假设$a = -N$。否则， $a = -a_0 N$，且我们可以用 $[-N, b, a_0 c]$替换该形式。对于任意 $r \in \mathbb{Z}$，二元二次型 $Q_r := [-N, b + 2rN, c + br - Nr^2]$ 属于 $\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}$。对于所有 $x \in I_r :=$ $\left(\frac{-b}{-2N} - r + \frac{\sqrt{\Delta}}{-2N},\ \frac{-b}{-2N} - r - \frac{\sqrt{\Delta}}{-2N}\right)$，都有$\overline{Q_r(x,\ 1) > 0}$。由于 $\sqrt{\Delta} > N$，区间集合 $\{I_r\}_{r \in \mathbb{Z}}$ 覆盖 $\mathbb{R}$，因此对于任意 $x \in \mathbb{Q}$，$\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}(x)$ 中至少有一个元素。 □

当考虑上半平面上的复数时，这一点不再成立，也就是说，存在 $z \in \mathbb{H}$ 使得 $\{Q \in \mathcal{Q}_{N,\Delta} : a < 0 < Q_z\} = \emptyset$，即使 $\mathcal{Q}_{N,\Delta} \neq \emptyset$。回忆一下，$Q_z := {}^{1}\mathrm{Im}(z)($ $a|z|^2 + b\mathrm{Re}(z) + c)$，且 $S_Q := \{z \in \mathbb{H} : Q_z = 0\}$。令 $Q \in \mathcal{Q}_{N,\Delta}$，其中 $a < 0$。由于 $a < 0$，对于实数轴为边界的连通分支内所有的 z，$Q_z > 0$；而对于该连通分支之外的所有 z，S_Q 且 $Q_z < 0$。但是，由于 $N|a$ 和 $b^2 - 4ac = \Delta$，我们知道 S_Q 的半径至多为 $\frac{\sqrt{\Delta}}{2N}$。因此，对于所有满足 $\mathrm{Im}(z) > \frac{\sqrt{\Delta}}{2N}$ 的 z，都有 $Q_z \leq 0$。由此得到以下注记：

注记 3.5. *(i)* 即使 $\mathcal{Q}_{N,\Delta} \neq \emptyset$，对于所有满足 $Im(z) > \frac{\sqrt{\Delta}}{2N}$ 的 $z \in$ 上半平面，我们都有 $\{Q \in \mathcal{Q}_{N,\Delta} : a < 0 < Q_z\} = \emptyset$。

(ii) 特别地，对于满足 $Im(z) > \frac{\sqrt{\Delta}}{2N}$ 的 $z \in$ 上半平面，我们有

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}, \\ a<0<Q_z}} \chi_{D_0}(Q) Q(z,1)^{k-1} = 0$$

因此 $\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z) = c_{k,N,D,D_0,\infty}$ 是常数。

3.1 $N = 1$ 的情形

在这一部分中，我们假设 $N = 1$。我们的目标是证明，若固定一个有理数 x_1，则至多存在另一个数 x_2，使得 $Q_{1,\Delta}(x_1) = Q_{1,\Delta}(x_2)$。这说明了为什么在某些情形下 $p_{k,1,D,D_0}(x_0)$ 是常数，也说明了为什么我们所能期待的收敛方式只有引理 3.1 中的极限定义。

在 [25] Zagier 研究了以下函数：

$$p_{1,\Delta}(x) := \sum_{Q \in Q_{1,\Delta}(x)} Q(x,1).$$

他特别证明了这个函数是常数：

定理 3.6 (定理 1，见 [25])。对于每个基本判别式 Δ，函数 $p_{1,\Delta}$ 的值均为常数 c_Δ。

这立即推出以下推论：

推论 3.7。对于任意 $x_1 \in$ 有理数域，至多存在另一个 $x_2 \in$ 有理数域 使得

$$Q_{1,\Delta}(x_1) = Q_{1,\Delta}(x_2).$$

证明。如果 x_1，$x_2 \in$ 有理数域使得 $Q_{1,\Delta}(x_1) = Q_{1,\Delta}(x_2)$，那么我们有

$$\sum_{Q_{1,\Delta}(x_1)} Q(x_1,1) = \sum_{Q_{1,\Delta}(x_1)} Q(x_2,1) = c_\Delta$$

因此，二次多项式 $\sum_{Q_{1,\Delta}(x_1)} Q(x,1) - c_\Delta$ 有两个根。由于它至多有两个根，因此这样的 x_2 至多有一个。

□

3.2 一般情形

现在我们转向 $N \geq 1$的情形。人们可能会认为，可以沿用 [25]中的相同方法证明一般情形。然而，令人惊讶的是，当 $N > 1$ 时，人们会发现研究集合 $\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}(x)$变得更加复杂。因此，这里我们只证明：对于任意整数 n_0 以及 n_0的任意邻域 $\mathcal{U}$，都存在有理数 $x \in \mathcal{U}$，使得 $\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}(n_0) \neq \mathcal{Q}_{N,\ \Delta}(x)$。

我们首先定义 Zagier 所定义的局部多项式的一种推广：

$$p_{N,\Delta}(x) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{N,\Delta}(x)} Q(x,1). \tag{26}$$

请注意，$p_{N,\Delta}$ 与p_{k,N,D,D_0} 之间的区别在于，后者将二次型乘以广义属特征。经过直接计算可得 $p_{N,\Delta}(x+1) = p_{N,\Delta}(x)$。

注 3.8。我们先前看到，若 $N = 1$，则 $p_{N,\Delta}(x)$ 是常数。若 $N > 1$，这一点便不再成立。事实上，对于 $N = 9$、 $\Delta = 172 \cdot 13$，我们得到以下取值：

x	$p_{N,\Delta}$
0	696
$1/2$	680
$1/3$	$2056/3$
$1/5$	$17272/25$
$1/7$	$34040/49$
$1/9$	696

表 2：局部多项式 $p_{9,172\cdot 13}(x)$ 的一些明确取值。

我们还定义由对应于零的二元二次型所描述的多项式：

$$p_{N,\Delta,0}(x) := \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_{N,\Delta} \\ a<0<c}} Q(x,1) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{N,\Delta}(0)} Q(x,1).$$

注意，如果$[aN,b,c] \in \mathcal{Q}_{N,\Delta}(0)$，那么 $[aN,-b,c]$ 也如此。类似地，如果 $[-a_1a_2N,b,c] \in \mathcal{Q}_{N,\Delta}(0)$，那么 $[-a_1N,b,ca_1]$ 也如此（这里假设 $a_1,a_2>0$）。因此，存在某个 $A,C \in \mathbb{Z}$，使得 $A = CN$：

$$p_{N,\Delta,0}(x) = Ax^2 + C.$$

函数 $p_{N,\Delta}$ 和 $p_{N,\Delta,0}$ 满足以下关系：

引理 3.9。我们有

$$Nx^2 p_{N,\Delta}(1/(Nx)) - p_{N,\Delta}(x) = -p_{N,\Delta,0}(x).$$

注记 3.10。 这一结论已在 *[25]* 中针对 $N=1$ 得到证明。

证明。 我们计算:

$$\begin{aligned} Nx^2 p_{N,\Delta}(1/(Nx)) - p_{N,\Delta}(x) &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ a<0<Q(1/(Nx),1)}} Nx^2 Q(1/(Nx),1) - \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ a<0<Q(x,1)}} Q(x,1) \\ &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ c<0<Q(x,1)}} Q(x,1) - \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ a<0<Q(x,1)}} Q(x,1). \end{aligned}$$

这里我们使用了双射:

$$\begin{aligned} \{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta} : Q(1/(Nx),1)>0 \text{ and } a<0\} &\longleftrightarrow \{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta} : Q(x,1)>0 \text{ and } c<0\} \\ [a,b,c] &\mapsto [cN,b,a/N]. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} Nx^2 p_{N,\Delta}(1/(Nx)) - p_{N,\Delta}(x) &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ c<0}} \max(0,Q(x,1)) - \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ a<0}} \max(0,Q(x,1)) \\ &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ c<0<a}} \max(0,Q(x,1)) - \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ a<0<c}} \max(0,Q(x,1)). \end{aligned}$$

其中我们改写了被加数，并注意到，若 $a,\ c<0$ 则一个二元二次型会同时出现在两个求和中，因此相应的项将相互抵消。最后，我们有:

$$\begin{aligned} Nx^2 p_{N,\Delta}(1/(Nx)) - p_{N,\Delta}(x) &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ c<0<a}} \max(0,Q(x,1)) + \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ c<0<a}} \min(0,Q(x,1)) \\ &= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ c<0<a}} Q(x,1) = -\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}\\ a<0<c}} Q(x,1) = -p_0(x) \end{aligned}$$

这就证明了该断言。 □

现在我们可以证明如下结论:

推论 3.11。 设 $n_0\in\mathbb{N}$ 为一个整数。

(i) 若 $\mathcal{Q}_{N,\Delta}(0)\neq\emptyset$，则对所有 $n\in\mathbb{Z}$，都有

$$\mathcal{Q}_{N,\Delta}(n_0+1/(nN))\neq\mathcal{Q}_{N,\Delta}(n_0).$$

(ii) 若 $\sqrt{\Delta}>N$ 且 $\mathcal{Q}_{N,\ \Delta}\neq\emptyset$，则对于任意 $x\in$ 有理数域 $\setminus\{n_0\}$，我们有

$$\mathcal{Q}_{N,\Delta}(x)\neq\mathcal{Q}_{N,\Delta}(n_0).$$

证明。由于 $p_{N,\Delta}$ 是平移不变的（即 $p_{N,\Delta}(x) = p_{N,\Delta}(x+1)$），只需证明该断言对 $n = 0$成立。

对于（i），假设存在某个 $n \in \mathbb{Z}$，使得 $\mathcal{Q}_{N,\Delta}(1/(nN)) = \mathcal{Q}_{N,\Delta}(0)$。这意味着

$$p_{N,\Delta}(1/(nN)) = p_{N,\Delta,0}(1/(nN)) = \frac{A}{(nN)^2} + C \tag{27}$$

由于 $p_{N,\Delta,0}(x) = Ax^2 + C$对于某个 $A, C \in \mathbb{Z}$。由于 $\mathcal{Q}_{N,\Delta}(0) \neq \emptyset$, $A, C \neq 0$。由引理 3.9，取 $x = n$，可得

$$Nn^2 p_{N,\Delta}(1/(Nn)) - p_{N,\Delta}(n) = -p_{N,\Delta,0}(n) \tag{28}$$

$$\iff Nn^2 p_{N,\Delta}(1/(Nn)) = -p_{N,\Delta,0}(n) + p_{N,\Delta}(n) \tag{29}$$

由于 $p_{N,\Delta}$ 在 $\mathbb{1}$ 下平移不变（即 $p_{N,\Delta}(x+1) = p_{N,\Delta}(x)$），因此

$$p_{N,\Delta}(n) = p_{N,\Delta}(0) = p_{N,\Delta,0}(0) = C. \tag{30}$$

因此，结合方程（27）、（28）和（30），得到:

$$Nn^2 \left(\frac{A}{(nN)^2} + C \right) = -An^2 - C + C = -An^2$$

整理得:

$$(A + CN)n^2 + A/N = 0$$

注意到 $A = CN$，我们得到 n 满足:

$$n^2 = \frac{-1}{2N}$$

但显然，没有任何整数 n 满足该等式。这证明了该断言。

现在证明（ii）。假设 $\mathcal{Q}_{N,\Delta}(x) = \mathcal{Q}_{N,\Delta}(0)$，那么 $p_{N,\Delta}(x) = p_{N,\Delta,0}(x)$

$$Nx^2 p_{N,\Delta}(1/(Nx)) = -p_{N,\Delta,0}(x) + p_{N,\Delta}(x) = 0.$$

但根据引理 3.4，由于$\mathcal{Q}_{N,\Delta} \neq \emptyset$，我们有$p_{N,\Delta}(x)$ 是在一个非空集合上对严格正数求和，因此 $p_{N,\Delta}(1/(Nx))$ 不可能为零。

□

由此可知，对于任意整数 n_0，对于 n_0 的任意邻域 $\mathcal{U}$，都存在若干个 $x \in \mathcal{U}$，使得$\mathcal{Q}_{N,\Delta}(x) \neq \mathcal{Q}_{N,\Delta}(n_0)$。这尤其说明了我们对极限 $\lim_{z \to x} \mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)$ 的定义是合理的。

4 主定理的证明

本节证明定理 1。

证明。 根据方程（14）（另见定理 1.43），我们有

$$L(F\otimes\chi_D,k)L(F\otimes\chi_{D_0},k)=0\Leftrightarrow\langle F,f_{k,N,D,D_0}\rangle=0.$$

情况 1： $\dim(S_{2k}(N))=1$。若假设 $\dim(S_{2k}(N))=1$。那么f_{k,N,D,D_0} 是 F 的倍数，因此：

$$\langle F,f_{k,N,D,D_0}\rangle=0\Leftrightarrow f_{k,N,D,D_0}=0.$$

注意，由于 $\dim(S_{2k}(N))=1$，我们可以忽略定理 1 陈述中的海克算子乘积。

我们首先证明，若 $f_{k,N,D,D_0}=0$，则对于所有 $x\in\mathbb{Q}$ $\gamma\in\Gamma_0(N)$，$P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\gamma(x)=P_{k,N,D,D_0}(x)$；然后说明这如何推出，对于所有$x\sim_{\Gamma_0(N)}0$，$P_{k,N,D,D_0}(x)=0$。

回顾方程（16）：

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z)=$$

$$P_{k,N,D,D_0}(z)+(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}f^*_{k,N,D,D_0}(z)-(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}}(z).$$

由于 $f_{k,N,D,D_0}=0$，我们有 $f^*_{k,N,D,D_0}=0$ 以及 $\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}}=0$。因此

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z)=\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z).$$

由于左边对所有 $\gamma\in\Gamma_0(N)$ 的 $|_{2-2k}\gamma$ 不变，右边也如此。由于 $\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)=P_{k,N,D,D_0}(x)$，所以只要 Möbius 变换有定义，在有理数上定义的局部多项式也如此。

现在我们证明，对于所有 $x\sim_{\Gamma_0(N)}0$，$P_{k,N,D,D_0}(x)=0$。我们区分不同情形。

- 我们首先证明 $x=0$ 时的情形。由方程 (22)（另见引理 A.15），我们有

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}\left(W_N-\left(\frac{D_0}{N}\right)\right)(z)=0.$$

由于 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z)=\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)$，我们有

$$\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\left(W_N-\left(\frac{D_0}{N}\right)\right)(z)=0.$$

在注记 3.5 中，我们指出，对于 $z\in\mathbb{H}$，当 $\mathrm{Im}(z)>\frac{\sqrt{DD_0}}{2N}$ 时，有 $\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)=c_{k,N,D,D_0,\infty}$ 是常数。因此：

$$\lim_{z\to0}(\sqrt{N}z)^{2k-2}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}\left(\frac{-1}{Nz}\right)=\lim_{z\to0}(\sqrt{N}z)^{2k-2}c_{k,N,D,D_0,\infty}=0.$$

另一方面，利用 Fricke 对合，我们得到：

$$\lim_{z\to 0}(\sqrt{N}z)^{2k-2}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}\left(\frac{-1}{Nz}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{D_0}{N}\right)\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)$$
$$= \left(\frac{D_0}{N}\right)P_{k,N,D,D_0}(0).$$

因此 $P_{k,\ N,\ D,\ D_0}(0) = 0$。

- 设 $x \in \mathbb{Q}$ 且 $x \sim_{\Gamma_0(N)} 0$。则存在一个矩阵 $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$，使得 $x = \gamma\cdot 0 = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}$。由于 $P_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 在 $|_{2-2k}\gamma(\ \gamma\in\Gamma_0)$ 下保持不变，我们有：

$$\gamma_{22}^{2k-2}P_{k,N,D,D_0}\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}\right) = \gamma_{22}^{2k-2}P_{k,N,D,D_0}(\gamma\cdot 0) = P_{k,N,D,D_0}(0) = 0$$

从而 $\mathcal{P}_{k,\ N,\ D,\ D_0}(x) = 0$。

现在我们假设$f_{k,\ N,\ D,\ D_0} \neq 0$。首先证明存在一个矩阵$\gamma\in\Gamma_0(N)$，使得 $P_{k,\ N,\ D,\ D_0}$ 在 $|_{2-2k}\gamma$ 下不保持不变。

由于 $S_2(N)$ 的维数为 1，$f_{k,\ N,\ D,\ D_0} \neq 0$ 意味着，对于某个非零的 $\alpha\in$复数域 $\mathbb{C}$，$f_{k,\ N,\ D,\ D_0} = \alpha F$。由于 $\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0}$ 对所有 $\gamma\in\Gamma_0(N)$ 在 $|_{2-2k}\gamma$ 下保持不变，重新整理后可得：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)|_{2-2k}(\gamma^{-1}-1)\\
=&(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}\mathcal{E}_{\alpha F}|_{2-2k}(\gamma^{-1}-1)(z) - (DD_0)^{\frac{1}{2}-k}(\alpha F)^*|_{2-2k}(\gamma^{-1}-1)(z)\\
=&(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\alpha\left(\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}\mathcal{E}_F|_{2-2k}(\gamma^{-1}-1)(z) - F^*|_{2-2k}(\gamma^{-1}-1)(z)\right)
\end{aligned}$$

我们将证明存在一个矩阵，使得右侧非零。根据引理 1.44，这等于：

$$(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\alpha(2i)^{1-2k}\left(\int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))}\overline{F(-\overline{w})}(w+z)^{2k-2}dw - \int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)}F(w)(z-w)^{2k-2}dw\right)$$

我们令

$$R_\gamma(z) := \int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))}\overline{F(-\overline{w})}(w+z)^{2k-2}dw - \int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)}F(w)(z-w)^{2k-2}dw$$

由于 f_{k,N,D,D_0} 具有实系数（另见注 1.16），我们可以假设 F也如此，因此 $F(z) = F(-z)$。于是，我们得到：

$$R_\gamma(z) := \int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))}F(w)(w+z)^{2k-2}dw - \int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)}F(w)(z-w)^{2k-2}dw. \tag{31}$$

注意， R_γ 是关于 z 的一个多项式，其次数至多为 $2k-2$，系数是形如 $\int^{\pm}_{\gamma(-i\infty))\,i\infty}$ $F(\omega)w^n dw$的积分的倍数。令

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\gamma(z) :&= \left(z^2N\right)^{k-1} R_\gamma\left(\frac{-1}{Nz}\right)\\ &= z^{2k-2}N^{k-1}\left(\int_{i\infty}^{-(\gamma(-i\infty))} F(w)\left(w+\frac{-1}{Nz}\right)^{2k-2} dw\right.\\ &\left.-\int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)} F(w)\left(\frac{-1}{Nz}-w\right)^{2k-2} dw\right)\end{aligned}$$

˜那么显然， R_γ 是零多项式，当且仅当 R_γ 是零多项式。由引理 1.47可知，存在一个矩阵 $\gamma\in\Gamma_0(N)$，使得~$R_\gamma(z)$不是零多项式。这尤其意味着该多项式在实数轴上至多有有限个零点。因此，对于所有 $\gamma\in\Gamma_0(N)$，$P_{k、N、D和D_0}(x)$都不在 $|_{2-2k}\gamma$ 下保持不变。

现在我们证明，由此可知存在$x\sim_{\Gamma_0(N)}0$，使得$P_{k、N、D和D_0}(x)\neq 0$。设 $\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$满足 R_γ 不是零多项式。取 $x\neq\frac{-\gamma_{22}}{\gamma_{21}}$，使得$x\sim_{\Gamma_0(N)}0$，且 $R_\gamma(x)\neq 0$。如果$P_{k、N、D和D_0}(x)\neq 0$，那么证明就完成了。否则，根据

$$(\gamma_{21}x+\gamma_{22})^{2k-2}P_{k,N,D,D_0}(\gamma\cdot x)-P_{k,N,D,D_0}(x)=R_\gamma(x)$$

由此可知

$$P_{k,N,D,D_0}(\gamma\cdot x)=(\gamma_{21}x+\gamma_{22})^{2-2k}R_\gamma(x).$$

根据假设 $\gamma_{21}x+\gamma_{22}\neq 0$。由于 $\Gamma_0(N)$ 的作用具有传递性，当$x\sim_{\Gamma_0(N)}0$ 时， $\gamma\cdot x$ 为。因此，这就完成了这一方向的证明，从而也完成了在 $\dim(S_{2k}(N))=1$ 情况下该命题的证明。

情况 2： $\dim(S_{2k}(N))>1$假设 $\dim(S_{2k}(N))>1$。如第 2.3 节所述，我们有

$$\langle F, f_{k,N,D,D_0}\rangle=0\Leftrightarrow\langle F, f_{k,N,D,D_0}|_{2k}\mathbb{T}\rangle=0.$$

此外，根据引理 2.5，我们有 $f_{k,\ N,\ D,\ D_0}|_{2k}\mathbf{T}=0$ 当且仅当

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}=\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}.$$

因此，我们可以像在 $\dim(S_{2k}(N))=1$ 的情形下一样进行论证。 □

注 4.1. 看起来可能有些不便：从该定理（的证明）中只能推出，若 $L(F\otimes\chi_D,k)L(F\otimes\chi_{D'},k)=0$，则存在某个矩阵˜，使得 P_{k,N,D,D_0} 的模性不成立。然而，我们知道，对于所有 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma_0(N)$，都有 $R_{\gamma_1\gamma_2}=_{\sim}$ ~$R_{\gamma_1}+\gamma_1\cdot R_{\gamma_2}$（见命题 *1.45*）。因此，由于$\Gamma_0(N)$ 是有限生成的，只需检查有限多个取值即可。

我们可以按如下方式进行：对于 $\Gamma_0(N)$ 的每个生成元 γ_i，只需计算 $x_{i,n} := \gamma_i^n(0)$ 关于 $1 \le n \le 2k-2$ 的局部多项式。如果对于某个 n，有 $P_{k,N,D,D_0}(x_{i,n})$ 不为零，那么我们就知道模性不成立。然而，如果 $P_{k,N,D,D_0}(x_{i,n})$ 全部为零，那么由于 R_{γ_i} 是次数至多为 $2k-2$、有 $2k-1$ 个根的多项式，它就是零多项式。

注意，我们已经证明：$L(F\otimes\chi_D,k)L(F\otimes\chi_{D_0},k)=0$ 蕴含 $(P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T})(x)=0$ 对所有 $x\sim_{\Gamma_0(N)}0$ 成立，即对形如 $\frac{q_1}{q_2}$ 且满足 $(q_1,q_2)=1$ 的 x 成立。我们进一步证明，$(P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T})(x)=0$ 对所有形如 $\frac{q_1}{Nq_2}$ 且满足 $(q_1,Nq_2)=1$ 的 x 成立。一般而言，我们期望可以借助 Atkin–Lehner 对合证明，对所有 x 都有 $(P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T})(x)=0$。

命题 4.2. 在与定理 *1* 相同的假设下，我们有：若 $L(F\otimes\chi_D,k)L(F\otimes\chi_{D_0},k)=0$，则 $P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathbb{T}(x)=0$ 对所有 $x\in$ 有理数域 中形如 $x=\frac{q_1}{q_2N}$ 且满足 $(q_1,Nq_2)=1$ 者成立。

证明。我们首先假设 $\dim(S_2(N))=1$。令 $x=\frac{q_1}{q_2N}$ with $(q_1,Nq_2)=1$。那么存在 $\gamma_{11},\gamma_{12}\in\mathbb{Z}$，使得 $\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}\\ q_2N&-q_1\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$。因此

$$\lim_{z\to x} q_2Nz-q_1=0 \text{ and } \lim_{z\to x}\gamma\cdot z=i\infty.$$

这意味着

$$\lim_{z\to x}(q_2Nz-q_1)^{2k-2}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(\gamma\cdot z)=\lim_{z\to x}(q_2Nz-q_1)^{2k-2}c_{k,N,D,D_0,\infty}=0$$

另一方面，我们刚刚证明，若 $L(F\otimes\chi_D,k)L(F\otimes\chi_{D_0},k)=0$，则 $\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}$ 在 $|_{2-2k}\gamma$ 作用下对 $\gamma\in\Gamma_0(N)$ 不变。因此：

$$\lim_{z\to x}(q_2Nz-q_1)^{2k-2}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(\gamma\cdot z)=\lim_{z\to x}\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)=P_{k,N,D,D_0}(x).$$

这表明，对所有形如 $\frac{q_1}{Nq_2}$ with (q_1,Nq_2) 的形式，$P_{k,N,D,D_0}(x)=P_{k,N,D,D_0}(\frac{q_1}{Nq_2})=0$。按照定理证明中的论证，当 $\dim(S_{2k}(N))>1$ 时，我们可以将 P_{k,N,D,D_0} 替换为 $P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\mathrm{T}$。 □

5 计算示例

本节将计算一些具体示例：我们考虑空间 $S_4(9)$ 和 $S_4(25)$ 中的新形式。为了计算局部多项式，我们使用了 [12] 提供的代码，并将广义属特征的计算替换为命题 1.6 中所述的方法。首先，我们概述用于计算的方法：

5.1 算法

设 $F\in S_{2k}(N)$。下文中，我们假设 D 和 D_0 是满足定理 1 条件的两个基本判别式。固定 D_0，使得

$L(F\otimes\chi_{D_0},\ k)\neq 0$。我们的目标是遍历满足主定理条件的判别式 D，并确定 $L(F\otimes\chi_D,\ k)=0$ 是否成立。

回忆一下，$\tilde{\mathbf{T}}=\prod_i\left(T_p-a_{p_i}p_i^{1-2k}\right)$ 是海克算子乘积。如果$L(F\otimes\chi_D,\ k)=0$，那么我们预期

$$P_{k,N,D,D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}(0)=\prod_i(p_i^{1-2k}(1+a_{p_i})+1)c_{k,N,D,D_0,\infty}$$
$$+c_{k,DD_0}\left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0},\\ a<0<Q(x,1)}}\chi_{D_0}(Q)Q(x,1)^{k-1}\right)|_{2k-2}\tilde{\mathbb{T}}(0)=0.$$

我们设

$$C_0:=-\prod_i(p_i^{1-2k}(1+a_{p_i})+1)c_{k,N,D,D_0,\infty}c_{k,DD_0}^{-1}$$
$$=\left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\\ a<0<Q(x,1)}}\chi_{D_0}Q(x,1)^{k-1}\right)|_{2k-2}\tilde{\mathbb{T}}(0).$$

设 γ_1，……，γ_l 是 $\Gamma_0(N)$ 的生成元。设 $x_i:=\gamma_i\cdot 0$。（注意，需要确保这一定义良好，即若 $\gamma_i=\begin{pmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}\end{pmatrix}$，则 $\gamma_{22}\neq 0$。若不满足这一条件，可以用另一个整数 n 替换 0，使得对所有 l都有$\gamma_{21}n+\gamma_{22}\neq 0$。）

对于所有生成元，即对于 $1\leq i\leq l$，我们计算

$$\left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\\ a<0<Q(x,1)}}\chi_{D_0}(Q)Q(x,1)^{k-1}\right)|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}(x_i)-C_0$$

我们区分两种情形：

- 如果对某个 x_i，其值非零，那么 $P_{k,\ N,\ D,\ D_0}|_{2-2k}\tilde{\mathbf{T}}$ 不是模的，因此 $L(F\otimes\chi_D,\ k)\neq 0$。
- 如果对所有生成元该值都非零，则令 $x_{i,j}:=\gamma_i^j\cdot 0$ 取遍 $1\leq i\leq l$和 $1\leq j\leq 2k-1$。然后

$$\left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\\ a<0<Q(x_{i,j},1)}}\chi_{D_0}(Q)Q(x,1)^{k-1}\right)|_{2-2k}\tilde{\mathbb{T}}(x_{i,j})-C_0$$

对 i,j 的所有选择都等于零，当且仅当 $L(F\otimes\chi_D,k)=0$.（另见注 4.1。）

5.2 空间 $S_4(9)$。

可以证明，空间 $S_4^{new}(9) = S_4(9)$ 由以下元素张成：

$$F = q - 8q^4 + 20q^7 - 70q^{13} + 64q^{16} + 56q^{19} - 125q^{25} - 160q^{28} + 308q^{31} + 110q^{37} + O(q^{40})$$

此外，由于 $F|_2 W_{3^2} = F$，函数 F满足定理 1 的条件。由 $S_4(9)$ 的一维性可知，我们可以忽略海克算子。在表 3 中，我们计算了 F 的扭曲的 L 函数的一些中心值：

D	$L(F \otimes \chi_D, 2)$
5	1。22352 ...
13	0。58368 。 。 。
28	2.95446 ...
53	0.03545 ...
88	0。53026 。 。 。
152	1。86870 ...
161	1。31245 。 。 。
172	0

表 3： $L(F \otimes \chi_D,2)$ 对不同基本判别式 D

因此，当 $\left(\frac{D}{3}\right) = 1$ 时，我们取 $D_0 = 13$；当 $\left(\frac{D}{3}\right) = -1$ 时，我们取 $D_0 = 5$。我们设

$$P(x) := \sum_{\substack{Q \in Q_{9,DD_0} \\ a<0<Q(x,1)}} \chi_{D_0}(Q) Q(x,1) - C_0,$$

with

$$C_0 := \sum_{\substack{Q \in Q_{9,DD_0} \\ a<0<c}} \chi_{D_0}(Q) Q(0,1).$$

群 $\Gamma_0(9)$ 由以下元素生成：

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, \gamma_3 := \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}, \text{ and } \gamma_4 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

因此，第一步我们计算 $P(x)$，其中 $x = 1,\ 1/2,\ 4/5$ 以及 0。计算结果见表4：

D	$\left(\frac{D}{3}\right)$	$P(1)$	$P(1/2)$	$P(4/5)$	$P(0)$
28	1	0	12	96/25	0
53	-1	0	-3/2	-12/25	0
88	1	0	-12	-96/25	0
152	-1	0	24	192/25	0
161	-1	0	21	168/25	0
172	1	0	0	0	0

表4：局部多项式 $P_{4,\ 9,\ D,\ D_0}$

从计算值可知，我们只需更仔细地检查情形 D =172 和 $D_0 = 13$。事实上，我们发现，在这种情形下，对于所有 $1 \leq i \leq 4$， $P(\gamma_i^2 \cdot 0) = 0$且 $P(\gamma_i^3 \cdot 0) = 0$。

5.3 空间 $S_4(25)$

我们现在研究函数

$$F_{25,1} := q + q^2 + 7q^3 - 7q^4 + 7q^6 + 6q^7 - 15q^8 + 22q^9 + O(q^{11}) \in S_4(25),$$

这是 $S_4(25)$ 中的一个新形式。 $S_4(25)$ 的维数为 5。除了 $F_{25,\ 1}$ 之外，还有另外两个新形式，记为 $F_{25,\ 1}$ 和$F_{25,\ 2}$。此外，还有 2 个来自 5 级的旧形式，记为 F_5 和 $F_{5,\ tw}(z) = F_5(5z)$。

由于 $F|W_5 = F$，因此 F 满足定理 1 的条件。在表 5 中，我们计算了 $F_{25,\ 1}$ 的扭曲的 L-函数的一些中心值。

D	$L(F_{25,\ 1} \otimes \chi_D,\ 2)$
8	1。72936。。。
21	1。62649。。。
44	0。13407...
53	0
56	0.37350...
69	0
73	1.568476...
77	0。23165.....

表 5： $L(F_{25,1} \otimes \chi_D,2)$

我们将固定 $D_0 = 21$ （若 $\left(\frac{D}{5}\right) = 1$ 且 $D_0 = 8$ （若 $\left(\frac{D}{5}\right) = -1$）。

现在说明我们如何构造海克算子乘积：在海克算子作用下，张成 $S_4(5)$ 的 5 个尖点形式对应的素数 2、3 和 7 的特征值可见表 6。

p	2	3	7
$F_{25,1}$	1	7	6
$F_{25,2}$	4	-2	-6
$F_{25,3}$	-1	-7	-6
$F_5, F_{5,tw}$	-4	2	6

表 6：空间 $S_4(25)$ 中特征形式在海克算子 T_p 作用下的特征值。

由此可知，算子

$$\mathbb{T} = (T_7 + 6)(T_2 + 4) : S_4(25) \to \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{F_{25,1}\}$$

是良定义且非零的。我们定义：

$$\tilde{\mathbb{T}} := (T_7 + 7^{-3} \cdot 6)(T_2 + 2^{-3} \cdot 4).$$

Set

$$P(x) := \left(\sum_{\substack{Q \in Q_{25,DD_0} \\ a<0<Q(x,1)}} \chi_{D_0}(Q) Q(x,1)^{k-1} \right) |_{2-2k} \tilde{\mathbb{T}}(x_i) - C_0,$$

其中 $C_0 := \left(\sum_{Q \in Q_{25}, a<0<Q} {}^{DD_0}{}_{x\ 1(,)} \chi_{D_0}(Q) Q(x,1)^{k-1} \right) |_{2-2k}$ T(0)。群 $\Gamma_0(N)$ 由

以下元素生成：

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 := \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 25 & -4 \end{pmatrix}, \gamma_3 := \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 25 & -7 \end{pmatrix}, \gamma_4 := \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 25 & -9 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_5 := \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ 25 & -14 \end{pmatrix}, \gamma_6 := \begin{pmatrix} 18 & -13 \\ 25 & -18 \end{pmatrix}, \text{ and } \gamma_7 := \begin{pmatrix} 21 & -16 \\ 25 & -19 \end{pmatrix}$$

在表7中，我们计算了 $P(x)$ 在 $x \in \{\gamma_i \cdot 0 \text{ 处的值：} \ 1 \le i \le 7\} = \{1, 1/4, 2/7, 4/9, 9/14, 13/18, 16/19\}$。

D	$(\frac{D}{3})$	$P(1)$	$P(1/4)$	$P(2/7)$	$P(4/9)$	$P(9/14)$	$P(13/18)$	$P(16/19)$
44	1	0	25/686	580/16807	200/3969	2475/67228	565/15876	400/17689
53	-1	0	0	0	0	0	0	0
56	1	0	-25/343	-1160/16807	-400/3969	-2475/33614	-565/7938	-800/17689
69	1	0	0	0	0	0	0	0
73	-1	0	125/1372	1450/16807	500/3969	12375/134456	2825/31752	1000/17689
77	-1	0	-25/686	-580/16807	-200/3969	-2475/67228	-565/15876	-400/17689

表7：局部多项式 $P_{4,\ 25,\ D,\ D_0}|_{2-2k}$T

由此表可知，只需在 $D_0 = 8$，$D = 53$ 以及 $D_0 = 21$，$D = 69$ 时计算 $P(\gamma_i^2 \cdot 0)$，其中 $1 \le i \le 7$。我们得到 $P(\gamma_i^2 \cdot 0) = 0$，这证实了定理 1 的断言。

局部调和 Maass 形式

本附录旨在仔细证明方程 (13) 中局部调和 Maass 形式的性质。我们回顾其定义：

$$\mathcal{F}_{\text{1-k,N,D,D}_0}(z) := \frac{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}2\pi} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0}(Q)\mathrm{sgn}(Q_z) \\ Q(z,1)^{k-1}\beta\left(\frac{DD_0y^2}{|Q(z,1)|^2}; k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Here

- $\mathcal{Q}_{N,DD_0} = \{Q = [a,b,c] : N|a \text{ and } b^2-4ac = DD_0\}$
- 广义属特征的定义如下（见定义 1.4）：

$$\chi_{D_0}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{if } (a,b,c,D) > 1 \\ \left(\frac{D_0}{r}\right) & \text{if } (a,b,c,D_0) = 1, \quad Q \text{ represents } r, \quad (r,D_0) = 1. \end{cases}$$

- for $z \in \mathbb{H}$, we set: $Q_z := \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(a|z|^2 + b\mathrm{Re}(z) + c)$
- 对于 $s, w \in$ 复数域中满足 Re(s),Re(w) > 0的元素，我们定义

$$\beta(v; s, w) := \int_0^v u^{s-1}(1-u)^{w-1}du.$$

本文主要是在 [4] 的证明中进行直接的修改——通常将 SL_2(Z) 替换为 Γ_0(N)，并加入广义属特征。因此，我们常常只概述证明，并请读者参阅 [4] 了解更多细节。我们回顾一下局部调和 Maass 形式的定义：

定义 A.1. 若函数 $\mathcal{F} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为权 $2-2k$、相对于同余子群 Γ 且例外集为 E 的局部调和 *Maass* 形式：

(i) 对每个 $\gamma \in \Gamma$，对每个 $z \in \mathbb{H}$： $\mathcal{F}|_{2-2k}\gamma(z) = \mathcal{F}(z)$。

(ii) 对于每个 $z \in$ 上半平面 $\setminus E$，都存在一个 $\mathcal{U}$ 邻域，使得其中 $\mathcal{F}$ 实解析，且 $\Delta_{2-2k}(\mathcal{F}) = 0$。

(iii) 对于每个 $z \in E$，我们有：

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2}\lim_{w\to 0^+}(\mathcal{F}(z+iw) + \mathcal{F}(z-iw)), \quad w \in \mathbb{R}.$$

(iv) 函数 $\mathcal{F}$ 在趋近于 $i\infty$ 时至多呈多项式增长。

本附录的结构如下：我们首先说明如何将$\mathcal{F}_{1\text{-k,N,D,D}_0}$和$f_{k,N,D,D_0}$分解为与二元二次型的等价类相对应的函数之和，然后证明$\mathcal{F}_{1\text{-k,N,D,D}_0}$和$f_{k,N,D,D_0}$可以用庞加莱级数表示。之后，我们证明$\mathcal{F}_{1\text{-k,N,D,D}_0}$的收敛性，并研究其在例外集上的取值。接着，我们研究算子ξ_{2-2k}和D^{1-2k}的作用，并以此证明$\mathcal{F}_{1\text{-k,N,D,D}_0}$可表示为$f_{k,N,D,D_0}$的（非）全纯艾希勒积分与一个局部多项式之和。最后一节中，我们研究海克算子和阿特金-莱纳对合在$\mathcal{F}_{1\text{-k,N,D,D}_0}$上的作用。

A.1 按二元形式的等价类分解

我们沿二元二次型的等价类分解函数$f_{k、N、D、D_0}$和$\mathcal{F}_{1\text{-k、N、D、D}_0}$。回顾一下，我们定义了（见方程 (15)）：

$$f_{k,N,D,D_0}(z) := \frac{(DD_0)^{k-\frac{1}{2}}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{-k} \in S_{2k}(N).$$

子集$\mathcal{A}\subset\mathcal{Q}_{N、DD_0}$是二元二次型的一个等价类，当且仅当存在$Q_0\in\mathcal{Q}_{N、DD_0}$使得：

$$\mathcal{A}=[Q_0] := \{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0} : \exists\gamma\in\Gamma_0(N) \text{ such that } Q=Q_0\circ\gamma\} \tag{32}$$

我们令

$$f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}} := \frac{(-1)^k(DD_0)^{k-\frac{1}{2}}\chi_{D_0}([A])}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \sum_{Q\in\mathcal{A}} Q(z)^{-k}. \tag{33}$$

此外，我们定义

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}} := \frac{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}(-1)^k\chi_{D_0}([\mathcal{A}])}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \sum_{Q\in\mathcal{A}} \operatorname{sgn}(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0y^2}{|Q(z,1)|^2}\right). \tag{34}$$

这里，为简化记号，我们按照 [4] 中的方式记为：

$$\psi(v) := \frac{1}{2}\beta\left(v;k-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

注意，由于广义属特征在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的作用下保持不变， $\chi_{D_0}([\mathcal{A}])$ 的值确实是良定义的。

函数$\mathcal{F}_{1\text{-k、N、D、D}_0}$和$f_{k、N、D、D_0}$可以分别写成对有限多个$\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$和$f_{k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$求和。众所周知（例如，见 [27] 中 §8 的定理 1）， $SL_2(\mathbb{Z})\setminus Q_{DD_0}$ 是有限的。由于 $[SL_2(\mathbb{Z}):\Gamma_0(N)]<\infty$ 且 $\mathcal{Q}_{N、DD_0}\subset Q_{DD_0}$，所以 $\Gamma_0(N)\setminus\mathcal{Q}_{N、DD_0}$ 也是有限的。

我们通常不研究$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$而是研究$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$。

A.2 庞加莱级数

A.2.1 二元形式的等价类与矩阵的等价类

本节的目标是将$f_{k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$和$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$改写为庞加莱级数。为此，我们首先用双曲点来描述等价类。在这里，如果存在一个矩阵 $\gamma \in SL_2(\mathbf{Z})$，它固定 η_1 和 η_2，并且满足 $|\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$，则称点对 $\eta_1,\ \eta_2 \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ 是双曲的。

我们先作如下的一般性观察。对于任意矩阵

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

我们可以按如下方式将其与一个二元二次型对应起来：

$$Q_\gamma = \gamma_{21} z^2 + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) z - \gamma_{12}.$$

可以计算得，$\det(Q_\gamma) = \mathrm{tr}(\gamma)^2 - 4$。

我们将利用这一点证明，$\Gamma_0(N)$ 中的二元二次型等价类与矩阵等价类之间存在一个双射。

设 $Q_0 = [a, b, c] \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}$。我们用 η_1, η_2 表示其根。此外，设 $\Gamma_{Q_0} = \Gamma_\eta$ 为 $SL_2(\mathbf{Z})$ 中保持 Q_0 不变的矩阵群。回顾方程 (2)，$\Gamma_\eta / \{\pm I\}$ 由以下元素生成

$$\gamma_n := \begin{pmatrix} \frac{t+bu}{2} & cu \\ -au & \frac{t-bu}{2} \end{pmatrix}.$$

这里，t, u 是满足 $t^2 - DD_0 u^2 = 4$ 的最小正整数。注意，t 和 u 只依赖于 DD_0，而不依赖于 Q_0。由于 $N|a$，我们有 $\gamma_\eta \in \Gamma_0(N)$。与此矩阵对应的二元二次型为：

$$Q_{\gamma_\eta}(z) = -u(az^2 + bz + c) = -uQ_0(z) \in Q_{N,DD_0u^2}$$

特别地，γ_η 保持 η_1 和 η_2 不变，并且由于 $\mathrm{tr}(\gamma_\eta)^2 = u^2 DD_0 + 4$，可知 η_1, η_2 是双曲元素。

为了证明与 Q_0 等价的二元二次型与 $\Gamma_{Q_0} \setminus \Gamma_0(N) = \Gamma_\eta \setminus \Gamma_0(N)$ 之间存在双射，我们需要以下事实：存在一个矩阵$\sigma_\eta = \sigma_{Q_0} \in SL_2(\mathbf{R})$，使得 $\sigma_\eta(0) = \eta_1$ 且 $\sigma_\eta(\infty) = \eta_2$，并且：

$$\sigma_\eta^{-1} \gamma_\eta \sigma_\eta = \pm \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} := \gamma_\xi. \tag{35}$$

必要时将 ξ 替换为其逆元，我们可以假设 $\xi > 1$。（注意，若 $|\xi| = 1$，则 $u = 0$，这与 u 为正相矛盾。）现在我们可以证明以下结论：

引理 A.2。 存在一个双射：

$$\begin{aligned} \{Q \in \mathcal{Q}_{N,DD_0} : \exists \gamma \in \Gamma_0(N) \ such\ that\ Q_0 \circ \gamma = Q\} &\leftrightarrow \{\gamma \in \Gamma_\eta \setminus \Gamma_0(N)\}, \\ Q \circ \gamma &\mapsto [\gamma] \\ \frac{1}{-u} Q_{\gamma^{-1}\gamma_\eta\gamma} &\mapsfrom \gamma. \end{aligned}$$

证明。 令 $Q = Q_0 \circ \gamma$ 为某个矩阵 $\gamma \in \Gamma_0(N)$。则有

$$Q = Q_0 \circ \gamma = \frac{1}{-u}(Q_{\gamma_\eta} \circ \gamma) = \frac{1}{-u} Q_{\gamma^{-1}\gamma_\eta\gamma}.$$

最后一步可通过直接计算得出。剩下要证明的是

$$\{\gamma \in \Gamma_0(N) | \gamma^{-1}\gamma_\eta\gamma = \gamma_\eta\} = \Gamma_\eta.$$

可以看出， Γ_η 是左侧的子集，并且可以验证后者确实是一个子群。现在设 $\gamma \in \Gamma_0(N)$ 满足 $\gamma^{-1}\gamma_\eta\gamma = \gamma_\eta$。我们将证明 $\sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta$ 是一个对角矩阵。由此根据σ_η 的定义可得 $\gamma \in \Gamma_\eta$。利用 γ 和σ_η的性质，我们得到:

$$\sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta = \sigma_\eta^{-1}\gamma_\eta^{-1}\gamma\gamma_\eta\sigma_\eta = \gamma_\xi^{-1}\sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta\gamma_\xi$$

因此:

$$\gamma_\xi\sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta = \sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta\gamma_\xi.$$

由于 $\sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta$ 与一个对角矩阵及 $\xi^{-1} \neq \xi$可交换，这意味着$\sigma_\eta^{-1}\gamma\sigma_\eta$ 本身就是一个对角矩阵。由于其行列式为 1，它必定与 γ_ξ具有相同的形式。

□

注 A.3. 请注意，此处必须通过 $-1/u$ 进行归一化，才能得到行列式为 DD_0的二元二次型。然而，将$\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$以及 $f_{k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$ 改写为庞加莱级数时，我们对形如以下形式的项求和

$$\frac{uQ(z,1)}{(det(uQ))^{1/2}} = \frac{Q(z,1)}{(det(Q))^{1/2}}.$$

我们还需要下面这个引理:

引理 A.4 ([4]中的引理 3.1.**)** 设 η_1, η_2 为一对双曲对。设 $Q_\eta = \frac{1}{-u} Q_{\gamma_\eta} \in \mathcal{Q}_{N,DD_0}$ 为其对应的二元二次型。设 $Q := Q_\eta \circ \gamma$ 其中 $\gamma \in \Gamma_0(N)$ 则存在一个常数 $r \in \mathbb{R}^+$ 使得:

$$\sigma_\eta^{-1}\gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix} \sigma_Q^{-1}$$

特别地:

$$arg(\sigma_\eta^{-1}\gamma z) = arg(\sigma_Q^{-1} z) \quad and \quad sgn(Re(\sigma_\eta^{-1}\gamma\tau)) = sgn(Re(\sigma_\eta^{-1}\tau)).$$

此外，我们有:

$$(z|_{-2}\sigma_\eta^{-1}\gamma)(z) = (z|_{-2}\sigma_Q^{-1})(z) = \frac{-Q(z,1)}{\sqrt{DD_0}}$$

这里我们将 σ_Q 记作与 Q的根相关联的矩阵，如方程(35)所示。

A.2.2 、、、、的庞加莱级数

我们证明可以将 $f_{k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$ 写成庞加莱级数。设 $\mathcal{A} = [Q_0]$ 是二元二次型的一个等价类。用 $\eta := \{\eta_1, \eta_2\}$ 表示 Q_0的根。我们令

$$h_k(z) := z^{-k}.$$

我们定义以下双曲庞加莱级数:

$$m_{k,\eta,N,D_0} := \chi_{D_0}([Q_0]) \sum_{\gamma \in \Gamma_\eta \backslash \Gamma_0(N)} (h_k|_{2k}\sigma_\eta^{-1}\gamma)(z).$$

请注意，除了乘上广义属特征外，这个级数与 [4] 中定义的级数仅在求和集合上有所不同：前者以 SL_2(Z) 取代了 $\Gamma_0(N)$。

命题 A.5. 设 $k > 0$ 和 D、D_0 是两个基本判别式，满足$(-1)^k D$,$(-1)^k D_0 > 0$，且 DD_0 不是完全平方数。那么有:

$$m_{k,\eta,N,D_0} = (DD_0)^{\frac{1-k}{2}} \pi \binom{2k-2}{k-1} f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$$

证明。 利用与 Q_0 和 $\Gamma_\eta \setminus \Gamma_0(N)$ 等价的二元二次型集合之间的双射，以及引理 A.4，可得:

$$\begin{aligned}\sum_{Q \in [Q_0]} Q(z,1)^{-k} &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\eta \backslash \Gamma_0(N)} ((Q_\eta \circ \gamma)(z))^{-k} \\ &= \left(-\sqrt{DD_0}\right)^{-k} \sum_{\gamma \in \Gamma_\eta \backslash \Gamma_0(N)} (h_k|_{2k}\sigma_\eta^{-1}\gamma)(z),\end{aligned}$$

由此得到所需结果。 □

A.2.3 用于$\mathcal{F}_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$的庞加莱级数

我们还希望用庞加莱级数表示$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$。首先，我们定义

$$\varphi\left(\arctan\left|\frac{\sqrt{DD_0}y}{a|z|^2 + b\mathrm{Re}z + c}\right|\right) := \frac{1}{2}\beta\left(\frac{DD_0y^2}{|az^2+bz+c|^2}; k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

此外，我们设:

$$\hat{\varphi}(z) := z^{k-1}\mathrm{sgn}(x)\varphi\left(\arctan\left|\frac{y}{x}\right|\right),$$

其中，若 $a|z|^2 + b\mathrm{Re}z + c = 0$，我们假设反正切等于 $\frac{\pi}{2}$。我们定义: –

$$\mathcal{M}_{1-k,\eta,N,D_0}(z) := \chi_{D_0}(Q_\eta) \sum_{\gamma \in \Gamma_\eta \backslash \Gamma_0(N)} (\hat{\varphi}|_{2-2k}\sigma_\eta^{-1}\gamma)(z)$$

我们有以下结果:

命题 A.6。令 $k>1$，并令 D、D_0 为两个基本判别式，满足 $(-1)^k D$、$(-1)^k D_0 > 0$，且 DD_0 不是完全平方数。令 $\mathcal{A}=[Q_0]$，其中 Q_0 的根为 η_1、η_2。则有：

$$\mathcal{M}_{1-k,\eta,N,D_0} = (DD_0)^{\frac{k}{2}}\pi\binom{2k-2}{k-1}\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}.$$

证明与 [4] 中引理 3.2 的证明基本相同。

证明（概要）。若 $\chi_{D_0}(Q_0)=0$，则结论显然。因此，我们可以假设 $\chi_{D_0}(Q_0)\neq 0$。设 $Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}$ 的根为 η_Q。记为 $\sigma_Q=\sigma_{\eta_Q}$。

展开 $\mathcal{M}_{1-k,\eta,N,D_0}$ 的定义后，我们将 $\chi_{D_0}(Q_0)\mathcal{M}_{1-k,\eta,N,D_0}$ 改写为：

$$\begin{aligned}&\chi_{D_0}(Q_0)\mathcal{M}_{1-k,\eta,N}(z)\\ &=\sum_{Q\in[Q_0]}(-1)^{k-1}\left(\frac{Q(z,1)}{(DD_0)^{1/2}}\right)^{k-1}\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(\sigma_Q^{-1}(z,1)))\varphi\left(\arctan\left(\frac{|\operatorname{Im}(\sigma_Q^{-1}(z))|}{|\operatorname{Re}(\sigma_Q^{-1}(z))|}\right)\right)\end{aligned}$$

这里用到了引理 A.4。此外，注意若 $Q=[a,b,c]$ 如上所述，则我们可以改写为：

$$\operatorname{Re}(\sigma_Q^{-1}z)=-\frac{a|z|^2+bx+c}{|a||-z+\eta_Q|^2}\quad\text{and}\quad\operatorname{Im}(\sigma_Q^{-1}z)=\frac{y\sqrt{DD_0}}{|a||-z+\eta_Q|^2}.$$

于是断言得证。 □

A.3 收敛性与特殊点处的取值

本节研究 $\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$ 的收敛性，以及它们在例外集中的点处的取值。

命题 A.7. 设 $k>1$ 和 D, D_0 是两个基本判别式，满足$(-1)^k D, (-1)^k D_0>0$，且 DD_0 不是完全平方数。函数$\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$ 在$\mathbb{H}$上紧收敛，即在$\mathbb{H}$的每个紧子集 $\mathcal{U}\subset$上，$\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0、\mathcal{A}}$ 一致收敛。

证明。回顾一下，$\mathcal{A}=[Q_0]$ 是二元二次型 $Q\in\mathcal{Q}_{N、DD_0}$，它们相对于 $\Gamma_0(N)$ 的作用与 Q_0 等价。我们将 $\mathcal{A}'$ 记为 Q_{DD_0} 中所有相对于 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的作用与 Q_0 等价的矩阵。显然，我们有 $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}'$。由 [4] 中的命题 4.1 可知，对于 $k>1$，函数：

$$\mathcal{F}_{1-k,DD_0,\mathcal{A}'}:=\frac{(-1)^k(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q\in\mathcal{A}'}\operatorname{sgn}(Q_z)Q(z)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0y^2}{|Q(z,1)|^2}\right)$$

紧收敛。他们证明，对每个 $z\in$上半平面，存在一个紧

邻域 $\mathcal{U}\subset$上半平面，在其中$\mathcal{F}_{1-k,\ D,\ A'}$ 绝对收敛。由于

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z)| &\leq \frac{|(-1)^k(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\chi_{D_0}([A])|}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\times \\ &\sum_{Q\in\mathcal{A}}\left|\operatorname{sgn}(Q_z)Q(z)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0y^2}{|Q(z,1)|^2}\right)\right| \\ &\leq \frac{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q\in\mathcal{A}'}\left|\operatorname{sgn}(Q_z)Q(z)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0y^2}{|Q(z,1)|^2}\right)\right|\end{aligned}$$

结论由此得出。 □

回想一下，我们将例外集定义为

$$E_{N,DD_0}:=\{z\in\mathbb{H}:\exists Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}\text{with } Q_z=0\}.$$

命题 A.8. 设 $k>1$ 和 D,D_0 为两个基本判别式，满足$(-1)^kD,(-1)^kD_0>0$，且 DD_0 不是完全平方数。设 $z_0\in E_{N,DD_0}$. 则

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z_0)=\frac{1}{2}\lim_{w\to 0+}\left(\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z_0+iw)+\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z_0-iw)\right).$$

由于论证与 [4], 中命题 5.2 的证明相同，这里我们只给出证明概要。

证明（概要）。根据 [4] 中的引理 5.1，满足 $Q_{z_0}=0$ 的二元二次型 $Q\in Q_{DD_0}$构成有限集。因此，

$$\mathcal{B}_{z_0,N,DD_0}:=\{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}:Q_{z_0}=0\}.$$

因此，存在 $\mathcal{U}$ 的一个邻域，使得对于所有 $z\in\mathcal{U}$ 以及所有$Q\in\mathcal{Q}_{N,\ DD_0}\setminus\mathcal{B}_{z_0,N,DD_0}$，我们都有 $\operatorname{sgn}(Q_z)=\operatorname{sgn}(Q_{z_0})$。由于对于所有这样的 Q，$Q(z,1)$ 和 $\psi\left(\frac{DD_0y^2}{|Q\ z\ 1\ (,)|^2}\right)$ 都是连续的，因此我们有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lim_{w\to 0^+}&\operatorname{sgn}(Q_{z_0+iw})Q(z_0+iw,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0(y_0+w)^2}{|Q(z_0+iw,1)|^2}\right) \\ &+\operatorname{sgn}(Q_{z_0-iw})Q(z_0-iw,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0(y_0+w)^2}{|Q(z_0-iw,1)|^2}\right) \\ &=\operatorname{sgn}(Q_{z_0})Q(z_0,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0y_0^2}{|Q(z_0,1)|^2}\right).\end{aligned}$$

若 $Q\in\mathcal{B}_{z_0,\ N,\ DD_0}$，则可证明 $\operatorname{sgn}(Q_{z_0+iw})=-\operatorname{sgn}(Q_{z_0-iw})$。因此，对于这样的 Q

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lim_{w\to 0^+}&\operatorname{sgn}(Q_{z_0+iw})Q(z_0+iw,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0(y_0+w)^2}{|Q(z_0+iw,1)|^2}\right) \\ &+\operatorname{sgn}(Q_{z_0-iw})Q(z_0-iw,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0(y_0+w)^2}{|Q(z_0-iw,1)|^2}\right)=0.\end{aligned}$$

将此与$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}(z)$ 的定义（方程 (34)）比较，即得断言。

□

A.4 ξ_{2-2k} 和 D^{2k-1} 对 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$的作用及其展开式

本节首先考察 ξ_{2-2k} 和 D^{2k-1} 对$\mathcal{F}_{1-k、\ N、\ D、\ D_0、\ \mathcal{A}}$的作用，这有助于我们研究其展开式。最后，我们将证明$\mathcal{F}_{1-k、\ N、\ D、\ D_0、\ \mathcal{A}}$ 确实是局部调和 Maass 形式。

A.9 定理。 设 $k>1$，且 D, D_0 为基本判别式，满足$(-1)^k D$、$(-1)^k D_0>0$，并且 DD_0 不是完全平方数。设 $z\in$ 上半平面$\backslash E_{N,\ DD_0}$则

$$\xi_{2-2k}(\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}})(z)=(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}},$$
$$D^{2k-1}(\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}})(z)=-(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}.$$

特别是，这意味着

$$\Delta_{2-2k}(\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}})(z)=0.$$

该结论几乎可直接由 [4] 中命题 6.1 的证明得出。

证明。 对每个 $z\in \mathrm{H}\backslash E_{N,\ DD_0}$ 都存在一个邻域，使得$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$是连续且实可微的（另见 [4] 中的引理 5.1）。此外，我们可以将$\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$ 写成庞加莱级数。由于 ξ_{2k-2} 和 D^{2k-1} 与 $\Gamma_0(N)$ 的作用可交换，只需研究它们对 $\hat{}\varphi$ 的作用。注意，根据引理 A.4，我们可以假设 z 的实部非零。

由 [4] 中命题 6.1 的证明可知，对于 $z\in \mathrm{H}\backslash E_{N,\ DD_0}$其中 $x\neq 0$:

$$\xi_{2-2k}(\hat{\varphi})(z)=z^{-k}\text{ and }D^{2k-1}(\hat{\varphi})(z)=-\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}z^{-k}.$$

现在，通过比较 $\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$ 和 $f_{k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$ 的庞加莱级数即可得到该断言。注意， $\Delta_{2k-2}=-\xi_k\xi_{2-2k}$。 □

为了研究 $\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}$ 的展开式，我们需要以下定义。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{Q}_{N,\ DD_0}$ 中的一个等价类。对于 $a>0$， $b\in\mathbb{Z}$，我们定义:

$$r_{a,b}(\mathcal{A}):=\begin{cases}1+(-1)^k & \text{if } [a,b,\frac{b^2-DD_0}{4a}]\in\mathcal{A} \text{ and } [-a,-b,-\frac{b^2-DD_0}{4a}]\in\mathcal{A},\\ 1 & \text{if } [a,b,\frac{b^2-DD_0}{4a}]\in\mathcal{A} \text{ and } [-a,-b,-\frac{b^2-DD_0}{4a}]\notin\mathcal{A},\\ (-1)^k & \text{if } [a,b,\frac{b^2-DD_0}{4a}]\notin\mathcal{A} \text{ and } [-a,-b,-\frac{b^2-DD_0}{4a}]\in\mathcal{A},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

令 $Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}$。对于 $\epsilon=\pm 1$，我们设

$$\mathcal{C}_Q^{\epsilon}:=\left\{z\in\mathbb{H}:\operatorname{sgn}\left(\left|z+\frac{b}{2a}\right|-\frac{(DD_0)^{1/2}}{2|a|}\right)=\epsilon\right\}.$$

简单计算可知， $z \in \mathcal{C}_Q^{\epsilon}$ 等价于 $\mathrm{sgn}(Q_z) = \epsilon \mathrm{sgn}(a)$。令 $\mathcal{C} \subset \mathrm{H} \setminus E_{N,DD_0}$ 为一个连通分支。我们定义：

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}} := \{Q \in \mathcal{A} : z \in \mathcal{C}_Q^-, \text{ for all } z \in \mathcal{C}\}.$$

换言之，集合 $\mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}$ 由满足以下条件的二元二次型组成：对所有 $z \in \mathcal{C}$，$\mathrm{sgn}(Q_z) = -\mathrm{sgn}(a)$。最后我们定义：

$$c_\infty(\mathcal{A}) = \frac{-\chi_{D_0}([\mathcal{A}])}{2^{2k-2}(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}, \\ N|a}} a^{-k} \sum_{\substack{b \mod 2a, \\ b^2 \equiv DD_0 \mod 4a}} r_{a,b}(\mathcal{A}).$$

我们有以下定理：

定理 A.10. 设 $k > 1$，且 D、D_0 为两个基本判别式，满足 $(-1)^k D$、$(-1)^k D_0 > 0$，并且 DD_0 不是完全平方数。设 $\mathcal{C} \subset$ 上半平面 $\setminus E_{N,DD_0}$ 为一个不与例外集相交的连通分支。对每个 $z \in \mathcal{C}$，函数 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 有如下展开式：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z) =& (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} f^*_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z) \\ &- (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} \frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}} \mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}}(z) + P_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(z).\end{aligned}$$

这里，$P_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(z)$ $\in$复数域$[z]$ 是由下式给出的多项式：

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(z) = c_\infty(\mathcal{A}) - (-1)^k 2^{2-2k} (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} \chi_{D_0}([A]) \sum_{Q \in \mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}} sgn(a) Q(z,1)^{k-1}.$$

此证明与 [4]中定理 7.1 的证明非常相似。因此我们仅给出概要。

证明（概要）。利用 A.9 定理以及（非）全纯艾希勒积分的定义，可以证明，对每个 $z \in$ 上半平面$\setminus E_{N,DD_0}$，有：

$$\begin{aligned}P_{C,A}(z) := \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}} &- (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} f^*_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z) \\ &+ (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} \frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}} \mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}}(z)\end{aligned}$$

是一个次数至多为 $2-2k$ 的多项式。为了证明局部多项式的显式公式，我们对集合 $\mathcal{B}_{\mathcal{C}、A}$ 的基数进行归纳：若 $z = x + iy \in \mathcal{C}$，且 $y > \frac{\sqrt{DD_0}}{2|N|}$，则 $\mathcal{B}_{\mathcal{C}、A}$ 为空集。因此，我们要证明局部多项式等于无穷远处常数 $c_\infty(\mathcal{A})$。

给定一个二元二次型 $[a,b,c] = [a,b,\frac{b^2-DD_0}{4a}]$，~~我们~~可以将 b 写成一个

模 $2a$ 剩余。这意味着对于 $y > \frac{\sqrt{DD_0}}{2|N|}$

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z) = \frac{(-1)^k (DD_0)^{\frac{1}{2}-k} \chi_{D_0}([\mathcal{A}])}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \times \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N|a}} \sum_{\substack{b \bmod 2a\\ b^2\equiv DD_0 \bmod 4a\\ Q=[a,b\frac{b^2-DD_0}{4a}]}} r_{a,b}(\mathcal{A}) \sum_{n\in Z} Q(z+n,1)^{k-1} \psi\left(\frac{DD_0 y^2}{|Q(z,1)|^2}\right)$$

利用泊松求和和引理 7.3，在 [4], 中我们得到常数项对应于

$$c_\infty(\mathcal{A}) = \frac{-\chi_{D_0}([\mathcal{A}])}{2^{2k-2}(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N|a}} a^{-k} \sum_{\substack{b \bmod 2a,\\ b^2\equiv DD_0 \bmod 4a}} r_{a,b}(\mathcal{A})$$

对于归纳步骤，我们证明：给定一个满足 $\#\mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}} = n$ 的分支 $\mathcal{C}$，则存在一个相邻分支 $\mathcal{C}_1$，它与 $\mathcal{C}$ 仅被一条测地线 S_{Q_0}隔开，并且满足 $\#\mathcal{B}_{\mathcal{C}_1,\mathcal{A}} < n$。因此，该命题对 $\mathcal{C}_1$成立。两个局部多项式 $P_{\mathcal{C},\mathcal{A}}$ 和$P_{\mathcal{C}_1,\mathcal{A}}$ 之间的差由与测地线 S_{Q_0}相关联的二元二次型决定。可能出现两种情形：1）只有二元二次型 Q_0 对应于S_{Q_0}；2）若 $-Q_0 \in \mathcal{A}$，则 Q_0 和 $-Q_0$ 都对应于 S_{Q_0}。通过显式计算 $\mathcal{C}$

$$\lim_{w\to 0^+} \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z-iw) - \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z+iw)$$

对于 z 在 S_{Q_0}上的情形。 □

先验地，我们不知道 Q 和 $-Q$ 是否属于同一个等价类，这使得显式计算 $P_{\mathcal{C},\mathcal{A}}$ 很困难。然而，对所有等价类求和后，我们得到了一个出人意料的优美表达式。令

$$c_{k,N,D,D_0,\infty} := \frac{-2^{3-2k}}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N|a}} a^{-k} \sum_{\substack{b \bmod 2a,\\ b^2\equiv DD_0 \bmod 4a}} \chi_{D_0}\left(\left[a, b\frac{b^2-DD_0}{4a}\right]\right) \tag{36}$$

我们有

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0} = \sum_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$$

其中我们对所有二元二次型的等价类 $\mathcal{A}$ 求和。我们有如下结果：

定理 A.11。 设 $k>1$，并设 D、D_0 为两个基本判别式，使得 $(-1)^k D$，$(-1)^k D_0>0$，且 DD_0 不是完全平方数。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z) =&(DD_0)^{\frac{1}{2}-k} f^*_{k,N,D,D_0}(z)\\ &-(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}}(z)+\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z).\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{P}_{k,N,D,D_0}(z)=c_{k,N,D,D_0,\infty}+(-1)^k 2^{3-2k}(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0},\\ a<0<Q_z}}\chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{k-1}.$$

证明。 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(z) =&\sum_{\mathcal{A}}\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z)\\ =&(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\sum_{\mathcal{A}} f^*_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z)\\ &-(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}}(z)+\sum_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(z).\end{aligned}$$

由于 $\sum_{\mathcal{A}} f_{k,\ N,\ D,\ D_0,\ \mathcal{A}}=f_{k,\ N,\ D,\ D_0}$，可得

$$\sum_{\mathcal{A}} f^*_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}(z)=f^*_{k,N,D,D_0}(z),\ \text{and}\ \sum_{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0,\mathcal{A}}}(z)=\mathcal{E}_{f_{k,N,D,D_0}}(z).$$

在研究局部多项式之前，请注意

$$\chi_{D_0}([a,b,c])=\left(\frac{D_0}{-1}\right)\chi_{D_0}([-a,-b,-c])=\begin{cases}\chi_{D_0}([a,b,c]) & \text{if } D_0>0,\\ -\chi_{D_0}([a,b,c]) & \text{if } D_0<0.\end{cases}$$

回想一下，我们假设 $(-1)^k D_0>0$。因此，$D_0>0$ 意味着 k 是偶数，而$D_0<0$ 意味着 k 是奇数。

我们首先研究无穷远处常数:

$$\sum_{\mathcal{A}} c_\infty(A)=\frac{-1}{2^{2k-2}(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}\sum_{\mathcal{A}}\chi_{D_0}([\mathcal{A}])\sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N\mid a}} a^{-k}\sum_{\substack{b \mod 2a,\\ b^2\equiv DD_0 \mod 4a}} r_{a,b}(A)$$

为避免使用等价类集合 $\mathcal{A}$来写出该和式，我们将重点放在二元二次型的对 Q和 $-Q$上。我们根据k的奇偶性进行区分。

如果 k 为偶数，那么根据 $r_{a,\ b}(\mathcal{A})$ 的定义可知，无论 Q 和 $-Q$ 是否属于同一个等价类，它们都会对总和作出贡献

$(-1)^k\chi_{D_0}([\mathcal{A}]) = \chi_{D_0}(Q)$。因此，我们可以改写为：

$$\sum_{\mathcal{A}} \chi_{D_0}([A]) \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N|a}} a^{-k} \sum_{\substack{b \bmod 2a,\\ b^2\equiv DD_0 \bmod 4a}} r_{a,b}(A) \tag{37}$$

$$= 2\sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\\ N|a}} a^{-k} \sum_{\substack{b \bmod 2a,\\ b^2\equiv DD_0 \bmod 4a}} \chi_{D_0}\left(\left[a, b, \frac{b^2-DD_0}{4a}\right]\right). \tag{38}$$

若 k 为奇数，则由于广义属特征在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 下不变，若 Q 和 $-Q$ 属于同一个等价类，则 $\chi_{D_0}(Q) = 0$。否则，它们额外贡献的部分为：

$$\chi_{D_0}(Q) + (-1)^k\chi_{D_0}(-Q)) = 2\chi_{D_0}(Q).$$

因此，在这种情形下，我们也得到了方程 (37)。

我们用类似的技巧改写局部多项式的非恒定部分：

$$\sum_{\mathcal{A}} \chi_{D_0}([A]) \sum_{Q\in\mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}} \operatorname{sgn}(a)Q(z,1)^{k-1} = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{Q\in\mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}} \operatorname{sgn}(a)\chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{k-1}$$

回想一下，$Q \in \mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}$ 若对所有 $z \in \mathcal{C}$ 都有：

$$\operatorname{sgn}(Q_z) = -\operatorname{sgn}(a).$$

因此，若对于某个等价类 $\mathcal{A}$，有 $Q \in \mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}$，则存在一个等价类 $\mathcal{A}'$（它可能是 $\mathcal{A}$），使得 $-Q \in \mathcal{B}_{\mathcal{C},\mathcal{A}'}$。因此，我们可以再次考察配对 Q 和 $-Q$ 的贡献。令 $Q = [a, b, c]$ 满足 $a < 0$，则得到：

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{sgn}(a)\chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{k-1}\right) &+ \left(\operatorname{sgn}(-a)\chi_{D_0}(-Q)(-Q)(z,1)^{k-1}\right)\\ &= \chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{k-1}\left((-1) + (-1)^{k-1}\left(\frac{D_0}{-1}\right)\right)\\ &= -2\chi_{D_0}(Q)Q(z,1)^{k-1}\end{aligned}$$

这里我们用到了：根据与上文相同的论证，若 $\chi_{D_0}(Q) \neq 0$，则 $(-1)^{k-1}\left(\frac{D_0}{-1}\right) = -1$。这就证明了该断言。 —

□

我们现在可以证明，$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$ 都是局部调和 Maass 形式：

定理A.12。设 $k > 1$，且令 D 和 D_0 为满足 $(-1)^k D$、$(-1)^k D_0 > 0$ 且 DD_0 不是完全平方数的两个基本判别式。此外，令 $\mathcal{A}$ 为二元二次型的任意一个等价类。函数 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$ 是局部调和 *Maass* 形式，其例外集为 E_{N,DD_0}。

证明与 [4] 中定理7.4的证明相同。

证明。我们检查 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 是否满足定义 A.1。将 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 写成庞加莱级数的形式，并利用命题 A.7 中证明的绝对收敛性，可得 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 是权为 $2-2k$ 的模形式。定义 A.1 中的性质 (ii) 和 (iii) 由命题 A.8 和 A.9 定理证明。最后，$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 的展开式（在定理 A.10 中证明）以及局部多项式的显式描述保证了有界增长。这就证明了 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$ 的断言。由于 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0} = \sum_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0,\mathcal{A}}$，该结论对 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}$ 成立。

□

A.5 海克算子

本节研究海克算子在$f_{k、N、D、D_0}$ 和$\mathcal{F}_{1\text{-}k、N、D、D_0}$上的作用。对于高维尖点形式空间中的定理 1，海克算子在定理陈述和证明中都至关重要。我们证明，当（D_0、 p） $=1$时，可以明确描述海克算子的作用。此外，我们还研究$\mathcal{F}_{1\text{-}k、N、D、D_0}$ 在阿特金-莱纳对合下的行为。

首先回顾，对于任意平移不变函数 f，我们可以定义权为 k 的海克算子 T_p：

$$f|_k T_p := p^{k-1} f(pz) + p^{-1} \sum_{r \bmod p} f\left(\frac{z+r}{p}\right).$$

我们首先研究 T_p 在$f_{k、N、D、D_0}$上的作用。

定理 A.13. 设 $k>1$，并设 D、 D_0 为两个基本判别式，使得（-1）$^k D$， （-1）$^k D_0 > 0$，且 DD_0 不是完全平方数。设 p 为一个素数，使得（p， N） $=$（p， D_0） $=1$。那么

$$f_{k,N,D,D_0} \mid_{2k} T_p = f_{k,N,Dp^2,D_0} + \left(\frac{D}{p}\right) p^{k-1} f_{k,N,D,D_0} + p^{2k-1} f_{k,N,\frac{D}{p^2},D_0}$$

此处 $f_{k,\ N,\ \frac{D}{p^2},\ D_0} = 0$ 若 $p^2 \nmid D$。

在 [3], 中，Bengoechea 对 $N=1$ 证明了相同的结论。若 $N>1$，则可以完全按照相同的论证进行。因此，我们仅概要说明证明。

证明（概要）。根据定义，我们得到

$$f_{k,N,D,D_0} \mid_{2k} T_p = \frac{(DD_0p)^{k-\frac{1}{2}}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \sum_{[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} \left(\frac{\chi_{D_0}([a,b,c])}{([a,bp,cp^2](z,1))^k} + \sum_{r \bmod p} \frac{\chi_{D_0}([a,b,c])}{([a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2](z,1))^k} \right)$$

由于 $(p, D_0) = 1$，可以证明 $\chi_{D_0}([a,b,c]) = \chi_{D_0}([ap^2,bp,c])$，并且$\chi_{D_0}([a,b,c])$ $= \chi_{D_0}([a,bp,cp^2]) = \chi_{D_0}([a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2])$。于是我们

可以将该和式改写为:

$$f_{k,N,D,D_0}\mid_{2k} T_p = \frac{(DD_0p)^{k-\frac{1}{2}}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi} \sum_{[a,b,c]\in Q_{N,DD_0p^2}} n(a,b,c)([a,b,c](z,1))^{-k}.$$

Here

$$n(a,b,c) := \chi_{D_0}([a,b,c]) \left(\epsilon\left(\frac{a}{p^2}, \frac{b}{p}, c\right) + \sum_{r \bmod p} \epsilon\left(a, \frac{b-2aj}{p}, \frac{c-bj+aj^2}{p^2}\right)\right)$$

其中，当 $\epsilon(a,b,c) = 1$ if a,b,c 为整数时取该值，否则为 0。

设 $[a,b,c] \in Q_{DD_0p^2}$，其中对于某个 $m \in \{1,2\}$ 有 $p^m | a,b,c$。由于 $(N,p) = 1$，我们有 $N|a \Leftrightarrow N|(a/p^m)$。现在，将 $n(a,b,c)$ 按照 [24] (第 291/293 页) 重写，并注意到如果对于 $m \in \{1,2\}$ 有 $p^m | a,b,c$，则结果立即得到

$$\chi_{D_0}([a,b,c]) = \left(\frac{D_0}{p^m}\right) \chi_{D_0}([a/p, b/p, c/p]).$$

□

现在我们研究 $\mathcal{F}_{1\text{-k,N,D,D}_0}$ 的海克算子作用。我们证明如下:

定理 A.14。设 $k > 1$，且 D、D_0 是两个基本判别式，满足 $(-1)^k D$、$(-1)^k D_0 > 0$，并且 DD_0 不是完全平方数。设 p 为满足 $(p,N) = (p,D_0) = 1$ 的素数。那么

$$\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}T_p = \mathcal{F}_{1-k,N,Dp^2,D_0}(z) + p^{-k}\left(\frac{D}{p}\right)\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0} + p^{1-2k}\mathcal{F}_{1-k,N,\frac{D}{p^2},D_0}.$$

这里，若 $p^2 \nmid D$，则 $\mathcal{F}_{1-k,\ N,\ \frac{D}{p^2},\ D_0} = 0$。

我们以与前一个证明相同的方式证明这一陈述。请注意，这种论证方式与 [4] 中的方法不同。

证明。由定义可知:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}T_p(z) \\
&= p^{1-2k}\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}(pz) + p^{-1}\sum_{r \bmod p} \mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}\left(\frac{z+r}{p}\right) \\
&= \frac{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\left(\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} p^{1-2k}\chi_{D_0}(Q)\mathrm{sgn}(Q_{pz})Q(pz,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0p^2y^2}{|Q(pz,1)|^2}\right)\right. \\
&\left. + p^{-1}\sum_{r \bmod p}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}} \chi_{D_0}(Q)\mathrm{sgn}(Q_{(z+r)/p})Q((z+r/p),1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0(y/p)^2}{|Q((z+r)/p,1)|^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

注意,

$$[a,b,c](pz,1)=[ap^2,bp,c](z,1).$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}p^2\left([a,b,c]\left(\frac{z+r}{p},1\right)\right)&=a(z+r)^2+bp(z+r)+cp^2\\&=[a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2](z,1).\end{aligned}$$

由于我们假设 $(D_0,p)=1$，因此可得:

$$\chi_{D_0}([a,b,c])=\chi_{D_0}([ap^2,bp,c])=\chi_{D_0}([a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2]).$$

因此，我们可以将 $\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}T_p(z)$ 改写为

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}|_{2-2k}T_p(z)\\&=\frac{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}}\left(p^{1-2k}\chi_{D_0}([ap^2,bp,c])\mathrm{sgn}([ap^2,bp,c]_z)\right.\\&\times\left([ap^2,bp,c](z,1)\right)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0p^2y^2}{|[ap^2,bp,c](z,1)|^2}\right)\\&+\sum_{r\mod p}p^{1-2k}\chi_{D_0}([a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2])\mathrm{sgn}([a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2]_z)\\&\times\left([a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2](z,1)\right)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0(y/p)^2}{p^{-4}|[a,bp+2ar,cp^2+bpr+ar^2](z,1)|^2}\right)\\&=\frac{(DD_0p^2)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0p^2}}\left(\mathrm{sgn}(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0p^2y}{|Q(z,1)|^2}\right)\times n(a,b,c)\right).\end{aligned}$$

这里我们再次设:

$$\begin{aligned}n(a,b,c):&=\chi_{D_0}([a,b,c])\left(\epsilon\left(\frac{a}{p^2},\frac{b}{p},c\right)+\sum_{r\mod p}\epsilon\left(a,\frac{b-2aj}{p},\frac{c-bj+aj^2}{p^2}\right)\right)\\&=\chi_{D_0}([a,b,c])\left(1+\left(\frac{DD_0}{p}\right)\epsilon\left(\frac{a}{p},\frac{b}{p},\frac{c}{p}\right)+p\epsilon\left(\frac{a}{p^2},\frac{b}{p^2},\frac{c}{p^2}\right)\right)\end{aligned}$$

第二个方程由 [24] (第 291/292 页)得出。我们有:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{1-k,N,Dp^2,D_0}\\&=\frac{(DD_0p^2)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0p^2}}\chi_{D_0}([a,b,c])\mathrm{sgn}(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0p^2y}{|Q(z,1)|^2}\right).\end{aligned}$$

设 $m\in\{1,2\}$。若 $p^m|a,\ b,\ c$那么对于任意 $x,\ y\in\mathbb{Z}$，我们有:

$ax^2+bxy+cy^2=p^m\left(ax^2/p^m+bxy/p^m+cy^2/p^m\right)$ 由此可得

$$\chi_{D_0}([a,b,c])=\left(\frac{D_0}{p^m}\right)\chi_{D_0}[a/p^m,b/p^m,c/p^m].$$

Thus

$$\begin{aligned}\frac{(DD_0p^2)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0p^2}}&\left(\frac{DD_0}{p}\right)\epsilon\left(\frac{a}{p},\frac{b}{p},\frac{c}{p}\right)\chi_{D_0}([a,b,c])\\&\times\operatorname{sgn}(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0p^2y}{|Q(z,1)|^2}\right)\\&=\frac{(DD_0p^2)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}}\left(\frac{D}{p}\right)\chi_{D_0}([a,b,c])\\&\times\operatorname{sgn}(Q_z)p^{k-1}Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0y}{|Q(z,1)|^2}\right)\\&=p^{-k}\left(\frac{D}{p}\right)\mathcal{F}_{1-k,N,D,D_0}.\end{aligned}$$

最后，对于最后一项，注意：

$$\begin{aligned}\frac{(DD_0p^2)^{\frac{1}{2}-k}}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0p^2}}&p\epsilon\left(\frac{a}{p^2},\frac{b}{p^2},\frac{c}{p^2}\right)\chi_{D_0}([a,b,c])\\&\times\operatorname{sgn}(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{DD_0p^2y}{|Q(z,1)|^2}\right)\\&=\frac{(DD_0p^2)^{\frac{1}{2}-k}p}{\binom{2k-2}{k-1}\pi}\sum_{Q=[a,b,c]\in\mathcal{Q}_{N,DD_0/p^2}}\chi_{D_0}([a,b,c])\\&\times\operatorname{sgn}(Q_z)p^{2k-2}Q(z,1)^{k-1}\psi\left(\frac{(DD_0/p^2)y}{|Q(z,1)|^2}\right)\\&=p^{1-2k}\mathcal{F}_{1-k,N,D/p^2,D_0}\end{aligned}$$

这就证明了该断言。 □

本节最后确定 $\mathcal{F}_{\text{1-k、N、D、D}_0}$ 在 Fricke 对合下的行为。

引理 A.15。我们有：

$$\mathcal{F}_{\text{1-k,N,D,D}_0}\Big|_{2-2k}\left(W_N-\left(\frac{D_0}{N}\right)\ id\right)=0.$$

注 A.16。 若 $\left(\frac{D_0}{N}\right)=1$，则可得到引理 *3.3*。 *[12]*。

证明与 [12] 中引理 3.3 的证明相同：

证明。 利用以下事实：

$$\begin{aligned}[a,b,c]|W_N(z)&=\frac{1}{N}([a,b,c]\circ W_N)(z,1)\\&=\frac{1}{N}(a-bNz+cN^2z^2)\\&=Nz^2[a,b,c](-1/(Nz),1)\end{aligned}$$

我们得到:

$$\begin{aligned}\frac{DD_0\mathrm{Im}\left(W_N(z)\right)^2}{\left|Q\left(W_N(z),1\right)\right|^2}&=\frac{DD_0\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{Nz}\right)^2}{\left|Q\left(-\frac{1}{Nz},1\right)\right|^2}\\&=\frac{DD_0(N|z|^2)^{-2}\mathrm{Im}(z)^2}{(N|z|^2)^{-2}\left|(Q|W_N)\left(z,1\right)\right|^2}=\frac{DD_0\mathrm{Im}\left(z\right)^2}{\left|(Q|W_N)\left(z,1\right)\right|^2}.\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}[a,b,c]_{W_Nz}&=\frac{1}{\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{Nz}\right)}\left(a\left|-\frac{1}{Nz}\right|^2+b\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{Nz}\right)+c\right)\\&=\frac{N|z|^2}{\mathrm{Im}(z)}\left(\frac{a}{N^2|z|^2}-b\frac{\mathrm{Re}(z)}{N|z|^2}+c\right)\\&=\left[cN,-b,\frac{a}{N},\right]_z=\left([a,b,c]|W_N\right)_z.\end{aligned}$$

特别地，我们有 $sgn([a,b,c]_{W_Nz})=sgn(([a,b,c]|W_N)_z)$。

我们计算 $\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0}(z)|_{2k-2}W_N$:

$$\begin{aligned}&\frac{\binom{2k-2}{k-1}2\pi}{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}\mathcal{F}_{\mathrm{1\text{-}k,N,D,D_0}}|_{2-2k}W_N(z)\\&=(Nz)^{2k-2}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}}\chi_{D_0}(Q)sgn(Q_{W_N(z)})Q(W_N(z),1)^{k-1}\beta\left(\frac{DD_0\mathrm{Im}((W_N(z)))^2}{|Q(W_N(z),1)|^2};k-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\&=(Nz)^{2k-2}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}}\chi_{D_0}(Q)sgn((Q|W_N)_z)(Q|W_N)(z,1)^{k-1}\left(Nz\right)^{2-2k}\\&\beta\left(\frac{DD_0\mathrm{Im}(z)^2}{|(Q|W_N)(z,1)|^2};k-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\&=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,DD_0}}\left(\frac{D_0}{N}\right)\chi_{D_0}(Q)sgn(Q_z)Q(z,1)^{k-1}\beta\left(\frac{DD_0\mathrm{Im}(z)^2}{|Q(z,1)|^2};k-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\frac{D_0}{N}\right)\frac{\binom{2k-2}{k-1}2\pi}{(DD_0)^{\frac{1}{2}-k}}\mathcal{F}_{\mathrm{1\text{-}k,N,D,D_0}}|_{2-2k}\ \mathrm{id}(z)\end{aligned}$$

这里我们将 Q 替换为 $Q|W_N$，并使用了引理 1.9。 □

至此，我们对函数$\mathcal{F}_{1-k、N、D、D_0}$的研究完成了。

参考文献

[1] J. A. Antoniadis。《在 $\Gamma_0(N)$ 上具有有理周期的模形式》。《数学手稿》，74(4):359–384, 1992。

[2]A. O. L. Atkin 和 W.-C. W. Li。新形式的扭曲与 W 算子的伪特征值。《数学研究》，48(3):221–243, 1978。[3] P. Bengoechea。赫克多项式的不可约性与伽罗瓦群，2020。[4] K. Bringmann、B. Kane 和 W. Kohnen。局部调和 Maass 形式与新谷提升的核。《国际数学研究公告》，2015(11):3185–3224, 03 2014。[5] S. Ehlen、P. Guerzhoy、B. Kane 和 L. Rolen。椭圆曲线的中心 L 值与局部多项式。《伦敦数学会会刊》，120(5):742–769, 2020。[6] W. Kohnen。半整数权新形式。《Journal f》¨《ur die reine und angewandte Mathematik》，333:32–72, 1982年。[7] W. Kohnen。半整数权模形式的傅里叶系数。《数学年刊》，271:237–268, 1985年。[8] W. Kohnen。关于志村对应的一点说明。《Glasgow Mathe- matical Journal》，30(3):285–291, 1988年。[9] W. Kohnen 和 D. Zagier。模形式的 L 级数在临界带中心处的取值。《Invetiones mathematicae》，64:175–198, 1981。[10] K. Kong。《模局部多项式与 L 值消失》。博士论文，香港大学（香港薄扶林），2017年。[11] S. L¨obrich 和 M. Schwagenscheidt。局部调和 Maass 形式与亚纯模形式的周期。《美国数学会汇刊》，375(1):501– 525, 2022年。[12] J. Males、A. Mono、L. Rolen 和 I. Wagner。新形式的中心 l 值与局部多项式，2024年。[13] Z. Mao。新形式的广义志村对应。《数论杂志》，128(1):71–95, 2008年。[14] A. Mono。正偶权的局部调和 Maass 形式。《以色列数学杂志》，261(2):671–694, 2024年。[15] S. Purkait。计算志村分解的代码。https://www. math.titech.ac.jp/~purkait/。最后访问时间：2024年2月19日。[16] H. Sakata。关于层 $4p^m$ 情形下的 Kohnen-Zagier 公式。《Math- ematische Zeitschrift》，250:257–266, 06 2005。[17] H. Sakata。关于“$4\times$”一般奇数层情形下的 Kohnen-Zagier 公式。《名古屋数学杂志》，190(none):63 – 85, 2008年。

[18] G. Shimura. 自守函数算术理论导论，日本数学会出版物第11卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1994年。[19]J.B. Tunnell. 一个经典的丢番图问题与权为3/2的模形式。《数学研究》，72:323–334，1983年。[20] M. Ueda. 半整数权尖点形式空间上扭曲算子的迹公式及一些迹关系。《日本学士院纪要》，17(1):83–135，1991年。[21] M. Ueda. 关于扭曲算子与半整数权新形式。《名古屋数学杂志》，131:135 – 205，1993年。[22] M. Ueda. 关于扭曲算子与半整数权新形式 II：Kohnen空间中新形式的完整理论。《名古屋数学杂志》，149:117 – 171，1998年。[23] J.-L. Waldspurger. 关于半整数权模形式的傅里叶系数。《纯粹与应用数学杂志 ´》´，60:375– 484，1981年。[24] D. Zagier. 艾森斯坦级数与黎曼ζ函数。载于《自守形式、表示论与算术》，第275–301页，柏林、海德堡，1981年。施普林格出版社。[25] D. Zagier. 从二次函数到模函数。载于 K. Gy˝ory、H. Iwaniec 和 J. Urbanowicz 编，《数论进展：*1997*年国际数论会议论文集》，第1147–1178页。德格鲁伊特出版社，柏林，1999年。[26] D. Zagier、W. Kohnen 和 B. Gross. 赫格纳点与 L 级数的导数 II。《数学年刊》，278:497–562，1987年。[27] D. B. Zagier. ζ函数与二次域 ¨。大学教材。[大学教科书]。施普林格出版社，柏林—纽约，1981年。