arXiv:2602.02109v1 [math.PR] 2 Feb 2026

L^p-SUP 收敛：具有分布型 Besov 漂移项的随机微分方程的 Euler–Maruyama 格式

Matteo Cagnotti

Abstract. 本文拓展了关于一维随机微分方程数值近似的现有结果，这类方程的漂移项属于负阶 Besov 空间，且由布朗运动驱动。利用山田–渡边逼近技巧，我们证明了对所有 $p \geq 2$， L^p中的收敛速率；证明过程中应用了文献中先前用于具有 Hölder 连续系数的随机微分方程的 Gronwall 型引理。此外，我们还得到了 L^1-sup 范数下的显式收敛速率。

1. Introduction and Main Results

近年来，具有不规则或分布型漂移项的随机微分方程（SDE）一直是持续研究的主题。这类方程出现在具有粗糙驱动或高度奇异相互作用的模型中。当漂移项仅属于负阶 Besov 空间或分数阶 Sobolev 空间时，关于强解存在性、唯一性和数值近似的经典结果不再适用，而方程的解释

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + W_t \tag{1}$$

需要非标准分析工具。

对于低正则性的函数值漂移和布朗噪声 W，Zvonkin [40] 和 Veretennikov[32] 证明，特定偏微分方程的一个适当解可以消除漂移；如今，这种方法被称为 Zvonkin 变换。最早将这一思想应用于时间齐次分布型漂移和布朗噪声的工作包括 [15, 16], 以及 [4]，后者利用狄利克雷过程处理了另一类分布型漂移。近来， [14, 12], 研究了时间非齐次情形，随后又将其推广至 α稳定噪声情形，见 [10]。对于非马尔可夫噪声（如分数布朗运动），则无法应用偏微分方程方法。该方向的首项工作是 [8], ，该工作沿分数布朗轨迹构造平均算子，从而获得分布型漂移常微分方程的路径意义下适定性和分数噪声正则化。后续研究对这一结果作了改进，例如 [1], ，其基于极限论证和随机缝合技术；随机缝合技术最早在 [24]中提出。此外还有其他工作补充了这些结果，例如 [7, 29, 13], ， 以及 $L^q_t L^p_x$ 情形下的结果，例如 [23, 39, 38, 5, 36, 35]。

本文所研究方程的适定性在 [20, 21], 中得到了发展，作者完善了 [14], 中最初为漂移项属于 [20, 21], 、(0, 1 2) 且具有布朗噪声的随机微分方程建立的虚拟解 概念。

Department of Mathematics “G. Peano”, University of Turin, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino, Italy.

E-mail address: matteo.cagnotti@unito.it.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类65C30；次要分类60H35、65C20、46F99。*Key words and phrases.* 分布型漂移，Euler–Maruyama 格式，强收敛速率，Besov空间，随机微分方程，数值格式。

The precise definition of the Besov spaces $\mathcal{C}^{(-\beta)+}$is given in Section 2.1 below. The idea is to apply a Zvonkin-type transformation, namely solve a Kolmogorov-type PDE to construct a function ϕt hat removes the singular drift. Afterwards, solve a classical SDE with regular coefficients for the transformed process $Y_t = \phi(t, X_t)$, and then define the virtual solution as $X_t = \psi(t, Y_t)$, where ψ is the inverse of ϕ. In this way one obtains a canonical notion of solution even though the original drift is only a distribution and the term $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ is not directly well-defined. [21] showed that (1) admits a unique virtual solution in any dimension, and it was later proved in [9] that this solution coincides with a strong probabilistic solution in the special case of dimension 1.

在数值计算方面，对于经典的利普希茨漂移，Euler 型格式的强收敛已得到充分理解；参见 [22]。关于漂移不规则但仍为函数、且噪声为布朗噪声时的收敛性，已有丰富的研究文献，例如可参阅综述 [37, 33, 28, 27, 26, 17], 和[31] 。

最早研究具有分布型漂移和布朗噪声的一维随机微分方程中 Euler 型格式收敛性的工作是 [11] ，该工作在分数阶 Sobolev 空间中进行；随后 [9]在负阶贝索夫空间中开展研究，并获得了 L^1 误差的收敛速率。下文将详细阐述其证明，因为本文的证明将用到他们的 L^1 结果。

近年来，基于随机缝合的技术使得在时间齐次情形下，对于 H¨older 连续漂移和非马尔可夫噪声，可以获得更优的收敛速率 [6], ；随后，这一结果被推广至时间非齐次情形 [3], ，以及噪声为布朗噪声、漂移为函数但仅可积的情形 [25]。对于分数布朗噪声，文献 [18], 分析了由分数布朗运动驱动、漂移属于贝索夫空间（包括分布型漂移）的随机微分方程的截断 Euler 格式，并获得了同时依赖于漂移正则性和 Hurst 参数的强收敛速率。

在分布型漂移情形下，无论是布朗噪声还是分数噪声，一种已证明行之有效的策略是将漂移项 b 替换为光滑化漂移 b^m ，然后对光滑化解应用 Euler 格式。在本文考虑的布朗情形下，这对应于经典的欧拉–丸山格式。更具体地说，光滑化随机微分方程为

$$X_t^m = X_0 + \int_0^t b^m(s, X_s^m)\, ds + W_t, \tag{2}$$

其中 $m \in \mathbb{N}$ 为光滑化参数，相应的数值离散化为

$$X_t^{m,n} = X_0 + \int_0^t b^m(t_{k(s)}, X_{t_{k(s)}}^{m,n})\, ds + W_t, \tag{3}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ 为时间步数， $h := T/n$， $t_k := kh$ ，对于 $k = 0, \ldots, n$，且

$$k(s) := \max\{k \in \{0, \ldots, n\} : t_k \le s\}.$$

[11, 9] 的目标是证明形如 $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t - X^{m(n),\ n}_{\ t}| \le n^{-r}$的界，其中收敛速率 r适当。通过将光滑化参数 m 表示为数值格式步长 n 的函数，并进行平衡以获得最大收敛性，可得显式界及如下收敛速率:

$$r = r(\beta, \varepsilon) := \frac{(\frac{1}{2} - \beta - \varepsilon)^2}{1 + \beta + \varepsilon + 2(\frac{1}{2} - \beta - \varepsilon)^2}. \tag{4}$$

该收敛速率是通过控制虚拟解框架中产生的变换后的过程 Y 与 Y^m之间的差异得到证明的，n该框架保证了适定性。虚拟解的定义以及变换后的过程 Y 的动力学均在第 2.2节回顾。

在这些研究中，误差只能达到 L^1，这是因为变换后的过程 Y 的扩散系数仅具有空间 H¨older 连续性，因此无法直接在更强的 L^p 范数下使用 Itˆo 公式或 Tanaka 公式来处理误差的绝对值。

为克服扩散系数正则性较低所引发的问题，并研究随机微分方程解的唯一性，Yamada 和 Watanabe [34] 引入了光滑的绝对值近似（见第 2.3 节回顾）。其他作者也采用了这一思路，研究扩散系数为 H¨older 类、可应用 Itˆo 公式研究 L^p 数值误差 $p \geq 1$的数值格式的收敛；参见 [19, 28]。这些近似会导出误差方程，其中包含如下形式的积分项

$$\int_0^t |Y_s - Y_s^{m,n}|^\eta \, ds,$$

对于适当的指数 $\eta > 1$，可利用 [19], 的 Gronwall 型引理处理；该引理将在下文重述为引理 2.3。

本文将这一方法应用于 [9],的一维 Besov 漂移情形，得出关于方程（1）的 Euler–Maruyama 近似的新收敛结果。

本文始终采用以下关于漂移项的基本假设。

假设1。漂移项满足

$$b \in C_T^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}^{(-\beta)+}$$

对某个 $\beta \in (0, 1\,2)$。

在此假设下，我们在定理 1.1 中证明，对任意 $p \geq 2$ 以及任意 $\varepsilon \in \big(0, \ \frac{1}{2} - \beta\big)$该格式在 L^p-上确界范数下收敛。

定理 1.1 (L^p-上确界收敛)。 设假设 *1* 成立。那么，对于任意的 $p \geq 2$ 和$\varepsilon \in (0, \frac{1}{2} - \beta)$，存在常数 $C > 0$使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^{m(n),n}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq C n^{-\frac{1}{p} r(\beta,\varepsilon)}, \tag{5}$$

其中 $r(\beta, \ \varepsilon)$ 定义见 (4)。

注 1.2。 请注意，这一收敛速率并非对 p一致，如 *[19, 28],* 但速率 $r(\beta, \varepsilon)$恰好是 *[9]*中的速率。

此外 地，我们证明以下结果，将 [9] 的界推广到 L^1-上确界范数。

定理1.3 (L^1-上确界收敛)。 设假设 *1* 成立。那么，存在一个常数 $C > 0$，使得对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2} - \beta)$ 均有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t - X_t^{m(n),n}\right|\right] \leq C \, n^{-r(\beta,\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon\right)}, \tag{6}$$

其中 $r(\beta, \varepsilon)$ 定义于 (4)中。

注1.4. 在本文其余部分，我们固定一个辅助指数

$$\hat{\beta} \in (\beta, \frac{1}{2})$$

使得 $b \in C_T^{1/2}\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}$。定理 *1.1* 与 *1.3* 中的速率仅依赖于 β （出自假设 *1*），而 $\hat{\beta} \in (\beta, 1/2)$ 的具体选取仅在为 m 与n 选择最优值以最大化收敛时才重要。下文中， C 为一个正常数，其值可能逐行变化。

论文结构。 第2 节回顾解析框架、虚拟解的定义以及其他辅助界。第3.1 节给出定理1.1的证明，而第3.2 节简要介绍一种证明相同结果的替代方法。第4节给出定理1.3的证明。

2. Framework and Preliminaries

本节将建立本文采用的框架，包括奇异随机微分方程解的形式化定义。我们还将回顾文献中关于数值格式的估计，以及 Yamada-Watanabe 绝对值逼近的构造。

2.1. 记号、空间及其他有用估计。 给定一个仅含一个变量的函数g：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们将其导数记为 g'。给定一个足够光滑的函数 f：$[0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们将$f_t$ 和 f_x 分别称为其关于时间和空间的偏导数。对于连续实值随机过程 $(Z_t)_t$ ，我们将其二次变差记为 $\langle Z \rangle_t$。最后，我们将诸如 $C^{\frac{1}{2}}([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}))$ 和 $L^\infty([0,T]; C^1(\mathbb{R}))$这样的表达式分别简写为 $C_T^{\frac{1}{2}} L^\infty$ 和 $L_T^\infty C^1$。

现在给出 Hölder-Zygmund 空间的精确定义。我们用 $(\cdot)^\wedge$ 和 $(\cdot)^\vee$表示 Schwartz 函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的傅里叶变换及其逆函数，并以通常的方式将其延拓至 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$。对于 $\gamma \in \mathbb{R}$， $\mathcal{C}^\gamma$ 定义为

$$\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \|f\|_\gamma := \sup_{j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}} 2^{j\gamma} \left\| (\varphi_j \hat{f})^\vee \right\|_{L^\infty} < +\infty \right\}. \tag{7}$$

其中 $(\varphi_j)_j$ 是一个一般的单位分解。该空间对应于非齐次Besov空间 $B^\gamma_{\infty\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$。当 $\gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ 时，该空间恰好是经典的 Hölder 空间 C^γ。关于这些空间的定义及其与其他空间之间关系的更多细节，请参见 [2]或 [30]。

后文将用到这些空间中的等价范数，现记录如下，其中 $\gamma \in (0,1)$ 且 $\gamma \in (1,2)$：

$$\gamma \in (0,1): \ \|f\|_{L^\infty} + \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}, \tag{8}$$

$$\gamma \in (1,2): \ \|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty} + \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^{\gamma-1}}. \tag{9}$$

我们还使用以下记号表示时间和空间上的上确界范数，以及函数 $g \in C_T\mathcal{C}^\kappa := C([0,T]; \mathcal{C}^\kappa)$ 的时间 Hölder 半范数：

$$\|g\|_{\infty,L^\infty} := \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(t,x)|,$$

$$[g]_{\kappa,L^\infty} := \sup_{t,s\in[0,T],\ t\neq s} \frac{\|g(t)-g(s)\|_{L^\infty}}{|t-s|^\kappa}.$$

给定 $\gamma \in \mathbb{R}$，我们用 $\mathcal{C}^{\gamma+}$ 表示由以下定义的归纳空间

$$\mathcal{C}^{\gamma+} := \bigcup_{\kappa>\gamma} \mathcal{C}^\kappa.$$

与非归纳情形一样，也将使用记号 $C_T\mathcal{C}^{\gamma+} := C([0,T];\mathcal{C}^{\gamma+})$。由于这些空间没有范数，$f \in \mathcal{C}^{\gamma+}$ 的含义是存在某些 $\kappa > \gamma$，使得 $f \in \mathcal{C}^{\gamma}$。

最后，我们记录两条 H¨older-Zygmund 空间中的标准估计，这些估计将在下文中反复使用。

引理 2.1 (伯恩斯坦不等式)。对于任意 $\gamma \in \mathbb{R}$，存在 $C > 0$，使得对于任意 $f \in \mathcal{C}^{\gamma+1}$

$$\|f'\|_\gamma \le C\|f\|_{\gamma+1}, \qquad f \in \mathcal{C}^{\gamma+1}.$$

令 $(P_t)_{t\ge 0}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的热半群。

引理 2.2 (Schauder 估计)。设 $f \in \mathcal{C}^\gamma$，其中某个 $\gamma \in \mathbb{R}$，且设 $\theta \ge 0$。则存在 $C > 0$，使得

$$\|P_t f\|_{\gamma+2\theta} \le Ct^{-\theta}\|f\|_\gamma, \qquad t \in (0,T].$$

此外，若 $\gamma \in \mathbb{R}$ 且 $\theta \in (0,\ 1)$，则对所有 $f \in \mathcal{C}^{\gamma+2\theta}$，存在 $C > 0$，使得

$$\|P_t f - f\|_\gamma \le Ct^{\theta}\|f\|_{\gamma+2\theta}, \qquad t \in (0,T].$$

2.2. **虚拟解**。我们回顾一下 [20, 21] 在维数为 1 时所作的虚拟解构造，以及由此在假设 对某个$(0,\ {}_1{}_2)$ 成立时得到的方程 (1) 的适定性。

固定 $\lambda > 0$，并考虑向后 Kolmogorov 型偏微分方程

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}u_{xx} + b\,u_x = \lambda u - b, \\ u(T,\cdot) = 0. \end{cases}$$

A s解按温和意义理解，即为满足下列条件的函数 $u\colon [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$u(t) = \int_t^T P_{s-t}\big(u_x(s)b(s)\big)\,ds - \int_t^T P_{s-t}\big(\lambda u(s) - b(s)\big)\,ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{10}$$

根据 [20, 定理 4。7] 存在一个温和解 $u \in C_T\mathcal{C}^{(2-\beta)-}$，且该解在 $C_T\mathcal{C}^{(1+\beta)+}$中唯一。特别地，$u_x \in C_T\mathcal{C}^{(1-\beta)-}$，因此 u_x 在空间变量上是 α–H¨older 连续的，对每个 $\alpha < 1-\beta$均成立。

此外，[20,命题 4.13] 表明，当 λ 充分大时，有

$$\|u_x\|_{\infty,L^\infty} < \tfrac{1}{2}.$$

对于这样的 λ 取值，定义 Zvonkin 型变换

$$\phi(t,x) := x + u(t,x), \qquad (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}.$$

于是，对每个 $t \in [0,T]$，映射 $x \mapsto \phi(t,x)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的双 Lipschitz 同胚，其 Lipschitz 常数关于 t 一致有界。我们将其记为

$$\psi(t,\cdot) := \phi(t,\cdot)^{-1}$$

它的逆函数，该逆函数关于 x 也是全局 Lipschitz 的，且关于 t 一致有界。Gi

ven ϕ 以及 ψ，考虑变换后的过程 Y 的随机微分方程（形式上为 $Y_t = \phi(t, X_t)$）：

$$Y_t = \phi(0,X_0) + \lambda\int_0^t u\big(s,\psi(s,Y_s)\big)\,ds + \int_0^t \big(1 + u_x(s,\psi(s,Y_s))\big)\,dW_s, \qquad t \in [0,T]. \tag{11}$$

该随机微分方程的系数有界，且关于空间变量全局利普希茨，因此该随机微分方程存在唯一强解 Y。按照 [14], ，随后定义

$$X_t := \psi(t,Y_t), \qquad t \in [0,T],$$

并称 X 为虚拟解（1）。在 [21, 定理4.5] 中已证明：在 $b \in C_T\mathcal{C}^{(-\beta)+}$且 $\beta \in$ （0，1 2）条件下，存在唯一虚拟解对应于（1）。

为便于后续使用，我们还引入与光滑化漂移项 b^m相关的对应对象。令 u^m 为 Kolmogorov 方程的解，其中以 b^m 替代 b，并定义

$$\phi^m(t,x) := x + u^m(t,x), \qquad \psi^m(t,\cdot) := (\phi^m(t,\cdot))^{-1}.$$

根据上述相同的论证（另见 [20, 命题 4。13]），映射 $x \mapsto \phi^m(t,\ x)$ 和$x \mapsto \psi^m(t,\ x)$ 是 $\mathbb{R}$上的双 Lipschitz 同胚，其 Lipschitz 常数关于 t 和 m均一致有界。我们将 Y^m 和 X_t^m: $= \psi^m(t,\ Y_t^m)$ 记为与漂移项 b^m 相关的变换解和虚拟解，其动力学如下：

$$Y_t^m = \phi^m(0,X_0)+\lambda\int_0^t u^m\big(s,\psi^m(s,Y_s^m)\big)\,ds+\int_0^t\big(1+u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\big)\,dW_s, \qquad t\in[0,T]. \tag{12}$$

在一维情形下，虚拟解是强概率解；见 [9, 引理 2。3], 并且，如果 b是有界可测函数，那么虚拟解与强解一致。

2.3. **辅助估计**。

积分误差项的 *Gronwall* 型引理。 下面的不等式归因于 Gy¨ongy 和 R´asonyi [19], ，是一个随机 Gronwall 型引理，它根据同一过程的适当积分泛函来控制非负过程的上确界。后文将把它应用于误差过程的 Yamada–Watanabe 型逼近。

引理2.3 ([19,引理3。2])。 设 $(Z_t)_{t\ge0}$ 为一个非负随机过程，并令 V_t =上确界$_{s\le t}\,Z_s$。假设对于某些 $p>0$、 $q\ge1$、 $\varrho\in[1,q]$以及常数 C、 $R\ge0$，有

$$\mathbb{E}\,[V_t^p] \le C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t V_s\,ds\right)^p\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t Z_s^{\varrho}\,ds\right)^{p/q}\right] + R < +\infty,$$

对所有 $t\ge0$均成立。于是，对于每个 $T\ge0$，如果 $p\ge q$成立，或 $\varrho<q$和 $p>q+1-\varrho$均成立，则存在仅依赖于 C、 T、 ϱ和 p的常数 C_1、$C_2>0$，使得

$$\mathbb{E}\,[V_T^p] \le C_1R + C_2\int_0^T \mathbb{E}\,[Z_s]\,ds.$$

与 [19] 和 [28] 的 H¨older 连续情形一样，该不等式将用于以已有 L^1 误差估计的 $1/p$ 次根来界定我们格式的 L^p 误差。

光滑化 *Euler* 格式的误差界。 在主要定理的证明中界定数值误差时，我们将需要 X^m 的 Euler 格式之 Zvonkin 变换的动力学。由 [11,引理 6.1]，我们有，

$$Y_t^{m,n} = \phi^m(0,X_0) + \lambda\int_0^t u^m\big(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n})\big)\,ds + \int_0^t\big(1+u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))\big)\,dW_s \tag{13}$$

$$+\int_0^t\big(b^m\big(t_{k(s)},X_{t_{k(s)}}^{m,n}\big)-b^m\big(s,X_s^{m,n}\big)\big)\big(1+u_x^m(s,X_s^{m,n})\big)ds, \qquad t\in[0,T]. \tag{14}$$

接下来，我们回顾光滑化随机微分方程（ $L^1$2）的 Euler–Maruyama 近似的–误差估计。 该估计将在 L^1 和 L^p 收敛分析中使用，用于将“数值误差” $X^{m,\ n}-X^m$ 与“稳定性”误差 X^m-X区分开来。

引理 2.4 ([11, 引理 6。2])。 假设 $b^m \in C_T^{\frac{1}{2}} L^\infty \cap L_T^\infty C_b^1$。则

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}|X_t^{m,n} - X_t^m| \le C(A_m\, n^{-1} + B_m\, n^{-\frac{1}{2}}), \tag{15}$$

其中

$$A_m = \|b^m\|_{\infty,L^\infty}\big(1 + \|b_x^m\|_{\infty,L^\infty}\big),$$
$$B_m = \|b_x^m\|_{\infty,L^\infty} + [b^m]_{\frac{1}{2},L^\infty}.$$

Zvonkin 变换的稳定性估计。现在，我们汇总 Zvonkin 变换及其逆函数的稳定性估计，以及虚拟解相应的稳定性界。在主要定理的证明中，这些结果使我们能够通过变换后的过程 Y 和 Y^m 控制 X 与 X^m 之间的误差。

引理 2.5 ([9, 引理 4。3])。 设 $\hat{\beta} \in (\beta, 1\,2)$，则

$$\sup_{(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |\psi(t,y) - \psi^m(t,y)| \le 2C\|b - b^m\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}.$$

其中常数 C 依赖于 T 和 $\|b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}$。

引理 2.6 ([9, 引理 4。4])。 设 $\hat{\beta} \in (\beta, 1\,2)$。则对任意 $\alpha < 1 - \hat{\beta}$，以及任意 y、$y' \in \mathbb{R}$，以下界成立：

$$|u^m(s,\psi^m(s,y')) - u(s,\psi(s,y))| \le 2C\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}} + |y - y'|, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}|u_x^m(s,\psi^m(s,y')) - u_x(s,\psi(s,y))| &\le C\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}} \\ &+ 2^\alpha C^\alpha \|u\|_{C_T\mathcal{C}^{1+\alpha}} \|b^m - b\|^\alpha_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}} + 2||u_x||_{C_T\mathcal{C}^\alpha}|y' - y|^\alpha.\end{aligned} \tag{17}$$

其中 C 与引理 *2.5*中的相同。

引理 2.7 ([9, 命题 3.3])。 在假设 *1*下，令 $\hat{\beta} \in (\beta、\ 1\,2)$ 满足 $b \in C_T^{1/2}\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}$。则对于任意 $\alpha \in (1\,2,\ 1 - \hat{\beta})$，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^m - X_t| \le C\|b^m - b\|^{2\alpha-1}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}},$$

对于满足 $\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}} < 1$ 的所有 $m \in \mathbb{N}^+$。

Yamada 和 *Watanabe* 的逼近方法。 定理 1.3 和 1.1 证明中的首要步骤之一，是 $x \mapsto |x|$ 按照 Yamada 和 Watanabe 的方式进行逼近[34]。令 $\delta > 1$ 和 $\kappa \in$ （0，1），并首先定义函数 $\psi_{\delta,\ \kappa}$： $\mathbb{R} \to [0,\infty)$，使得：

(1) 支集$\psi_{\delta,\kappa} \subset [\kappa/\delta, \kappa]$,(2) $\int_{\kappa/\delta}^{\kappa} \psi_{\delta,\kappa}(z)\, dz = 1$,(3) $0 \le \psi_{\delta,\kappa}$ (z) $\le$ $\frac{2}{z}$ 对数 δ, ~~$z > 0$~~.

这样的函数$\psi_{\delta,\kappa}$存在：例如，可以在 $[\kappa/\delta, \kappa]$上将函数 $z \mapsto 1/(z \log\ \delta)$归一化。我们现在将另一个函数$\varphi_{\delta,\ \kappa} \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$定义为

$$\varphi_{\delta,\kappa}(x) := \int_0^{|x|} \int_0^y \psi_{\delta,\kappa}(z)\, dz\, dy.$$

$\varphi_{\delta,\kappa}$ 具有以下性质：

$$|x| \le \kappa + \varphi_{\delta,\kappa}(x), \text{ for any } x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$0 \le |\varphi'_{\delta,\kappa}(x)| \le 1, \text{ for any } x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$\varphi''_{\delta,\kappa}(\pm|x|) = \psi_{\delta,\kappa}(|x|) \le \frac{2}{|x|\log\delta}\mathbb{1}_{[\kappa/\delta,\kappa]}(|x|), \text{ for any } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{20}$$

性质 (18) 将使我们能够估计下文中的绝对值；又由于 $\varphi_{\delta,\kappa} \in C^2$，我们便可以应用经典的 Itˆo 公式。

3. Proof of Theorem 1.1: L^p-sup Convergence

本节将使用 Yamada-Watanabe 逼近技术证明 L^p 中的主要收敛速率。在最后一个小节中，我们将给出同一结果的另一种证明方法。

3.1. 基于 Yamada-Watanabe 逼近的证明。 我们先将强误差按标准方法分解为“稳定性”部分和“数值误差”部分。对于任意 $p \ge 2$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{m,n}-X_t|^p\right] &\le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}(|X_t^{m,n}-X_t^m|+|X_t^m-X_t|)^p\right]\\ &\le 2^{p-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{m,n}-X_t^m|^p\right]+2^{p-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^m-X_t|^p\right].\end{aligned} \tag{21}$$

我们的目标是按照引理 2.3 所要求的形式，给出第二个不等式中两项的界。

引理 3.1 (矩稳定性估计)。 设假设 *1* 成立，并固定如上所述的 $\hat{}\,\beta \in (\beta, 1\,2)$。令 $\alpha \in (1\,2, 1-\hat{}\,\beta)$ 和 $p \ge 2$。那么，对于所有满足 $\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}} < 1$ 的 $m \in \mathbb{N}^+$，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^m - X_t|^p\right] \le C\|b^m - b\|^{2\alpha-1}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}.$$

证明。 令 Y 和 Y^m 分别表示与 X 和 X^m相对应的变换后的过程，如第 2.2 节所述。由 ψ 和 ψ^m 的双 Lipschitz 性质以及引理 2.5，可得

$$\begin{aligned}|X_t^m - X_t|^p &= \left|\psi^m\left(t, Y_t^m\right) - \psi\left(t, Y_t\right)\right|^p\\ &\le 2^{p-1}\left|\psi^m\left(t, Y_t^m\right) - \psi^m\left(t, Y_t\right)\right|^p + 2^{p-1}\left|\psi^m\left(t, Y_t\right) - \psi\left(t, Y_t\right)\right|^p\\ &\le 2^{p-1}\left|Y_t^m - Y_t\right|^p + 2^{p-1}C^p\left\|b^m - b\right\|^p_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}.\end{aligned}$$

对上确界取期望，得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^m - X_t|^p\right] \le 2^{p-1}C^p\left\|b^m - b\right\|^p_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}} + 2^{p-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|^p\right]. \tag{22}$$

因此，只需估计第二项。

利用（18）并对 $\varphi_{\delta,\ \kappa}$ 应用伊藤公式，可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m-Y_t|^p\right]\le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\kappa+\varphi_{\delta,\kappa}(Y_t^m-Y_t)\right)^p\right]\le 4^{p-1}\kappa^p$$

$$+4^{p-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t \varphi'_{\delta,\kappa}\big(Y_s^m-Y_s\big)\big(u^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))-u\big(s,\psi(s,Y_s)\big)\big)\,ds\right)^p\right] \tag{23}$$

$$+4^{p-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t \varphi'_{\delta,\ \kappa}\big(Y_s^m-Y_s\big)\big(u_x^m(s,\ \psi^m(s,\ Y_s^m))-u_x(s,\ \psi(s,\ Y_s)\big)\,dW_s\right)^p\right] \tag{24}$$

$$+4^{p-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t \varphi''_{\delta,\kappa}\big(Y_s^m-Y_s\big)\big(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))-u_x(s,\psi(s,Y_s))\big)^2\,ds\right)^p\right]. \tag{25}$$

由引理 2.6 以及 $|\varphi'_{\delta,\ \kappa}|\le 1$,

$$(23)\le 4^{p-1}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left(2c\,\|b^m-b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}+|Y_s^m-Y_s|\right)ds\right)^p\right]$$

$$\le C\,\|b^m-b\|^p_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}+C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\sup_{0\le r\le T}|Y_r^m-Y_r|\,ds\right)^p\right].$$

对于（25），利用（20）和引理 2.6,

$$(25)\le C\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t\frac{2\mathbb{1}_{[\kappa/\delta,\kappa]}(|Y_s^m-Y_s|)}{|Y_s^m-Y_s|\log\delta}\ \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\big(\|u_x\|_{C_T\mathcal{C}^\alpha}|Y_s^m-Y_s|^\alpha+C\|b^m-b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}+C\|b^m-b\|^\alpha_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\big)^2\,ds\right)^p\right]$$

$$\le C\left(\frac{2}{\log\delta}\kappa^{2\alpha-1}+\frac{2}{\kappa\log\delta}\|b^m-b\|^2_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}+\frac{2}{\kappa\log\delta}\|b^m-b\|^{2\alpha}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\right)^p.$$

对于鞅项（24），Burkholder–Davis–Gundy（BDG）不等式结合引理 2.6可得

$$(24)\le C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))-u_x(s,\psi(s,Y_s))\right)^2ds\right)^{\frac p2}\right]$$

$$\le C\left(\|b^m-b\|^p_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}+\|b^m-b\|^{\alpha p}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\right)+C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T|Y_s^m-Y_s|^{2\alpha}\,ds\right)^{\frac p2}\right].$$

汇总关于（23）、（24）和（25）的界，并选择 $\kappa:=\|b^m-b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}$，我们可以看到$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m-Y_t|^p\right]$ 满足引理 2.3所要求形式的不等式，其中

$$Z_s=|Y_t^m-Y_t|,\qquad q=2,\qquad \varrho=2\alpha,\qquad p\ge 2,$$

其他各项的幂次都大于 $2\alpha-1$ 在 $\|b^m-b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}$的记号下，根据引理2.3，我们将它们归入 R。由于我们可以取$\alpha>\frac12$，条件 $\varrho<q$和 $p>q+1-\varrho$均得到满足。应用引理2.3可得

$$\mathbb{E}[V_T^p]\le C_1R+C_2\int_0^T\mathbb{E}[Z_s]\,ds\le C\|b^m-b\|^{2\alpha-1}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}},$$

其中，在最后一步中，我们使用 L^1 稳定性估计引理2.7 对 $\mathbb{E}[Z_s]$ 进行界定，将其表示为 $\|b^m-b\|^{2\alpha-1}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}$的形式，并利用 $\|b^m-b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}<1$来吸收高阶项。结合（22），证明完成。□

接下来，我们估计光滑化随机微分方程解的数值近似。

引理 3.2 (矩的数值估计)。假设 *1* 成立，且 $p\geq 2$。则有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{m,n}-X_t^m|^p\right]\leq C(A_m\,n^{-1}+B_m\,n^{-\frac{1}{2}}+C_m n^{-p}+D_m n^{-\frac{p}{2}}),$$

其中 A_m 和 B_m 与引理 *2.4* 中的相同，且 C_m 和 D_m 定义如下：

$$C_m:=\|b^m\|^p_{\infty,L^\infty}(\|b^m_x\|^p_{\infty,L^\infty}+1),$$
$$D_m:=\|b^m_x\|^p_{\infty,L^\infty}+[b^m]^p_{\frac{1}{2},L^\infty}.$$

证明。论证与稳定性估计类似。利用X^m的 Zvonkin 变换、^{n} 和 X^m，我们首先将问题归结为估计 Y^m, $^n-Y^m$。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{m,n}-X_t^m|^p\right]\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{m,n}-Y_t^m|^p\right]\\
&\leq\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\kappa+\varphi_{\delta,\kappa}\left(Y_t^{m,n}-Y_t^m\right)\right)^p\right]\leq C\kappa^p\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\varphi'_{\delta,\kappa}\left(Y_s^{m,n}-Y_s^m\right)\left(u^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))-u^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\right)ds\right)^p\right] &(26)\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\varphi'_{\delta\,\kappa}\left(Y_s^{m,n}-Y_s^m\right)\left(b^m\left(t_{k(s)},X_t^{m,n}\right)-b^m\left(s,X_s^{m,n}\right)\right)\left(1+u_x^m(s,X_s^{m,n})\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left._{k(s)}\right)ds\right)^p\right] &(27)\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\varphi'_{\delta,\kappa}\left(Y_s^{m,n}-Y_s^m\right)\left(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))-u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\right)dW_s\right)^p\right] &(28)\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\varphi''_{\delta,\kappa}\left(Y_s^{m,n}-Y_s^m\right)\left(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))-u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\right)^2ds\right)^p\right]. &(29)
\end{aligned}$$

我们首先关注（27），它表示时间离散误差。将（27）分解为“时间”项和“空间”项，

$$(27)\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left|b^m\left(t_{k(s)},X^{m,n}_{t_{k(s)}}\right)-b^m\left(s,X^{m,n}_{t_{k(s)}}\right)\right|ds\right)^p\right] \tag{30}$$
$$+C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left|b^m\left(s,X^{m,n}_{t_{k(s)}}\right)-b^m\left(s,X^{m,n}_{s}\right)\right|ds\right)^p\right]. \tag{31}$$

对于时间部分（30），时间 1/2-H¨older 正则性 b^m 可得

$$(30)\leq cT^{\frac{3}{2}p}[b^m]^p_{\frac{1}{2},L^\infty}n^{-\frac{p}{2}}.$$

对于空间部分（31），回顾 Euler 格式的定义（3），我们有 e

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{m,n}-X_{t_{k(t)}}^{m,n}\right|^p\right]\le 2^{p-1}\|b^m\|_{\infty,L^\infty}^p\frac{T^p}{n^p}+2^{p-1}\frac{T^{\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}}}\,\mathbb{E}\big[|W_1|^p\big],$$

由此可得（31）中的界，因为

$$(31)\le T^p\|b_x^m\|_{\infty,L^\infty}^p\mathbb{E}\left[\left|X_t^{m,n}-X_{t_{k(t)}}^{m,n}\right|^p\right]$$

（26）、（28）和（29）中的项可按照引理3.1的证明类似处理，利用利普希茨连续性和 ¨older 正则性 ψ^m，u^m以及 u_x^m。对于（26），我们得到

$$(26)\le C\|u_x^m\|_{\infty,L^\infty}^p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\sup_{0\le r\le T}|Y_r^{m,n}-Y_r^m|\,ds\right)^p\right].$$

处理（28）时，利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式以及 ¨的 H u_x^molder 连续性可得

$$(28)\le C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T|Y_s^{m,n}-Y_s^m|^{2\alpha}\,ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

二阶导数项（29）利用（20）处理，得到

$$(29)\le C\frac{2^p}{(\log\delta)^p}T^p\kappa^{(2\alpha-1)p}.$$

汇总所有界，并对 $Z_s:=|Y^m$ 应用引理 2.3，其中使用 $q=2$ 和 $\varrho=2\alpha$，$s^{\,n}-Y_s^m|$可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{m,n}-Y_t^m|^p\right]&\le\kappa^p+\kappa^{(2\alpha-1)p}+\int_0^T\mathbb{E}|Y_s^{m,n}-Y_s^m|ds\\&\quad+T^p\|b_x^m\|_{\infty,L^\infty}^p\left(2^{p-1}\|b^m\|_{\infty,L^\infty}^p\frac{T^p}{n^p}+2^{p-1}\frac{T^{\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}}}\,\mathbb{E}\big[|W_1|^p\big]\right)\end{aligned}$$

利用引理 2.4 并令 $\kappa\to 0$ 即可得到所述估计。 □

定理 *1.1* 的证明。 由引理 3.1 和 3.2 可知，为使 $m(n)=n^\gamma$ 中界的收敛速率最大化，对 n （21）进行优化的过程与定理 [9, 34], 的证明完全相同，因为数值误差中收敛最慢的项仍为 $\|b_x^m\|_{\infty,}$ $_{L^\infty}n^{-\frac{1}{2}}$。选取 γ 以获得最快收敛速度后，我们得到相同的速率（4）。对两边取 p 次方根后，指数上会额外出现因子 $1/p$。□

3.2. **一种等价的基于局部时的方法。** 定理1.1 也可以通过采用与 [9, 11]类似的技术来证明。这里我们给出总体思路，具体细节留给读者。在 [9, 11], 中， L^1 收敛速率通过 Ito-Tanaka 公式得到，然后利用以下不等式对局部时项进行界定。

引理3.3. *[11, 引理5.1]* 对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及任意实值连续半鞅$\hat{Y}$，有

$$\mathbb{E}\big[L_t^0(\hat{Y})\big] \le 4\varepsilon - 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{\hat{Y}\in(0,\varepsilon)\}} + \mathbb{1}_{\{\hat{Y}_s\ge\varepsilon\}} e^{1-\hat{Y}_s/\varepsilon}\right) \mathrm{d}\hat{Y}_s\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\hat{Y}>\varepsilon\}} e^{\{1-\hat{Y}_s/\varepsilon\}} \mathrm{d}\langle\hat{Y}\rangle_s\right]. \tag{32}$$

不再使用第2.3小节中定义的光滑序列来逼近绝对值，而是需要一个 L^p 引理3.3 的类似结果。

引理3.4。 对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$、 $p \ge 2$以及任意实值连续半鞅$\hat{Y}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}(L_t^0(\hat{Y}))^p\right] &= \mathbb{E}\left[(L_T^0(\hat{Y}))^p\right] \\ &\le 4^p 3^{p-1}\varepsilon^p + 3^{p-1}2^p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left(\mathbb{1}_{\{\hat{Y}\in(0,\varepsilon)\}} + \mathbb{1}_{\{\hat{Y}_s\ge\varepsilon\}} e^{1-\hat{Y}_s/\varepsilon}\right) \mathrm{d}\hat{Y}_s\right)^p\right] \\ &\quad + \frac{3^{p-1}}{\varepsilon^p}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{\hat{Y}>\varepsilon\}} e^{\{1-\hat{Y}_s/\varepsilon\}} \mathrm{d}\langle\hat{Y}\rangle_s\right)^p\right].\end{aligned}$$

该结果可通过将（32）提升至 p 次方，并利用 $(\sum_{i=1}^n a_i)^p \le n^{p-1}\sum_{i=1}^n a_i^p$ 对 $p \ge 2$成立来证明。将引理3.4 应用于 $Y_t - Y_t^m$和 $Y^m{}_t{}^n - Y_t^m$并遵循与 [11] 相同的大致策略，可以再次证明引理3.1和3.2，从而得到定理 L^p-范数上收敛速率，而无需使用1.1 中的 Yamada-Watanabe逼近技巧。

4. Proof of Theorem 1.3: L^1-sup Convergence

我们现在调整第3.1 节中的论证，以获得 L^1-上确界范数下的收敛性。总体策略相同，但第3.1 引理和第3.2 引理中的误差界均采用了允许使用第2.3引理的形式，而在下面类似的 L^1-上确界中，这一条件将不再成立。为规避这一问题，将使用杨不等式以及 L^1 的结果 [9] 和 [11] 。

在第3.1 引理和第3.2引理中，最终的收敛界都是将第2.3引理应用于（24）和（28）中出现的积分项而得到的。对于 L^1-上确界误差，按照相同步骤将得到同类型的积分项，但其系数不满足第2.3引理的假设。为界定这些项，我们采用 [28, 定理2的证明11] 中的方法，从而得到与 L^1 情形下 [11] 和 [9], 所得结果相似的速率，但分解两侧均额外多出一个 $2\alpha - 1$ 幂次。

引理 4.1 (L^1-sup 稳定性估计)。 设假设 *1* 成立，并固定如上所述的 $\hat{\beta} \in (\beta, 1/2)$ 以及$\alpha \in (1/2, 1-\hat{\beta})$。那么，对于所有满足 $\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\beta}} < 1$ 的 $m \in \mathbb{N}^+$，存在常数 $C > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^m - X_t|\right] \le C\,\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat{\beta}}}^{(2\alpha-1)^2}.$$

证明。 证明的开头与引理 3.1中的相同，首先通过相关过程 Y^m 和 Y，估计 X^m 与 X 之间的差异。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^m - X_t|\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|\psi^m(t,Y_t^m) - \psi(t,Y_t)|\Big]\\ &\le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|\psi^m(t,Y_t^m) - \psi(t,Y_t^m)|\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|\psi(t,Y_t^m) - \psi(t,Y_t)|\Big]\\ &\le 2c\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + 2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|\Big], \end{aligned} \tag{33}$$

其中第二个不等式用到了引理2.6 。接下来需要估计第二项，以得到所需的稳定性界。与引理3.1中一样，

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|\Big] \le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\big(\kappa + \varphi_{\delta,\kappa}(Y_t^m - Y_t)\big)\Big] \le \kappa$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi'_{\delta,\kappa}(Y_s^m - Y_s)\Big(u^m\big(s,\psi^m(s,Y_s^m)\big) - u(s,\psi(s,Y_s))\Big)\,ds\Big] \tag{34}$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi'_{\delta,\kappa}(Y_s^m - Y_s)\Big(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m)) - u_x(s,\psi(s,Y_s))\Big)\,dW_s\Big] \tag{35}$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi''_{\delta,\kappa}(Y_s^m - Y_s)\Big(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m)) - u_x(s,\psi(s,Y_s))\Big)^2\,ds\Big]. \tag{36}$$

利用引理 2.6 以及 $|\varphi'_{\delta,\kappa}| \le 1$，可得

$$\begin{aligned}(34) &\le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \big(2c\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + |Y_s^m - Y_s|\big)\,ds\Big]\\ &\le 2Tc\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + \mathbb{E}\Big[\int_0^T \sup_{0\le r\le T}|Y_r^m - Y_r|\,ds\Big].\end{aligned}$$

对于（36），利用（20）和引理 2.6：

$$\begin{aligned}(36) \le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \Big(&C\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\\ &+ 2^\alpha\|u_x\|_{C_T\mathcal{C}^{1+\alpha}}C^\alpha\|b^m - b\|^{2\alpha-1}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\\ &+ 2^\alpha\|u_x\|_{C_T\mathcal{C}^{1+\alpha}}|Y_s^m - Y_s|^\alpha\Big)\varphi''_{\delta,\kappa}(Y_s^m - Y_s)\,ds\Big]\\ \le C\frac{2}{\kappa\log\delta}\|b^m - b\|^2_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} &+ C\frac{2}{\kappa\log\delta}\|b^m - b\|^{2\alpha}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + C\frac{2}{\log\delta}\kappa^{2\alpha-1}.\end{aligned}$$

选取 $\kappa = \|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}$ 并固定 $\delta > 1$，可得

$$(36) \le C\Big(\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + \|b^m - b\|^{2\alpha-1}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\Big).$$

对于鞅项（35），由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$\begin{aligned}(35) &\le C\mathbb{E}\Bigg[\Big(\int_0^T \Big(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m)) - u_x(s,\psi(s,Y_s))\Big)^2 ds\Big)^{1/2}\Bigg] \\ &\le C\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + C\|b^m - b\|^{\alpha}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + \Big(\mathbb{E}\Big[\int_0^T |Y_s^m - Y_s|^{2\alpha} ds\Big]\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

注意到，这个界不满足引理2.3的假设，因此，正如前文所述，我们采用证明 [28, 定理 2.11] 时使用的方法，并利用杨氏不等式 $xy \le \frac{x^2}{2C} + \frac{Cy^2}{2}$ 将最后一个界中出现的积分拆分为

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}\Big[\int_0^T |Y_s^m - Y_s|^{2\alpha} ds\Big]\Big)^{1/2} &\le C\mathbb{E}\Bigg[\Big(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|^{1/2}\Big)\Big(\int_0^T |Y_s^m - Y_s|^{2\alpha-1} ds\Big)^{1/2}\Bigg] \\ &\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|\Big] + \frac{C}{2}\Big(\int_0^T \mathbb{E}[|Y_s^m - Y_s|]\, ds\Big)^{2\alpha-1} \\ &\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|\Big] + C\|b^m - b\|^{(2\alpha-1)^2}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}.\end{aligned}$$

在最后一个不等式中用到了2.7 。

合并所有项，并将 $\frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup |Y^m - Y|]$ 吸收到左侧，得到

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m - Y_t|\Big] \le C\Big(\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} + \|b^m - b\|^{(2\alpha-1)^2}_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}\Big).$$

根据假设，我们有 $\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}} \le 1$，收敛最慢的项将是具有 $2\alpha-1$ 指数的项，因为 $\alpha < 1-\beta$ 意味着 $2\alpha-1 < 1-2\beta < 1$。结合（33），将所有更高次幂吸收到首项系数中，即得所述结论。□

引理 4.2 (L^1-上确界数值估计)。 设假设 *1*成立，并固定 $\alpha \in (1\,2, 1-\hat\beta)$。则

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{m,n} - X_t^m|\Big] \le C(A_m\, n^{-1} + B_m\, n^{-\frac{1}{2}})^{2\alpha-1},$$

其中 A_m 和 B_m 与引理 *2.4* 中的相同，且 $C > 0$ 不依赖于 m 或 n。

证明。 回忆

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{m,n} - X_t^m|\Big] \le C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{m,n} - Y_t^m|\Big]. \tag{37}$$

与 L^p-上确界情形一样，我们利用 $\kappa+\varphi_{\delta,\kappa}$ 来估计 $|Y^{m,n}-Y^m|$：应用伊藤公式：

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{m,n}-Y_t^m|\Big]\le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\big(\kappa+\varphi_{\delta,\kappa}\big(Y_t^{m,n}-Y_t^m\big)\big)\Big]\le\kappa$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi'_{\delta,\kappa}\big(Y_s^{m,n}-Y_s^m\big)\big(u^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))-u^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\big)\,ds\Big] \tag{38}$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi'_{\delta,\kappa}\big(Y_s^{m,n}-Y_s^m\big)\big(b^m\big(t_{k(s)},X_{t_{k(s)}}^{m,n}\big)-b^m\big(s,X_s^{m,n}\big)\big)\big(1+u_x^m(s,X_s^{m,n})\big)\,ds\Big] \tag{39}$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi'_{\delta,\kappa}\big(Y_s^{m,n}-Y_s^m\big)\big(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))-u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\big)\,dW_s\Big] \tag{40}$$

$$+\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \varphi''_{\delta,\kappa}\big(Y_s^{m,n}-Y_s^m\big)\big(u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^{m,n}))-u_x^m(s,\psi^m(s,Y_s^m))\big)^2\,ds\Big]. \tag{41}$$

我们分别处理每一项，首先考虑（38），其中利用了 $|\varphi_{\delta,\kappa}|\le 1$ 以及$u^m\circ\psi^m$ 是利普希茨的：

$$(38)\le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t C\,|Y_s^{m,n}-Y_s^m|\,ds\Big]\le C\int_0^T\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le r\le T}|Y_r^{m,n}-Y_r^m|\Big]\,ds.$$

对于（41），利用（20）以及空间上的 α-Hölder 正则性，

$$\begin{aligned}(41)&\le C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{2}{|Y_s^{m,n}-Y_s^m|\log\delta}\,\mathbb{1}_{\{Y_s^{m,n}-Y_s^m\in[\frac{\kappa}{\delta},\kappa]\}}\cdot|Y_s^{m,n}-Y_s^m|^{2\alpha}\,ds\Big]\\&\le C\frac{2}{\log\delta}\,\kappa^{2\alpha-1}\,T.\end{aligned}$$

对于漂移项，我们使用引理 2.4：

$$(39)\le\frac{3}{2}\,\mathbb{E}\Big[\int_0^T\Big|b^m\big(t_{k(s)},X_{t_{k(s)}}^{m,n}\big)-b^m\big(s,X_s^{m,n}\big)\Big|\,ds\Big]\le A_m\,n^{-1}+B_m\,n^{-\frac12}.$$

对于鞅项，我们应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，然后使用杨不等式：

$$\begin{aligned}(40)&\le C\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|Y_s^m-Y_s^{m,n}|^{2\alpha}\,ds\Big)^{1/2}\Big]\\&\le C\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m-Y_t^{m,n}|^{1/2}\Big)\Big(\int_0^T|Y_s^m-Y_s^{m,n}|^{2\alpha-1}\,ds\Big)^{1/2}\Big]\\&\le\frac12\,\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m-Y_t^{m,n}|\Big]+\frac{C}{2}\left(\int_0^T\mathbb{E}[|Y_s^m-Y_s^{m,n}|]\,ds\right)^{2\alpha-1}\\&\le\frac12\,\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^m-Y_t^{m,n}|\Big]+C\Big(A_m\,n^{-1}+B_m\,n^{-\frac12}\Big)^{2\alpha-1}.\end{aligned}$$

再次使用 L^1 引理 2.4的估计。

将所有项合并，把 $\frac12\mathbb{E}[$上确界 $|Y^{m,n}-Y^m|]$ 移至左边，并回顾式（37），令 $\kappa\to0$ 取极限即可得到结论。□

证明 定理 1.3。由引理 4.1和引理4.2 可知，对于适当的常数 $C > 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\big|X_t^m - X_t\big|\Big] \le C\,\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\hat\beta}}^{(2\alpha-1)^2}, \tag{42}$$

and

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\big|X_t^{m,n} - X_t^m\big|\Big] \le C\,T\Big(A_m n^{-1} + B_m n^{-\frac{1}{2}}\Big)^{2\alpha-1}, \tag{43}$$

根据我们的光滑化选择 $b^m = P_{1/m}b$以及热半群的 Schauder 估计（引理 2.2），我们获得了空间正则性，从 $-\beta$提升至 $-\hat\beta$。更确切地说，对于固定的$\hat\beta \in (\beta, 1/2)$, 存在 $C > 0$ 使得

$$\|b^m - b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\beta}} \le C\,m^{-\frac{\hat\beta-\beta}{2}}\|b\|_{C_T\mathcal{C}^{-\beta}}.$$

指数 $\frac{\beta-\beta}{2}$ 体现了通过热核平滑，空间正则性从 $-\beta$ 提升至 $-\hat\beta$ 的增益。引入此估计后，我们看到稳定性误差（42）可界为

$$n^{-\eta\frac{\hat\beta-\beta}{2}(2\alpha-1)^2},$$

令 $m = m(n) = n^\eta$ 即可。

On the 另一方面，取相同的 m，数值误差界（43）中衰减最慢的项为

$$n^{\left(\eta\frac{\varepsilon+\hat\beta+1}{2}-\frac{1}{2}\right)(2\alpha-1)},$$

因此，为了优化收敛阶，我们令这两个指数相等，即

$$-\eta\frac{\hat\beta-\beta}{2}(2\alpha-1)^2 = \left(\eta\frac{\varepsilon+\hat\beta+1}{2} - \frac{1}{2}\right)(2\alpha-1). \tag{44}$$

根据 [9], ，我们将 $\alpha \in (0, 1/2)$ 写作 $\alpha = 1 - \hat\beta - \varepsilon$，其中 $\varepsilon \in (0, 1-\beta)$ 且 $\hat\beta \in (\beta, 1/2)$。求解关于 η 的方程可得 (44)

$$\eta = \frac{1}{2\left[\frac{\varepsilon+\hat\beta+1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \hat\beta - \varepsilon\right)^2\right]}. \tag{45}$$

将 η 的这一取值代入 $m(n)$ 的指数中可知,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\big|X_t^{m(n),n} - X_t\big|\right] \le C\,n^{-r(\beta,\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon\right)},$$

证明至此完成。 □

Acknowledgements

作者是 INdAM-GNAMPA 的成员。本研究最初于 2025年6月在 INdAM 非规则随机分析研讨会上报告。

References

[1] Lukas Anzeletti、Alexandre Richard 和 Etienne Tanr´e。“分数噪声对具有分布型漂移的一维微分方程的正则化”。载于：Electronic Journal of Probability 28（2023年1月1日）。[2] Hajer Bahouri、Jean-Yves Chemin 和 Rapha¨el Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》。第343卷，数学科学基础丛书。柏林、海德堡：施普林格，2011年。[3] Jianhai Bao 和 Yue Wu。“具有 H¨older 连续漂移系数的随机微分方程的随机化欧拉–丸山方法”。载于：BIT Numerical Mathematics 65.4（2025年12月），第48页。[4] Richard F. Bass 和 Zhen Qing Chen。“狄利克雷过程的随机微分方程”。载于：Probability Theory and Related Fields 121.3（2001年11月），第422–446页。[5] Lisa Beck 等。“具有临界漂移的随机常微分方程和随机线性偏微分方程：正则性、对偶性与唯一性”。载于：Electronic Journal of Probability 24（2019年1月1日）。[6] Oleg Butkovsky、Konstantinos Dareiotis 和 M´at´e Gerencs´er。“随机微分方程的逼近：随机缝合方法”。载于：Probability Theory and Related Fields 181.4（2021年12月1日），第975–1034页。[7] Giuseppe Cannizzaro 和 Khalil Chouk。“具有奇异漂移的多维随机微分方程，以及白噪声势下聚合物测度的普适构造”。载于：概率年刊 46.3（2018年5月），第1710–1763页。[8] R. Catellier 和 M. Gubinelli。“沿不规则曲线平均与常微分方程的正则化”。载于：随机过程及其应用 126.8（2016年8月1日），第2323–2366页。[9] Luis Mario Chaparro J´aquez、Elena Issoglio 和Jan Palczewski。“Besov空间中具有分布型漂移的随机微分方程数值格式的收敛速率”。载于：ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 59.5（2025年9月），第2717–2738页。[10] Paul-´Eric Chaudru de Raynal 和 St´ephane Menozzi。“具有 Besov 漂移项的多维稳定过程驱动随机微分方程”。载于：Electronic Journal of Probability 27（2022年1月），第1–52页。[11] Tiziano De Angelis、Maximilien Germain 和 Elena Issoglio。“具有分布型漂移的随机微分方程的数值格式”。载于：随机过程及其应用 154（2022年12月1日），第55–90页。[12] Fran¸cois Delarue 和 Roland Diel。“粗糙路径与具有时变分布型漂移的一维随机微分方程：在聚合物中的应用”。载于：Probability Theory and Related Fields 165.1（2016年6月），第1–63页。[13] Mathis Fitoussi。“具有分布型漂移的稳定过程驱动随机微分方程的热核估计”。载于：Potential Analysis 61.3（2024年10月1日），第431–461页。[14] Franco Flandoli、Elena Issoglio 和 Francesco Russo。“具有分布型漂移的多维随机微分方程”。载于：Transactions of the American Mathematical Society 369.3（2017年），第1665–1688页。[15] Franco Flandoli、Francesco Russo 和 Jochen Wolf。“若干具有分布型漂移的随机微分方程，第一部分：一般微积分”。载于：Osaka Journal of Mathematics 40.2（2003年6月），第493–542页。[16] Franco Flandoli、Francesco Russo 和 Jochen Wolf。“若干具有分布型漂移的随机微分方程：第二部分：Lyons-Zheng结构、Itˆo公式与半鞅刻画”。载于：Random Operators and Stochastic Equations 12.2（2004年6月1日），第145–184页。

[17] S. G¨ottlich、K. Lux 和 A. Neuenkirch。《具有不连续漂移系数的随机微分方程的 Euler 格式：收敛速率的数值研究》。载于：差分方程进展 2019.1（2019年12月），第429页。[18] Ludovic Gouden`ege、El Mehdi Haress 和 Alexandre Richard。《具有分数噪声和分布型漂移的随机微分方程的数值近似》。载于：随机过程及其应用 181（2025年3月1日），第104533页。[19] Istv´an Gy¨ongy 和 Mikl´os R´asonyi。《关于具有 H¨older 连续扩散系数的随机微分方程欧拉近似的札记》。载于：随机过程及其应用 121.10（2011年10月），第2189–2200页。[20] Elena Issoglio 和 Francesco Russo。《具有负贝索夫指标漂移和线性增长解的偏微分方程》。载于：微分与积分方程 37.9（2024年9月1日）。[21] Elena Issoglio 和 Francesco Russo。《具有奇异系数的随机微分方程：鞅问题视角与随机动力学视角》。载于：理论概率杂志 37.3（2024年9月），第2352–2393页。[22] Peter E. Kloeden 和 Eckhard Platen。《随机微分方程的数值解》。柏林，海德堡：Springer Berlin Heidelberg，1992年。[23] N.V. Krylov 和 M. R¨ockner。《具有奇异时变漂移的随机方程强解》。载于：Probability Theory and Related Fields 131.2（2005年2月），第154–196页。[24] Khoa Lˆe。《随机缝合引理及其应用》。载于：Electronic Journal of Probability 25（2020年1月1日）。[25] Khoa Lˆe 和 Chengcheng Ling。《驯服奇异随机微分方程：一种数值方法》。载于：概率年刊 53.5（2025年9月），第1764–1824页。[26] Andreas Neuenkirch 和 Michaela Sz¨olgyenyi。《不规则漂移随机微分方程的 Euler–Maruyama 格式：通过化归为求积问题获得收敛速率》。载于：IMA数值分析杂志 41.2（2021年4月23日），第1164–1196页。[27] Andreas Neuenkirch、Michaela Sz¨olgyenyi 和 Lukasz Szpruch。《随机微分方程自适应欧拉–丸山格式：具有不连续漂移及其收敛性分析》。载于：SIAM数值分析杂志 57.1（2019年1月），第378–403页。[28] Hoang-Long Ngo 和 Dai Taguchi。《具有不规则系数的随机微分方程的欧拉–丸山近似的强收敛速率》。载于：计算数学 85.300（2016年7月），第1793–1819页。[29] Nicolas Perkowski 和 Willem Van Zuijlen。《具有分布型漂移的扩散过程的定量热核估计》。载于：Potential Analysis 59.2（2023年8月），第731–752页。[30] Yoshihiro Sawano。《贝索夫空间理论》。第56卷，数学进展。新加坡：Springer Singapore，2018年。[31] Michaela Sz¨olgyenyi。《具有不规则系数的随机微分方程：˜注意间隙！》（2021年）。[32] A J Veretennikov。《关于随机积分方程强解及其解的显式公式》。载于：苏联数学文集 39.3（1981年4月30日），第387–403页。[33] Zhen Wang。《具有 Dini连续系数的随机微分方程的 Euler–Maruyama 格式》。载于：数学快报（2023年7月6日）。[34] Shinzo Watanabe 和 Toshio Yamada。《关于随机微分方程解的唯一性 II》。载于：京都数学杂志 11.3（1971年1月1日）。[35] Jinlong Wei、Junhao Hu 和 Chenggui Yuan。《具有临界低正则性增长漂移的随机微分方程》。载于：微分方程杂志 440（2025年9月），第113453页。

[36] Jinlong Wei、Guangying Lv 和 Jiang-Lun Wu。《具有临界不规则漂移系数的随机微分方程》。载于：微分方程杂志 371（2023年10月），第1–30页。[37] LiqingYan。《具有不规则系数的 Euler 格式》。载于：概率年刊 30.3（2002年7月1日）。[38] Xicheng Zhang。《具有不规则系数的随机微分方程随机流与随机输运方程》。载于：*Bulletin des Sciences Math´ematiques* 134.4（2010年6月1日），第340–378页。[39] Xicheng Zhang。《具有奇异漂移和 Sobolev 扩散系数的随机微分方程强解》。载于：随机过程及其应用 115.11（2005年11月），第1805–1818页。[40] A K Zvonkin。《消除漂移的扩散过程相空间变换》。载于：苏联数学文集 22.1（1974年2月28日），第129–149页。