arXiv:2602.02135v1 [cs.CC] 2 Feb 2026

m-弦图子类上的永恒支配集问题

Ashutosh Rai 数学系，印度理工学院德里分校**Soumyashree Rana** 数学系，印度理工学院德里分校

摘要

图 $G(V, E)$ 的一个支配集是一个顶点集合 $D \subseteq V$，使得 $V \setminus D$ 中的每个顶点在 D 中都有一个邻点。永恒支配集通过在 D 的顶点上布置移动守卫，扩展了这一概念。面对一系列针对未占据顶点的无限攻击时，守卫可以从相邻位置移动到被攻击顶点，同时确保新的守卫配置仍然是一个支配集。在单守卫移动模型中，每次攻击只有一个守卫移动；而在全体守卫移动模型中，多个守卫可以移动。在单守卫移动模型中，表示守卫初始配置的顶点集合称为 G 的永恒支配集；在全体守卫移动模型中，则称为 G 的 m-永恒支配集。在单守卫移动模型和全体守卫移动模型中，这种集合的最小规模分别称为 G 的永恒支配数（$\gamma^{\infty}(G)$）和 G 的m-永恒支配数（$\gamma_m^{\infty}(G)$）。给定一个图 G 和一个整数 k，m-永恒支配集问题询问 G 是否存在一个大小至多为 k 的 m-永恒支配集。

本文主要研究弦图子类中的 m-永恒支配集的计算复杂性，具体而言是分裂图和无向路径图。对于分裂图类，我们先为具有 $t \leq 4$ 的 $K_{1,t}$-自由分裂图设计多项式时间算法，然后证明该问题在 $t \geq 5$ 上是 NP完全的，从而得到了一个二分结果。此外，我们证明该问题在无向路径图上是 NP困难的。我们还通过展示两个图类，揭示了不同变体之间的计算复杂性差异：在其中一个图类中，支配集和 m-永恒支配集都可在多项式时间内求解，而永恒支配集是 NP困难的；在另一个图类中，永恒支配集可在多项式时间内求解，而支配集和 m-永恒支配集都是 NP困难的。最后，我们给出一个图类，在该图类中支配集是 NP困难的，但 m-永恒支配集可有效求解。

2012 ACM 主题分类 计算理论，算法设计与分析

关键词和短语 支配永恒支配 m-永恒支配 NP 困难性$K_{1,\ t}$-自由分裂图无向路图。

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs...

1 引言

设 $G = (V, E)$ 为一个有限、简单且无向的图。顶点集 $D \subseteq V$ 被称为 G 的支配集，如果 $V \setminus D$ 中的每个顶点在 D. 中都有一个相邻顶点。 G 的所有支配集中的最小基数是 G的支配数，记为 $\gamma(G)$。相应问题的判定版本定义如下。

最小支配（支配集）**输入：** 一个图 G 和一个整数 $k \geq 0$。**问题：** $\gamma(G) \leq k$ 是否成立?

支配问题是图论中的基础课题，在网络安全、设施选址和社交网络分析等领域有着广泛的应用 [14, 26]。

© Ashutosh Rai 和 Soumyashree Rana；依据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权。莱布尼茨国际信息学论文集，Dagstuhl城堡–莱布尼茨信息学中心，Dagstuhl出版社，德国

XX：2　m-弦图子类上的永恒支配集问题

尽管该问题通常是 NP困难 [10], ，即使在受限图类中也是如此，但由于其理论深度和实际意义，它一直受到广泛研究 [8, 15]。

多年来，人们提出了许多支配问题的变体，以刻画更具动态性或约束性的情形。动态支配问题的变体因其适用于威胁或需求并非静态、而是不断变化的场景而受到关注。更具体地说，这类问题可用于应对监控和保护问题，例如军事防御策略 [18] 以及流行病学 [20], ，在流行病学中，它有助于优化移动资源的部署，以控制疾病在网络中的传播。此类问题中的一类是永恒支配问题，它刻画了这样一种情形：一组守卫必须一次应对一次攻击，抵御无限序列的攻击，从而防御一张图。

永恒支配问题有许多变体。每个版本由两个参数决定：(i) x，即防御过程中可以移动到相邻顶点的守卫数量；(ii) y，即初始时或防御之后可以占据一个顶点的守卫数量，其中 $x,\ y \in \mathbb{N}$。此类变体所需的最少守卫数记为 $\gamma_{x,\ y}^{\infty}$。当 $y=1$ 时，$\gamma_{x,\ y}^{\infty}$ 记作 γ_{x}^{∞}；如果 x 表示所有守卫均可移动，则记作 γ_{m}^{∞}。下标“m”表示多个（所有）守卫都可以移动以应对一次攻击，上标“∞”表示攻击序列无限。在本文中，我们关注“全守卫移动”模型：防御时允许所有守卫移动，但每个顶点仍至多只能有一名守卫。此变体称为 m-永恒支配集问题。

在正式定义该模型之前，我们先介绍守卫移动的概念。假设图 G 有两个支配集，分别为 $D=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 和 $D'=\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_k\}$，且对每个 $i \in [k]$, $x_i \in N[x'_i]$ 都成立。此时，若 D' 可由 D 经一次守卫移动得到，则称 D' 是由 D 经一次守卫移动得到的。当 $x_i \in N(x'_i)$ 时，这表示位于 x_i 的守卫已移动至 x'_i。现在，我们定义 m-永恒支配集。对于图 $G=(V,E)$，若集合 $D \subseteq V$ 是一个 m-永恒支配集，则对于任意无限攻击序列 $R=(r_1, r_2, \ldots)$，$r_i \in V$，$i=1, 2, \ldots$，都存在一个支配集序列 $(D_0, D_1, D_2, \ldots)$，使得 $D=D_0$，D_i 可由 D_{i-1} 经一次守卫移动得到，且 $r_i \in D_i$ 对每个 $i \geq 1$ 都成立。这里，D_i 表示防御第 i^{th} 次攻击后守卫的配置。构成 m-永恒支配集所需的最少守卫数称为图 G 的 m-永恒支配数，记为 $\gamma_{m}^{\infty}(G)$。两种模型对应问题的判定版本定义如下。

最小 m-永恒支配（m-永恒支配集）**输入：** 一个图 G 和一个整数 $k \geq 0$。 **问题：** $\gamma_{m}^{\infty}(G)$是否 $\leq k$?

最小永恒支配（永恒支配集）**输入：** 一个图 G 和一个整数 $k \geq 0$。 **问题：** $\gamma^{\infty}(G)$是否 $\leq k$?

永恒支配集与其他图动态防护问题密切相关，尤其是永恒顶点覆盖 问题。在该变体中，守卫被放置在顶点上，以保护边而非顶点。当一条边受到攻击时，一名守卫可以沿该边移动以防御它；移动之后，守卫的新配置必须构成一个有效的顶点覆盖。与永恒支配类似，该模型可根据响应一次攻击时允许一名守卫还是多名守卫移动而有所不同。最近研究的一个变体是连通永恒顶点覆盖，其中被占据顶点的集合必须导出一个连通子图。这在监控或通信网络等场景中特别有用，因为它要求守卫之间保持持续通信。

尽管该问题具有NP 困难性，永恒顶点覆盖问题及其变体在算法图论中受到了越来越多的关注（参见论文 [24], [2], [9], [25]）。

1.1 相关工作

Burger 等人于 2004 年首次将永恒支配集作为无限阶支配引入。 [7] 它描述了图上的一种动态防御策略：一组守卫必须应对无休止的顶点攻击序列，同时始终维持一个支配集。在他们的工作中，他们计算了若干基本图类的永恒支配数，例如路径、圈和完全多部图。同年稍后，Goddard 等人将其正式化为永恒安全问题，并引入了两种关键模型：单守卫移动模型和全体守卫移动模型，分别对应 1-安全和 m-安全变体。他们证明，对于完美图，永恒支配集是可有效求解的；这是因为 γ^∞ 介于独立数和团覆盖数之间，而在完美图中二者相等且都可有效计算。此外，他们还根据其他众所周知的图参数，为 γ^∞ 和γ_m^∞ 建立了界限，例如 2-支配数、团覆盖数和独立数。这些界限促使人们进一步研究相关问题之间的复杂性差异：经典的支配集、永恒版本的永恒支配集，以及其全体守卫变体 m-永恒支配集。

Anderson 等人的后续工作 [1] 引入了博弈论视角，将永恒支配问题建模为双人博弈。与此同时，Klostermeyer 和 MacGillivray [17] 开始研究其在树上的计算复杂性。在图类中，弦图是图类算法研究的核心。它们在计算生物学 [29], 、优化 [30], 以及稀疏矩阵计算 [12]中都有应用。弦图的一个关键子类是分裂图类，其顶点集可以划分为一个团和一个独立集。

在 [19], 中证明，对于分裂图， γ_m^∞ 要么等于 γ ，要么等于 $\gamma+1$。此外，他们给出了达到这些值中每一个的图的刻画，并进一步证明 m-永恒支配集对于哈密顿分裂图是NP完全的。由于该类是分裂图的一个子类，该结果意味着该问题对于分裂图以及进而对于弦图都是NP困难的。有趣的是，存在两个不可比的分裂图子类：哈密顿分裂图和$K_{1,t}$-自由分裂图。由于二者互不为对方的子集，自然需要研究$K_{1,t}$-自由分裂图的复杂性，并根据 t的取值得到一个二分性。

从积极的一面来看， γ_m^∞ 在若干图类中属于 P类。这些图类包括树 [17],真区间图 [6], 区间图 [28], 余图、阈值图 [19] 和仙人掌图 [4]。这些结果表明，尽管该问题在一般图上可能很难，但在若干自然的图类中可以有效求解。由于区间图是弦图的子类，因此，为缩小区间图（该问题属于 P类）与弦图（该问题为 NP困难）之间的复杂性差距，一个自然的步骤是研究无向路径图上的复杂性；无向路径图是这两个图类之间的中间类。

关于永恒支配及相关问题的研究成果综述，请读者参阅 [18]。

1.2 我们的工作

受这些观察和复杂性差距的启发，我们研究弦图子类中 m-永恒支配集问题的计算复杂性。本文的主要贡献总结如下。

XX：4　m弦图的子类上的永恒支配集问题

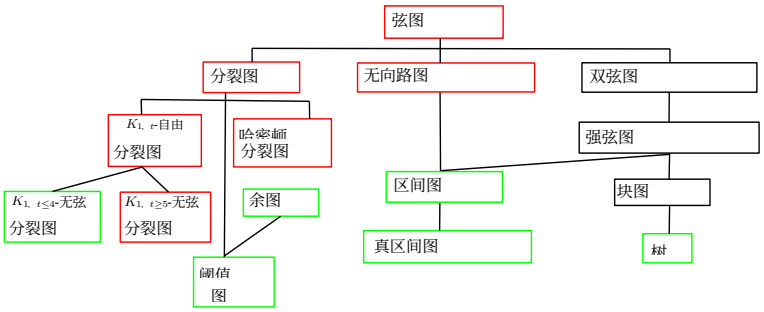


图 1 在弦图类的层次结构图中，从一个类指向另一个类的边表示上层类是下层类的超类。每个类都用一个彩色框标注：红色表示 m-永恒支配集是 NP困难，绿色表示可在多项式时间内求解，黑色表示其复杂性仍未知。

我们给出了分裂图的一个二分结果。 [19], 研究表明，对于任何支配集问题已可在多项式时间内求解的子类，计算m-永恒支配集也都可在多项式时间内完成。此外， [22] 证明了，对于$K_{1,t\geq 5}$-自由分裂图，支配集问题仍然是NP完全的；而对于$K_{1,t\leq 4}$-自由分裂图，该问题则可在多项式时间内求解。特别地，对于$K_{1,4}$-自由分裂图， m-永恒支配集可在 $|V|^{\frac{5}{2}}$ 时间内求解。我们的算法在同一图类上实现了更快的 $|V|^{\frac{3}{2}}$运行时间，从而改进了已有结果。受此启发，我们为$K_{1,t\leq 4}$-自由分裂图上的 m-永恒支配集设计了一种 $|V|^{\frac{3}{2}}$ 时间算法，并证明对于 $t \geq 5$，该问题是NP完全的。已知 m-永恒支配集属于NP类 [19]。该困难性结果通过从精确三覆盖问题归约得到；已知该问题是NP完全的 [16], 而多项式时间算法则基于对参数 $\Delta^I(G)$的分析，该参数表示对于分裂图 $G = (C \cup I, E)$的团 C中的任意顶点，其在独立集 I 中的邻居数量的最大值。

我们证明， m-永恒支配集对于无向路径图是 NP困难的，从而弥合了弦图与区间图之间的复杂度差异。该困难性通过从 $3D$-匹配问题进行归约得到，具体是扩展了 [5],中的思想；在该文献中，支配集被证明对于无向路径图是 NP困难的。此外，我们确定了一个图类，在该图类中支配集是 NP困难的，但m-永恒支配集可以在多项式时间内求解。该图类的构造方式是：取任意图，并将 n 个互不相交的路径 P_5（一条含五个顶点的路径）分别附加到该图的 n 个不同顶点上，其中每个 P_5 都通过将其中间顶点与原图中的对应顶点相连而构造。进一步地，我们证明存在两个图类：在其中一个图类中，支配集和 m-永恒支配集都可以在多项式时间内求解，而永恒支配集是 NP困难的；在另一个图类中，永恒支配集可以在多项式时间内求解，而支配集和 m-永恒支配集都是 NP困难的。这凸显了这三个相关问题之间的复杂度差异。

2 预备知识

本节给出相关定义，并介绍本文将用到的预备结果。

设 $G = (V,\ E)$ 是一个有限简单无向图。顶点的开邻域

v在 G中为 $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$，闭邻域为 $N[v] = \{v\} \cup N(v)$。顶点 v 的度为 $|N(v)|$，记作 $d_G(v)$。当图的含义明确时，我们将其简记为 $d(v)$。若 $d(v) = 1$，则 v 称为 G中的悬挂顶点。 G 的最小度和最大度分别记作 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$。对于 $D \subseteq V$， $G[D]$表示由 D. 导出的子图。我们用记号 $[k]$ 表示 $\{1, 2, \cdots k\}$。其余记号和术语参见[32]。

如果一个图中的每个长度至少为 4 的圈都有一条弦，即连接圈上两个非相邻顶点的一条边，则称该图为弦图。分裂图 $G = (V, E)$ 是弦图的一个子类，其顶点集可以划分为两个集合$V = C \cup I$，使得 C 是一个团，而 I 是一个独立集。如果图 G 中的团 C 不被 G 中的任何其他团真包含，则称其为极大团。本文余下部分考虑具有极大团的分裂图（即 $V = C \cup I$ 中 C 为极大团的分裂划分）。注意，$K_{1,t}$ 是一个具有 $t + 1$ 个顶点的分裂图，其中 $|C| = 1$ 且$|I| = t$. 。如果分裂图 G 不以 $K_{1,t}$ 为诱导子图，则称其为$K_{1,t}$-自由图。对于顶点 $v \in C$， $N_G^I(v) = N_G(v) \cap I$，且 $d_G^I(v) = |N_G^I(v)|$. 。对于 $S \subseteq C$， $N_G^I(S) = \bigcup_{v \in S} N_G^I(v)$，且 $d_G^I(S) = |N_G^I(S)|$. 。对于分裂图 G，$\max\{d_G^I(v) \mid v \in C\}$。如果图 G 满足 $\Delta_G^I = l$，其中 $l \geq 0$为某个整数，则称其为 l-分裂图。爪图是一种完全二部图$K_{1,3}$，由一个中心顶点和另外三个彼此不相连的顶点组成，中心顶点与这三个顶点均相连。如果分裂图 G 包含一个哈密顿圈，则称其为哈密顿分裂图。对于图 $G = (V, E)$， G 中的匹配 $M \subseteq E$ 是由两两不相邻的边组成的集合。如果匹配 M 中的每个顶点 $v \in V$ 都恰好与 M 中的一条边关联，则称该匹配为完美匹配。 G 的最大匹配大小记为 $\mu(G)$。如果图 $G = (V, E)$是某棵树的一族路径的交图，则称其为无向路图。

本文将始终使用以下已知结果。

▶ **定理 1.** *[11]* 图 $G = (V, E)$ 是无向路图，当且仅当存在一棵树 T（称为 G的团树），使得 $V(T) = \mathcal{C}(G)$，其中 $\mathcal{C}(G)$ 是 G的所有极大团构成的集合，并且对于每个 $v \in V(G)$，$T[\mathcal{C}_v(G)]$ 都是 T 中的一条路径，其中 $\mathcal{C}_v(G)$ 是包含顶点 v的 G 的所有极大团构成的集合。

▶ **定理 2.** *[27]* 设 $G = (C \cup I, E)$ 是一个连通分裂图。那么， G 是一个无爪图，当且仅当 $\Delta_G^I \leq 1$ 或 $\Delta_G^I = 2$，此时对于每个 $u, v \in C$，满足$d_G^I(v) = 2, N_G^I(u) \cap N_G^I(v) \neq \emptyset$.

▶ **引理3.** *[27]* 如果一个分裂图是无爪图且 $\Delta_G^I = 2$，那么 $|I| \leq 3$.

▶ **观察 4.** *[23]* 设 $G = (C \cup I, E)$ 是一个 $K_{1,3}$-自由分裂图。如果对于任意一对顶点 y_i, $y_j \in I, N(y_i) \cap N(y_j) \neq \emptyset$，则 $N(y_i) \cup N(y_j) = C$。

▶**定理 5.** *[27]* 设 G 是一个 *3*-分裂图，则 G 是 $K_{1,4}$-自由图，当且仅当对于每个 $v \in C$，使得 $d_G^I(v) = 3$, $N_G^I(u) \cap N_G^I(v) \neq \emptyset$，对于每个 $u(\neq v) \in C$。

▶ **引理 6.** *[27]* 设 G 是一个 $K_{1,4}$-自由的 3-分裂图。对于任意 $v \in C$，使得 $N_G^I(v) \neq \emptyset$，子图 H，即 $G[V(G) \setminus N_G^I(v)]$,，是顶点集 $V(G) \setminus N_G^I(v)$上的诱导子图；对于某些 $l, 0 \leq l \leq 2$.，它是一个分裂图

令 M为 H的标记图。则 M中任意最大匹配的大小为 $\mu(M) \leq 2$.

▶ **观察7.** *[13]* 令 G 为一个图。则 $\gamma(G) \leq \gamma_m^{\infty}(G) \leq \alpha(G)$，其中 $\alpha(G)$ 和$\gamma(G)$ 分别是 G的独立数和支配数。

▶**观察8.** 设 G 为非完全图。则 G 有全邻顶点当且仅当$\gamma_m^{\infty}(G) = 2$。

▶**观察9.** 设 $G=(V,E)$ 为一个图，且 $S\subseteq V$ 使得对 S 的任意两个顶点 u、v，均有 $N(u)\cap N(v)=\emptyset$，则 $\gamma(G)\geq|S|$。

▶**观察10。** 设 $G=(V=(C\cup I)\ E)$ 是一个分裂图。那么，G 的最大独立数为 $|I|$ 或 $|I|+1$。

3 复杂度差异

本节将阐明三个密切相关的图问题之间的复杂性差异：支配集、永恒支配集和 m-永恒支配集。具体而言，我们确定了两个图类，它们在这些问题上呈现出截然不同的计算复杂度。在第一个图类中，支配集和 m-永恒支配集都是 NP 困难的，而永恒支配集可在多项式时间内求解。在第二个图类中，永恒支配集是 NP 困难的，而支配集和 m-永恒支配集均可在多项式时间内求解。现在，我们来定义一个图类 GP_3。

▶**定义11。**（GP_3-图）设 $G=(V,E)$ 为任意一个图。若图 $G'=(V',E')$ 可通过将 n 条长度为 3 的不同路径 $P_3^i=\{v_i^0,v_i^1,v_i^2\}$ $i\in[n]$ 连接到 G 上构造而成，则称其为一个 GP_3-图；其中，对于每个顶点 v_i，$v_i\in V$ 均与 v_i^1（P_3^i 的中间顶点）相邻。

GP_3 图类由所有 GP_3 图组成。

注意，对于由图 $G=(V,E)$ 构造的 GP_3 图 $G'=(V',E')$，我们有 $|V'|=4|V|$ 且 $|E'|=3|V|+|E|$。

我们首先证明，支配集和 m-永恒支配集可以在 GP_3 图上在线性时间内求出。

▶**引理12。** 对于 GP_3 图 G'，$\gamma(G')=\frac{|V'|}{4}$ 且 $\gamma_m^\infty(G')=\frac{|V'|}{2}$。

证明。 首先，我们证明 $\gamma(G')=\frac{|V'|}{4}$。设 G 为任意一个图，G' 为其对应的 GP_3 图。设 D' 为 G' 的任意一个支配集。由于 D' 是一个支配集，因此对于所有 $i\in[n]$，有 $|\{v_i^0,v_i^1,v_i^2\}\cap D'|\geq 1$。因此，$|D'|\geq|V|=\frac{|V'|}{4}$。

反过来，令 $D'=\{v_i^0\mid 1\leq i\leq n\}$。由于 $\cup_{i\in[n]}N[v_i^0]=V'$，$D'\subseteq V'$ 是 G' 的支配集。因此，$\gamma(G')\leq|V|=\frac{|V'|}{4}$。

现在，我们证明 $\gamma_m^\infty(G')=\frac{|V'|}{2}$。令 G 为任意一个图，G' 为相应的 GP_3 图。令 D' 为 G' 的一个 m-永恒支配集。由于 D' 是一个支配集，因此对所有 $i\in[n]$，都有 $|\{v_i^0,v_i^1,v_i^2\}\cap D'|\geq 1$。若对每个 P_3^i，$i\in[n]$，$|D'\cap P_3^i|\geq 2$，则 $|D'|\geq 2|V|=\frac{|V'|}{2}$。否则，存在某个 $j\in[n]$，使得 P_3^j 满足 $|D'\cap P_3^j|<2$。此外，由于对所有 $i\in[n]$，$|\{v_i^0,v_i^1,v_i^2\}\cap D|\geq 1$，我们有 $|D'\cap P_3^j|\geq 1$。这意味着 $|D'\cap P_5^j|=1$。因此，显然 $v_j^1\in D'$。若 $v_j\notin D'$，则对 v_j^2 的攻击无法得到防御，这与 D' 是一个 m-永恒支配集相矛盾。因此，$v_j\in D'$。现在，可以通过 $v_j^1\to v_j^2$ 防御对 v_j^2 的攻击，$v_j\to v_j^1$，这意味着 $|D'\cap P_3^j|\geq 2$。因此，$|D'\cap\{v_j^0,v_j^1,v_j^2\}|\geq 2$，意味着 $|D'\cap P_3^j|\geq 2$。故 $|D'|\geq 2|V|=\frac{|V'|}{2}$。

反过来，令 $D=\{v_i^1,\ v_i^2\mid 1\leq i\leq n\}$。由于 $\{v_i,\ v_i^1,\ v_i^2,\ v_i^0\mid i\in[n]\}$ 构成了 G' 的一个导出星，且 v_i^1 是其中心顶点，因此对于每个 $i\in[n]$，只要保持 v_i^1 为不变量，就能防御对该导出星叶节点的任何攻击。因此，D' 是 G' 的一个 m-永恒支配集。因此，$\gamma_m^\infty(G')\leq 2|V|=\frac{|V'|}{2}$。◀

现在，我们给出图上永恒支配集问题的困难性。

▶ **引理 13.** 设 $G=(V,E)$ 是一个阶为 n 的图，$G'=(V,E')$ 是其对应的GP_3-图。那么对于任意整数 $k \leq n$，图 G 存在一个基数至多为 k 的永恒支配集，当且仅当 G' 存在一个基数至多为$k+2n$ 的永恒支配集。

证明。设 $D \subseteq V$ 是 G 的永恒支配集，其基数至多为 k。定义$D' = D \cup \{v_i^0, v_i^2 \mid i \in [n]\}$。显然，$|D'| \leq k+2n$。现在证明，$D'$ 是 G'的永恒支配集。首先，注意到 D' 是 G'的支配集：因为 D 支配 G，且对于每个 $i \in [n]$，$N[\{v_i^0, v_i^2\}] = \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}$。现在，考虑对任意顶点 $v \in V'$ 发起的攻击。如果 $v \in V$，则可以使用与 G中相同的策略进行防御。如果对于某个 $i \in [n]$，有 $v \in \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}$，注意集合 $\{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}$ 在 G'中构成一个以 v_i^1为中心的导出星。通过保持 v_i^1 作为不变量，可以防御对叶子 v_i^0 或 v_i^2 的任何攻击。此外，容易看出，所有新的守卫配置仍然是 G'的支配集。因此，D' 是 G'的永恒支配集。

反过来，令 $D' \subseteq V'$ 为 G' 的一个永恒支配集，且满足 $|D'| \leq k+2n$。由于 D' 是 G' 的支配集，对于每个 $i \in [n]$，都有 $|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| \geq 1$。此外，由于 D' 是 G' 的一个永恒支配集，因此$|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| \geq 2$。假设存在某个 $i \in [n]$，使得在所有配置中，$|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| = 3$。那么很容易看出，$D^* = D \setminus \{v_i^2\}$ 也是 G' 的一个永恒支配集，且基数更小。现在考虑这种情况：在某个配置中，对于某个 $i \in [n]$，$|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| = 3$。由于该模型规定每次攻击只能移动一个守卫，因此攻击必定发生在 v_i^1，并由 v_i 防御。我们可以修改防御策略，使得 $|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| = 2$，并且仍能防御其他攻击；于是结论成立。另一种情况是，v_i^0 防御对 v_i^1 的攻击，而位于顶点 v_i 的守卫留在原处。注意，对 v_i 的任何攻击都可以由其自身防御，而对其他所有顶点的攻击则可以沿用先前的策略来防御。因此，对于每个 $i \in [n]$，都有 $|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| = 2$。于是，在所有配置中，对于所有 $i \in [n]$，$|D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\}| = 2$。接着定义 $D = D' \setminus (D' \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2\})$ 蕴含 $|D| \leq k$。现在，只需证明 D 是 G 的一个永恒支配集。我们通过模拟 D' 在 G 中的移动来证明这一点。如果攻击发生在 v_i，且原策略中守卫为了 D' 而从 v_i 移至 v_i^1，那么我们无需采取任何行动。对于发生在某个 v_i 上的其他任何攻击，在针对 D' 的修改后策略中负责防御该攻击的守卫也能防御它。◀

由于已知永恒支配集在一般图上是NP困难的，因此，根据引理 13，GP_3-图上的永恒支配集的NP 困难性可直接得到 [31]。

已知永恒支配集在完美图上是多项式时间可解的 [13]。因此，作为推论，我们有：

▶**推论 14.** 永恒支配集在弦图上是多项式时间可解的。

然而，对于弦图而言，另外两个问题是NP困难的。也就是说，支配集在弦图上是NP完全的 [5]。此外，已知 m-永恒支配集在哈密顿分裂图上是NP完全的 [19]。由于哈密顿分裂图是弦图的子类，我们得到以下推论。

▶**推论 15.** m-永恒支配集在弦图上是*NP*困难的。

3.1 支配集与 m-永恒支配集

在本小节中，我们确定一个图类，在该图类上，支配集问题是NP困难的，而m-永恒支配集问题可在多项式时间内求解。

XX：8　m弦图子类上的永恒支配集问题

令 P_5 表示一个有五个顶点的路径图。对于 $1 \le i \le n$，令$\{P_5^i \mid 1 \le i \le n\}$ 为一组 n 个互不相同的五顶点路径，其中 $P_5^i = v_i^0 v_i^1 v_i^2 v_i^3 v_i^4$。现在，我们正式定义图类 GP_5-图如下。

▶**定义16.** （GP_5-图）令 $G=(V,E)$ 为任意一个图。若图 $G_P=(V_P,E_P)$ 可通过将 v_i^2（路径 P_5^i 的中间顶点）连接到 V，$i \in [n]$ 中的对应顶点 v_i，由 G 构造得到，则称其为 GP_5-图。

GP_5-图类由所有 GP_5-图组成。

注意，对于由图 $G=(V,E)$ 构造得到的 GP_5-图 $G_P=(V_P,E_P)$，我们有$|V_P|=6|V|$ 和 $|E_P|=5|V|+|E|$。

我们首先证明，可以在线性时间内计算图 GP_5 上的 m-永恒支配集。

▶**引理17.** 对于图 GP_5 G_P，$\gamma_m^\infty(G_P)=\frac{|V_P|}{2}$。因此，对于 GP_5 图，可以在线性时间内计算 m-永恒支配集。

证明。设 G 是任意一个图，G_P 是相应的 GP_5 图。设 D 是 G_P 的一个 m-永恒支配集。由于 D 是一个支配集，因此对于所有 $i \in [n]$，有 $|\{v_i^0, v_i^1\} \cap D| \ge 1$ 且$|\{v_i^3, v_i^4\} \cap D| \ge 1$。若对每个 P_5^i，都有 $i \in [n]$, $|D \cap P_5^i| \ge 3$，则 $|D| \ge 3|V| = \frac{|V_P|}{2}$。否则，设存在某个 $j \in [n]$，使得 P_5^j 满足 $|D \cap P_5^j| \le 2$。此外，由于对于所有 $i \in [n]$，有 $|\{v_i^0, v_i^1\} \cap D| \ge 1$ 且 $|\{v_i^3, v_i^4\} \cap D| \ge 1$，我们还有$|D \cap P_5^j| \ge 2$。这意味着 $|D \cap P_5^j| = 2$。现在，若 $|D \cap \{v_j^1, v_j^3\}| = 0$，则对 v_j^2 的攻击只能由 v_j 防御，从而推出 $|D \cap P_5^j| \ge 3$；否则，设 $|D \cap \{v_j^1, v_j^3\}| \le 1$。不失一般性，设$D \cap \{v_j^1, v_j^3\} = v_j^1$。注意，对 v_j^2 的攻击无法防御，因为如果唯一的邻居 $v_j^1 \in D$ 移至 v_j^2，顶点 v_j^0 仍未被支配。因此，$|D \cap \{v_j, v_j^2\}| \ge 1$，从而推出 $|D \cap P_5^j| \ge 3$。因此，$|D| \ge 3|V| = \frac{|V_P|}{2}$。——

反过来，令 ˆ{v_i^1、v_i^2、v_i^3 | $1 \le i \le n$}。由于{$v_i v_i^2$、$v_i^0 v_i^1$、$v_i^3 v_i^4$ | $i \in [n]$} 构成 G_P、v_i^1、v_i^2、v_i^3的完美匹配，因此可以防御对相应边的顶点发起的攻击

$v_i^0 v_i^1$ $v_i v_i^2$ $v_i^3 v_i^4$　　D　　m　　G_P　　γ_m^∞ G_P ≤，。由此，ˆ 是 的-永恒支配集。

$3|V| = \frac{|V_P|}{2}$

因此，()。——

◀

接下来，我们证明支配集问题对于 GP_5 图是NP困难的。为此，我们证明：一般图 G 上的支配集问题可有效求解，当且仅当对应的 GP_5-图上的支配集问题可有效求解。

▶**引理18。** 设 $G=(V,E)$ 是一个阶为 n 的图，$G_P=(V_P,E_P)$ 是其对应的 GP_5-图。那么，对于任意整数 $k \le n$，图 G 存在基数至多为 k 的支配集，当且仅当 G_P 存在基数至多为 $k+2n$ 的支配集。

证明。 设 $D \subseteq V$是 G 的一个支配集，满足 $|D| \le k$。定义 $D' = D \cup \{v_i^1, v_i^3 \mid i \in [n]\}$。容易验证，$D'$ 是 G_P的一个支配集，且 $|D'| \le k+2n$。

另一方面，设 $D' \subseteq V_P$ 是 G_P的一个支配集，满足 $|D'| \le k+2n$。注意，对每个 $i \in [n]$，$|D' \cap \{v_i^0, v_i^1\}| \ge 1$ 且 $|D' \cap \{v_i^3, v_i^4\}| \ge 1$。若 $v_i^2 \in D'$，则令$D^* = D' \setminus \{v_i^2\} \cup \{v_i\}$。现在，假设对任意 $i \in [n]$，都有 $v_i^2 \notin D^*$。定义 $D = D^* \cap V$。于是 $|D| \le k$，因为 $|D \cap \{v_i^0, v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4\}| \ge 2$。由于对任意 $i \in [n]$，$v_i^2 \notin D^*$，因此 D是 G的一个支配集。◀

由于支配集问题对于一般图而言已知是NP困难的 [3], ，因此，根据引理18，GP_5-图上的支配集问题的NP 困难性可直接得到。

▶ **定义19**。 （GP_2-图）设 $G = (V, E)$ 为任意图。如果图 $G' = (V', E')$ 可以通过从 G 附加 n 条互不相同的悬挂边$\{v_i^1 v_i^2 \mid i \in [n]\}$构造得到，并且对每个 $i \in [n]$， v_i 都与 v_i^1 相邻，则称其为 GP_2-图。

GP_2图类由所有 GP_2图组成。

▶ **观察 20**。对于一个 GP_2-图 G'， $\gamma(G') = \lceil \frac{|V'|}{3} \rceil$。

现在，我们提出如下猜想。

▶ **猜想 21**。 设 $G = (V, E)$ 是一个阶为 n 的图，且 $G' = (V', E')$ 是对应的 GP_2图。那么对于任意整数 $k \leq n$，图 G 有一个基数至多为 k 的 m永恒支配集，当且仅当 G' 有一个基数至多为 $k + n$的 m永恒支配集。

上述猜想 21 意味着， m-永恒支配集问题对于GP_2图是 NP困难的。

表 1 总结了本节所得的结果。

	问题 1	问题 2	问题 3
问题 1	–	弦图	GP_5-图
问题 2	GP_3-图	–	GP_3-图
问题 3	?	弦图	–

表 1 单元格 (i, j) 表示这样一种图类：其中 i^{th} 问题更难，而 j^{th} 问题可有效求解。这里，问题 1 指支配集，问题 2 指永恒支配集，问题 3 也指永恒支配集。“? ”表示是否存在这样一种图类（其中 i^{th} 问题更难，而 j^{th} 问题可有效求解）仍然未知。

4 分裂图的复杂性二分性

本节给出分裂图的一个二分结果。注意，每个分裂图都是某个 $t \geq 1$ 的 $K_{1,t}$-自由图。由于非连通图的 m-永恒支配数等于其各连通分量的永恒支配数之和，因此我们聚焦于连通图。容易看出，对于 $n \geq 1$， $\gamma_m^\infty(K_{1,n}) = 2$；对于完全图 G， $\gamma_m^\infty(G) = 1$。因此，本节余下部分只考虑既非完全图也非星图的连通图。

4.1 $K_{1,3}$-自由分裂图

现在，我们给出连通K_1 $_{m,3}$-自由分裂图的 m-永恒支配数的刻画。该结果还导出了一个用于计算此参数的线性时间算法。

▶ **定理 22. </style}设 $(C \cup I, E)$** 是一个连通的 $K_{1,3}$-自由分裂图，其中 C 是一个团， I 是一个独立集。那么， G, $\gamma_m^\infty(G)$的 m-永恒支配数由下式给出

$$by\ \gamma_m^\infty(G) = \begin{cases} |I| + 1, & if\ \cup_{v \in I} N(v) \neq C; \\ |I|, & if\ \cup_{v \in I} N(v) = C. \end{cases}$$

证明。 *情形 1* : $(\cup_{v \in I} N(v) \neq C)$ 由于 G是一个 $K_{1,\ 3}$-自由分裂图，且 $\cup_{v \in I} N(v) \neq C$，因此有 $\Delta_G^I = 1$。于是，对于任意一对顶点 v_1， $v_2 \in I$， $N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$。这意味着 $\gamma(G) \geq |I|$（根据观察9），且 $\alpha(G) \leq |I| + 1$（根据观察10）。

因此，我们有 $|I| \le \gamma_m^\infty(G) \le |I|+1$（根据观察7）。为了证明 $\gamma_m^\infty(G) > |I|$，即使用 $|I|$ 个守卫时，并非总能防御图 G上的所有攻击。反设存在一个极小的 m-永恒支配集 D，使得 $|D| = |I|$。由于 $\cup_{v\in I} N(v) \ne C$，在 $C\setminus N(I)$ 中存在一个顶点（设为 x）；又由于 D也是一个支配集，因此 $D\cap N(I) \ne \emptyset$。于是，攻击 $x \in C\setminus N(I)$ 时，无法通过移动 C 中的任何守卫来防御，否则会使 I 中的某个顶点不受支配。因此，$\gamma_m^\infty(G) = |I|+1$。

- 情形2：($\cup_{v\in I} N(v) = C$) 由于 G是一个$K_{1,3}$-自由分裂图，且 $\cup_{v\in I} N(v) = C$，因此我们有以下两个子情形。
  - 子情形 1：($\Delta_G^I = 1$) 由于对于任意一对顶点 $v_1, v_2 \in I$，$N(v_1)\cap N(v_2) = \emptyset$，这意味着 $\gamma(G) \ge |I|$ (根据观察9)。因此，我们有 $\gamma_m^\infty(G) \ge |I|$ (根据观察7)。此外，由于 $\cup_{v_i\in I} N(v_i) = C$，我们有 $\gamma_m^\infty(G) \le \alpha(G) \le |I|$(根据观察10)。因此，$\gamma_m^\infty(G) = |I|$。子情形 2：($\Delta_G^I = 2$) 由于 G 不是完全图，我们有 $|I| \ge 2$；根据引理3，我们有 $|I| \le 3$。若 $|I| = 2$，则 C 中存在一个全邻顶点，且 $\Delta_G^I = 2$。在这种情况下，$\gamma_m^\infty(G) = 2 = |I|$ (根据观察8)。现在考虑 $|I| = 3$ 这一情形。由于 $\Delta_G^I = 2$，不存在全邻顶点。因此，根据观察8，$\gamma_m^\infty(G) \ge 3$。现在我们证明 $\gamma_m^\infty(G) \le 3$。注意，对于每个 $v_i \in I$，$G[N[v_i]]$ 都是完全图。因此，在每个 $G[N[v_i]]$中保留一个顶点，即可防御针对 G 中顶点的任何攻击。因此，$\gamma_m^\infty(G) = 3$。

◀

时间复杂度：假设图 $G = (C\cup I, E)$ 以邻接表表示给出。构造并集 $\cup_{v\in I} N(v)$ 并验证该并集是否等于团 C，可以通过以下步骤同时完成：首先初始化一个大小为 $|C|$、以 C 的顶点为索引的数组（耗时 $O(|V|)$），然后对 I 的每个顶点，遍历其邻接表并在数组中标记其邻居（耗时 $O(|V|+|E|)$），最后再次遍历数组，检查是否所有顶点都已标记（耗时 $O(|V|)$）。因此，整个计算可在 $O(|V|+|E|)$ 时间内完成。由此，连通的 $K_{1,3}$- 自由分裂图的 m-永恒支配数可在线性时间内求得。

4.2 $K_{1,4}$-自由分裂图

现在，我们给出连通 m-永恒支配数的一个刻画，其中的图为 $K_{1,4}$-自由分裂图。该类图将上一小节中针对 $K_{1,3}$-自由分裂图所得的结果加以推广。此外，我们的刻画可直接导出一种用于计算该参数的多项式时间算法。

▶**观察 23**。 每个 $K_{1,4}$-无 1-分裂图也是一个 $K_{1,3}$-无 1-分裂图。

▶ 定义 *24*。 *[27]*（标记图）对于一个 l-分裂图 $H = (\hat{C}\cup\hat{I}, \hat{E})$ $0 \le l \le 2$，标记图 $M = (V_M, E_M)$ 的定义如下：$V_M = \hat{I}$以及 $E_M = \{uv \mid u, v \in \hat{I}, N_H(u)\cap N_H(v) \ne \emptyset\}$。每条边 uv都由一个顶点 $w_{uv} \in N_H(u)\cap N_H(v)$ 进行标记，该顶点称为其标记团顶点。

▶ 定理*25*。设 $H = (\hat{C}\cup\hat{I}, \hat{E})$是一个$K_{1,4}$-自由的2-分裂图，并设 M 为其标记$\hat{}$图。令 M为 M的一个最大匹配，并设 L 为 C中与M的边对应的顶点集合。构造约化图 $H' = (\hat{C}\cup I', E')$，其中$I' = \hat{I}\setminus N_H^{\hat{I}}(L)$ $E' = \hat{E}\setminus\{l_v i_v \mid l_v \in L, i_v \in N_H^{\hat{I}}(L)\}$。那么，$H$ 的 m-永恒支配数为$\gamma_m^\infty(H) = |L|+|I'|+1$。

证明。由于 $H = (\hat{C} \cup \hat{I}, \hat{E})$是一个$K_{1,4}$-自由的2-分裂图，因此 $\Delta^{\hat{I}}_H = 2$。构造标记$\hat{}$图 M 后，删除 L中每个标记团顶点 l_v的 $N^I_H(l_v)$；这些顶点对应于M（该标记图的一个最大匹配）中的所有边，由此得到约化图$H' = (\hat{C} \cup I', E')$，其中 $I' = \hat{I} \setminus N^{\hat{I}}_H(L)$且 $E' = \hat{E} \setminus \{l_v i_v \mid l_v \in L, i_v \in N^{\hat{I}}_H(l_v)\}$。注意，由于 $\Delta^{I'}_{H'} \leq 1$，所得图 H' 是一个$K_{1,3}$-自由的1-分裂图。接下来，我们根据 $\Delta^{I'}_{H'}$分析两种情况。

- 情形 1：$(\Delta^{I'}_{H'} = 0)$ 我们将匹配边 $m \in \mathbf{M}$ 的顶点记为 v^1_m 和 v^2_m，并将它们对应的标记团顶点记为 l_m。注意，对于任意两条匹配边 m_i和 $m_j \in \mathbf{M}$，$l_{m_i} \neq l_{m_j}$。令 $S \subseteq N^I_H(L)$ 表示每个 $l_m \in L$ 的一个邻居所构成的集合。显然，$|S| = |L|$ 且对于任意顶点 x、$y \in S$，$N(x) \cap N(y) = \emptyset$。因此，$H$ 的任意支配集都至少包含 $|L|$ 个顶点，即 $\gamma(H) \geq |L|$（根据观察9）。所以，$\gamma^\infty_m(H) \geq |L|$ 可由观察7得出。现在，我们证明 $\gamma^\infty_m(H) > |L|$，也就是说，使用 $|L|$ 个守卫时，并非总能防御对 H 中顶点的攻击。设 D 是 H 的一个基数为 L 的极小 m-永恒支配集。事实上，$D = L$，因为 L 中的每个顶点在 I 中都有两个邻居。对匹配边 $m_i \in \mathbf{M}$ 上任意顶点发动攻击（不失一般性，设该顶点为 $v^1_{m_i}$）时，无法进行防御，因为将唯一相邻的守卫 l_{m_i} 移至 $v^1_{m_i}$ 会导致顶点 $v^2_{m_i}$ 未被支配。因此，$\gamma^\infty_m(H) \geq |L| + 1$。现在，取集合 $D = L \cup \{i_v\}$，其中 $i_v \in \hat{I}$（注意，对于某个 $m \in \mathbf{M}$，有 $i_v = v^j_m, j \in [2]$，因为 $N^I_{\hat{H}} = \hat{I}$）。接下来，为了证明 $\gamma^\infty_m(H) \leq |L| + 1$，我们证明 D 是 H 的一个m-永恒支配集。注意，D 是 H 的一个支配集，因为 $L \subseteq D$。定义$D_1 = D$，并令 $D_2 = L \cup \{c^*\}$，其中 $c^* \in \hat{C} \setminus L$。在每个配置中保持 L 上的守卫位置不变，我们便能使用表 2 中描述的策略来防御对 H 中顶点的攻击。因此，$\gamma^\infty_m(H) = 1 + |L|$。由于 $\Delta^{I'}_{H'} = 0$，我们有 $|I'| = 0$。因此，$\gamma^\infty_m(H) = |L| + |I'| + 1$。

遭到攻击的顶点发生攻击	攻击发生时的防护配置类型	
	D_1	D_2
$\{c_v, c_v \in \hat{C} \mid L\}$	$D_2\ \{l_m \to c_v, i_v \to l_m\}$	$D_2\{c^* \to c_v\}$
$\{i^*, i^* \in \hat{I}\}$	$D_1\ \{l_{m^*} \to i^*, l_m \to l_{m^*}, i_v \to l_m\}$	$D_1\ \{l_{m^*} \to i^*, c^* \to l_{m^*}\}$

表 2 针对顶点攻击的防御策略，定理25证明中情形 1 的示例。这里 $i_v \in \{v^1_m, v^2_m\}$ 以及 $i^* \in \{v^1_{m^*}, v^2_{m^*}\}$。

- 情形2：$(\Delta^{I'}_{H'} = 1)$ 设 $A = I' \cup X^*$，其中 X^* 是$\hat{X} = \{u \in N^I_H(v) \mid v \in L$和 $N_H(u) \cap N_H(I') = \emptyset\}$的极大独立子集。现在，我们声称 $|X^*| = |L|$。由于 M 是 M的最大匹配，因此 M 至少有一个邻点属于 $l_m \in$（不失一般性，取 v^1_m，记为 $N(l_m) = \{v^1_m, v^2_m\}$），使得 $N_H(v^1_m) \cap N_H(I') = \emptyset$。因此，$|X^*| \geq |L|$。此外，$|X^*| \leq |L|$ 成立，因为 X^* 是独立集意味着 $\{v^1_m, v^2_m\} \nsubseteq X^*$。因此，$|A| = |L| + |I'|$。现在注意，$A$ 中任意两个顶点都没有公共邻点。因此，H 的任意支配集至少需要 $|A|$ 个顶点，即$\gamma(H) \geq |A|$（根据观察9）。由此可得 $\gamma^\infty_m(H) \geq |A|$（根据观察7）。现在，我们证明 $\gamma^\infty_m(H) > |A|$，即使用 $|A|$ 个守卫时，并非总能防御图 H上的攻击。设 D 是 H的一个极小 m-永恒支配集，且满足 $|D| = |A|$。那么有两种情况：要么 $N(v^2_m) \cap N(I') = \emptyset$，要么 $N(v^2_m) \cap N(I') \neq \emptyset$。首先，设 $N(v^1_m) \cap N(I') = \emptyset$。显然，$l_m \in D$，因为有 $|A|$个守卫。因此，对 v^1_m（分别对 v^2_m）发起攻击会使 v^2_m（分别使 v^1_m）不受支配。现在考虑情形 $N(v^2_m) \cap N(I') \neq \emptyset$。设 $i_m \in I'$满足 $N(v^2_m) \cap N(i_m) = \{c_m\}$。显然，$\{l_m, c_m\} \cap D \neq \emptyset$，因为有 $|A|$ 个守卫。因此，对 v^2_m 发起攻击会使 v^1_m（分别使 i_m）

若 l_m（分别为 c_m）进行防御，则会不受支配。因此，$\gamma_m^\infty(H) \geq |A|+1 = 1+|L|+|I'|$。接下来，为证明 $\gamma_m^\infty(H) \leq 1+|L|+|I'|$，我们取一个基数为 $1+|L|+|I'|$ 的集合 D，并证明 D 是 H的一个 m-永恒支配集。注意，H' 是一个K_1、4-自由的1-分裂图。因此，对每个 $v_i \in C$，都有$d_{H'}^{I'}(v_i) \leq 1$。由此可知，对任意一对 v_i、$v_j \in I'$，都有 $N(v_i) \cap N(v_j) = \emptyset$。设对每个 $v_i \in I'$，$C_i = N(v_i)$。现在，令 $S = \{c_i \in C_i \mid c_i$ 是 C_i的一个代表元$\}$，且 $D = S \cup L \cup \{i^*\}$（注意 $|S| = |I'|$），其中 $i^* \in \hat{}I$。现在，我们证明 D 是 H的一个m-永恒支配集。注意，D 是 H 的一个支配集，因为 $S \cup L \subseteq D$。定义 $D_1 = D$ 和 $D_2 = D \setminus \{i^*\} \cup \{c^*\}$，其中 $c^* \in \hat{}C \setminus (S \cup L)$。显然，$|D_1| = |D_2|$。通过保持集合 $S \cup L$ 作为不变量，我们使用表3中描述的策略来防御针对 H 中任意顶点的攻击。因此，$\gamma_m^\infty(H) = |L| + |I'| + 1$。

发生攻击的顶点 攻击发生	攻击时防护配置的类型	
	D_1	D_2
$\{c_v, c_v \in C \mid (S \cup L)\}$	$D_2\{v^* \to c_v, i^* \to v^*\}$	$D_2\ \{c^* \to c_v\}$
$\{i_v, i_v \in I\}$	$D_1\ \{v_i \to i_v, v^* \to v_i, i^* \to v^*\}$	$D_1\{v_i \to i_v, c^* \to v_i\}$

表3 针对顶点攻击的防御策略，定理25证明中情形2的示意图。这里 $v^* \in N(i^*) \cap D_2$，$v_i \in N(i_v) \cap D_1$。

◀

时间复杂度：给定以邻接表表示的图 $H = (\hat{}C \cup \hat{}I, \hat{}E)$。从 H 构造标记图 M 需要 $O(|V|)$ 时间。由于 H 是一个 2- 分裂图，$\hat{}\hat{}\hat{}$ 每个顶点 $c \in C$ 在 I 中至多有两个邻居；因此，通过遍历 C的顶点，我们可以在 $O(|V|)$ 时间内生成 M 的所有边及其对应的。使用标准匹配算法 [21]，可以在 $O(|V|^{\frac{3}{2}})$ 时间内找到 M的最大匹配 $\mathcal{M}$。收集匹配边的所有标签 $L \subseteq \hat{}C$，并通过移除 $N_H^{\hat{}I}(L)$ 及其关联边来构造图 $H' = (\hat{}C \cup I', E')$，需要 $O(|V|)$ 时间。因此，由定理25导出的算法的总体运行时间为 $O(|V|^{\frac{3}{2}})$。

▶ 定义 *26*。（*I*型和*II*型）设 $G = (X \cup Y, E)$ 是一个二分图，满足$|X| = 3$，且存在权函数 $w: Y \to \mathbb{N}$。若 G 中存在一个匹配，饱和 X 的所有顶点，并且 Y 中没有两个被饱和的顶点具有相同的权重，则称 G 为 *I*型。若 G 包含两个不相交的诱导子图：$K_{1,2} = \{ac, bc\}$ 和 $K_2 = \{de\}$，且满足 a、b、$d \in X$、c、$e \in Y$，以及 $w(c) \neq w(e)$，则称 G 为 *II* 型。

▶ 定理 *27*。设 $G = (C \cup I, E)$ 是一个无 $K_{1,4}$ 的 3-分裂图。设 $x \in C$ 满足 $d_G^I(x) = 3$。令 $H = (C \cup \hat{}I, \hat{}E)$ 为从 G 中删除集合 $N_G^I(x)$ 后得到的图，其中 $\hat{}I = I \setminus N_G^I(x)$ 且 $\hat{}E = E \setminus \{xy \mid y \in N_G^I(x)\}$；令 L 为图 H 的带标记的团顶点集。构造约化图 $H' = (C \cup I', E')$，其中 $I' = \hat{}I \setminus N_H^{\hat{}I}(L)$ $E' = \hat{}E \setminus \{l_v i_v \mid l_v \in \hat{}L, i_v \in N_H^I(L)\}$。构造二分图 $Q = (A \cup B, E_Q)$，其中 $A = N_G^I(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$、$B = L \cup N_{H'}(I')$，且 $E_Q = \{cx_j, l_m x_j \mid l_m \in (N_G(x_j) \cap L)\ c \in (N_G(x_j) \cap N_{H'}(I'))\ j \in [3]\}$；对于任意 $c_i, c_j \in B$，若 $N_{H'}^{I'}(c_i) \cap N_{H'}^{I'}(c_j) \neq \emptyset$，则 $w(c_i) = w(c_j)$。

那么，m-永恒支配数，

$$\gamma_m^\infty(G) = \begin{cases} |L|+|I'|+1, & \text{如果图 } Q \text{ 属于 } I \text{ 型或 } II \text{ 型} \\ |L|+|I'|+2, & \text{否则。} \end{cases}$$

证明。给定一个 $K_{1,4}$-自由的 3-分裂图 G，我们有 $\Delta_G^I = 3$。令 $x \in C$ 满足 $d_G^I(x) = 3$。从 G 中移除 $N_G^I(x)$ 后，得到图 H。由引理 6 可知

H 是一个 $K_{1,4}$-自由的 l-分裂图，其中 $0 \le l \le 2$。注意，若 $l \le 1$，则 $L = \emptyset$。特别地，若 $l = 0$，则 x 是 G 的全邻顶点。由观察8，$\gamma_m^\infty(G) = 2 = |L| + |I'| + 2$，其中 L 和 I' 为空集，且 Q 既非 I 型，也非 II 型。由于 M 是标记图 M 的最大匹配，因此，对于每个顶点 $l_v \in L$，至少存在一个顶点 $v_k \in N^I(l_v)$，使得 $N(v_k) \cap N(I') = \emptyset$。现在，令 U 为一个集合，从每个 $N(l_v)$ 中选取这样一个顶点。注意，对于任意 $v_i, v_i \in U \cup I'$，都有 $N_G(v_i) \cap N_G(v_j) = \emptyset$。因此，由观察9可得 $\gamma(G) \ge |U| + |I'| = |L| + |I'|$。此外，$\gamma_m^\infty(G) \ge |L| + |I'|$ 可由观察7推出。现在，我们根据图 Q 分两种情况讨论（注意 $l = \Delta_H^I \le 2$）。

- 情形 1：（如果图 Q 属于 I型或 II型）现在，我们证明 $\gamma_m^\infty(G) > |L|+|I'|$。令$D'$为 G 的一个极小 m-永恒支配集，使得 $|D'| = |L| + |I'|$。由于存在一个顶点 $x \in C\backslash(N(I')\cup L)$ 必须由 D'支配，因此 $D' \cap (N(I') \cup L) \ne \emptyset$。对 x 的攻击无法防御，因为从 $D' \cap (N(I') \cup L)$ 中移动任何顶点（比如c_j）都会使 $v_j \in ((I' \cup U) \cap N(c_j))$ 不受支配。因此，$\gamma_m^\infty(G) \ge |I'| + |L| + 1$。现在，令$C_i = N(v_i)$ $v_i \in I'$，并令 $D = \{c_i \mid c_i$为 C_i的代表元$\} \cup L \cup \{i^*\}$，其中 $i^* \in I$。显然，$|D| = |I'| + |L| + 1$。接下来，我们证明 D 是 G的一个 m-永恒支配集。D 是 G 的一个支配集，因为 $N[\{c_i \mid c_i$ 是 C_i的代表元$\} \cup L] = V$。定义$D_1 = D$，并令 $D_2 = D \setminus \{i^*\} \cup \{c^*\}$，其中 $c^* \in C \setminus [N_G(I') \cup L]$。通过在 C_i 的每个代表元顶点处保留一个守卫，并将集合 L 维持为不变量，我们采用表 4 所示的策略来防御对 G 中任意顶点的攻击。因此，$\gamma_m^\infty(G) = |I'| + |L| + 1$。
- 情形2：（如果图 Q 既不属于 I 型也不属于 II 型）那么存在一个顶点 $u \in N^I$（x），使得 N（u）$\cap$（$\{c_i \mid c_i$ 是 C_i 的代表元$\} \cup L$）$= \emptyset$。因此，为了支配 u，γ（G）$\ge |L| + |I'| + 1$。这意味着，γ_m^∞（G）$\ge |L| + |I'| + 1$。现在，我们声称 γ_m^∞（G）$> |L| + |I'| + 1$。令 D' 为 G 的一个最小 m-永恒支配集，使得$|D'| = |I'| + |L| + 1$。事实上，$D' \cap \{x, u\} \ne \emptyset$，因为 D' 也是 G 的一个支配集。然后，对顶点 $v \in$（N_G^I（x）$\setminus\setminus u$）的攻击无法被防御，因为将其任一相邻守卫（设为 c_j（分别为 x））移动到 v 会使 $v_j \in$（N（c_j）$\cap$（$I' \cup U$））（$resp.$u）未被支配。因此，γ_m^∞（G）$\ge |I'| + |L| + 2$。现在，令 $D = \{c_i \mid c_i$ 是 C_i 的代表元$\} \cup L \cup \{i^*, x\}$，其中 $i^* \in I$。接下来，我们证明 D 是 G 的一个 m-永恒支配集。D 是 G 的一个支配集，因为 $N[\{c_i \mid c_i$ 是 C_i 的代表元$\} \cup L] = V$。定义 $D_1 = D$ 和 $D_2 =$（$D \setminus\setminus i^*$）$\cup \{c^*\}$，其中 $c^* \in C \setminus\setminus$（$N_G$（$I'$）$\cup L$）。通过将 C_i 的每个代表元顶点处保持一个守卫，并将集合 $L \cup \{x\}$ 作为不变量，依据表 4 所示的策略，可以防御对 G 中任意顶点的攻击。因此，γ_m^∞（G）$= |I'| + |L| + 2$。

遭受攻击的顶点发生攻击	攻击发生时的防护配置类型	
	D_1	D_2
$\{c_v, c_v \in C \mid B\}$	$D_2\{v^* \to c_v, i^* \to v^*\}$, 其中 $v^* \in N(i^*) \cap D_1$	$D_2\ \{c^* \to c_v\}$
$\{i_v, i_v \in I\}$	$D_1\ \{v_i \to i_v, v^* \to v_i, i^* \to v^*\}$ </style}其中 $v_i \in N(i_v) \cap D_1$	$D_1\{v_i \to i_v, c^* \to v_i\}$

表 4 针对顶点攻击的防御策略，以情形 2 和 3 为例说明。这里，$\mathcal{B}$表示各对应子情形中取用的不变量。

时间复杂度：假设图 $G = (C \cup I,\ E)$采用邻接表表示。确定满足 $d_G(x) = 3$ 的顶点 x，需要扫描 的所有顶点，耗时 (G $=$)。

通过从 G 中删除邻域 $N_G^I(x)$ 及其所有关联边来构造图 $H=(\hat{}C\cup\hat{}I,\hat{}E)$，也可以在 $O(|V|)$ 时间内完成，因为 $\hat{}$ 只需更新 x 及其三个邻居的邻接表。接下来，计算 $\Delta_H^I\hat{}\hat{}$ 需要遍历 C 中的每个顶点并统计其邻居，耗时为 I。由于该图是一个 l-分裂图（$l\leq 2$），这一步需要 $O(|V|)$ 时间。构造图 H' 可以在 $O(|V|)$ 时间内完成，因为根据引理 6，标记图 M 的最大匹配 M ≤ 2 of H，因此遍历 C 中度为 2 的顶点即可构造出 L。构造二分图 $Q=(A\cup B,E_Q)$ 只需检查常数大小集合 A 与 B 中顶点之间的邻接关系；因此，这些步骤也只需 $O(|V|)$ 时间。通过检查 A 中的顶点在 Q 中的度是否至少为 1，也可以在常数时间内判断辅助图 Q 属于 I型还是 II型。因此，由定理 27 得出的算法总共需要 $O(|V|)$ 时间。

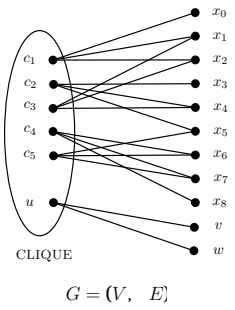
4.3　$K_{1,\ 5}$-无分裂图

经典问题精确3-覆盖定义如下：给定一个集合$\mathcal{C}=\{C_1,\ C_2,\ .....,\ C_m\}$的3元素子集组成的集合，以及一个集合$\mathcal{Z}=\{u_1,\ u_2,\ .....,\ u_{3q}\}$，目标是判断是否存在一个子集$\mathcal{C}'\subseteq\mathcal{C}$，使得对于每个 $u_i\in\mathcal{Z}\ i\in[3q]$，它恰好属于$\mathcal{C}'$.中的一个成员

▶**定理28**。 *[16]* 精确*3*-覆盖是*NP*完全的。

▶**定理29**。 m-永恒支配集问题在$K_{1,\ 5}$-无分裂图上是*NP*完全的 .

证明。已有研究表明，对于给定大小 [19]，存在一个用于证明存在 m-永恒支配集的简洁证书。因此，对于分裂图， m-永恒支配问题属于 NP。给定一个精确3-覆盖实例（X, C），其中 $X=\{x_1,x_2\ldots,x_{3q}\}$ 且 C $=\{C_1,C_2,\ldots,C_m\}$，$C_i\subseteq X$，对所有 $i\in[m]$，我们按以下方式构造图 $G=(V,E)$，作为 m-永恒支配集问题的一个实例。对于 C 中的每个 $C_i\in$，创建一个顶点 $c_i\in V$；对于每个元素 $x_i\in X$，创建一个顶点 $x_i\in V.$。当且仅当 $x_j\in C_i.$ 时，使 c_i 与 x_j 相邻。此外，使顶点集 $\{c_i\mid i\in[m]\}$ 满足 $G[\{c_i\mid i\in[m]\}]$ 是一个团。最后，添加三个新顶点，即 u、v 和 w，使得 u 与每个 c_i 相邻，$i\in[m]$，并且 v 和 w 与它们各自唯一的邻居 u 相邻。至此，图 G 的构造完成。相应的构造如图2所示。



$G=(V,\ E)$

■ 图2 定理29中从精确3-覆盖实例（X,C）构造 G 的示意图，其中$C_1=\{x_0,x_1,x_2\}$、$C_2=\{x_3,x_4,x_5\}$、$C_3=\{x_1,x_2,x_4\}$、$C_4=\{x_6,x_7,x_8\}$，以及 $C_5=\{x_5,x_6,x_7\}$。

注意， G 是一个分裂图，其顶点集的分裂划分为 $V=C\cup I$，其中团为 $C=\{c_i\mid i\in[m]\}\cup\{u\}$，独立集为 $I=\{x_i\mid i\in[3q]\}\cup\{v,w\}$，而

边集为 $E = \{c_i x_j \mid x_j \in C_i, j \in [3q], i \in [m]\} \cup \{uc_i \mid i \in [m]\} \cup \{uv, uw\}$。事实上，它是一个$K_{1,5}$-自由分裂图，因为 C 中的每个顶点在 I中至多有三个邻居。此外，很容易看出，该构造可以在多项式时间内完成。现在我们提出以下命题。▷ 命题30. (X,$\mathcal{C}$)存在一个大小为 q 的精确覆盖$\mathcal{C}'$ ，当且仅当 G 存在一个基数至多为 $q+2$.的 m-永恒支配集 S

证明。设 C′ 是 (X, C) 的一个基数为 q. 的精确覆盖。定义 $S = D \cup \{u, w\}$，其中$D = \{c_i \mid C_i \in \mathcal{C}'\}$。显然， $|S| \leq q+2$。现在，我们证明 S 是 G 的一个 m-永恒支配集。为此，我们必须能够防御所有攻击。设 $S^* = D \cup \{u\}$。注意到S^* 是 G 的一个支配集。此外，将集合族分为两类：$\mathcal{S}_1 = \{S^* \cup \{\beta\} \mid \beta \in \{v, w\}\}$ 和 $\mathcal{S}_2 = \{S^* \cup \{\delta\} \mid \delta \in \{c^*, x^*\}\}$，其中 $c^* \notin S^*$，$x^* \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{3q}\}$。注意 $S \in \mathcal{S}_1$。由于 $S^* \subseteq \hat{S}$，对于任意 $\hat{S} \in \mathcal{S}_i, i \in [2]$，由此可知 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 由 G 的支配集组成。对一个顶点的攻击可以通过如下策略来防御：使新的顶点配置仍构成 G 的支配集，即属于 $\mathcal{S}_1$ 或 $\mathcal{S}_2$这两种类型之一。在防御任何攻击时，我们始终保持 S^* 作为不变量。

遭受攻击的顶点发生攻击	攻击发生时的防护配置类型	
	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$\{x_i, i \in [3q]\}$	$\mathcal{S}_2$ $\{c_{x_i} \to x_i, u \to c_{x_i}, \beta \to u\}$	$\mathcal{S}_2$ $\begin{cases} c_{x_i} \to x_i, c^* \to c_{x_i}, & \text{如果 } \delta = c^* \\ c_{x_i} \to x_i, c_{x^*} \to c_{x_i}, \; x^* \to c_{x^*}. & \text{如果 } \delta = x^* \end{cases}$
$\{c_k, c_k \notin S^*\}$	$\mathcal{S}_2$ $\{u \to c_k, v(w) \to u\}$	$\mathcal{S}_2$ $\begin{cases} & \text{若 } \delta = c^* \\ & \text{若 } \delta = x^* \end{cases}$ $\mathcal{S}_1$ $\begin{cases} u \to v(w), c_{x^*} \to c_k, x^* \to c_{x^*}, \\ v(w) \; c^* \to u, \end{cases}$
$v(w)$	$\mathcal{S}_1$ $\{u \to v(w), w(v) \to u\}$	$\begin{cases} & \text{如果 } \delta = c^* \\ u \to v(w) \; c_{x^*} \to u, \; x^* \to c_{x^*}, & \text{如果 } \delta = x^* \end{cases}$

表5 第2行第2列的单元格表示守卫最初所处的配置。同一列中第3、4、5行的每个单元格表示守卫移动到的配置，括号中的文字表示相应的策略。这里$c_{x_i} \in S^* \cap N(x_i)$， $c_{x^*} \in N(x^*) \cap S^*$。

反过来，设 S 是 G 的一个 m-永恒支配集，其基数至多为 $q+2$。我们首先证明， G 的任意一个基数至多为 $q+2$ 的 m-永恒支配集，与集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{3q}\}$ 至多相交于一个顶点。

▷ 断言31. 对于 G 的任意一个大小至多为 $q+2$的 m-永恒支配集 S， $|X \cap S| \leq 1$。

证明。反之，设 $|X \cap S| = t$ 其中 $t \geq 2$。由于， S 是 G的支配集，$|S \cap \{u, v, w\}| \geq 1$。注意，$C \setminus \{u\}$中的每个顶点最多只能防御$X$中的三个顶点。因此，要用 S中的至多 $q-t+1$ 个顶点防御 X 中剩余的 $3q-t$ 个顶点，必须有 $3q-t \leq 3(q-t+1)$，这意味着 $t \leq \frac{3}{2}$。由于 $t \geq 2$，矛盾。◀

此外，在下面的断言中，我们证明， G 的任意基数至多为 $q+2$的 m-永恒支配集，与集合 $\{u, v, w\}$ 的交集中至多包含两个顶点。

▷ 断言 32. 对于 G的任意大小至多为 $q+2$的 m-永恒支配集 S， $|S \cap \{u, v, w\}| \leq 2$。此外，若 $|S \cap \{u, v, w\}| = 2$，则 $|X \cap S| = 0$。

证明。 反证假设 $|S \cap \{u, v, w\}| \neq 2$。即 $|S \cap \{u, v, w\}| = 3$ 蕴含$\{u, v, w\} \subseteq S$。首先，考虑情形 $|X \cap S| = 0$。为了防御 $3q$ 个顶点（属于 X），至多使用

$q-3$ 个顶点（属于 S），则有 $3q \le 3(q-3)$，从而蕴含 $0 \le -9$，这是荒谬的。现在考虑情形 $|X \cap S| = 1$。为了防御剩余的 $3q-1$ 个顶点（属于 X），至多使用$q-4$ 个顶点（属于 S），则有 $3q-1 \le 3(q-4)$，从而蕴含 $1 \ge 12$，这是荒谬的。

接下来，令 $|S \cap \{u,v,w\}| = 2$，但 $|X \cap S| = p$，其中 $p \ge 1$。为了用至多 $q-p$ 个 S 的顶点防御 X 中剩余的 $3q-p$ 个顶点，有 $3q-p \le 3(q-p)$ 成立，这意味着$1 \ge 3$，这是荒谬的。◀

现在，定义 $\hat{C} = \{c_i \in (S \cap C) \mid |S \cap \{u,v,w\}| = 2\}$ 和 $\mathsf{C}' = \{C_i \mid c_i \in \hat{C}\}$。由于$N(\{u,v,w\}) \cap X = \emptyset$，且每个顶点 $c_i \in C$, $i \in [m]$ 在 X 中至多有 3 个邻居，要支配 X 的所有 $3q$ 个元素，$|S \cap \{c_i \mid i \in [m]\}| \ge q$。现在，我们断言 C' 是 (X, C) 的一个精确覆盖。根据断言 32，$|X \cap S| = 0$，且由于 S是 G 的一个支配集，因此 X 的每个顶点都必须至少被 $\hat{C}$ 的一个顶点支配。因此，$|\mathsf{C}'| = |S| - 2 \le q$，这意味着 $|\mathsf{C}'| = q$。◀

因此，对于 $K_{1,5}$-自由分裂图，m-永恒支配集问题是 NP 困难的。◀由于每个 $K_{1,t}$-自由分裂图也是 $K_{1,5}$-自由分裂图，因此由定理29可得以下推论。

▶**推论33。** 对于 $K_{1,t}$-自由分裂图，m-永恒支配集问题是 *NP* 完全的，其中 $t \ge 5$。

5 无向路图

本节证明，对于无向路图（弦图的一个子类），m-永恒支配集问题是 NP 困难的。为此，我们从著名的 $3D$-匹配问题进行多项式时间归约。

$3D$-匹配问题定义如下：设 W, X 和 Y 是三个两两不相交的集合，每个集合的基数均为 q；设 M 是 $W \times X \times Y$ 的一个子集，其基数为 p。$3D$-匹配问题 询问是否存在 M 的一个子集 M'，其基数恰为 q，使得 W, X 和 Y 中的每个元素都恰好在 M' 的一个三元组中出现一次。

▶**定理34.** *[10]* $3D$-匹配问题是*NP*完全的。

▶**定理35.** m-永恒支配集问题对于无向路图是*NP*困难的。

证明。设 W、X和 Y 是三个不相交集合，每个集合的基数均为 q；设 M 是 $W \times X \times Y$ 的一个子集，其基数为 p。这是 $3D$-匹配问题的一个实例。为方便记号，我们使用 $W = \{w_j \mid j \in [q]\}$、$X = \{x_k \mid k \in [q]\}$、$Y = \{y_l \mid l \in [q]\}$和$M = \{m_i = (w_j, x_k, y_l) \mid w_j \in W, x_k \in X, y_l \in Y, i \in [p]\}$。不失一般性，可以假设 W、X和 Y中的每个元素都出现在 M的至少两个三元组中。借鉴 $3D$-匹配问题中 [5], 的类似构造思路，我们按如下方式构造一个图 G，作为 m-永恒支配集问题的实例。对于每个 $m_i \in M$，构造一个构件 M_i, $i \in [p]$ （如图3所示，它是由顶点集$\{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i\}$导出的子图）。对于每个 $w_j \in W$、$x_k \in X$ 和 $y_l \in Y$，分别构造一个顶点 w_j、x_k和 y_l。当且仅当 $w_j \in m_i$、$x_k \in m_i$和 $y_l \in m_i$ 分别成立时，添加边 $w_j a_i$、$x_k b_i$和 $y_l c_i$，其中对所有 $j, k, l \in [q]$, $i \in [p]$均成立。此外，使由$\{a_i, b_i, c_i \mid i \in [p]\}$导出的图构成一个团。最后，引入三个新顶点 u、v和 w，使得 u 与所有 $a_i, b_i, c_i, i \in [p]$相邻，而 v, w 分别与其唯一的邻居 u相邻。

为阐明上述构造，图3中给出了由一个$3D$-匹配问题实例构造图 G 的示意图。

首先，我们证明所构造的图 G 是一个无向路图。为此，我们需要证明存在一棵团树 T（回忆一下，团树的顶点对应于 G中的极大团），使得对于每个顶点 $v_i \in V$（G），所有包含 $v_i \in V$的极大团构成的集合

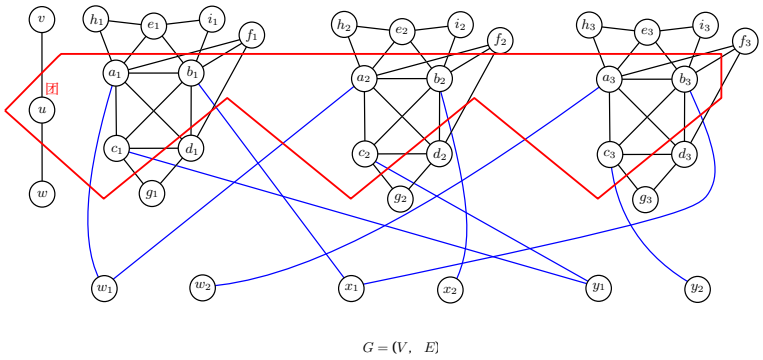


图3 上图对应于实例 $W = \{w_1, w_2\}$ $X = \{x_1, x_2\}$ $Y = \{y_1, y_2\}$ 和 $M = \{m_1 = (w_1, x_1, y_1)$ $m_2 = (w_1, x_2, y_1)$ $m_3 = (w_2, x_1, y_2)\}$，该实例属于依据定理35的构造得到的 $3D$-匹配问题。

of G containing v_i, i.e., $P_{v_i} = \{C_j \mid v_i \in V(C_j)\}$ induces a path in T. 与图 G 关联的团树 T如图4所示。从图4可以清楚地看出， P_{v_i}, P_{s_t}， 其中 $v_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i \mid i \in [p]\}$ and $s_t \in \{w_j, x_k, y_l \mid j, k, l \in [q]\}$，并且$P_u, P_v, P_w$ 在团树 T中诱导出一条路径。

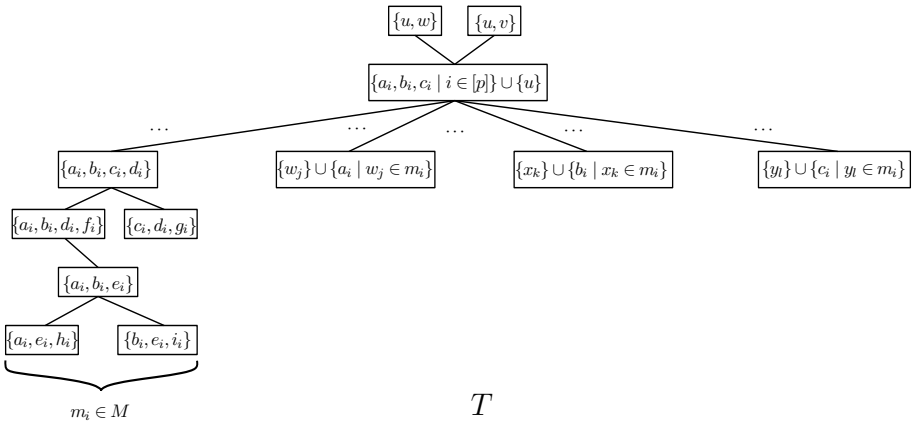


图4 与定理35中的 $3D$-匹配问题所构造的图 G 对应的团树 T。

接下来，我们断言， $3D$-匹配问题 M 存在大小为 q 的解 M'， 当且仅当图 G 存在基数至多为 $2p + q + 2$的 m-永恒支配集 D。

▷ 断言36。如果 M 存在大小为 q的解 M'， 则图 G 存在基数至多为 $2p + q + 2$的 m-永恒支配集 D。

证明。设 M_1为 M的解。定义 $D = \{a_i, b_i, c_i \mid m_i \in M'\} \cup \{d_i, e_i \mid m_i \notin M'\} \cup \{u, v\}$。显然， $|D| = 3q + 2(p - q) + 2 = 2p + q + 2$ 且 D 是 G的支配集。现在，我们证明 D 是 G的 m-永恒支配集。

我们断言 $D \subseteq V$ 是 G的 m-永恒支配集。

为此，我们需要证明，从集合 D开始，我们可以永远防御任何攻击。现在，令 $D' = \{a_i, b_i, c_i \mid m_i \in M'\} \cup \{u\}$ $A = \{w_j, x_k, y_l \mid j, k, l \in [q]\}$，进一步定义由 V 的子集构成的如下族 $\mathcal{F}$ $\nu = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3\}$。定义

XX：18　m-弦图的子类上的永恒支配集问题

$\beta \in \{v, w\}$, $\theta \in \{d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i \mid m_i \in M'\}$, $\epsilon \in \{a_i, b_i, c_i \mid m_i \notin M'\}$, and $s_t \in A$.
Define $\mathcal{D}_1 = \left\{D_1^\beta = \{D' \cup \{d_i, e_i \mid m_i \notin M'\} \cup \{\beta\}\}\right\}$,
$\mathcal{D}_2 = \left\{D_1^\beta \setminus \{\beta\} \cup \{s_t\}, D_1^\beta \setminus \{\beta\} \cup \{\theta\}, D_1^\beta \setminus \{\beta\} \cup \{\epsilon\}\right\}$,
and $\mathcal{D}_3 = \left\{ \begin{array}{l} D_1^\beta \setminus \{\beta, d_i\} \cup \{f_i, c_i\}, D_1^\beta \setminus \{\beta, d_i\} \cup \{g_i, b_i\}, \\ D_1^\beta \setminus \{\beta, e_i\} \cup \{h_i, b_i\}, D_1^\beta \setminus \{\beta, e_i\} \cup \{i_i, a_i\} \end{array} \right\}$,
where $\{d_i, e_i, f_i, c_i, a_i, b_i \mid m_i \notin M'\}$.

注意，对于任意 $D^* \in \mathcal{D}_i, D^{**} \in \mathcal{D}j, i, j \in [3]$, $|D^*| = |D^{**}|$。现在，我们证明$\mathcal{D}_i$, $i \in [3]$ 由 V 的子集构成，且这些子集都是 G 的支配集。

首先，由于 $D' \subseteq D^*$，对于所有 $D^* \in \mathrm{D}_i$、$i \in [3]$，且 D'支配 $\hat{}V = \{V(M_i) \mid m_i \in M'\} \cup A \cup \{u$、$v$、$w\} \cup \{a_i$、$b_i$、$c_i \mid m_i \notin M'\}$。换言之，$\hat{}V = V \setminus \{d_i$、$e_i$、$f_i$、$g_i$、$h_i$、$i_i \mid m_i \notin M'\}$。现在，为证明每个 $D^* \in \mathrm{D}_i, i \in [3]$ 都是 G的支配集，我们只需证明剩余顶点集 $V \setminus \hat{}V = \{d_i$、$e_i$、$f_i$、$g_i$、$h_i$、$i_i \mid m_i \notin M'\}$ 被 D^* 支配。

对于任意集合 $D^* \in \mathcal{D}_1$,，如 $\{d_i$、$e_i \mid m_i \notin M'\} \subseteq D^*$，它支配 $\{V(M_i) \mid m_i \notin M_i\}$。因此，$D^*$ 是 G的支配集。

对于任意集合 $D^* \in \mathcal{D}_2$,，若 $\beta \in N(u)$ $u \in \mathcal{D}_1^\beta$，且$\mathcal{D}_1^\beta$是 G 的支配集，则$\mathcal{D}_1^\beta \setminus \beta$ 也是 G 的支配集。由于$\mathcal{D}_1^\beta \setminus \beta \subseteq D^*$，对于所有 $D^* \in \mathcal{D}_2$,，因此 D^* 是 G 的支配集。

对于任意集合 $D^* \in \mathrm{D}_3$,，它是以下集合之一：$\{f_i, c_i, e_i\}$、$\{g_i, b_i, e_i\}$、$\{b_i, h_i, d_i\}$、$\{i_i, a_i, d_i\}$；$\subseteq D^*$ 在每个集合 $D^* \in \mathrm{D}_3$, 中，且它支配 $\{V(M_i) \mid m_i \notin M_i\}$。因此， D^* 是 G 的支配集。

我们证明 $D = D_1^\beta$ 是 G 的 m-永恒支配集。我们已经证明，$\mathcal{F}_\mathcal{V}$ 中的每个集合族都由 G 的支配集组成。为证明 D 是 m- 永恒支配集，对于 $D_i \in \mathcal{D}_i$、 $i \in [3]$中的每个集合，我们证明任意攻击都可以防御，且由此得到的支配集也属于$\mathcal{F}_\mathcal{V}$中的某个集合族。在表6中，我们展示了攻击前后的守卫配置类型。

发生攻击的顶点	攻击发生时的防护配置类型		
的顶点	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$
$\{\beta \mid \beta \in \{v, w\}\}$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1$
$\{a_i, b_i, c_i \mid m_i \notin M_i\}$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2$
$\{d_i, e_i \mid m_i \notin M_i\}$	–	–	$\mathcal{D}_1$
$\{f_i, g_i, h_i, i_i \mid m_i \notin M_i\}$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_3$
$\{d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i \mid m_i \in M_i\}$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2$

表6 第1行第2列的单元格表示守卫最初所在的配置类型。第 $i, 2 \leq i \leq 5$ 行第2列的每个单元格表示攻击发生在第 i 行第1列单元格中的顶点时，守卫移动到的配置。“–”表示配置没有变化，因为被攻击顶点已被当前配置占据。

攻击的详细防御策略见表7。

◀

▷ 断言37。如果图 G 有一个基数至多为$2p + q + 2$的 m-永恒支配集 D ，那么 $3D$-匹配实例 M有一个大小为 q的解 M'。

证明。 设 $D \subseteq V$是一个 m-永恒支配集，属于 G 且基数至多为 $2p + q + 2$。首先，我们证明 D 与顶点集合 w_j, x_k, y_l 中至多有一个顶点相交。

▷断言 38。设 $A = \{w_j, x_k, y_l \mid j, k, l \in [q]\}$。则 $|D \cap A| \leq 1$。此外，若 $|D \cap A| = 1$，则 $|D \cap \{u, v, w\}| = 1$, 否则 $|D \cap \{u, v, w\}| = 2$。

顶点所在位置 攻击的	攻击发生时的防护配置类型		
	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$
$v(w)$	$D_1\ \{u \to v(w)\ w(v) \to u\}$	$D_1\ \{u \to v(w)\ x_{s_t} \to u,\ \ s_t \to x_{s_t}:\ u \to v\ (w)\ \ z_\theta \to u, \theta \to z_\theta:\ u \to v(w)\ \epsilon \to u\}$	$\mathcal{D}_1\ \{u \to v(w)\ c_i \to u, f_i \to d_i:\ u \to v(w)\ b_i \to u,\ \ g_i \to d_i:\ u \to v(w)\ b_i \to u,\ \ h_i \to e_i:\ u \to v(w)\ a_i \to u,\ \ i_i \to e_i\}$
ϵ^*	$D_2\ \{u \to \epsilon^*, \beta \to u\}$	$D_2\ \{x_{s_t} \to \epsilon^*, s_t \to x_{s_t}:\ z_\theta \to \epsilon^*,\ \ \theta \to z_\theta:\ \ \epsilon \to \epsilon^*\}$	$D_2\ \{c_i \to \epsilon^*, f_i \to d_i:\ b_i \to \epsilon^*, g_i \to d_i:\ b_i \to \epsilon^*, h_i \to e_i:\ a_i \to \epsilon^*, i_i \to e_i\}$
θ^*	$D_2\ \{z_{\theta^*} \to \theta^*, u \to z_{\theta^*}, \beta \to u\}$	$D_2\ \{z_{\theta^*} \to \theta^*, x_{s_t} \to z_{\theta^*}, s_t \to x_{s_t}:\ z_{\theta^*} \to \theta^*, z_\theta \to z_{\theta^*}, \theta \to z_\theta:\ z_{\theta^*} \to z_\theta, \epsilon \to z_{\theta^*}\}$	$D_2\ \{z_{\theta^*} \to \theta^*, c_i \to z_{\theta^*}, f_i \to d_i:\ z_{\theta^*} \to \theta^*, b_i \to z_{\theta^*}, g_i \to d_i:\ z_{\theta^*} \to \theta^*, b_i \to z_{\theta^*}, h_i \to e_i:\ z_{\theta^*} \to \theta^*, a_i \to z_{\theta^*}, i_i \to e_i\}$
d_i	–	–	$D_1\ \{f_i \to d_i, u \to \beta, c_i \to u:\ g_i \to d_i, u \to \beta, b_i \to u:\ -:\ -\}$
e_i	–	–	$\mathcal{D}_1\ \{-:\ -:\ h_i \to e_i, u \to \beta, b_i \to u:\ i_i \to e_i, u \to \beta, a_i \to u\}$
f_i	$\mathcal{D}_3\ \{d_i \to f_i, u \to c_i, \beta \to u\}$	$D_3\ \{d_i \to f_i, x_{s_t} \to c_i,\ \ s_t \to x_{s_t}:\ \ d_i \to f_i, z_\theta \to c_i, \theta \to z_\theta:\ d_i \to f_i, \epsilon \to c_i\}$	$\mathcal{D}_3\ \{-:\ b_i \to f_i, g_i \to c_i:\ b_i \to f_i, d_i \to c_i, h_i \to e_i:\ d_i \to f_i, a_i \to c_i, i_i \to e_i\}$
g_i	$\mathcal{D}_3\ \{d_i \to g_i, u \to b_i, \beta \to u\}$	$D_3\ \{d_i \to g_i, x_{s_t} \to b_i, s_t \to x_{s_t}:\ d_i \to g_i, z_\theta \to b_i, \theta \to z_\theta:\ d_i \to g_i, \epsilon \to b_i\}$	$\mathcal{D}_3\ \{c_i \to g_i, f_i \to b_i:\ -:\ d_i \to g_i,\ \ h_i \to e_i:\ \ d_i \to g_i, i_i \to b_i, a_i \to e_i\}$
h_i	$\mathcal{D}_3\ \{e_i \to h_i, u \to b_i, \beta \to u\}$	$D_3\ \{e_i \to h_i, x_{s_t} \to b_i, s_t \to x_{s_t}:\ e_i \to h_i, z_\theta \to b_i, \theta \to z_\theta:\ e_i \to h_i, \epsilon \to b_i\}$	$D_3\ \{e_i \to h_i, f_i \to b_i, c_i \to g_i:\ \ e_i \to h_i, g_i \to d_i:\ \ -:\ a_i \to h_i, i_i \to b_i\}$
i_i	$\mathcal{D}_3\ \{e_i \to i_i, u \to a_i, \beta \to u\}$	$D_3\ \{e_i \to i_i, x_{s_t} \to a_i, s_t \to x_{s_t}:\ e_i \to i_i, z_\theta \to a_i, \theta \to z_\theta:\ e_i \to i_i, \epsilon \to a_i\}$	$D_3\ \{e_i \to i_i, f_i \to a_i, c_i \to d_i:\ e_i \to i_i,\ \ b_i \to a_i,\ \ g_i \to d_i:\ \ b_i \to i_i,\ \ h_i \to a_i:\ \ -\}$

表7 与表6中每个单元格对应的详细防御策略。注意，$x_{s_t} \in [N(s_t) \cap \{a_i, b_i, c_i \mid m_i \in M'\}]$、$z_\theta \in [N(\theta) \cap \{a_i, b_i, c_i \mid m_i \in M'\}]$、$\epsilon^* \in \{a_i, b_i, c_i \mid m_i \notin M'\}$，以及 $\theta^* \in \{d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i \mid m_i \in M'\}$。此处“–”表示配置没有变化，因为被攻击顶点在当前配置中已经被占据。

证明。相反，假设 $|D \cap A| = r \geq 2$。由于 $|D \cap M_i| \geq 2$ 对每个 $i \in [p]$ 和 $|D \cap \{u, v, w\}| \geq 1$，为了防御 S 中剩余的 $3q - r$ 个顶点，我们至多有 $q - r + 1$ 个构件 M_i，满足 $|D \cap V(M_i))| \geq 3$，它们最多可以防御 A 中的 $3(q - r + 1)$ 个顶点。因此，$3q - r \leq 3(q - r + 1)$，这与 $r \geq 2$ 矛盾。于是，$|D \cap A| \leq 1$。

接下来，我们证明如果 $|D \cap A| = 1$ 那么 $|D \cap \{u,\ v,\ w\}| = 1$. 假设并非如此，则 $|D \cap \{u,\ v,\ w\}| = z \geq 2$. 为了防御 A 的其余 $3q - 1$ 个顶点，我们至多有 $q - z + 1$ 个构件M_i，使得 $|D \cap V(M_i))| \geq 3$，而这些构件至多能防御 A的 $3(q - z + 1)$ 个顶点。因此，$3q - 1 \leq 3(q - z + 1)$，这与 $z \geq 2$矛盾。

现在，还需证明如果 $|D \cap A| = 0$ 那么 $|D \cap \{u、v、w\}| = 2$. 假设并非如此，则 $|D \cap \{u、v、w\}| \neq 2$. 注意到，$|D \cap \{u、v、w\}| \geq 1$，并且如果 $|D \cap \{u、v、w\}| = 1$ 则$u \in D$。现在，在 $v(w)$ 处发起的攻击只能通过将 u 处的守卫移动到 $v(w)$ 来防御；而为了支配 $w(v)$，必须将 u 的邻居中的某个守卫移动到 u。不失一般性，设 $a_j \in M_j$ 处的守卫移动到 u。注意，同时，$|D \cap A| \neq 1$ 因为$|D \cap \{u、v、w\}| \neq 1$。此外，$|D \cap \{u、v、w\}| \neq 2$ 意味着 $|D \cap \{u、v、w\}| = 3$. 因此，为了防御 A 的 $3q$个顶点，我们至多有 $q-1$ 个构件 M_i，使得 $|D \cap V(M_i)| \geq 3$，而这些构件至多能防御 A的 $3(q-1)$ 个顶点。因此，$3q \leq 3(q-1)$，这显然荒谬。◀

因此，我们有 $|D \cap \{\cup_{i \in p} V(M_i)\}| \leq 2p+q$。此外，$|D \cap \cup_{i \in p} V(M_i)| \geq 2p$。

▷ 断言39。如果 $|D \cap A| \leq 1$，那么对于每个 $i \in [p]$，$|D \cap V(M_i)| \leq 3$。

证明。假设存在一个构件 M_i，对于某个 $i \in [p]$，使得 $|D \cap M_i| = x > 3$。考虑 $|D \cap A| = 1$ 的情况。我们知道 $|D \cap M_i| \geq 4$，并且$|D \cap \cup_{j \in [p],\ j \neq i} V(M_j)| \geq 2(p-1)$。由于一个构件最多只能防御 A 中的 3 个顶点，因此，假设 M_i 能够防御 A 中的 y 个顶点（注意 $y \leq 3$），则 $3q-y-1 \leq 3(q-x+2) \implies 3x-6 \leq y+1$，这显然荒谬。现在考虑 $|D \cap A| = 0$ 的情况。与上述情况类似，$3q-y \leq 3(q-x+2) \implies 3x-6 \leq y$，这同样是荒谬的。因此，如果 $|D \cap A| \leq 1$，则对于每个 $i \in [p]$，$|D \cap V(M_i)| \leq 3$。◀

现在，我们有 $2 \leq |D \cap V(M_i)| \leq 3$。定义 $M' = \{m_i \in M \mid |D \cap M_i| = 3\}$。假设存在 t 个 p 构件 M_i，使得 $|D \cap M_i| = 3$。那么 $2p+q \geq 3t+2(p-t) \implies q \geq t$。此外，由于每个构件最多可以防御 A 中的三个不同顶点，要防御 A 的 $3q$ 个顶点，这意味着至少存在 q 个 M_i 构件，使得 $|D \cap V(M_i)| = 3$。因此，$t = q$。

最后，我们证明 M'是 M的一个解。为此，我们证明 W、X和 Y中的每个元素恰好属于一个 $m_i \in M'$。反过来，假设存在某个元素，比如说$w_i \in W$（不失一般性），使得 w_i 属于 α 个 m_i，并且 $m_i \in M'$ 和 $\alpha \geq 2$。由于D 是 G的一个 m-永恒支配集，每个 M_i 最多可以防御 A中的 3 个顶点，而$|A| = 3q$意味着 $3q \leq 3(q-\alpha) + 2\alpha + 1 \implies \alpha \leq 1$，矛盾。◀

因此，$3D$-匹配问题 M 存在一个大小为 q 的解 M'，当且仅当图 G 存在一个基数至多为 $2p+q+2$ 的 m-永恒支配集 D。◀

6 结论

本文针对$K_{1,t}$-自由分裂图上的 m-永恒支配集问题建立了一个二分性：当 $t \leq 4$ 时，该问题可在多项式时间内求解；当 $t \geq 5$ 时，该问题为 NP完全。我们进一步证明，该问题在无向路径图上仍然是 NP困难的。此外，我们揭示了支配集与永恒支配集之间，以及永恒支配集与 m-永恒支配集之间的复杂度差异。有趣的是，我们找到了一个图类，在该图类上，支配集问题是 NP困难的，而 m-永恒支配集问题可在多项式时间内求解。这些结果揭示了支配与其永恒变体在复杂性上的不同表现。此外，为其他结构良好的图类设计高效的 m-永恒支配集图算法将很有意义。

参考文献

1 Mark Anderson、Christian Barrientos、Robert C Brigham、Julie R Carrington、Richard P Vitray 和 Jay Yellen。永恒安全性的最大需求图。组合数学与组合计算杂志，61:111，2007。

2 Jasine Babu、Neeldhara Misra 和 Saraswati Girish Nanoti。二部图上的永恒顶点覆盖。载于《俄罗斯国际计算机科学研讨会》，第64–76页。施普林格，2022。 3 Alan A Bertossi。分裂图和二分图的支配集。《信息处理快报》，19(1):37–40，1984。 4 Václav Blažej、Jan Matyáš Křišťan 和 Tomáš Valla。在线性时间内计算仙人掌图的 m-永恒支配数。arXiv预印本 arXiv:2301.05155，2023。 5 Kellogg S Booth 和 J Howard Johnson。弦图中的支配集。SIAM计算杂志，11(1):191–199，1982。 6 Andrei Braga、Cid C de Souza 和 Orlando Lee。真区间图的永恒支配集问题。《信息处理快报》，115(6-8):582–587，2015。 7 Alewyn P Burger、Ernest J Cockayne、WR Grundlingh、Christina M Mynhardt、Jan H van Vuuren 和 Wynand Winterbach。图中的无限阶支配。组合数学与组合计算杂志，50:179–194，2004。 8 EJ Cockayne。无向图的支配——综述。载于《图论及其应用：会议论文集》，密歇根，1976年5月11–15日，第141–147页。施普林格，2006。 9 Toshihiro Fujito 和 Tomoya Nakamura。永恒连通顶点覆盖问题。载于计算模型理论与应用国际会议，第181–192页。施普林格，2020。 10 Michael R Garey 和 David S Johnson。《计算机与难解性：NP完全性理论指南》，第29卷。 11 F˘anic˘a Gavril。树中子树的交图恰好是弦图。组合理论杂志B辑，16(1):47–56，1974。 12 Alan George、John R Gilbert 和 Joseph WH Liu。图论与稀疏矩阵计算，第56卷。施普林格科学与商业媒体，2012。 13 Wayne Goddard、Sandra M Hedetniemi 和 Stephen T Hedetniemi。图中的永恒安全。《组合数学与组合计算杂志》，52(01)，2005。 14 Preeti Gupta。图中的支配及其应用。《印度研究杂志》，2(3):115–117，2013。 15 Teresa W Haynes、Stephen Hedetniemi 和 Peter Slater。《图支配基础》。CRC出版社，2013。 16 Richard M Karp。组合问题之间的可归约性。载于《整数规划50年，1958-2008：从早期到最新进展》，第219–241页。施普林格，2009。 17 William F Klostermeyer 和 Gary MacGillivray。图中的永恒支配集。《组合数学与组合计算杂志》，68:97–111，2009。 18 William F Klostermeyer 和 Christina M Mynhardt。用移动守卫保护图。《应用分析与离散数学》，10(1):1–29，2016。 19 Gary MacGillivray 和 Feiran Yang。分裂图中的永恒支配。 20 G Mahadevan、T Ponnuchamy、Selvam Avadayappan 和 Jyoti Mishra。永恒支配在流行病学中的应用。载于《流行病学中的数学建模与软计算》，第147–171页。CRC出版社，2020。 21 Silvio Micali 和 Vijay V Vazirani。一个用于在一般图中寻找最大匹配的 o (v| v| c|e|) 算法。载于第21届年度计算机科学基础研讨会（Sfcs 1980），第17–27页。IEEE，1980。 22 A Mohanapriya、P Renjith 和 N Sadagopan。分裂图中的支配及其变体——P与NPC二分。《分析杂志》，31(1):353–364，2023。 23 BS. Panda 和 Priyamvada。二分图和弦图若干子类的单射着色。《离散应用数学》，291:68–87，2021。 24 Kaustav Paul 和 Arti Pandey。图中永恒顶点覆盖问题的一些算法结果。载于算法与计算国际会议及研讨会，第242–253页。施普林格，2023。

25 Kaustav Paul和Arti Pandey。图中的永恒连通顶点覆盖问题：复杂性与算法。载于算法与离散应用数学会议，第179–193页。施普林格，2024年。26 Xiaoli Qiang、Maryam Akhoundi、Zheng Kou、Xinyue Liu和Saeed Kosari。模糊图中支配的新概念及其在医学中的应用。《工程数学问题》，2021(1):6121454，2021。27 P Renjith和N Sadagopan。k1, r-自由分裂图中的斯坦纳树——二分性。《离散应用数学》，280:246–255，2020。28 Martín Rinemberg和Francisco J Soulignac。区间图上的永恒支配集问题。《信息处理快报》，146:27–29，2019年。29 Charles Semple、Mike Steel等。《系统发育学》，第24卷。牛津大学出版社按需出版，2003年。30 Lieven Vandenberghe、Martin S Andersen等。弦图与半定优化。《基础与趋势® 之优化》，1(4):241–433，2015。31 Virgélot Virgile。面向图监控与防护的移动守卫策略。博士论文，维多利亚大学，2024年。32 Douglas Brent West。《图论导论》。普伦蒂斯·霍尔上萨德尔河，2001年。