arXiv:2602.02144v1 [math.GT] 2 Feb 2026

# 优化多项式曲线系统交叉数的上界常数

Hyungryul Baik

2026年2月3日

**摘要**

Baader、J¨org 和 Parlier 最近为大小为 $m \asymp g^{1+\alpha}$ 、位于亏格为 $g$ 的曲面上的曲线系统的交叉数建立了一个上界，得到的首项系数为 $9/4$ =2.25。他们的构造依赖于与完全二部图相关联的纤维曲面，并采用了对应于中心二项式系数的对称参数选择。在本文中，我们通过放宽参数对称性并求解由此产生的熵平衡问题，优化了他们的构造。我们证明，对于每个 $\alpha > 0$ 和每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{Cr}\big(g, \lfloor g^{1+\alpha} \rfloor\big) \;\le\; (C_\star + \varepsilon)\, \alpha^2\, g^{1+2\alpha} (\log g)^2 \qquad (g \text{ sufficiently large}),$$

其中

$$C_\star \;=\; \inf_{0<x\le 1/2} \frac{2x}{H(x)^2} \;\approx\; 1.5805443269, \qquad H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x).$$

在保持相同拓扑框架的同时，这将先前的常数降低了约 30%。

**关键词** ： 交叉数；曲线系统；曲面；纤维曲面；二部图；熵 y.

## 1 引言

全文中，log 表示自然对数。在曲面上使曲线族之间的交点数最小化的问题，是经典图交叉数问题在拓扑上的自然类比；这一问题可追溯至 Tur´an 的砖厂问题，以及 Zarankiewicz 关于完全二部图的研究 [5]。平面交叉引理（参见例如 [4] 及其中的参考文献）为图提供了强有力的下界，而高亏格曲面上的曲线系统则涉及组合拓扑与几何之间丰富的相互作用。

设 $\Sigma_g$ 为亏格 $g$的闭可定向曲面，考虑由 $m$条两两不同伦等价的简单闭曲线组成的曲线族 $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$。 Γ的交叉数 为

$$\mathrm{cr}(\Gamma) \;:=\; \sum_{1\le i<j\le m} i(\gamma_i, \gamma_j),$$

其中 $i(\cdot,\ \cdot)$ 表示几何交数。相应的极值函数 is

$$\mathrm{Cr}(g, m) \;:=\; \min\big\{\mathrm{cr}(\Gamma) \;\big|\; \Gamma \text{ as above with } \#\Gamma = m\big\}.$$

Baader、J¨org 和 Parlier [2] 确定了多项式规模曲线系统的 Cr($g$, $m$)，其结果精确到绝对常数。结合他们的构造性上界与 Hubard 和 Parlier [3], 的交叉不等式，他们证明对于 $m = \lfloor g^{1+\alpha} \rfloor$,

$$\frac{1}{257}\, \alpha^2\, g^{1+2\alpha} (\log g)^2 \;\le\; \mathrm{Cr}\big(g, \lfloor g^{1+\alpha} \rfloor\big) \;\le\; \frac{9}{4}\, \alpha^2\, g^{1+2\alpha} (\log g)^2 \tag{1.1}$$

对所有 $\alpha \geq 0$ 以及所有充分大的 $g$均成立。Baader–J¨org–Parlier 上界由纤维曲面 $\Sigma(p,\ q)$ 上的一个显式曲线系统达到：完全二分图 $K_{p,\ q}$ 的带状邻域，采用一种对应于中心二项式系数的对称选取。本文旨在说明，常数 $9\ 4$ 并非纤维曲面框架本身的限制，而是这种对称选取所带来的结果。

更确切地说，我们指出了构造 [2] 时隐含的优化问题。在由子曲面 $\Sigma(2,\ k)\ \subset\Sigma(p,\ q)$ 的边界曲线构成的曲线系统族中（其中 $q \asymp \log\ g$ 且 $k/q \to x \in (0,\ 1/2]$），曲线数量受 $\binom{q}{k}$ 的指数增长支配，而交叉估计则线性依赖于 $k$。这就得到了一个熵 – 交叉数权衡，其渐近主导常数为

$$f(x) \ = \ \frac{2x}{H(x)^2}, \qquad H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x),$$

对 $x$ 进行优化可得

$$C_\star = \inf_{0<x\leq 1/2} f(x).$$

从这个意义上说，$C_\star$ 是由这种熵平衡优化产生的纤维–曲面构造的最小值 [2]（但并未声称它在 $\Sigma_g$ 上所有可能的构造中最优）。

**定理 1**（改进的上界常数）。固定 $\alpha > 0$ 和 $\varepsilon > 0$。令

$$H(x) \ := \ -x\log x - (1-x)\log(1-x), \qquad x \in (0,1),$$

并定义

$$C_\star \ := \ \inf_{0<x\leq 1/2} \ \frac{2x}{H(x)^2}.$$

那么存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $g \geq N$，

$$\mathrm{Cr}\big(g, \lfloor g^{1+\alpha} \rfloor\big) \ \leq \ (C_\star + \varepsilon)\, \alpha^2\, g^{1+2\alpha} (\log g)^2.$$

数值上，$C_\star = 1.5805443269\ldots$。

注 2（改进层级）。相较于 [2] 中的常数 $\frac{9}{4} = 2.25$，改进可分为两个步骤。若保持对称选择 $k = q/2$，但优化 $q$ 的尺度，则可得到常数 $1/(\log 2)^2 \approx 2.08137$。允许 $k/q \neq 1/2$ 并优化比值后，可得到更小的常数 $C_\star$（精确到 $\varepsilon$）。

## 2 纤维曲面、曲线族和基本估计

我们简要回顾 [2], 中使用的组合模型，该模型基于 Baader [1] 的带状曲面模型。设 $K_{p,\ q} \subset \mathbb{R}^3$ 为一个完全二分图，其 $p$ 个顶点和 $q$ 个顶点分别位于两条异面直线 $U$（上方）和 $L$（下方）上。设 $\Sigma$（$p$, $q$）为 $K_{p,\ q}$ 的带状邻域，即如 $[1, 2]$ 所示，将加粗 $K_{p,\ q}$ 的边所得的 $pq$ 条带的并集。其欧拉示性数满足

$$\chi(\Sigma(p,q)) \ = \ \chi(K_{p,q}) \ = \ p + q - pq \ = \ 1 - (p-1)(q-1),$$

且 $\Sigma(p,\ q)$ 的边界非空（一个类型为 $T(p,\ q)$ 的环面链环）。

**引理 3**（嵌入判据）。设 $F$ 是一个具有非空边界、欧拉示性数为 $\chi(F)$的紧致连通可定向曲面。若 $|\chi(F)| \leq 2g - 2$，则 $F$可嵌入闭可定向曲面 $\Sigma_g$中，作为一个子曲面。

证明。将 $F$ 写作一个亏格为 $h$ 且有 $b \ge 1$ 个边界分支的曲面。于是 $\chi(F) = 2-2h-b$，因此 $|\chi(F)| = 2h + b - 2 \ge 2h - 1$。故 $h \le (|\chi(F)| + 1)/2 \le (2g-1)/2 < g$，即 $h \le g - 1$。根据曲面分类，任何亏格至多为 $g-1$ 且带边界的紧致可定向曲面都可以作为子曲面嵌入 $\Sigma_g$ 中。$\square$

固定整数 $p \ge 2$、$q \ge 2$ 和满足 $1 \le k \le q$ 的奇数 $k$。在 $\Sigma(p,q)$ 内，考虑通过在上直线 $U$ 上选取两个相邻顶点（共有 $p-1$ 种选择），并从下直线 $L$ 上的 $q$ 个顶点中选取 $k$ 个顶点而得到的子曲面。相应的带状邻域自然同胚于 $\Sigma(2,k)$。由于 $\gcd(2,k) = 1$（因为 $k$ 是奇数），其边界是连通的；将此边界曲线记为 $\gamma$。令 $\Gamma(p,q;k)$ 表示所有此类边界曲线构成的集合。那么

$$M(p,q;k) \;:=\; \#\Gamma(p,q;k) \;=\; (p-1)\binom{q}{k}. \tag{2.1}$$

如 [2], 中所述，$\Gamma(p,q;k)$ 中任意两条不同的曲线都不同伦等价：给定 $\gamma \neq \delta$，存在一个用于定义 $\gamma$、但未用于定义 $\delta$ 的 $U$ 或 $L$ 的顶点，以及一条与 $\gamma$ 相交但与 $\delta$ 不相交的本质正常嵌入弧。

**引理 4** (交叉估计)。对于所有整数 $p \ge 2$、$q \ge 2$ 以及奇数 $1 \le k \le q$，

$$\operatorname{cr}\bigl(\Gamma(p,q;k)\bigr) \;\le\; \frac{4k}{p-1}\, M(p,q;k)^2.$$

证明。固定 $\gamma \in \Gamma(p,q;k)$。如 $[2, \S 3]$, 所述，任何一条曲线 $\delta \in \Gamma(p,q;k)$，只要其选定的上方顶点对与 $\gamma$ 的不同，就可以通过同伦变形使其与 $\gamma$ 不相交（下方顶点处可能存在的交点可通过微小扰动消除）。因此，只有当 $\delta$ 与 $\gamma$ 的上方顶点对重叠，即共享一个或两个上方顶点时，它们才可能相交。恰有 $\binom{q}{k}$ 条曲线与 $\gamma$共享两个上方顶点；至多有 $2\binom{q}{k}$ 条曲线与$\gamma$ 恰好共享一个上方顶点（即相邻的两个连续上方顶点对选择）。此外，共享上方顶点附近对相交数的局部贡献至多为 $2k$（相关的 $K_{2,\,k}$-子图在该上方顶点处的度为 $k$），因此，共享一个上方顶点时两条曲线至多相交 $2k$ 次，共享两个时至多相交 $4k$ 次。这个 $2k/4k$ 上界仅取决于 $k$，与 $q$ 无关。因此，$\gamma$ 与所有其他曲线之间的交点总数至多为

$$\Bigl(2\binom{q}{k}\Bigr)\cdot(2k) \;+\; \binom{q}{k}\cdot(4k) \;=\; 8k\binom{q}{k}.$$

对所有 $\gamma$ 求和，并除以 2 以消除双重计数，得到

$$\operatorname{cr}\bigl(\Gamma(p,q;k)\bigr) \;\le\; \frac{1}{2}\, M(p,q;k)\cdot 8k\binom{q}{k} \;=\; 4k\binom{q}{k}\, M(p,q;k).$$

利用 $M(p,q;k) = (p-1)\binom{q}{k}$，即可得到结论：

$$\operatorname{cr}\bigl(\Gamma(p,q;k)\bigr) \;\le\; 4k(p-1)\binom{q}{k}^2 \;=\; \frac{4k}{p-1}\, M(p,q;k)^2.$$

$\square$

**引理 5** (斯特林–熵下界)。固定 $x \in (0,\,1)$。存在常数 $c_x > 0$ 和$Q_x \in \mathbb{N}$，使得对所有整数 $q \ge Q_x$ 以及满足 $|k - xq| \le 2$ 的所有整数 $k$，

$$\binom{q}{k} \;\ge\; \frac{c_x}{\sqrt{q}}\, \exp\bigl(q\,H(x)\bigr), \qquad H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x).$$

证明。 这可由带有显式误差界的斯特林公式推出。一种方便的形式（对所有 $n \ge 1$ 均有效）是

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \;\le\; n! \;\le\; \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\, e^{\frac{1}{12n}}.$$

将这些界应用于 $q!$ $k!$,$(q-k)!$ 可得

$$\binom{q}{k} \;\ge\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{q}{k(q-k)}}\, \exp\Big(q\log q - k\log k - (q-k)\log(q-k)\Big)\, \exp\Big(-\frac{1}{12k} - \frac{1}{12(q-k)}\Big).$$

若 $|k - xq| \le 2$，则 $k = xq + O(1)$ 且 $q - k = (1-x)q + O(1)$，因此当 $q$ 足够大时，指数项等于 $\exp(qH(x))$ 乘以一个有正下界的因子，而前置因子为 $\asymp 1/\sqrt{q}$，其中常数取决于 $x$。将这些吸收到 $c_x > 0$ 中即可得到结论。 □

## 3 主定理的证明

定理 *1* 的证明。 固定 $\alpha > 0$ 和 $\varepsilon > 0$。选取 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 使得

$$\frac{2x}{H(x)^2} \;\le\; C_\star + \frac{\varepsilon}{4}.$$

选取 $\eta > 0$ 使得

$$2x\Big(\frac{1}{H(x)} + \eta\Big)^2 \;\le\; \frac{2x}{H(x)^2} + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.1}$$

由 $\delta = 0$ 处的连续性，我们可以选取足够小的 $\delta \in (0, 1/2)$，使得

$$(1+\delta)(2+4\delta)(x+\delta)\Big(\frac{1}{H(x)} + \eta + \delta\Big)^2 \;\le\; 2x\Big(\frac{1}{H(x)} + \eta\Big)^2 + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.2}$$

当 $g$ 充分大时，定义

$$q := \Big\lceil \Big(\frac{1}{H(x)} + \eta\Big)\alpha \log g \Big\rceil, \qquad k := \text{an odd integer with } |k - xq| \le 2, \qquad p := \Big\lfloor \frac{2g-2}{q-1} \Big\rfloor + 1.$$

于是 $(p-1)(q-1) \le 2g-2$，因此 $|\chi(\Sigma(p,\ q))| \le 2g-2$。根据引理 3，曲面 $\Sigma(p,\ q)$ 可嵌入为 $\Sigma_g$ 的一个子曲面。我们将 $\Gamma(p,\ q;\ k)$ 视为 $\Sigma_g$ 上的一个曲线系。

根据引理 5 和 $q$ 的定义，当 $g$ 足够大时，

$$\binom{q}{k} \;\ge\; \frac{c_x}{\sqrt{q}}\, \exp\big(qH(x)\big) \;\ge\; \frac{c_x}{\sqrt{q}}\, \exp\Big(\alpha \log g + \eta\alpha H(x) \log g\Big) \;=\; \frac{c_x}{\sqrt{q}}\, g^{\alpha}\, g^{\eta\alpha H(x)}.$$

由于 $q = O(\log\ g)$，通过取足够大的 $g$，我们可以假设 $q \le \delta g$。于是当 $g$ 足够大时，$p - 1 = \lfloor \frac{2g-2}{q-1} \rfloor \ge \frac{2g-2}{q-1} - 1 \ge \frac{g}{q}$，因此

$$M(p,q;k) \;=\; (p-1)\binom{q}{k} \;\ge\; \frac{g}{q} \cdot \frac{c_x}{\sqrt{q}}\, g^{\alpha}\, g^{\eta\alpha H(x)} \;=\; c_x\, g^{1+\alpha}\, \frac{g^{\eta\alpha H(x)}}{q^{3/2}}.$$

由于 $q \asymp \log\ g$，因子 $g^{\eta\alpha H(x)}/q^{3/2} \to \infty$，所以对于所有充分大的 $g$，$M(p,\ q;\ k) > \lfloor g^{1+\alpha} \rfloor$。

设 $M := M(p,q;\ k)$，且 $m := \lfloor g^{1+\alpha} \rfloor$。均匀随机选取一个大小为 $m$ 的子集 $\Gamma \subset \Gamma(p,q;\ k)$。来自 $\Gamma(p,q;\ k)$ 的每一对曲线均以概率 $\binom{m}{2}/\binom{M}{2}$ 被选中，因此

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{cr}(\overline{\Gamma})\big] \;=\; \frac{\binom{m}{2}}{\binom{M}{2}}\, \mathrm{cr}(\Gamma(p,q;k)).$$

By t概率方法，存在满足 $\#\Gamma = m$ 的 $\Gamma$ 的一个特定选择，使得 $\overline{\phantom{x}}$

$$\mathrm{cr}(\overline{\Gamma}) \;\le\; \frac{m(m-1)}{M(M-1)}\,\mathrm{cr}(\Gamma(p,q;k)). \tag{3.3}$$

利用引理 4 和 $M \ge m+1$，我们得到

$$\mathrm{cr}(\overline{\Gamma}) \;\le\; \frac{m(m-1)}{M(M-1)}\cdot\frac{4k}{p-1}M^2 \;=\; \frac{4k}{p-1}\,m(m-1)\,\frac{M}{M-1}.$$

当 $g$ 足够大时，我们有 $m \ge 1/\delta$，因此 $M/(M-1) \le 1 + 1/m \le 1+\delta$，从而

$$\mathrm{Cr}(g,m) \;\le\; \mathrm{cr}(\overline{\Gamma}) \;\le\; (1+\delta)\,\frac{4k}{p-1}\,m^2 \;\le\; (1+\delta)\,\frac{4k}{p-1}\,g^{2+2\alpha}. \tag{3.4}$$

由 $p-1 = \lfloor \frac{2g-2}{q-1} \rfloor$，我们有

$$p-1 \;\ge\; \frac{2g-2}{q-1} - 1 \;=\; \frac{2g-q-1}{q-1}, \qquad \text{hence} \qquad \frac{1}{p-1} \;\le\; \frac{q-1}{2g-q-1} \;\le\; \frac{q}{2g-q}.$$

假设 $q \le \delta g$，我们有 $q/(2g-q) \le (q/g)/(2-\delta) \le (\tfrac12+\delta)\,q/g$，因此

$$\frac{4k}{p-1} \;\le\; 4k\Big(\frac12+\delta\Big)\frac{q}{g} \;=\; (2+4\delta)\frac{kq}{g}.$$

由于 $|k - xq| \le 2$，当 $g$ 足够大时，我们有 $q \ge 2/\delta$，从而 $k \le xq + 2 \le (x+\delta)q$，因此

$$\frac{4k}{p-1} \;\le\; (2+4\delta)(x+\delta)\frac{q^2}{g}.$$

F最后，根据 $q$ 的定义，并取 $g$ 足够大使得 $1 \le \delta\,\alpha\log g$，我们有

$$q \;\le\; \Big(\frac{1}{H(x)}+\eta\Big)\alpha\log g + 1 \;\le\; \Big(\frac{1}{H(x)}+\eta+\delta\Big)\alpha\log g.$$

因此

$$\frac{4k}{p-1} \;\le\; (2+4\delta)(x+\delta)\Big(\frac{1}{H(x)}+\eta+\delta\Big)^2\,\frac{\alpha^2(\log g)^2}{g}.$$

将此结果与 (3.4) 结合可得，对于所有充分大的 $g$，

$$\mathrm{Cr}\big(g, \lfloor g^{1+\alpha}\rfloor\big) \;\le\; (1+\delta)(2+4\delta)(x+\delta)\Big(\frac{1}{H(x)}+\eta+\delta\Big)^2\,\alpha^2\,g^{1+2\alpha}(\log g)^2.$$

由 (3.2) 和 (3.1) 可知，右侧的常数至多为

$$2x\Big(\frac{1}{H(x)}+\eta\Big)^2 + \frac{\varepsilon}{4} \;\le\; \frac{2x}{H(x)^2} + \frac{\varepsilon}{2} \;\le\; C_\star + \varepsilon,$$

至此，证明完成。 □

## 4 优化后的常数及其解释

本节从两个互补的角度解释常数 $C_\star$：一是尺度启发式，它导出 $f(x) = 2x/H(x)^2$,；二是用于确定临界点的微积分条件。本节还阐明了在何种意义上，$C_\star$ 代表 Baader–J¨org–Parlier 框架中通过这种熵平衡优化得到的最佳首项常数。

固定 $x \in (0, \tfrac{1}{2}]$，并假设选取参数使得 $k \approx xq$ 和 $q \approx (\alpha/H(x)) \log g$。那么 $\binom{q}{k}$ 的增长速度如 $\exp(qH(x)) \approx g^{\alpha}$（相差多项式因子），而嵌入约束 $(p-1)(q-1) \lesssim 2g$ 表明 $p - 1 \approx 2g/q$。接着，引理 4 给出的首项贡献为

$$\frac{4k}{p-1} \;\approx\; 2\,\frac{kq}{g} \;\approx\; 2x\,\frac{q^2}{g} \;\approx\; \frac{2x}{H(x)^2}\,\frac{\alpha^2(\log g)^2}{g}.$$

提取出 $m \approx g^{1+\alpha}$ 条曲线后，这便得出启发式的首项常数

$$f(x) \;:=\; \frac{2x}{H(x)^2}.$$

定理 1 将这一点精确化（误差不超过任意给定的 $\varepsilon > 0$），并且对 $x$ 进行优化后可得 $C_\star$。

**命题 6**（临界点方程）。设 $f(x) = 2x/H(x)^2$ 在 $(0, \tfrac{1}{2}]$ 上，其中 $H(x) = \log x + \log(1-x)$。若 $x_0 \in (0, \tfrac{1}{2})$ 是 $f$ 的临界点，则它满足

$$H(x_0) \;=\; 2x_0 \log\!\Big(\frac{1-x_0}{x_0}\Big).$$

特别地，使用 $H(x)$ 的表达式后，该条件可简化为

$$x_0 \log x_0 = (1 + x_0)\log(1 - x_0).$$

证明。我们有 $H'(x) = \log\!\big(\frac{1-x}{x}\big)$。对 $f(x) = 2xH(x)^{-2}$ 求导，得到

$$f'(x) = \frac{2}{H(x)^2} - \frac{4xH'(x)}{H(x)^3} = \frac{2}{H(x)^3}\big(H(x) - 2xH'(x)\big).$$

因此，$f'(x_0) = 0$ 蕴含 $H(x_0) = 2x_0 H'(x_0) = 2x_0 \log\frac{1-x_0}{x_0}$。代入 $H(x_0) = -x_0 \log x_0 - (1-x_0)\log(1-x_0)$，得到：

$$-x_0 \log x_0 - (1-x_0)\log(1-x_0) = 2x_0 \log(1-x_0) - 2x_0 \log x_0.$$

整理各项可得 $x_0 \log x_0 = (1 + x_0)\log(1 - x_0)$。 □

注记 7（数值极小值点）。由于 $H$ 在 $(0, \tfrac{1}{2}]$ 上连续且为正，函数 $f$ 在该处连续。此外，当 $x \to 0^+$ 时，有 $H(x) \sim x \log(1/x)$，从而 $f(x) \to \infty$，而 $f(1/2) = 1/(\log 2)^2 \approx 2.08137$。因此，$f$ 在 $(0, \tfrac{1}{2}]$ 上达到其下确界。任一内部极小值点均满足命题 6。从数值上看，求解临界点方程可得到一个接近

$$x_0 \approx 0.2414851418, \qquad \text{and} \qquad C_\star = f(x_0) \approx 1.5805443269.$$

注记 8（该参数优化方案内的最优性）。定理 1 的证明通过固定一个比值 $x = k/q$，在尺度 $q \sim (\alpha/H(x)) \log g$ 上选取 $q$，使得 $\binom{q}{k}$ 提供因子 $g^{\alpha}$，然后取 $p$ 接近嵌入极限 $p - 1 \asymp g/q$ 来进行。在该情形下，引理 4 的交叉估计给出一个可任意接近 $f(x) = 2x/H(x)^2$ 的渐近常数。因此，对 $f(x)$ 在 $x \in (0, \tfrac{1}{2}]$ 上求极小，得到 $C_\star$。在此意义下，$C_\star$ 是在 Baader–J¨org–Parlier 构造 [2] 中，通过这一熵平衡优化 $k/q$ 以及 $q$ 的对数尺度所能得到的最佳首项常数。我们并不声称 $C_\star$ 在 $\Sigma_g$ 上曲线系统的所有可能构造中都是最优的。

## 致谢

本研究获得韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目经费支持（编号：RS-2025-00513595）。

## 参考文献

[1] S. Baader, 《二部图与拟正曲面》, Q. J. Math. **65**(2014), 第 2 期, 655– 664.[2] S. Baader、J. J¨org 和 H. Parlier, 《多项式曲线系统的交叉数》, arXiv:2601.20588（2026 年）。[3]A. Hubard 和 H. Parlier, 《曲面上曲线的交叉数不等式》, arXiv:2504.00916（2025年）。[4] L. A. Sz´ekely, 《交叉数与离散几何中的棘手 *Erd˝os* 问题》, Combin. Probab.Comput.**6** (1997),353–358.[5] K. Zarankiewicz, 《关于 *P. Tur´an* 提出的图问题》, Fund. Math. **41**(1954), 137–145。