arXiv:2602.02145v1 [math.RT] 2 Feb 2026

李群表示的特征类

ROHIT JOSHI 和 STEVEN SPALLONE

2026年2月3日

Abstract. 约化李代数的一个不可约表示限制到嘉当子代数后，分解为带有重数的权。本文第一部分概述了一种计算这一权多重集的对称多项式（例如幂和）的方法，并将其表示为最高权的函数。

接下来，设 G 是一个连通约化复代数群，其极大环面为 T。我们将 G 的不可约表示的陈类限制到 T，并将其表示为最高权的多项式函数。对于正交表示的斯蒂费尔-惠特尼类，我们也进行同样的处理。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识与记号 4 3. 幂和 5 4. Weyl特征标公式 7 5. 幂和的递归公式 9 6. 例子： $\mathfrak{sl}_3$（$\mathbb{C}$）14 7. 李群 17 8. 斯蒂费尔-惠特尼类 22 9. 全斯蒂弗尔-惠特尼类 26 10. 附录 30 参考文献 34

2020 数学学科分类。主要分类号 20G20、55R40、05E05。关键词和短语。特征类、对称函数、李群。

1. Introduction

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复约化李代数，其嘉当子代数为 $\mathfrak{t}$，且有 $k \geq 0$。我们将表示 ϕ 的 k 次幂和定义为

$$P_k(\phi) = \sum_{\mu} m_\phi(\mu)\mu^k,$$

其中 μ 遍历 ϕ 的权，且 $m_\phi(\mu)$ 表示重数。它在 $\mathfrak{t}^*$ 的对称代数中取值。众所周知，幂和生成对称函数代数。

本质情形是 ϕ 不可约，设其最高权为 λ，从而 $\phi = \phi_\lambda$。确定每个 $m_{\phi_\lambda}(\mu)$ 颇为微妙。另一方面， $P_0(\phi) = \deg \phi$ 由外尔维数公式（WDF）显式给出。因此，我们运用 WDF 方法来计算幂和，其思路来自 [Bou08，第 VIII 章，第 257 页，习题 8]。在此我们遇到函数

$$F_k(\mu, \nu) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w)\langle {}^w\mu, \nu\rangle^k,$$

对于 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ 与 $\nu \in \mathfrak{t}$。原则上， F_k 可通过 $\mathfrak{t}$ 上 W-不变多项式函数的理论来计算。（见第 5.2 节。此处 δ 是正根的通常半和。）完成此事后，序列 $P_k(\phi)$ 的指数生成函数（EGF）等于 $F_k(\lambda + \delta)$ 的 EGF 除以 $F_k(\delta)$ 的 EGF 所得之商。（见 (8)。）由此得到 $P_k(\phi)$ 的递归公式。我们用若干例子来说明这一切。

令 G为一个连通约化复代数群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 π 是 G的一个表示。（本文中所有表示均为代数表示。）固定 G的一个极大环面 T，其李代数为 $\mathfrak{t}$。与 π 相关联的陈类（CC）为 $c_k(\pi) \in \mathrm{H}^{2k}(BG, \mathbb{Z})$，其中 BG 是 G的分类空间。当 π 是正交的时，还有斯蒂费尔-惠特尼类（SWC） $w_k(\pi) \in \mathrm{H}^k(BG, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$；详情请参见第 10.2 节。

用 $c_k^T(\pi)$ 表示 $c_k(\pi)$ 在限制映射 $\mathrm{H}^{2k}(BG, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2k}(BT, \mathbb{Z})$ 下的像，类似地， $w_k^T(\pi) \in \mathrm{H}^k(BT, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。由于 $c_k^T(\pi)$ 本质上是 π的权的第 k个初等对称函数，我们可以应用论文第一部分中的幂和计算。

设 $T[2]$ 为 T的2-挠子群。当 π 为正交的时，我们描述一个满射环同态 $\varphi\colon \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，它将$c_k^T(\pi)$映射为 $w_k^{T[2]}(\pi)$。

设 π_λ 为 G 的最高权为 λ的不可约表示。在第7.4节中，我们给出一种根据 λ计算 $c_k^T(\pi_\lambda)$和 $w_k^T(\pi_\lambda)$的方法。该方法表明，它们对 λ的依赖是多项式的：

定理1。 对于所有非负整数 k，函数 $\lambda \mapsto c_k^T(\pi_\lambda) \in \mathrm{H}^{2k}(BT, \mathbb{Z})$ 是关于 λ 的多项式，其次数不超过 $k(N+1)$，其中N 是正根的数量。

对于 $k = 2$ 的情形，我们给出 $c_2^T(\pi_\lambda)$ 的一个直接公式。为表述该公式，记 Ad 为 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示，并用“$|\ |$”表示 $\mathfrak{t}^*$ 上的 Killing型。

定理 2。 当 $\mathfrak{g}$ 是单的时，我们有

$$c_2^T(\pi_\lambda) = \frac{|\lambda + \delta|^2 - |\delta|^2}{\dim \mathfrak{g}} \cdot \deg \pi_\lambda \cdot c_2^T(\mathrm{Ad}).$$

我们还注意到， $c_2(\pi)$ 为零当且仅当 π 是平凡的（命题 8）。我们通过计算 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$、$\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$、$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 和 $k \le 4$ 的 $c_k^T(\pi_\lambda)$ 与 $w_k^T(\pi_\lambda)$，来展示上述结果。我们还计算 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 和 $k \le 2$ 的 $c_k^T(\pi_\lambda)$。

当 G 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$、$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 之一时，我们沿用 [GJ23] 和 [MS25] 的技巧，用 π 在二阶元素处的特征标值，给出 总 SWC $w^T(\pi) = 1 + w_1^T(\pi) + w_2^T(\pi) + \cdots$ 的另一种乘积表达式。总 CC 的类似结果见第 9.4 节。

作为应用，我们给出一个新的判据，用以判断 G 的正交表示能否提升到相应的旋量群。（推论4）。由此可以推出我们先前的结果 [JS20，定理 1]。

当 G 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 之一时，到环面的限制映射是单射，因此计算 c_k^T（分别为 w_k^T）等价于确定 c_k（分别为 w_k）。

现在我们介绍本文的结构。在第 3 节中，我们引入 $P_k(\phi)$ 的幂和；对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$，我们对其进行显式计算。在第 4 节中，我们应用 Weyl特征标公式，将问题归结为计算 F_k。我们在第 5 节中进一步探讨这一点；特别地，我们证明 $P_k(\phi_\lambda)$ 是关于 λ 的多项式函数，其次数至多为$N + k$，并给出 P_2 的一般表达式。我们还说明如何计算更高阶的 F_k。作为示例，我们在第 6 节中计算了 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ 对应的 P_2，P_3 和 P_4。

接下来，我们转向李群的特征类。在第7节中，我们证明定理1和定理2。我们讨论GL_2 和PGL_2,的例子，并在第7.4节中总结一般的CC计算。我们在第8节中计算正交表示的SWC $w^T(\pi)$。

我们将一些拓扑技术细节放在附录中。特别地，我们阐述李群正交表示的SWC理论，该理论与现有的实表示理论相容。

致谢。 第一作者获得了印度 NBHM（国家高等数学委员会）提供的博士后奖学金。我们感谢 Amit Hogadi 和 Neha Malik 的有益讨论。

2. Preliminaries and Notation

2.1. 多项式

设 V, W 是有限维复向量空间，且 $f\colon V \to W$ 是一个映射。若对所有线性映射 $\nu\colon \mathbb{C} \to V$ 和 $\mu\colon W \to \mathbb{C}$，复合映射 $\mu \circ f \circ \nu$ 在通常意义下是多项式，则称 f 是多项式。用 'Poly(V, W)' 表示这类多项式函数的集合。我们可以将 Poly$(V, \mathbb{C})$ 视为对称代数 Sym(V^*)，并将 Poly(V, W) 视为 $W \otimes$ Sym(V^*)。

若 $b_1, \ldots, b_d$ 是 V^* 的一组基，则 Poly$(V, \mathbb{C})$ 是多项式代数 $\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_d]$。当 R 是一个交换 $\mathbb{C}$-代数时，我们可以将 Poly(V, R) 视为多项式代数 $R[b_1, \ldots, b_d]$。

假设 L 是有限秩自由阿贝尔群。若函数 $f\colon L \to W$ 是某个多项式函数 $f\colon L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to W$的限制，我们就称它为多项式。最后，若 $S \subset L$ 是一个子集，若 $f\colon S \to W$ 是 L上的某个多项式函数的限制，我们就称它为多项式。

2.2. 李代数

Le$^{\text{t } \mathfrak{g} \text{ b}}$ e a re ducti$^{\text{ve comp}}$ lex Lie algebra w$^{\text{ith C}}$ art$^{\text{一个 su}}$ balgebra $\mathfrak{t}$。令 $\mathbb{S} = \text{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}^*)$ 和 $\mathbb{S}^* = \text{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t})$。对于 $k \geq 0$，令 $\mathbb{S}^k = \text{Sym}^k_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}^*)$。

用 Λ 表示权格；按照 [FH13, 第 200], 页的定义，它是对 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的所有余根取整数值的 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ 集合。定义 $\mathbb{S}_\Lambda = \text{Sym}_{\mathbb{Z}} \Lambda \subset \mathbb{S}$。固定一个 $\Lambda^+ \subset \Lambda$ 支配权的选取。令 W 为 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$中的韦伊群，并令 sgn : $W \to \{\pm 1\}$ 为通常的符号函数 [FH13, 第 24.1] 节。用 δ 表示 $\mathfrak{t}$在 $\mathfrak{g}$ 中的正根之半和。

令 K 为 $\mathfrak{t}$上的 Killing型；当 $\mathfrak{g}$ 为半单时，它按公式 $\sigma\colon \mathfrak{t} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}^*$ 和 $\langle {}^{\sigma}\nu, \nu' \rangle = K(\nu, \nu')$ 定义一个同构。用 $K^\vee$ 表示 K 的逆型；它由 $K^\vee({}^{\sigma}\nu, {}^{\sigma}\nu') = K(\nu, \nu')$ 定义。

定义 1. 对于半单的 $\mathfrak{g}$，定义 $q_2 \in \mathbb{S}$ 为 $q_2(\nu) = K(\nu, \nu)$，并且当 $q_2^\vee \in \mathbb{S}^*$ 时，定义 $q_2^\vee(\mu) = K^\vee(\mu, \mu)$。

当 $\mathfrak{g}$ 是单的时，我们有 Freudenthal 和 de Vries 的以下“奇异公式” [FdV69]，或见 [Bou08，第 257] 页：

$$24q_2^\vee(\delta) = \dim \mathfrak{g}. \tag{1}$$

2.3. 代数 $\mathcal{A}$

定义 2. 令 $\mathcal{A} = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t})$。

注意到 $\mathcal{A} = \mathbb{S} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{S}^*$，因此它是双分次的，可以从两种角度来看：

(1) 定义在有序对 (μ, ν) 上的复值多项式代数 $\in \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t}$。(2) 定义在 $\mathfrak{t}^*$上的 $\mathbb{S}$值多项式代数。

给定 $\mu \in \mathfrak{t}^*$，存在一个“求值映射”

$$\mathrm{ev}_\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{S}$$

由 $\mathrm{ev}_\mu(G)(\nu) = G(\mu, \nu)$ 给出。

这里列出几种用于 $f \in \mathcal{A}$ 的“次数”，以便后文引用：

定义3。 设 $f = \sum f_{i,j} \in \mathcal{A}$，其中 $f_{i,j} \in \mathrm{Sym}^i(\mathfrak{t}^*) \otimes \mathrm{Sym}^j(\mathfrak{t})$。$i, j$

(1) $\deg^*(f) = \max\{i \mid \exists j$ 其中 $f_{ij} \neq 0\}$。
(2) $\deg(f) = \max\{j \mid \exists i$ 其中 $f_{ij} \neq 0\}$。(
3) $\underline{\deg}(f) = (\deg^*(f), \deg(f)) \in \mathbb{Z}^2$。

3. 幂和

设 (ϕ, V) 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个（有限维复）表示。给定 $\mu \in \mathfrak{t}^*$，用 $m_\phi(\mu)$ 表示 ϕ 中权 μ 的重数。

定义 4. 对于非负整数 k，我们定义

$$P_k(\phi) = \sum_\mu m_\phi(\mu)\mu^k \in \mathbb{S}^k, \tag{2}$$

其中 μ 遍历 $\mathfrak{t}^*$。

（这是权的 k 次幂和，按重数计数。）根据 [FH13，第 200], 页，每个权 $\mu \in \Lambda$，因此 P_k（ϕ）$\in \mathbb{S}^k_\Lambda$。

例1. 设 ϕ_ℓ 是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 的次数为 $\ell + 1$的不可约表示。设 $\mathfrak{t}$ 为对角嘉当子代数。定义 $\mu_0 \in \mathfrak{t}^*$，使得 $\mu_0(\mathrm{diag}(1, -1)) = 1$。注意，当 k 为奇数时，$P_k(\phi_\ell) = 0$。此外，$P_0(\phi_\ell) = \ell + 1$。当 k 为偶数时，我们有

$$P_k(\phi_\ell) = 2(\ell^k + (\ell - 2)^k + \cdots + (\epsilon + 2)^k + \epsilon^k)\mu_0^k,$$

其中 ϵ 是 ℓ 除以 2 的余数。

令 $B_k(x)$ 为次数为 k [的第 k 个伯努利多项式 Bou04, 第 VI 章, 第 1] 节。由著名的 Faulhaber 公式，当 k 为偶数时，我们有

$$1^k + 2^k + \cdots + \ell^k = \frac{B_{k+1}(\ell+1)}{k+1}.$$

当 ℓ 为偶数时，可得

$$P_k(\phi_\ell) = \frac{2^{k+1}}{k+1} \cdot B_{k+1}\left(\frac{\ell+2}{2}\right)\mu_0^k. \tag{3}$$

事实上，对于奇数 ℓ ，(3) 也成立。这可由恒等式 [推出，见 Bou04, 第 292] 页

$$B_{k+1}(x) = 2^k\left(B_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + B_{k+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

不过，我们很快会看到（第 5 节）， $\ell \mapsto P_k(\phi_\ell)$ 是多项式。于是, 由于对于偶数 ℓ，(3) 两边都是多项式的取值，等式对所有 ℓ 都成立。对于 $k = 2$ ，这给出 $P_2(\phi_\ell) = 2\binom{\ell+2}{3}$。

回到一般的 $\mathfrak{g}$，我们可以很容易地理解前两个幂和。我们有 $P_0(\phi) = \deg\phi$，而 $P_1(\phi) = \sum_\mu m_\phi(\mu)\mu \in \mathfrak{t}^*$ 就是迹，即以下复合

$$\mathfrak{t} \hookrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{C}.$$

特别地，当 $\mathfrak{g}$ 为半单时， $P_1(\phi) = 0$ 。

设‘ad’为伴随表示。则 $P_2(\mathrm{ad}) = q_2$ 由公式

$$K(\nu_1, \nu_2) = \sum_\alpha \langle\alpha, \nu_1\rangle\langle\alpha, \nu_2\rangle,$$

取自 [Bou02，VIII，第 226]页。

设 ϕ_1, ϕ_2 是 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$的表示。记 $\phi = \phi_1 \boxtimes \phi_2$为它们的外张量积, 即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$的一个表示。容易看出

$$P_k(\phi) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i,j} P_i(\phi_1)P_j(\phi_2). \tag{4}$$

对于阿贝尔李代数 $\mathfrak{t}$上的线性泛函 ϕ ，显然$P_k(\phi) = \phi^k$。因此, 本质情形是当 $\mathfrak{g}$为单时。本文的首要目标是，当 $\mathfrak{g}$ 为单时，将不可约表示的 $P_k(\phi)$确定为最高权的函数。

命题 1. 假设 k 是偶数。那么 $P_k(\phi) = 0$ 当且仅当 ϕ 是平凡的。

证明.注意到 $\mathbb{S}_\Lambda$ 与整数上的多项式代数同构。因此，若 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{S}_\Lambda$ 且 $\sum x_i^k = 0$，则每个 $x_i = 0$。所以，若 $P_k(\phi) = 0$，则 ϕ 在 $\mathfrak{t}$ 上的限制是平凡的。但这个限制包含了 ϕ的不可约成分的所有最高权。因此， ϕ 是平凡的。

□

我们也可以类似地定义 ϕ 的权的初等对称函数。

定义 5. 令 $E(\phi) = \prod_\mu (1+\mu)^{m_\phi(\mu)} \in \mathbb{S}_\Lambda$，并将 $E_k(\phi) \in \mathbb{S}_\Lambda^k$记作 $E(\phi)$ 的 k 次项。

特别地， $E_0(\phi) = 1$。来自 [Mac98 第 23] 页的递归公式 (2.11') 给出:

$$nE_n(\phi) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} P_r(\phi) E_{n-r}(\phi). \tag{5}$$

牛顿恒等式给出了一个闭式公式:

$$n! E_n(\phi) = \det \begin{pmatrix} P_1(\phi) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ P_2(\phi) & P_1(\phi) & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(\phi) & P_{n-2}(\phi) & & \cdots & n-1 \\ P_n(\phi) & P_{n-1}(\phi) & & \cdots & P_1(\phi) \end{pmatrix}.$$

例2. 我们继续讨论例1。根据上述公式，我们推得: 当 k 为奇数时，$E_k(\phi_\ell) = 0$； $E_2(\phi_\ell) = -\binom{\ell+2}{3}\mu_0^2$，且 $E_4(\phi_\ell) = \frac{1}{3}\binom{\ell+2}{5}(5\ell+12)\mu_0^4$。

4. Weyl Character Formula

本节沿用 Weyl特征标公式证明中的一些思路，例如见 [Bou08，第 VIII 章，第 §9] 节。事实上，我们的技巧借鉴了 [同上，第 257 页，习题 8]。

记 $\mathbb{S}[[X]]$ 为在 $\mathbb{S}$上的形式幂级数环。令 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}^*]$ 为加法群 $\mathfrak{t}^*$上的复群代数，其基为e_μ ，其中 $\mu \in \mathfrak{t}^*$。我们将韦伊群 W 在 $\mathfrak{t}^*$ 及相关对象上的作用记作前置上标，例如 $\mu \mapsto {}^w\mu$。

定义一个 $\mathbb{C}$-代数同态 $f : \mathbb{C}[\mathfrak{t}^*] \to \mathbb{S}[[X]]$

$$\begin{aligned} f(e_\mu) &= e^{\mu \cdot X} \\ &= 1 + \mu X + \frac{1}{2}\mu^2 X^2 + \cdots \end{aligned}$$

照例，令 $J(\mu) = \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\ {}^{w}e_{\mu}$，对于 $\mathfrak{g}$ 的表示 ϕ，令 $\mathfrak{X}_{\phi} = \sum_{\mu} m_{\phi}(\mu)e_{\mu}$。当 ϕ 不可约且最高权为 $\lambda \in \Lambda^{+}$ 时，我们记作 $\phi = \phi_{\lambda}$。Weyl特征标公式［（Bou08，第 VIII 章，第 9 节，定理 1]）可写为：

$$J(\lambda + \delta) = J(\delta)\mathfrak{X}_{\phi_{\lambda}}. \tag{6}$$

一般来说，

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{X}_{\phi}) &= f\left(\sum_{\mu} m_{\phi}(\mu)\mu\right) \\ &= \sum_{\mu} m_{\phi}(\mu)e^{\mu X} \\ &= \sum_{\mu} m_{\phi}(\mu)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\mu^{i}}{i!}X^{i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{X^{i}}{i!}\left(\sum_{\mu} m_{\phi}(\mu)\mu^{i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{P_{i}(\phi)}{i!}X^{i}. \end{aligned}$$

与此同时，

$$\begin{aligned} f(J(\mu)) &= f\left(\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\ {}^{w}\mu\right) \\ &= \sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\ e^{{}^{w}\mu\, X} \\ &= \sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{{}^{w}\mu^{i}}{i!}X^{i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{X^{i}}{i!}\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\ ({}^{w}\mu)^{i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{F_{i}(\mu)}{i!}X^{i}, \end{aligned}$$

其中我们定义

$$F_{i}(\mu) = \sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)({}^{w}\mu)^{i} \in \mathbb{S}^{i}. \tag{7}$$

因此，将 f 应用于式 (6) 得到

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i(\lambda+\delta)}{i!} X^i = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(\delta)}{j!} X^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(\phi_\lambda)}{k!} X^k\right). \tag{8}$$

换句话说， $F_i(\lambda+\delta)$ 的指数生成函数（EGF）是 $F_i(\delta)$ 的指数生成函数与 $P_k(\phi_\lambda)$ 的指数生成函数之积。因此，只需计算 $F_i(\mu)$。

5. A Recursive Formula for Power Sums

5.1. 计算 F_k：第一步

正如引言中所提到的，多项式 F_k 对我们的计算至关重要。首先，我们按如下方式对它们进行“膨胀”。

定义 6. 令 $\mathbf{F}_k \in \mathcal{A}$ 由下式给出

$$\mathbf{F}_k(\mu,\nu) = \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\langle {}^w\mu, \nu\rangle^k.$$

给定 $\mu \in \mathfrak{t}^*$，我们有 $\operatorname{ev}_\mu(\mathbf{F}_k) = F_k(\mu)$。由于 $\mathbf{F}_k \in \operatorname{Sym}^k(\mathfrak{t}^*) \otimes \operatorname{Sym}^k(\mathfrak{t})$，因此 $\mathbf{F}_k = 0$ 或者 $\deg(\mathbf{F}_k) = (k,k)$。

令 N 为 $\mathfrak{g}$中李代数 $\mathfrak{t}$ 的根的数目。定义 $d, d^\vee \in \mathcal{A}$ 为

$$d = \prod_{\alpha>0} \alpha \in \operatorname{Sym}^N(\mathfrak{t}^*),$$

其中 α 遍历正根，并且

$$d^\vee = \prod_{\alpha^\vee>0} \alpha^\vee \in \operatorname{Sym}^N(\mathfrak{t}).$$

此外，我们有 $d\cdot d^\vee \in \operatorname{Sym}^N(\mathfrak{t}^*)\otimes\operatorname{Sym}^N(\mathfrak{t}) \subset \mathcal{A}$；注意，$\deg(d) = (N, 0)$，且 $\deg(d^\vee) = (0, N)$。

命题 2. 乘积 $d\cdot d^\vee$ 整除 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathbf{F}_k$ 。

证明. 多项式 $\mathbf{F}_k$ 是反 W-不变的，也就是说，对所有$w \in W$，我们都有

$$\mathbf{F}_k({}^w\mu,\nu) = \operatorname{sgn}(w)\cdot \mathbf{F}_k(\mu,\nu) = \mathbf{F}_k(\mu, {}^w\nu).$$

因此，可整除性由 [Hum92，命题 3.13，第69], 页得出，其中取 $V = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}$，其反射群为 $W \times W$。□

定义 7. 令

$$\mathbf{F}'_k = \frac{\mathbf{F}_k}{d\cdot d^\vee} \in \mathcal{A}.$$

根据次数考虑，$\mathbf{F}_k = 0$ 当 $k < N$ 时。当 $k \geq N$ 时，我们有 $\mathbf{F}'_k \in \mathsf{Sym}^{k-N}(\mathfrak{t}^*)^W \otimes \mathsf{Sym}^{k-N}(\mathfrak{t})^W$。

当 $\mathfrak{g}$ 为单时，不变子空间 $\mathsf{Sym}^2(\mathfrak{t})^W$ 由$q_2^\vee$张成，类似地， q_2 张成 $\mathsf{Sym}^2(\mathfrak{t}^*)^W$ （例如参见 [Hum92，表1，第 59]页。）

命题 3. 对于单的 $\mathfrak{g}$ ， 我们有

$$\mathbf{F}_N = N! \frac{dd^\vee}{d^\vee(\delta)}, \tag{9}$$

and

$$\mathbf{F}_{N+2} = \binom{N+2}{2} \frac{q_2 q_2^\vee}{\dim \mathfrak{g}} \mathbf{F}_N. \tag{10}$$

此外，对于 $0 \leq k < N$ 和 $k = N+1$ ， 我们有$\mathbf{F}_k = 0$。

证明. 这是对 [JS20中命题 5]的重述。 □

同一公式对$\mathbf{F}_N$ 成立，当 $\mathfrak{g}$ 为约化时。进一步，令 $\mathfrak{z}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的中心，并将 $u_\mathfrak{z} \in \mathsf{Sym}(\mathfrak{z}^* \oplus \mathfrak{z}) \subset \mathcal{A}$ 定义为将数对(μ, ν)映到求值 $\langle \mu, \nu \rangle$的二次多项式。由 [JS20，命题 6], ，我们有

$$\mathbf{F}_{N+1} = (N+1) u_\mathfrak{z} \cdot \mathbf{F}_N. \tag{11}$$

当李代数 $\mathfrak{g}$ 的导出代数 $\mathfrak{g}'$ 是单的时，我们有

$$\mathbf{F}_{N+2} = \binom{N+2}{2} \left(\frac{q_2 q_2^\vee}{\dim \mathfrak{g}} + u_\mathfrak{z}^2 \right) \mathbf{F}_N. \tag{12}$$

这里， q_2 和 $q_2^\vee$ 是相对于 $\mathfrak{g}'$而言的。

定义 8. 当最长韦尔群元素w_0 在 $\mathfrak{t}$上作用为 -1 时，我们记为 $-1 \in W$。

命题 4. 假设 $-1 \in W$。如果 $N+k$ 是奇数，那么$\mathbf{F}_k = 0$。

证明。该命题可由

$$\begin{aligned}(-1)^k \mathbf{F}_k(\mu, \nu) &= \mathbf{F}_k(-\mu, \nu) \\ &= \mathbf{F}_k({}^{w_0}\mu, \nu) \\ &= \operatorname{sgn}(w_0) \mathbf{F}_k(\mu, \nu) \\ &= (-1)^N \mathbf{F}_k(\mu, \nu).\end{aligned}$$

□

注意，当 μ 为正则时， $F_N(\mu) \neq 0$ 。在 (8) 中取 X^{N+i}的系数，并令 $i \geq 1$ ，得到

$$\frac{F_{N+i}(\lambda+\delta)}{(N+i)!} = \sum_{k=0}^{i} \frac{P_k(\phi_\lambda) F_{N+i-k}(\delta)}{k!(N+i-k)!}. \tag{13}$$

求解 $P_i(\phi_\lambda)$ 得

$$P_i(\phi_\lambda) = \frac{F_{N+i}(\lambda+\delta) - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{N+i}{k} P_k(\phi_\lambda) F_{N+i-k}(\delta)}{\binom{N+i}{i} F_N(\delta)}. \tag{14}$$

因此，我们可以递归地用 F_k 表示幂和。由于 F_k 是多项式，函数

$$\lambda \mapsto P_k(\phi_\lambda) := \sum_{\mu} m_{\phi_\lambda}(\mu) \mu^k,$$

该函数最初仅对支配 λ 定义，现可唯一延拓为从 $\mathfrak{t}^*$ 到 $\mathbb{S}^k$ 的多项式函数。我们将此函数记为 $\mathbf{P}_k \in \mathcal{A}$。再次强调:

定义 *9.* 令 $P_k \in \mathcal{A}$ 为唯一的取值于 $\mathbb{S}^k$ 的多项式，其在每个支配 $\lambda \in \Lambda^+$ 处的值 $P_k(\lambda)$ 由 $P_k(\lambda) = P_k(\phi_\lambda)$ 给出。这里， $P_k(\phi_\lambda)$ 由 (2) 定义。令 $E_k \in \mathcal{A}$ 为唯一的取值于 $\mathbb{S}^k$ 的多项式，其在每个支配 λ 处的值 $E_k(\lambda)$ 是 $E(\phi_\lambda)$ 的次数 k 项。这里， $E(\phi_\lambda)$ 由定义 *5* 给出。

同样，$\mathbf{P}_k$ 与 $\mathbf{E}_k$ 通过（5）相关。当$\mathbf{P}_k$ 被视为 $\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}$ 上的函数时，有

$$\mathbf{P}_k(\lambda, \nu) = \sum_{\mu} m_{\phi_\lambda}(\mu) \langle \mu, \nu \rangle^k,$$

对于 λ 一个支配权。

令 $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$由 $\tau(f)(\mu, \nu) = f(\mu+\delta, \nu)$ 定义，即它是“按 δ平移”。回忆一下 Weyl维数公式

$$\deg \phi_\lambda = \frac{\prod \langle \alpha^\vee, \lambda+\delta \rangle}{\prod \langle \alpha^\vee, \delta \rangle},$$

其中乘积取遍所有正根。因此

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\tau(d^\vee)}{d^\vee(\delta)} \in \mathrm{Sym}^N \mathfrak{t}.$$

我们将（14）改写为

$$\mathbf{P}_i = \frac{\tau(\mathbf{F}_{N+i}) - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{N+i}{k} F_{N+i-k}(\delta) \mathbf{P}_k}{\binom{N+i}{i} F_N(\delta)}, \tag{15}$$

对每个 $i \geq 1$。对于 $i = 1$，这给出 $\mathbf{P}_1 = u_{\mathfrak{z}} \cdot \mathbf{P}_0$，当 $\mathfrak{g}$ 是半单时其值为 0。

命题5。 若 $-1 \in W$，则 $\mathbf{P}_i = 0$ 对于 i 为奇数。

证明。 这由（15）和命题 4 得出。 □

推论 1。 对于 $\mathfrak{g}$ 单，我们有 $\mathbf{P}_1 = 0$ 以及

$$\mathbf{P}_2 = \left(\frac{\tau(q_2^\vee) - q_2^\vee(\delta)}{\dim \mathfrak{g}} \right) q_2 \mathbf{P}_0.$$

证明。 $\mathfrak{g}$ 的所有表示的迹均为零，因此 $\mathbf{P}_1 = 0$。由（15），我们有

$$\mathbf{P}_2 = \frac{\tau(\mathbf{F}_{N+2}) - F_{N+2}(\delta)\mathbf{P}_0}{\binom{N+2}{2} F_N(\delta)}.$$

Now

$$\tau(\mathbf{F}_{N+2}) = \frac{(N+2)!}{48} \frac{d\tau(d^\vee) q_2 \tau(q_2^\vee)}{d^\vee(\delta) q_2^\vee(\delta)},$$

因此由（1）即可得到该结果。

□

注意，多项式 $\tau(q_2^\vee) - q_2^\vee(\delta)$ 在 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ 处的取值为

$$|\mu + \delta|^2 - |\delta|^2 = \langle \mu + 2\delta, \mu \rangle.$$

注1. 请参阅 [JS20]，了解此公式与 Casimir算子和 Dynkin指标之间的联系。

现在我们来估计这些多项式的次数。读者可以回顾定义3，了解我们关于次数的术语。

命题 6. 我们有 次数 $\mathbf{P}_k \leq N + k$ 且 次数$\mathbf{E}_k \leq k(N+1)$。

对于 $\mathfrak{g}$半单的情形，我们有

$$\deg \mathbf{E}_k \leq \left[\frac{k}{2} \right] N + k.$$

证明。 我们有 次数 $\mathbf{P}_0$ =次数 $\tau(d^\vee)$ =次数 $d^\vee = N$。对于每个 k，要么$\mathbf{F}_k = 0$，要么次数$(\mathbf{F}_k) = k$，这是由构造得到的。根据递归公式 (15)，我们可以归纳得出每个次数$(\mathbf{P}_k) \leq N + k$。为了估计次数$\mathbf{E}_k$，我们有 $\mathbf{E}_0 = 1$，因此次数 $\mathbf{E}_0 = 0$；此外

$$n\mathbf{E}_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \mathbf{P}_r \mathbf{E}_{n-r}.$$

由（5）可得。通过归纳，对于 $r \geq 1$，我们有：

$$\deg(\mathbf{P}_r \mathbf{E}_{n-r}) \leq (N + r) + (n - r)(N + 1) \leq n(N + 1),$$

于是得到 $\mathbf{E}_n$ 的估计。

当 $\mathfrak{g}$ 是半单的时，我们有 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{P}_1 = 0$，同样的方法可以得到更精确的估计。□

5.2. **计算 F_k （当 $k > N+2$)**

由上文可知，计算根的对称多项式可归结为计算$\mathbf{F_k}$。本节将概述如何进行计算；随后我们将通过 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 加以说明。

和之前一样，显然$\mathbf{F}'_k$ 是 $W \times W$-不变的，因此属于子空间

$$\left(\mathrm{Sym}^{k-N}(\mathfrak{t}) \otimes \mathrm{Sym}^{k-N}(\mathfrak{t}^*)\right)^W = \mathrm{Sym}^{k-N}(\mathfrak{t})^W \otimes \mathrm{Sym}^{k-N}(\mathfrak{t}^*)^W.$$

我们可以将 W 视为作用在 $V = \mathfrak{t}$上的反射群。关于 V上的 W-不变多项式，已有成熟的理论；有关寻找显式基的问题，请参阅 [Hum92] 第 86 页上的参考文献。

进一步，我们证明 $\mathbf{F}_k$ 在另一种运算下也保持不变。令 $\sigma : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}^*$ 为由 Killing型导出的同构。由于 Killing型是对称的，对于所有 $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{t}$，都有 $\langle {}^{\sigma}\nu_1, \nu_2\rangle = \langle {}^{\sigma}\nu_2, \nu_1\rangle$。此外， σ 是 W-不变的。

由 σ 可得一个对合 $\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}$，其定义为

$$(\mu, \nu) \mapsto ({}^{\sigma}\nu, {}^{\sigma^{-1}}\mu)$$

并且它可扩展为 $\mathrm{Sym}^*(\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t})$上的一个对合，仍记作‘$\sigma$’。

引理1。 多项式 $\mathbf{F}_k$ 和 $\mathbf{F}'_k$ 是 σ-不变的。

证明。 对于 $\nu \in \mathfrak{t}$ 和 $\mu \in \mathfrak{t}^*$，有

$$\begin{aligned} F_k({}^{\sigma}\nu, {}^{\sigma^{-1}}\mu) &= \sum_w \mathrm{sgn}(w) \langle {}^{w\sigma}\nu, {}^{\sigma^{-1}}\mu\rangle^k \\ &= \sum_w \mathrm{sgn}(w) \langle {}^{\sigma}\nu, {}^{\sigma^{-1}w^{-1}}\mu\rangle^k \\ &= \sum_w \mathrm{sgn}(w) \langle {}^{w^{-1}}\mu, \nu\rangle^k \\ &= F_k(\mu, \nu). \end{aligned}$$

（根据定义，对于所有 $w \in W$，都有 $\langle {}^{w}\mu, \nu\rangle = \langle \mu, {}^{w^{-1}}\nu\rangle$。）

函数 $\nu \mapsto d^{\vee}({}^{\sigma}\nu)$ 是一个 N 次反 W 不变多项式，因此它是 $d(\nu)$ 的常数倍，设为

$$d^{\vee}({}^{\sigma}\nu) = c d(\nu)$$

对于某个 $c \neq 0$。因此 $d^\vee(\mu) = cd(^{\sigma^{-1}}\mu)$ 也成立；由此可得

$$d^\vee(^\sigma\nu)d(^{\sigma^{-1}}\mu) = d^\vee(\mu)d(\nu).$$

最后，

$$\begin{aligned} F_k'(^\sigma\nu, ^{\sigma^{-1}}\mu) &= \frac{F_k(^\sigma\nu, ^{\sigma^{-1}}\mu)}{d^\vee(^\sigma\mu)d(^{\sigma^{-1}}\mu)} \\ &= F_k'(\mu, \nu). \end{aligned}$$

□

现在介绍一种显式计算$\mathbf{F}_k$的方法。首先，求出 $\mathfrak{t}$ 上次数为 $k-N$ 的 W-不变多项式的一组基 $b_1, \ldots, b_\ell$。对于$1 \leq i \leq j \leq \ell$，令 β_{ij} 为如下定义的多项式:

$$\beta_{ij}(\mu, \nu) = b_i(\nu)b_j(^\sigma\mu) + b_j(\nu)b_i(^\sigma\mu)$$

β_{ij} 构成了 $\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}$ 上多项式的一组基，这些多项式是双重齐次的、 W-不变的，次数为 $k-N$，且为 σ-不变。因此，$\mathbf{F}_k'$是 β_{ij}的某个线性组合，其系数可通过少量计算确定。

6. Example: $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

本节中，我们确定 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的$\mathbf{P}_2$,$\mathbf{P}_3$,$\mathbf{P}_4$,$\mathbf{E}_2$,$\mathbf{E}_3$, 以及$\mathbf{E}_4$ 。

6.1. 根与权

记 $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$的对角嘉当子代数。将 $\mathfrak{t}$ 与向量 $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$（其中 $v_1 + v_2 + v_3 = 0$）相对应。对于 $1 \leq i \leq 3$，令 $\hat{}e_i \in \mathfrak{t}^*$ 为由 $\hat{}e_i(v) = v_i$给出的泛函。（因此 $\hat{}e_1 + \hat{}e_2 + \hat{}e_3 = 0$。） $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的一个正根系为

$$R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\},$$

其中 $\alpha_1 = \hat{}e_1 - \hat{}e_2$ 且 $\alpha_2 = \hat{}e_2 - \hat{}e_3$。因此 $\delta = \hat{}e_1 - \hat{}e_3 = 2\hat{}e_1 + \hat{}e_2$。

$\mathfrak{t}$ 的基本权由 $\varpi_1 = \hat{}e_1$ 和 $\varpi_2 = \hat{}e_1 + \hat{}e_2$给出。对于整数 m, $n \geq 0$，记 $\phi_{m,\ n}$ 为最高权是 $m\varpi_1 + n\varpi_2$的 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示。于是

$$\deg \phi_\lambda = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2).$$

$\mathfrak{t} \subset \mathbb{C}^3$ 上的Killing型 K 是标准双线性形式（点积）的限制的6倍，而 $\mathfrak{t}^*$ 上的逆型 $K^\vee$ 由

$$K^\vee(\hat{e}_i, \hat{e}_i) = \frac{1}{9},\ K^\vee(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = -\frac{1}{18} \text{ for } i \neq j.$$

推论 1 给出 $P_2(\phi_{m,\ n})$：我们有

$$\begin{aligned} P_2(\phi_{m,n}) &= \frac{\deg \phi_\lambda \langle \lambda + 2\delta, \lambda \rangle}{8} q_2 \\ &= \frac{1}{12}(m+1)(n+1)(m+n+2)(m^2+mn+n^2+3m+3n)(\hat{e}_1^2 + \hat{e}_1\hat{e}_2 + \hat{e}_2^2). \end{aligned}$$

6.2. F_6 与 F_7

计算 $P_3(\phi_{m,n})$ 的关键在于确定 F_6。现在，函数 $(\mu, \nu) \mapsto F_6(\mu, \nu)$ 关于 μ 和 ν 都是反对称的。因此它可被 $d_\mu \cdot d_\nu$ 整除，商 $F_6'(\mu, \nu)$ 是 $W \times W$-对称的，即 $\mathbf{F}_6' \in \mathcal{A}^{W \times W}$。更确切地说，出于次数的原因，$\mathbf{F}_6' \in (\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t})^W \otimes (\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t}^*)^W$。

例如，利用特征理论，我们可以计算出 $\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t}$ 中 W-不变多项式构成的子空间是一维的。若对 $1 \le i \le 3$，令 $e_i' = e_i - \frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)$，则 $q_3^\vee = e_1' e_2' e_3'$ 生成 $(\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t})^W$。在由 Killing 型给出的同构 σ 下，有 $\sigma(e_i') = 6\hat{} e_i$。因此我们取 $q_3 = 6^3 \hat{} e_1 \hat{} e_2 \hat{} e_3 \in (\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t}^*)^W$ 作为一组基。

因此，$q_3 \cdot q_3^\vee$ 是 $(\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t}^*)^W \otimes (\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{t})^W$ 的基。特别地，$\mathbf{F}_6'$ 是 $q_3 \cdot q_3^\vee$ 的倍数，即，

$$F_6(\mu, \nu) = c q_3(\nu) q_3^\vee(\mu) d^\vee(\mu) d(\nu),$$

其中 c 是待定常数。我们只需在使两边均不为 0 的 μ 和 ν 取值处计算两边。

令 $\mu_0 = 3\hat{} e_1 - \hat{} e_2 - 2\hat{} e_3$，且 $\nu_0 = \mathrm{diag}(3, -1, -2)$。则 $d^\vee(\mu_0) = d(\nu_0) = 20$，且 $q_3(\nu_0) = 6^4$，以及 $q_3^\vee(\mu_0) = 6$。$F_6(\mu_0, \nu_0) = 5^2 \times 6^6$。因此

$$c = \frac{5^2 \times 6^6}{20^2 \times 6^5} = \frac{3}{8},$$

因此

$$F_6(\mu, \nu) = \frac{3}{8} q_3(\mu) q_3^\vee(\nu) d^\vee(\mu) d(\nu).$$

类似地，$\left(\mathrm{Sym}^4 \mathfrak{t}\right)^W$ 是一维的，按上述方法可得

$$F_7(\mu, \nu) = \frac{63}{16} q_2(\nu)^2 q_2^\vee(\mu)^2 d(\nu) d^\vee(\mu).$$

接下来，

$$P_3(\phi_\lambda) = \frac{F_6(\lambda + \delta) - \deg \phi_\lambda \cdot F_6(\delta) - 15 P_2(\phi_\lambda) \cdot F_4(\delta)}{20 F_3(\delta)}.$$

6.3. F_8 与 F_9

根据 [Hum92 第 1 表第 59], 页，我们有 $\mathbb{S}^W = \mathbb{C}[q_2, q_3]$。例如，次数为 5 的不变量空间也是 1 维的，由 q_2q_3张成。因此存在常数 $c \in \mathbb{C}$，使得

$$F_8(\mu, \nu) = cq_2^\vee(\mu)q_3^\vee(\mu)q_2(\nu)q_3(\nu)d(\nu)d^\vee(\mu).$$

再次代入 μ_0 和 ν_0 即可求出该常数，从而得到

$$\mathbf{F}_8 = \frac{3}{4}q_2^\vee q_3^\vee q_2q_3dd^\vee.$$

次数为 6 的不变量空间是 2 维的，由 q_2^3 和q_3^2张成。因此存在常数 a_1, a_2, a_3，使得

$$\mathbf{F}_9 = \left(a_1q_2^3q_2^{\vee 3} + a_2(q_2^3q_3^{\vee 2} + q_3^2q_2^{\vee 3}) + a_3q_3^2q_3^{\vee 2}\right) dd^\vee.$$

将三对一般位置的 μ, ν 代入即可确定这些常数，计算结果为

$$\mathbf{F}_9 = \frac{3}{64}\left(85q_2^3q_2^{\vee 3} - (q_2^3q_3^{\vee 2} + q_3^2q_2^{\vee 3}) + q_3^2q_3^{\vee 2}\right) dd^\vee.$$

6.4. **总结**

总结如下:

- $\mathbf{F}_3 = 3dd^\vee$.
- $\mathbf{F}_4 = 0$.
- $\mathbf{F}_5 = \frac{5}{4}q_2q_2^\vee \cdot \mathbf{F}_3$.
- $\mathbf{F}_6 = \frac{1}{8}q_3q_3^\vee \cdot \mathbf{F}_3$.
- $\mathbf{F}_7 = \frac{21}{16}q_2^2(q_2^\vee)^2 \cdot \mathbf{F}_3$.
- $\mathbf{F}_8 = \frac{1}{4}q_2q_2^\vee q_3q_3^\vee \cdot \mathbf{F}_3$.
- $\mathbf{F}_9 = \frac{1}{64}\left[85q_2^3(q_2^\vee)^3 - (q_2^3q_3^{\vee 2} + q_3^2q_2^{\vee 3}) + q_3^2(q_3^\vee)^2\right] \mathbf{F}_3$.

对于最高权 $\lambda = m\varpi_1 + n\varpi_2 =(m + n,\ n,\ 0)$，得到:

- $P_0(\phi_{m,\ n})\ =$度 $\phi_\lambda = \frac{1}{2}(m + 1)(n + 1)(m + n + 2)$,
- $P_1(\phi_{m,\ n})\ = 0$
- $P_2(\phi_{m,\ n}) = \frac{1}{6}$ 度 $\phi_\lambda(m^2 + mn + n^2 + 3m + 3n)(\hat{e}_1^2 + \hat{e}_1\hat{e}_2 + \hat{e}_2^2)$,
- $P_3(\phi_\lambda)\ = -\frac{1}{20}$度 $\phi_\lambda(2m+n+3)(m+2n+3)(m-n)\hat{e}_1\hat{e}_2(\hat{e}_1+\hat{e}_2)$,

and

$$P_4(\phi_{m,n}) = \frac{1}{30}\deg(\phi_\lambda)(m^2+mn+n^2+3m+3n)(2(m^2+mn+n^2+3m+3n)-3)(\hat{e}_1^2+\hat{e}_2^2+\hat{e}_1\hat{e}_2)^2.$$

前几个初等对称函数 E_i 为

- $E_1(\phi_{m,\ n})\ = 0$,
- $E_2(\phi_{m,\ n})\ = -\frac{1}{12}P_0(\phi_{m,\ n})(m^2+mn+n^2+3m+3n)(\hat{e}_1^2+\hat{e}_1\hat{e}_2+\hat{e}_2^2)$,
- $E_3(\phi_{m,n}) = \frac{1}{60}P_0(\phi_{m,n})(2m+n+3)(m+2n+3)(n-m)\hat{e}_1\hat{e}_2(\hat{e}_1+\hat{e}_2)$,

- $E_4(\phi_{m,n}) = \frac{1}{8}(P_2(\phi_{m,n})^2 - 2P_4(\phi_{m,n}))$.

7. Lie Groups

现在设 G 是一个复连通约化李群，其极大环面为 T。记 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t}$ 分别为 G 和 T 的李代数。每个李群 G 都有一个分类空间，记作 BG。简言之，这是一个仿紧空间，并且存在一个可缩的 G-丛。G 的任意两个分类空间都同伦等价。当 G 是离散群时，分类空间与 Eilenberg-Maclane 空间相同，记作 $K(G, 1)$，如[Hat02]所述。

7.1. 代数 $\mathbb{X}$

由于 T 是复环面，故与某个 $r \geq 1$ 的 r 重积 $(\mathbb{C}^\times)^r$ 同构。无穷复射影空间 $\mathbb{CP}^\infty$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的分类空间，因此其 r 重积可取为 BT。通常用 $X^*(T)$ 表示从 T 到 $\mathbb{C}^\times$ 的代数同态。（这些是 T 的不可约代数表示。）

根据附录中的命题 13，第一陈类给出一个双射

$$X^*(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(BT, \mathbb{Z}). \tag{16}$$

定义 10. 令 $\mathbb{X} = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}} X^*(T)$。

于是（16）扩展为一个环同构

$$\psi : \mathbb{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}). \tag{17}$$

求导 $X^*(T) \to \mathfrak{t}^*$ 诱导出单射 $X^*(T) \hookrightarrow \Lambda$，以及 $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{S}_\Lambda$。当 G 为半单且单连通时，这些映射都是同构。（$X^*(T)$ 的像是 FH13 定理 23.16] 中的格“Λ”。）另外，设

$$Q_2 = \psi(q_2) = \sum_{\alpha \in R} c_1(\alpha)^2.$$

7.2. 陈类

包含映射 $T \hookrightarrow G$ 导出上同调上的限制映射 $\mathrm{H}^*(BG, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z})$。设 π 是 G 的一个表示，并记 $d\pi$ 为其微分，即相应的李代数表示。记 $c(\pi) \in \mathrm{H}^*(BG, \mathbb{Z})$ 为 π 的全陈类（CC）。（参见 [Ben91，第 2.6] 节。）第 k 个分次分量记作 $c_k(\pi)$。陈类满足以下众所周知的性质：

(1) 若 π 是 G 的一个表示，且 $\varphi\colon G' \to G$ 是一个同态，则 $\varphi^*(c(\pi)) = c(\pi \circ \varphi)$，其中 φ^* 是上同调上的诱导映射。(2) 若 π_1 和 π_2 是表示，则 $c(\pi_1 \oplus \pi_2) = c(\pi_1) \cup c(\pi_2)$。(3) 若 $k >$ 的次数为 $\deg \pi$，则 $c_k(\pi) = 0$。

定义 11. 令 $c^T(\pi) \in \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z})$ 为 $c(\pi)$ 在 T 上的限制。

这是 π 在 T 上限制后的总 CC。当限制映射 $\mathrm{H}^*(BG, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z})$ 是单射时，计算 $c^T(\pi)$ 也就确定了 $c(\pi)$。根据 [Tod], , 这对于 $G =$GL$_n(\mathbb{C})$、SL$_n(\mathbb{C})$ 和 Sp$_{2n}(\mathbb{C})$ 都成立。这为描述 CC 提供了一种便捷的方法，因为 BT 的上同调环是多项式环。

给定 G 的一个表示 π，将对应的 $\mathfrak{g}$ 的李代数表示记为 $d\pi$。由于 $d\pi$ 的每个权都是 π 的某个权的导数，我们知道对于所有 k， $P_k(d\pi)$ 和 $E_k(d\pi)$ 都属于 $\mathbb{X}^k \subseteq \mathbb{S}^k_\Lambda$。

命题 7。我们有 $c^T(\pi) = \psi(E(d\pi))$。

证明。对于 $\chi \in X^*(T)$，令 $m_\pi(\chi)$ 为 χ 在 π 中的重数。将 $E(d\pi)$ 视为 $\mathbb{X}$ 中的元素，我们写作

$$E(d\pi) = \prod_\chi (1+\chi)^{m_\pi(\chi)},$$

因此

$$\psi(E(d\pi)) = \prod (1 + c_1^T(\chi))^{m_\pi(\chi)}.$$

另一方面，由于 $\pi|_T = \sum_\chi \chi^{\oplus m_\pi \chi}$，我们有 $c^T(\pi) = \prod_\chi c^T(\chi)^{m_\pi(\chi)}$。由于 $c^T(\chi) = 1 + c_1^T(\chi)$，结论成立。□

注 2。这种表述与 [BH58, 定理 10.3(a)] 相近。

由于 $P_2(\mathrm{ad}) = q_2$ 来自第 3 节，我们有

$$c_2^T(\mathrm{Ad}) = -\frac{1}{2} Q_2. \tag{18}$$

定理 3. 对于所有非负整数 k，函数 $\lambda \mapsto c_k^T(\pi_\lambda) \in \mathbb{X}^k$ 是关于 λ 的多项式。我们有 次数$\mathbf{c}_k \leq k(N+1)$。当 G 是半单的时，次数 $\mathbf{c}_k \leq \binom{k}{2} N + k$。

证明。 根据 F_k 的定义，函数 $\lambda \mapsto F_k(\lambda)$ 是多项式。由 (14) 归纳可知， $\lambda \mapsto P_k(\phi_\lambda)$ 是多项式。接下来，由 (5) 可得， $E_k(\phi_\lambda)$ 是关于 λ 的多项式。但根据命题 7， $c_k^T(\pi_\lambda) = \psi(E_k(\phi_\lambda))$，因此它是多项式。次数的断言由命题 6 得出。

□

令 $\mathbf{c}_k \in \mathcal{A}$ 为所得多项式；它是一个次数为 k 、取值于 $\mathbb{X} \cong \mathrm{H}^{2k}(BT,\mathbb{Z})$ 的多项式，并具有如下性质：对所有 $\lambda \in \Lambda^+$，$\mathbf{c}_k(\lambda) = c_k^T(\pi_\lambda)$。由上文可知，$\mathbf{c}_k = \psi \circ \mathbf{E}_k$。

命题 8. 假设 G 是半单的。G 的表示 π 平凡，当且仅当 $c_2^T(\pi) = 0$。

证明。由于 G 是半单的，$E_1(d\pi) = 0$，因此 $E_2(d\pi) = -P_2(d\pi)$。所以，如果 $c_2^T(\pi) = 0$，那么 $P_2(d\pi) = 0$，故由命题 1 可知 $d\pi$ 是平凡的。因此 π 也平凡。□

为了说明这一点，我们将上一节中各种 $E_k(\phi)$的公式转换为特征类的公式。

例 3. 令 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$。特征 $\chi_1 \in X^*(T)$ 由$\chi_1\left(\mathrm{diag}(a, a^{-1})\right) = a$ 给出，其导数为 $\mu_0 \in \mathfrak{t}^*$。相应的上同调类也记作 $e = c_1(\chi_1) \in \mathrm{H}^*(BT,\mathbb{Z})$。

设 π_ℓ 是 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的次数为 $\ell+1$ 的不可约表示，则

$$\mathbf{P}_k(\ell) = \frac{2^{k+1}}{k+1} \cdot B_{k+1}\left(\frac{\ell+2}{2}\right) e^k \in \mathrm{H}^{2k}(BT,\mathbb{Z}). \tag{19}$$

对于 $k = 2$，这给出 $\mathbf{c}_2(\ell) = \mathbf{E}_2(\ell) = -\binom{\ell+2}{3} e^2$。类似地，

$$\mathbf{c}_4(\ell) = \frac{1}{3}\binom{\ell+2}{5}(5\ell+2)e^4.$$

定理 4。 当 $\mathfrak{g}$ 为单李代数时，我们有

$$\mathbf{c}_2 = -\left(\frac{\tau(q_2^\vee) - q_2^\vee(\delta)}{2\dim \mathfrak{g}}\right) Q_2 \cdot \mathbf{P}_0.$$

证明。这由推论 1 以及组合恒等式 $2\mathbf{E}_2 = \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{P}_2$ 得出。□

这也可以写成

$$c_2^T(\pi_\lambda) = \frac{|\lambda+\delta|^2 - |\delta|^2}{\dim \mathfrak{g}} \cdot \deg \pi_\lambda \cdot Q_2.$$

由于 $c_2^T(\mathrm{Ad}) = -\frac{1}{2}Q_2$，这等价于引言中的定理 2。

注 3. 令 $\hat{\mathrm{H}}^*(BG, \mathbb{Q})$ 表示 BG 的完备有理上同调环。按照我们的记号，陈特征 $\mathrm{ch}(\pi)$[Wei13，第 109] 页到 T 的限制由下式给出

$$\mathrm{ch}^T(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(\pi)}{k!} \in \hat{\mathrm{H}}^*(BT,\mathbb{Q}).$$

7.3. **等源**

设 $p: G' \to G$ 是一个等源，$T' < G'$ 是 G 中极大环面 T 的原像。那么 $X^*(T)$ 单射地嵌入 $X^*(T')$，因此诱导映射 $\mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT', \mathbb{Z})$ 是单射。这里 $c^T(\pi) \mapsto c^{T'}(\pi \circ p)$。因此，如果我们只关心 $c^T(\pi)$，只需计算单连通 G' 的 $c^{T'}(\pi)$。

例4. 设 $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$。当 ℓ 为偶数时，令 π_ℓ 为从例3 的 π_ℓ 下降得到的 G 的表示。令 T 为 G 的对角环面，T' 为 SL_2 的对角环面。又令 $e = c_1(\chi_1)$，其中 $\chi_1(\mathrm{diag}(a,b)) = ab^{-1}$。注意在 $X^*(T) \to X^*(T')$ 下，$\underline{e} \mapsto 2e$。

由上述可得

$$P_k(\overline{\pi}_\ell) = \frac{1}{2(k+1)} B_{k+1}\left(\frac{\ell+2}{2}\right) \underline{e}^k \in \mathbb{X}^k.$$

对于 $k = 2$ 的情形，这给出

$$\mathbf{c}_2(\ell) = -\frac{1}{4}\binom{\ell+2}{3}\underline{e}^2,$$

因为这映射到 $-\binom{\ell+2}{3}e^2$。对于 $k = 4$ 的情形，这给出

$$\mathbf{c}_4(\ell) = \frac{1}{48}\binom{\ell+2}{5}(5\ell+12)\underline{e}^4.$$

例5. 令 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$。$G$ 的对角环面 T 的特征群 $X^*(T)$ 由 e_1, e_2 生成，其中 e_k 投影到第 k 个对角元。对它们的第一陈类采用相同记号，得到 $\mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$。于是，$G$ 的支配权为 $\lambda_{m,n} = me_1 + ne_2$，其中 $m \geq n \geq 0$。

记 $\tilde{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$，并令 T 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中对角环面与 $\mathbb{C}^\times$ 的乘积。于是 $\mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[e, t]$，其中 $t = c_1(\chi_1)$。定义等源 $\rho: \tilde{G} \to G$，使得 $\rho(A, z) = Az$。对于上同调上的诱导映射 ρ^*，我们有 $\rho^*(e_1) = e + t$，且 $\rho^*(e_2) = -e + t$。

对于 m, n 如上所述，设 $\Pi_{m,n}$ 为 G的具有最高权 $\lambda_{m,n}$的不可约表示。则 $\pi_{m,n} = \Pi_{m,n} \circ \rho$ 是外张量积 $\chi_{m+n} \boxtimes \pi_{m-n}$。

这给出 $c_1(\pi_{m,n}) = (m-n+1)(m+n)t$ 以及

$$c_2(\pi_{m,n}) = -\binom{m-n+2}{3}e^2 + \binom{m-n+1}{2}(m+n)^2t^2,$$

那么，对于 $k = 1,2$，$c_k^T(\Pi_{m,n})$是满足$\rho^*(c_k^T(\Pi_{m,n})) = c_k^T(\pi_{m,n})$的唯一上同调类。记$\mathbf{c}_k(m,n) = c_k^T(\Pi_{m,n})$。稍作

计算可得

$$\mathbf{c}_1(m,n)=\frac{1}{2}(m-n+1)(m+n)(e_1+e_2)$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2(m,n)=&\left[\frac{(m-n+1)(m-n)(m+n)^2}{8}-\frac{1}{4}\binom{m-n+2}{3}\right](e_1^2+e_2^2)\\&+\left[\frac{(m-n+1)(m-n)(m+n)^2}{4}+\frac{1}{2}\binom{m-n+2}{3}\right](e_1e_2).\end{aligned}$$

7.4. **陈类计算概要**

为方便读者，现将上述内容总结如下。

设 G 是一个连通复约化群，其极大环面为 T，并固定一个整数 $k\geq 0$。设 N 为 G 中 T 的正根数。存在一个多项式 $\mathbf{c}_k\in\mathcal{A}$，其在 $\lambda\in\Lambda^+$ 处的取值是 $c_k(\pi_\lambda)$ 在 T 上的限制。特别地，它的取值属于 $\mathrm{H}^{2k}(BT,\mathbb{Z})$，我们可以将其视为多项式代数 $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}X^*(T)$。

需要计算多项式 $\mathbf{F}_i\in\mathcal{A}$ （$N\leq i\leq N+k$）。这一计算将在第 5 节讨论。当李代数 $\mathfrak{g}$ 为单李代数时，命题 3 给出了 $\mathbf{F}_N$、$\mathbf{F}_{N+2}$ 和 $\mathbf{F}_{N+1}=0$ 的公式。关于 $i\geq N+3$，请参阅第 5.2 节中的计算步骤。注意，根据命题 4，若 $-1\in W$，则 $\mathbf{F}_i=0$，除非 $i\equiv N$ 为偶数。

接下来，利用递归公式 (14) 计算幂和 $\mathbf{P}_i\in\mathcal{A}$。之后，利用 (5) 计算$\mathbf{E}_k\in\mathcal{A}$。

来自李群 G 的 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示对应于 $X^*(T)\cap\Lambda^+$中的最高权。当$\mathbf{E}_k$限制到$X^*(T)$时，其取值于 $\mathbb{X}^k$。将其与由 (17) 定义的 ψ 复合，即得到陈类，换言之，$\mathbf{c}_k=\psi\circ\mathbf{E}_k$。

当 G 为约化时，其李代数 $\mathfrak{g}$ 是其中心$\mathfrak{z}$ 与半单李代数 $\mathfrak{g}_i$的直和。$\mathfrak{g}$的不可约表示可分解为 $\mathfrak{z}$ 和 $\mathfrak{g}_i$的不可约表示的外张量积。可以根据公式 (4) 计算 P_k，然后执行上述步骤。

或者，乘法给出一个等源 $\rho\colon D(G)\times C\to G$，其中 $D(G)$ 是 G 的导出群，而 C 是 G 中心的连通分支。（参见 [Bor12，第 14.2] 节。）于是，将 π 与 ρ 复合得到外张量积，并且 ρ^* 是单射。当 $D(G)$ 是一个熟悉的群时，这种方法可能更直接。上文的 GL_2 例子对此作了说明。

8. Stiefel-Whitney Classes

8.1. 正交性

当存在 V 上的对称非退化 G-不变双线性形式时，我们称 π 是 正交的 。正交线性特征标必定是二次的，也就是说，它的取值属于 $\{\pm 1\}$。

对于表示 (π, V)，其中 G，记 $S(\pi)$ 为直和$V \oplus V^\vee$，其中 $V^\vee$ 是 V 的对偶。通过双线性形式 $B((v,\vartheta),(v',\vartheta')) = \langle v,\vartheta'\rangle + \langle v',\vartheta\rangle$，将其视为一个正交表示。

如果一个正交表示 π 不能分解为正交表示的直和，我们就称它为正交不可约，或称为正交不可约表示（OIR）。所有正交不可约表示要么是不可约表示，要么具有 $\pi = S(\sigma)$ 的形式，其中 σ 是一个非正交的不可约表示。特别地，当 G 是连通阿贝尔群时，所有非平凡的正交不可约表示都具有 $S(\chi)$ 的形式，其中 $\chi \neq 1$ 是 G 的线性特征标。任何正交表示都可以唯一地分解为正交不可约表示的直和。

8.2. 定义

现在设 (π, V) 是 G 的一个次数为 n 的正交复表示。那么 π 在上同调上诱导出一个映射

$$\pi^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{BO}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BG, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

环 $\mathrm{H}^*(\mathrm{BO}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是由类 w_1、.....、w_n 生成的多项式环，其中 $|w_k| = k$。定义 $w_k(\pi) = \pi^*(w_k)$（见附录 10.2），于是

$$w(\pi) = 1 + w_1(\pi) + \cdots + w_n(\pi).$$

定义 12. 记 $w^T(\pi) \in \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为$w(\pi)$ 到 T的限制。

当限制映射 $\mathrm{H}^*(BG, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是单射时，我们称 T 检测出 G的模 2 上同调。在这种情况下，计算 $w^T(\pi)$ 也能确定 $w(\pi)$。根据 [Tod]，当 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$、$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 时， T检测出模 2 上同调。一般而言，根据命题 15， T 检测出二次模 2 上同调。

8.3. </style}代数$\mathbb{X}$。¯

设 T 是一个复环面， $T[2]$ 是它的2-挠子群。用$T[2]^\vee$ 表示Hom($T[2]$, $\{\pm 1\}$)。

定义13。令 $\mathbb{X} = \mathrm{Sym}(T[2]^\vee)$。

限制给出一个满射 Res : $X^*(T) \twoheadrightarrow T[2]^\vee$；它扩展为一个满射 Sym(Res) :$\mathbb{X} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{X}}$，其核为 $2\overline{\mathbb{X}}$。根据命题 14，第一 Stiefel–Whitney 类给出一个同构 $w_1 : T[2]^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。这扩展为一个同构

$$\overline{\psi} : \overline{\mathbb{X}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \tag{20}$$

复合映射

$$\mathrm{H}^2(BT, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi^{-1}} X^*(T) \xrightarrow{\mathrm{Res}} T[2]^\vee \xrightarrow{\overline{\psi}} \mathrm{H}^1(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

因此延拓为满射环同态

$$\varphi : \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

注意，φ不保持次数。

由 (17)、(20) 及上述 φ，我们得到如下交换图

(21)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\text{Sym(Res)}} & \overline{\mathbb{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\psi}} \\ \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})。 \end{array}$$

引理 2. 限制映射 $\iota : \mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$是单射。

证明. 关键情形是 $T = \mathbb{C}^\times$。在这种情形下，$\mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是一个多项式环 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$，其中 $x \in \mathrm{H}^2(BT, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 对应于 $\mathbb{C}^\times$ 自身的非平凡二重覆盖。此覆盖在 $\mu_2 \subset \mathbb{C}^\times$ 上的限制是非平凡的，因此 $\iota(x) \in \mathrm{H}^2(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 非零。当然，$\mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是一个多项式环 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[v]$，且 v 的次数为 1。因此 $\iota(x) = v^2$，引理得证。□

命题 9. 若 π 是 T的正交表示，则

$$w^{T[2]}(\pi) = \varphi(c(\pi)). \tag{22}$$

证明. 由于 φ 具有乘法性，只需在 π 正交不可约时验证（22）。因此，我们可以取 $\pi = S(\chi) = \chi \oplus \chi^{-1}$ 作为一个线性特征标 χ。我们有

$$\begin{aligned} \iota^*(w(S(\chi))) &= \iota^*(w(\chi \oplus \chi^\vee)) \\ &= w(\omega \oplus \omega), \end{aligned}$$

其中 $\omega = \chi|_{T[2]}$是一个二次线性特征。由于 ω 是正交的，因此这等于

$$w(\omega) \cup w(\omega) = (1 + w_1(\omega)) \cup (1 + w_1(\omega)).$$

同时，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(c(S(\chi))) &= \varphi(c(\chi \oplus \chi^{-1})) \\ &= \varphi((1+c_1(\chi))(1+c_1(\chi^{-1}))) \\ &= (1+w_1(\omega)) \cup (1+w_1(\omega)),\end{aligned}$$

因为根据定义，

$$\varphi(c_1(\chi)) = w_1(\omega). \tag{23}$$

证明至此完成。 □

注 4. 注意，在同构 (20) 下，$w^{T[2]}(\pi)$ 对应于乘积

$$\prod_{\omega}(1+\omega)^{m_\pi(\omega)},$$

其中乘积取遍 $T[2]^\vee$，而 $m_\pi(\omega)$ 是 ω 在 π 对 $T[2]$ 的限制中的重数。SWC 的这种形式与 [BH58, 定理 11.3] 非常接近。

现在设 G 是连通复约化群，极大环面为 T。对于 G 的正交表示 π，记 $w(\pi)$ 在 T 上的限制为 $w^T(\pi)$。方程 (22) 计算出 $w^T(\pi)$，因为 $c^T(\pi)$ 由命题 7 确定。

例 6. 我们继续讨论 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的例 3。注意，当且仅当 ℓ 为偶数时，π_ℓ 是正交的。令 $\varphi(e) = v$，我们计算得 $w_2^T(\pi_\ell) = \binom{\ell+2}{3}v^2$，且 $w_4^T(\pi_\ell) = \frac{1}{3}\binom{\ell+2}{5}(5\ell+2)v^4$。容易看出，当 ℓ 为偶数时，$\binom{\ell+2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}\binom{\ell+2}{5}(5\ell+2)$ 总是偶数，因此 $w_2^T(\pi_\ell) = w_4^T(\pi_\ell) = 0$。因此，模去次数为 6 及更高的项后，$w^T(\pi_\ell) = 1$。（在命题 11 中我们将看到 $w(\pi_\ell) = 1$。）

对于 ℓ 奇数，我们有 $w_2(S(\pi_\ell)) = 0$，且 $w_4(S(\pi_\ell)) = \binom{\ell+2}{3}v^4$；当 $\ell \equiv 1$ 模 4 时，它是v^4，而当 $\ell \equiv 3$ 模 4 时，它为零。对于 $\ell \equiv 1$ 模 4，我们有

$$w^T(\pi_\ell) = 1 + v^4 + O(v^6).$$

例 7. 我们继续讨论 $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 的例4。注意，$\varphi(e) = v$，其中 v 是 $\mathrm{H}^1(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的非零元素。我们计算得 $w_2^T(\pi_\ell) = \frac{1}{4}\binom{\ell+2}{3}v^2$，并且

$$w_4^T(\pi_\ell) = \frac{1}{48}\binom{\ell+2}{5}(5\ell+12)\underline{v}^4.$$

我们有

$$w_2^T(\pi_\ell) = \begin{cases} 0 \text{ when } \ell \equiv 0, 6 \mod 8 \\ \underline{v}^2 \text{ when } \ell \equiv 2, 4 \mod 8, \end{cases}$$

and

$$w_4^T(\pi_\ell) = \begin{cases} 0 \text{ when } \ell \equiv 0, 2, 4, 14 \mod 16 \\ \underline{v}^2 \text{ when } \ell \equiv 6, 8, 10, 12 \mod 16. \end{cases}$$

特别地，对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，$w_2^T(\pi_4) = 0$ 但对于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$，我们有$w_2^T(\pi_4) \neq 0$。

8.4. **旋量性**

设 G 是一个连通约化复代数群，且 (π, V) 是 G 的复正交表示。由于 G 连通，我们有 $\pi: G \to \mathrm{SO}(V)$。于是 π 可提升到相应的旋量群 $\mathrm{Spin}(V)$（即，π 具有自旋性）当且仅当 $w_2(\pi) = 0$。

命题10。设 k 为正整数。则 $w_k^T(\pi) = 0$ 当且仅当 $c_k^T(\pi) \in 2\mathrm{H}^{2k}(BT, \mathbb{Z})$。

证明。由引理 2 和命题 9，我们有：

$$\begin{aligned} w_k^T(\pi) = 0 &\Leftrightarrow w_k^{T[2]}(\pi) = 0 \\ &\Leftrightarrow c_k^T(\pi) \in \ker \varphi. \end{aligned}$$

但该核为 $2\,\mathrm{H}^*(BT, \mathbb{Z})$。 □

推论2. 表示 π 是自旋性的当且仅当 $c_2^T(\pi) \in 2\mathrm{H}^4(BT, \mathbb{Z})$。

证明. 由命题 15及上述结果，我们有：

$$\begin{aligned} \pi \text{ is spinorial} &\Leftrightarrow w_2(\pi) = 0 \\ &\Leftrightarrow w_2^T(\pi) = 0 \\ &\Leftrightarrow c_2^T(\pi) \in 2\,\mathrm{H}^4(BT, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

将此与命题 4相结合，可得：

推论3. 当 $\mathfrak{g}$ 为单时，π_λ 是自旋性的当且仅当

$$\frac{\deg \pi_\lambda \langle \lambda + 2\delta, \lambda \rangle}{4 \dim \mathfrak{g}} \cdot q_2 \in \mathrm{Sym}^2_{\mathbb{Z}} X^*(T).$$

实际上，要紧的只是 q_2 的系数的“2部分”。更精确地说，令 $j(\pi) = -\operatorname{ord}_2\left(\frac{\deg\ \pi_\lambda\langle\lambda+2\delta\ \lambda\rangle}{4}, \dim\ \mathfrak{g}\right)$。

推论4. 当 $\mathfrak{g}$ 是单的，π_λ 是自旋性的当且仅当

$$2^{-j(\pi)} \cdot q_2 \in \mathrm{Sym}^2_{\mathbb{Z}} X^*(T).$$

证明. 记作

$$\frac{\deg \pi_\lambda \langle \lambda + 2\delta, \lambda \rangle}{4 \dim \mathfrak{g}} = \frac{m}{2^j n},$$

其中 m, n 为奇数。注意, $\frac{m}{2^{j-1}n} q_2 = c_2^T(\pi_\lambda) \in \mathsf{Sym}^2(X^*(T))$。令 A, $B \in \mathbb{Z}$, 使得 $\frac{1}{2n} = \frac{A}{2} + \frac{B}{n}$。那么 π_λ 具有自旋性, 当且仅当 $\frac{m}{2^j n} q_2 \in \mathsf{Sym}^2(X^*(T))$。但是

$$\begin{aligned} \frac{m}{2^j n} q_2 &= \frac{m}{2^{j-1}} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{n} \right) q_2 \\ &= \frac{Am}{2^j} q_2 + B c_2^T(\pi_\lambda). \end{aligned}$$

因此, 判据是 $\frac{Am}{2^j} q_2 \in \mathsf{Sym}^2 X^*(T)$。由于 A, m 为奇数, 我们应用另一种贝祖恒等式论证, 推得 π_λ 具有自旋性, 当且仅当 $\frac{1}{2^j} q_2 \in \mathsf{Sym}^2 X^*(T)$。 □

注5。 根据 [JS20, 命题 7], , 表示 π 具有自旋性, 当且仅当对于所有 $\nu \in X_*(T)$, 以下量

$$\frac{\deg \pi_\lambda \langle \lambda + 2\delta, \lambda \rangle}{4 \dim \mathfrak{g}} \cdot q_2(\nu)$$

是整数。但根据 [Bou08, 命题 2, 第 177] 页, $X_*(T)$ 上任何取整数值的齐次二次多项式都属于 $\mathsf{Sym}^2 X^*(T)$。

9. Total Stiefel-Whitney Classes

本节将介绍一种确定正交表示 π 的 $w^T(\pi)$ 的替代方法, 其中 G 是群 $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ 、 $\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$ 、 $\mathsf{SO}_n(\mathbb{C})$ 或 $\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 之一。在这些情况下, 韦伊群 W 有一个与对称群 Σ_r 同构的子群 $\Sigma < W$, 其中 r 是 T 的秩, 并且存在一个

$$T \cong (\mathbb{C}^\times)^r \tag{24}$$

保持 Σ_r 作用的李群同构。

我们将把 $w^T(\pi)$ 确定为一种因式分解, 其指数是 π 在 2 阶元素处的特征标值的组合。

9.1. w^T**的因式分解**(π)

回顾引理 2, $T[2]$ 是极大环面 T的模 2 上同调的检测子群。因此，我们可以通过$w^T(\pi)$在多项式代数 $\mathrm{H}^*(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[v_1, \dots, v_r]$中的像来描述它。

限制 $\pi|_{T[2]}$ 是元素初等阿贝尔 2-群 $T[2]$的一个 S_r-不变表示。对于 $0 \le i \le r$，将对应于$(-1, \dots, -1, \underbrace{1, 1, \dots}_{i\text{ 次}})$（根据 (24)）。

例 8. 对于 $G = \mathrm{SL}_3$，我们可以取 (24) 为 $\mathrm{diag}(a, b, (ab)^{-1}) \leftrightarrow (a, b)$。这里 $\Sigma \cong \Sigma_2$ 对前两个对角元素进行置换。因此$b_0 = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$, $b_1 = \mathrm{diag}(-1, 1, -1)$，而 $b_2 = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$。

$\mathrm{H}^1 = \mathrm{H}^1(BT[2], \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的一个典型元素可表示为 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$，其中 $a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。令 $|v|$ 为满足$a_i \neq 0$的 i 的数量。

根据 [GJ23，命题 2]，，我们有

$$w^{T[2]}(\pi) = \prod_{k=1}^{r} \left(\prod_{v \in \mathrm{H}^1 : |v| = k} (1 + v) \right)^{m_k(\pi)},$$

其中

$$m_k(\pi) = \frac{1}{2^r} \sum_{i=0}^{r} A_{i,k} \cdot \chi_\pi(b_i).$$

这里，$A_{i,\,k}$ 是表达式 $(1-x)^k(1+x)^{r-k}$ 中 x^i 的系数。（另见 [MS25，第 4]节。）

9.2.**例子：** SL_2

对于 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $b_1 = \mathrm{diag}(-1, -1) = -1$，并且我们有

$$w(\pi) = (1 + v)^{m_1(\pi)},$$

其中 $m_1(\pi) = \frac{1}{2}(\deg \pi - \chi_\pi(-1))$。

命题 11. 对于 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，以及 π G 的一个不可约正交表示，我们有$w(\pi) = 1$。

证明。当 $\pi = \pi_\ell$ 是正交的时， ℓ 必须是偶数，并且 -1 的作用是平凡的，因此 $m_1(\pi) = 0$。□

另一方面，当 ℓ 为奇数时，我们有 $m_1(S(\pi_\ell)) = 2m_1(\pi_\ell) = 2(\ell + 1)$，因此

$$w(S(\pi_\ell)) = (1 + v^2)^{\ell+1}.$$

特别地，$w(S(\pi_1)) = (1+v^2)^2 = 1+v^4$，因此 $w_4(S(\pi_1)) = v^4$。对于任意 k，我们有 $w_{2k}(S(\pi_\ell)) = \binom{\ell+1}{k} v^{2k}$，且奇数次的 SWC 均为零。

9.3.**例子：** SL_3

取 $G = \mathsf{SL}_3(\mathbb{C})$ 以及 T 对角环面。当 $m = n$ 时，不可约表示 $\pi_{m,n}$ 是正交的。令

$$\mathcal{D} = (1+v_1)(1+v_2)(1+v_1+v_2) = 1+v_1^2+v_2^2+v_1v_2+v_1^2v_2+v_1v_2^2,$$

如 [MS25，第 3 节4]中所示。于是 $w^{T[2]}(\pi) = \mathcal{D}^{m(\pi)}$，其中

$$m(\pi) = \frac{1}{4}(\deg \pi - \chi_\pi(\mathrm{diag}(-1,-1,1))).$$

回顾 [FH13，第 24 节2]，有

$$\chi_\lambda(\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3)) = S_\lambda(t_1,t_2,t_3),$$

其中 S_λ 是舒尔多项式。同一参考文献给出了用完全对称多项式$H_p(t_1, t_2, t_3)$表示 S_λ 的 Giambelli 公式。因此，只需计算 $H_p(1, 1, 1)$ 和 $H_p(-1, -1, 1)$。当然，$H_p(1, 1, 1) = \binom{p+2}{2}$；组合论论证表明

$$H_p(-1,-1,1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1.$$

对于 $\lambda = (2n, n, 0)$，可得 $S_\lambda(1, 1, 1) =$次 $\pi_\lambda = (n+1)^3$且

$$S_\lambda(-1,-1,1) = \begin{cases} n+1, & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}.$$

因此

$$m(\pi_{n,n}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(n+1)^3, & \text{when } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{4}n(n+1)(n+2), & \text{when } n \text{ is even} \end{cases}.$$

例如，设 π 为伴随表示。则 $n = 1$ 与$m(\pi) = 2$。因此 $w^{T[2]}(\pi) = \mathcal{D}^2$，且

$$w_4^{T[2]}(\pi) = v_1^4 + v_2^4 + v_1^2v_2^2 \neq 0.$$

接下来我们对$\pi = \pi_{m,n}$计算 $w(S(\pi))$。注意，每当 $\chi_\pi(g)$为实数时，$\chi_{S(\pi)}(g) = 2\chi_\pi(g)$。与上述类似的计算给出

$$\chi_{\pi_{m,n}}(-1,-1,1) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \text{ odd and } n \text{ odd} \\ -\dfrac{m+1}{2} & \text{if } m \text{ odd and } n \text{ even} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{if } m \text{ even and } n \text{ odd} \\ \dfrac{m+n}{2}+1 & \text{if } m \text{ even and } n \text{ even} \end{cases}$$

因此

$$m(S(\pi_{m,n})) = \begin{cases} \frac{1}{4}(m+1)(n+1)(m+n+2) & \text{if } m \text{ odd and } n \text{ odd} \\ \frac{1}{4}(m+1)((n+1)(m+n+2)+1) & \text{if } m \text{ odd and } n \text{ even} \\ \frac{1}{4}(n+1)((m+1)(m+n+2)+1) & \text{if } m \text{ even and } n \text{ odd} \\ \frac{1}{4}(m+n+2)((m+1)(n+1)-1) & \text{if } m \text{ and } n \text{ are even.} \end{cases}$$

注 6. 请注意，在所有情况下 $m(\pi)$都是偶数；这是必要的，因为G 是单连通的，所以

$$w_2^{T[2]}(\pi) = m(\pi)(v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2)$$

必须为零。

9.4. 关于总陈类的注

本节中，为了记号简洁，我们概述一种类似于上述过程的方法，用于计算 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$情形下的总陈类。表示 π 从 G到其对角环面 T 的限制在韦伊群作用下不变，我们可以尝试利用这一点来理解 π 的总 CC。

因此令 $T = (\mathbb{C}^\times)^n$，且 $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$。定义 $\omega_m \in \underline{X}^*(T)$ 为

$$\omega_{\underline{m}}(a_1, \ldots, a_n) = a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}.$$

我们令

$$\sigma_{\underline{m}} = \sum_{\underline{m}'} \omega_{\underline{m}'},$$

其中 $\underline{m'}$ 遍历 m 的 S_n轨道。那么， $\underline{T}$的不可分解 S_n不变代数表示恰好是满足 $m_1 \leq$的 σ_m

$\cdots \leq m_n$。我们有

$$c(\sigma_{\underline{m}}) = \prod_{\underline{m}'} (1 + \underline{m}' \cdot t)\,,$$

其中，乘积遍历 m 的 S_n-轨道。

回到 π，若知道 π 限制到 T 后每个 σ_m 的重数，就能得到总 CC 的乘积公式。事实上，

$$c(\pi) = \prod_{\underline{m}} c(\sigma_{\underline{m}})^{[\sigma_{\underline{m}},\pi]}, \tag{25}$$

其中，乘积遍历递增的 m。

特征标正交性的两种形式原则上都能给出这些重数的公式。将其限制到极大紧阿贝尔子群 $(S^1)^n < T$ 上，正交性给出：

$$[\sigma_{\underline{m}}, \pi] = \int_{(S^1)^n} \chi_\pi(t)\overline{\omega_{\underline{m}}(t)}dt.$$

对于另一种形式，令 A_N 为由 $a_N = (\zeta_N,\ \zeta_{N^2},\ \ldots\ldots,\ \zeta_{N^n})$ 生成的 T 的循环子群。那么

$$[\sigma_{\underline{m}}, \pi] = \frac{1}{N^n} \sum_{a \in A_N} \chi_\pi(a)\overline{\omega_{\underline{m}}(a)},$$

当 N 足够大时。当 π 是最高权为 λ 的不可约表示时，我们可以取 $N \geq 2|\lambda|$。对于 (25)，只需在 $|m| \leq 2|\lambda|$ 时计算这个重数。

10. Appendix

10.1. 一些代数拓扑

命题12. 设 K 是李群 G 的极大紧子群。包含映射 $K \hookrightarrow G$ 在 BK 与 BG 之间诱导出一个同伦等价。

尽管这显然是众所周知的结果 [Tod，Page 79]，，为方便读者，我们仍简述其证明。

证明。根据 Whitehead 定理 [Hat02，定理 4.5，第 346]，页，只需证明包含映射在所有同伦群上诱导同构 $\pi_n(BK) \to \pi_n(BG)$，其中 $n \geq 0$。

纤维丛 $K \to EK \overset{\rho_K}{\to} BK$ 和 $G \to EG \overset{\rho_G}{\to} BG$对应的长正合列为:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to \pi_n(K) & \longrightarrow & \pi_n(EK) & \longrightarrow & \pi_n(BK) & \xrightarrow{\delta_n} & \pi_{n-1}(K) & \to \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to \pi_n(G) & \longrightarrow & \pi_n(EG) & \longrightarrow & \pi_n(BG) & \xrightarrow{\delta_n} & \pi_{n-1}(G) & \to \cdots
\end{array}$$

向下的映射由包含映射诱导，且该图依 [Hat02 的定理 4.3 与 4.41] 交换。由于 EK 与 EG可缩，边界映射 δ_n 为同构。考虑如下方块:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(BK) & \xrightarrow{\delta_n} & \pi_{n-1}(K) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_n(BG) & \xrightarrow{\delta_n} & \pi_{n-1}(G)
\end{array}$$

由于包含映射 $K \to G$ 是同伦等价 [Hel78，定理 2.2，第 257], 页，右侧向下的映射为同构。因此左侧竖直映射为同构，即为所求。

□

命题 13. 设 T 为复环面。第一陈类给出一个同构

$$X^*(T) \overset{\sim}{\to} \mathrm{H}^2(BT, \mathbb{Z}).$$

证明. 只需对 $T = \mathbb{C}^\times$证明这一点。我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc}
X^*(\mathbb{C}^\times) & \xrightarrow{c_1} & \mathrm{H}^2(B\mathbb{C}^\times, \mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(S^1, \mathbb{C}^\times) & \xrightarrow{c_1} & \mathrm{H}^2(BS^1, \mathbb{Z})
\end{array}$$

其中向下的映射均为限制映射。从$X^*(\mathbb{C}^\times)$出发的限制映射显然是一个同构，而另一个向下的映射根据命题12也是同构。令 $\chi_\bullet$: $S^1 \to \mathbb{C}^\times$ 为通常的包含映射；它生成循环群 Hom(S^1, $\mathbb{C}^\times$)。对于 $ES^1 \to BS^1$，我们可以取纤维化 $S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$。根据 [Hus66，命题 7.1，第 96], 页， $S^\infty[\chi_\bullet]$ 在 $\mathbb{C}P^\infty$ 上的伴随丛是典范丛 γ_1。根据陈类的定义 [Hus66，第 249], 页，类c_1(γ_1)生成 H^2(BT, $\mathbb{Z}$)。因此，底部的水平映射是同构，所以上方的水平映射也是同构。□

命题 14。 设 E 是一个初等阿贝尔2群。第一 *Stiefel–Whitney* 类给出一个同构

$$\mathrm{Hom}(E, \{\pm 1\}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(BE, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

证明。这个证明与前一个命题的证明类似。我们可以假设 E 是二阶循环群。令 sgn 为 E的非平凡二次特征。根据 [Hus66 的命题 7.1（第 96], 页）， S^∞[sgn] 在 $\mathbb{R}P^\infty$ 上的伴随丛是典范丛 γ_1。根据 SWC 的定义 [（Hus66，第 248] 页）， $w_1(\gamma_1)$生成 $\mathrm{H}^1(BE, \mathbb{Z})$。□

命题 15。设 G 是连通约化李群， T 是 G的极大环面， A 是阿贝尔群。那么限制映射

$$\mathrm{H}^2(BG, A) \to \mathrm{H}^2(BT, A)$$

是单射。

换言之， T 可以检测 G的二次上同调。

证明。根据命题 12，我们可以假设 G 是紧致的。

由于 G 连通，我们有 $\pi_1(BG) = \pi_0(G) = \{0\}$，这意味着 $\mathrm{H}_1(BG) = \{0\}$，并且存在一个同构 $\pi_2(BG) \cong \pi_1(G)$。根据赫维茨定理（[Hat02，定理 4.32]），我们有一个自然同构 $\mathrm{H}_2(BG) \cong \pi_1(G)$。自然映射

$$\mathrm{H}^2(BG, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(G), A)$$

根据泛系数定理，这是一个同构。

因此，只需证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(G), A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(T), A)$$

是一个单射。但这由以下事实可得： [BtD03，定理 7.1]，诱导同态 $\pi_1(T) \to \pi_1(G)$ 是满射。□

10.2. **两类斯蒂费尔-惠特尼类**

设 G 是一个李群。当 V 是一个实向量空间，且 $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个同态时，我们称 (π, V) 为 G 的一个实表示 。在这种情况下，SWC $w_k(\pi)$ 已在 [Ben91，第 2.6], 节中通过实向量丛的 SWC 这一较为人熟知的理论加以定义。

当 G是紧致的， G 的实表示通过复化 [BtD03，第 II 章第 6]节，与 G 的复正交表示等价。然而，对于非紧致的 G，这种情况可能不成立：例如，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$在 $\mathbb{R}^n$ 上的标准表示不具有不变非退化对称双线性形式，而 $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$在 $\mathbb{C}^n$ 上的标准表示不具有实形式。

尽管如此，在本节中，我们以自然的方式为 G 的复正交表示定义 SWC $w_k^{\mathrm{O}}(\pi) \in \mathrm{H}^k(BG, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。为简洁起见，证明从略。

令 O_n 为通常的紧正交群（由实数项组成且其转置等于逆矩阵的矩阵群）。在 $\mathrm{H}^*(\mathrm{BO}_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中有 $w = 1 + w_1 + \cdots + w_n$，其中每个 $|w_k| = k$。（精确定义请参见例如 [Ben91，第 2.6] 节 w_k。）

记 $\iota^{\mathbb{R}} : \mathrm{O}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 和 $\iota^{\mathrm{O}} : \mathrm{O}_n \hookrightarrow \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ 为包含映射。由于它们是同伦等价，诱导映射 $B\iota_{\mathbb{R}}$ 和 $B\iota^{\mathrm{O}}$ 根据命题12在模 2 上同调上诱导出同构。记$d^{\mathbb{R}} : \mathrm{H}(\mathrm{BO}_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BGL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 和 $d^{\mathrm{O}} : \mathrm{H}(\mathrm{BO}_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BO}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为它们的逆映射。置 $w^{\mathbb{R}} = d^{\mathbb{R}}(w)$ 和 $w^{\mathrm{O}} = d^{\mathrm{O}}(w)$。

设 (π, V) 是李群 G 的实表示，次数为 n。选取 V 的一个基，得到一个同态 $\pi' : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$。我们定义

$$w(\pi) := (B\pi')^*(w^{\mathbb{R}}).$$

由于基的不同选择相当于在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 中进行共轭，我们看到 $w(\pi)$ 与这一选择无关。

如果 G 的一个复表示 (π, V) 具有实结构 σ（在 [BtD03 第 93] 页的意义下），那么 π 限制为 G 的一个实表示 (π_σ, V^σ)。我们可以定义

$$w^{\mathbb{R}}(\pi) := w(\pi_\sigma),$$

因为它与实结构的选择无关。

设 V 为一个复向量空间，Φ 为一个对称非退化双线性形式。令 $\mathrm{O}(V, \Phi)$ 为 Φ 的等距群。通过选取正交基，我们得到一个同构 $\mathrm{O}(V, \Phi) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$。我们可以将 $w^\Phi \in \mathrm{H}^*(\mathrm{BO}(V, \Phi), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 定义为 w^{O} 在该同构下的拉回。由于标准正交基的不同选择相当于在 $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ 中进行共轭，类 w^Φ 与这一选择无关。可以验证，对于 $y \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$，我们有

$$\mathrm{Int}(y)^*(w^\Phi) = w^{y^T \Phi y}.$$

如果复表示 (π, V) of G 存在一个 G-不变的对称非退化双线性形式 Φ，则称其为正交的。因此有 $\pi : G \to \mathrm{O}(V, \Phi)$。在这种情况下定义

$$w^\Phi(\pi) := \pi^*(w^\Phi).$$

事实上，如果 V容许两种这样的形式 Φ, Φ'，则 $w^\Phi(\pi) = w^{\Phi'}(\pi)$；因此我们可以选取其中一种，并简单地定义 $w^{\mathrm{O}}(\pi) = w^\Phi(\pi)$。

定理 5. 如果 V 同时容许一个 G-不变实结构 σ，以及一个G-不变对称非退化双线性形式 B，则 $w^{\mathrm{O}}(\pi) = w^{\mathbb{R}}(\pi)$。

在本文正文中，我们省略上标 'O'，直接用 $w(\pi)$ 表示 $w^{\mathrm{O}}(\pi)$。类似地，考虑 $w(\pi)$ 的第 k 次部分，我们有 $w_k(\pi)$。下面陈述这些 SWC 的一些基本性质，证明从略：

命题 *16.* 对于李群 G，映射 $w_1 : \mathrm{Hom}(G, \mu_2) \to H^1(BG, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是一个同构。若 (π, V) 是 G 的正交表示，则 $w_1(\pi) = w_1(\det \pi)$。若 π, π' 是 G 的正交表示，则 $w(\pi \oplus \pi') = w(\pi) \cup w(\pi')$。若 (π, V) 是一个满足 $\det \pi = 1$ 的正交表示，则 $w_2(\pi) = 0$ 当且仅当 π 是自旋性的。

References

[Ben91] D. J. Benson.《表示与上同调：第 2 卷，群与模的上同调》，第 2 卷。剑桥大学出版社，1991 年。[BH58] A. Borel 和 F. Hirzebruch。特征类与齐性空间（一）。《美国数学杂志》，80(2):458–538，1958 年。[Bor12] A. Borel。《线性代数群》，第 126 卷。Springer Science & Business Media，2012 年。[Bou02] N. Bourbaki。《李群与李代数》第 4–6 章。《数学基础》（柏林）。Springer-Verlag，柏林，2002 年。Andrew Pressley 译自 1968 年法文原版。[Bou04] N. Bourbaki。《数学基础：实变量函数：初等理论》。Springer Berlin，2004 年。[Bou08] N. Bourbaki。《李群与李代数：第 7–9 章》，第 3 卷。Springer Science & Business Media，2008 年。[BtD03] T. Br¨ocker 和 T. tom Dieck。《紧李群的表示》，第 98 卷。Springer Science & Business Media，2003 年。[FdV69] H. Freudenthal 和 H. de Vries。《线性李群》，《纯粹与应用数学》第 35 卷。学术出版社，纽约—伦敦，1969 年。[FH13] W. Fulton 和 J. Harris。《表示论：入门课程》，第 129 卷。Springer Science & Business Media，2013 年。[GJ23] J. Ganguly 和 R. Joshi。GL_n over $\mathbb{F}_q$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$的实表示的全斯蒂费尔–惠特尼类。《数学科学研究》，10(2):论文编号 16，23 页，2023 年。[Hat02] A. Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年。[Hel78] S. Helgason。《微分几何、李群与对称空间》（1978），1978 年。[Hum92] J. E. Humphreys。《反射群与 Coxeter 群》。第 29 号。剑桥大学出版社，1992 年。[Hus66] D. Husem¨oller。《纤维丛》，第 5 卷。Springer，1966 年。[JS20] R. Joshi 和 S. Spallone。约化群正交表示的旋量性。《美国数学学会表示论》，24(15):435–469，2020 年。

[Mac98] I. G. Macdonald。对称函数与霍尔多项式。Oxford university press，1998 年。[MS25] N. Malik 和 S. Spallone。偶数秩有限特殊线性群的斯蒂费尔-惠特尼类。《代数学杂志》，673:455–473，2025 年。[Tod] H. Toda。分类空间的上同调、同伦论及相关主题（京都，1984）。《纯数学高级研究》，9:75–108。[Wei13] C. A. Weibel。《 K-书：代数 K-论导论，第 145 卷。美国数学会，2013 年。

Rohit Joshi, Shivachhatrapati Housing Society, Senadatta Peth, Pune-411030, Maharashtra, India电子邮件地址: rohitsj2004@gmail.com

Steven Spallone, Indian Institute of Science Education and Research, Pune-411008, Maharashtra, India电子邮件地址: sspallone@gmail.com