arXiv:2602.02168v1 [math.AP] 2 Feb 2026

含 Hartree 型非线性项的混合局部-非局部方程的基态解

Gurdev Chand Anthal、Prashanta Garain 和 Nidhi Nidhi

2026年2月3日

摘要

我们研究一类具有 Hartree型非线性项的混合局部-非局部方程，其形式为

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + u = (I_\alpha * F(u))\, F'(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{0.1}$$

其中 $N \geq 3$, $s \in (0,1)$，且 $F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 Berestycki–Lions 型假设。该方程结合了经典拉普拉斯算子与分数阶拉普拉斯算子，而 Hartree型非线性项由一个涉及 Riesz势 I_α 的非局部卷积项给出，其中 $\alpha \in (0,N)$。我们证明了方程 (0.1) 的基态解存在。为此，我们建立了正则性，并为方程 (0.1) 的一般弱解推导出一个 Pohožaev型恒等式。此外，我们通过极化方法得到了方程 (0.1) 的基态解的对称性。

关键词：混合局部-非局部问题，Hartree型非线性，基态解，正则性，对称性。*2020* 数学主题分类：*35M10，35J61，35A01*。

目录

1 引言与主要结果 2

1.1 引言.2 1.2 主要结果.5

2 函数空间框架与辅助结果 6

3 预备 主要结果证明的预备工作 8

3.1 定理 1.2.1 证明的预备知识.8 3.2 定理 1.2.2 证明的预备知识.13 3.3 定理 1.2.3 证明的预备知识.14

4 主要结果的证明 **19**

4.1 定理 1.2.1 的证明.19 4.2 定理 1.2.2 的证明.19 4.3 定理 1.2.3 的证明.20

5 附录：正则性与 Pohožaev 恒等式 **21**

1 引言与主要结果

1.1 引言

我们研究以下具有 Choquard 非线性项的混合局部-非局部方程:

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + u = (I_\alpha * F(u))F'(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

其中 $N \geq 3$ 和 $\alpha \in (0, N)$。这里， Δ 是经典拉普拉斯算子；对于 $0 < s < 1$，分数阶拉普拉斯算子（$-\Delta$）^{s} 定义如下:

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s)\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy,$$

其中 $C(N,s)$ 是由下式给出的归一化常数

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(x)}{|x|^{N+2s}} \right)^{-1},$$

且 P.V. 表示主值。
此外， I_α 是阶数为 $\alpha \in (0, N)$ 的 Riesz势，定义如下:

$$I_\alpha(x) = \frac{A_{N,\alpha}}{|x|^{N-\alpha}}, \text{ with } A_{N,\alpha} = \frac{\Gamma(\frac{N-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{N}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \text{ for every } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

我们假设 $F \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ 和 $f := F'$ 满足以下 Beretyscki-Lions 型条件:

(f1) 存在常数 $C > 0$ 使得 $|tf(t)| \leq C(|t|^{\frac{N+\alpha}{N}} + |t|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$, (f2) $\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{N+\alpha}{N}}} = 0 = \lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}}$, (f3) 存在 $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 使得 $F(t_0) \neq 0$, (f4) f 单调不减，并且存在常数 $k > 0$ 使得 $|f(t)| \leq k|t|$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$。

卷积 $I_\alpha * F(u)$ 定义为

$$(I_\alpha * F(u))(x) := \int_{\mathbb{R}^N} I_\alpha(x-y)\, F(u)(y)\, dy.$$

对具有此类增长条件的非线性项问题的研究，可追溯至 Berestycki 和 Lions 的工作；参见 [6, 7], ，他们研究了以下局部化版本：

$$-\Delta u + u = h(u) \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

这里，非线性项 h 满足以下假设：

- $$-\infty < \liminf_{s\to 0^+} \frac{h(s)}{s} \le \limsup_{s\to 0^+} \frac{h(s)}{s} = -m < 0;$$
- $$-\infty \le \limsup_{s\to +\infty} \frac{h(s)}{s^{2^*-1}} \le 0;$$
- 存在 $t_0 > 0$ 使得 $H(t_0) > 0.$

其中 $H(t) = \int_0^t h(\sigma)d\sigma$。研究此类问题，是为了寻找非线性 Klein-Gordon 方程和 Schr¨odinger 方程的孤立波或定态。Berestycki 和 Lions 将直接极小化法与用于 Schwartz 对称化的 Pólya-Szegö 不等式及缩放论证结合起来，证明约束极小化问题的解

$$\min\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ and } \int_{\mathbb{R}^N} \left(H(u) - \frac{|u|^2}{2}\right) dx = 1\right\},$$

实际上是方程 (1.2) 的径向基态解，参见 [6, 定理 1]。此外，他们还证明，若 $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (1.2) 的有限能量解，则 u 满足 Pohožaev 恒等式

$$\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx,$$

参见 [6, 命题 1]。这尤其意味着，关于 h 的假设“对于非平凡有限能量解的存在几乎是必要的”， [6, 第 2.2 节，第 322]页。沿着上述工作的思路，V. Moroz 和 J. Van Schaftingen 在 [27] 研究了一类非局部 Choquard 方程，具体如下：

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * F(u))F'(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{1.3}$$

其中 f 和 F 满足 (f1)-(f3)。由于非局部项在 Schwartz 对称化下既不保持不变，也无法得到控制，并且该问题不是尺度不变的，因此 Berestycki 和 Lions 的方法对于非局部项并不适用。为克服这一困难，Moroz 和 Schaftingen 使用了 L. Jeanjean 引入的缩放技巧 [22]。具体而言，作者首先构造了一个渐近满足 Pohožaev 恒等式的 Palais-Smale 序列，随后采用浓缩紧性论证，证明了方程 (1.3) 存在非平凡解。此外，要证明所得解是基态，还需要 Pohožaev 恒等式；作者通过处理解的正则性得到了该恒等式。

分数阶拉普拉斯算子的情形要复杂得多，因为在 Berestycki 和 Lions 的最弱假设下，很难得到 Pohožaev 恒等式。对于局部非线性项的情形，我们参考文献 [11, 12], ，其中在对非线性项施加更强正则性假设的条件下，证明了基态解的存在性，即在 [11] 中，当 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 且 $\mu \in (1-2s, 1)$ 时，以及在 [12]中，当 $s \in (0, 1/2]$ 时，分别得到了相应结果。关于非局部非线性项的情形，我们参考文献 [13, 25, 31]。在[31], 中，作者证明了 Pohožaev 恒等式，并在限制条件 $\alpha \in (0, 2s)$ 和 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 下，得到了基态解的存在性。后来，Luo 在文献 [25], 中结合约束变分法与变形引理，在较弱的限制条件 $\alpha \in \min\{4s, N\}$和 $f \in C(\mathbb{R})$ 下，得到了满足 Pohožaev 恒等式的基态解。这里需要指出的是，在上述两篇论文中，均假设 f 是超线性的。近期，文献 [13], 中的作者进一步放宽了对非线性项的超线性假设，并证明了对于所有 $\alpha \in (0, N)$, Pohožaev 流形上都存在最小能量解。更确切地说，他们研究了以下问题

$$(-\Delta)^s u + \mu u = (I_\alpha * F(u))F'(u) \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

其中 f 满足：

1. $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
2. $\limsup_{t\to 0} \frac{|tf(t)|}{|t|^{\frac{N+\alpha}{N}}} < +\infty$, 且 $\limsup_{|t|\to+\infty} \frac{|tf(t)|}{|t|^{\frac{N+\alpha}{N}}} \leq +\infty$;
3. 定义 $F(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$，则其满足：

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{N+\alpha}{N}}} = 0 \text{ and } \lim_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{N+\alpha}{N-2s}}} = 0;$$

4. 存在 $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，使得 $F(t_0) \neq 0$,

并证明了存在一个满足以下 Pohožaev 恒等式的径向对称弱解:

$$\left(\frac{N-2s}{2}\right)[u]^2+\frac{N}{2}\mu\|u\|_2^2=\left(\frac{N+\alpha}{N}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*F(u))F(u)dx,$$

此外，这个弱解也恰好是 Pohožaev 流形上的基态。

近年来，研究者也在探索如何在对非线性项和解仅施加最小正则性假设的条件下，推导非局部算子的 Pohožaev 恒等式。关于这一方向的研究，参见 $[2,4,14]$。

受上述文献启发，我们希望研究混合局部-非局部问题 **(1.1)**。当局部变化和非局部变化都会影响某种物理现象时，这类算子便会发挥作用。在双模型幂律分布过程中也会遇到这类算子，参见 $[30]$。此外，该算子还应用于最优搜索理论、生物数学和动物觅食等领域；进一步阐述参见$[16]$ 。已有多项研究探讨了解的存在性、正则性与对称性、Faber-Krahn 型不等式以及 Neumann 问题等，参见例如 $[1,8,9,17]$ 及其中的参考文献。关于涉及混合局部-非局部算子的 Choquard 方程，可参见研究 $[3,5]$ ，其中讨论了具有特定边界条件的有界区域情形。此外， $\mathbb{R}^N$的情形也已在 $[20,21,28,29]$,中得到研究，作者探讨了归一化解的存在性、不存在性、正则性和多重性。

1.2 主要结果

在本文余下部分中，除非另有说明，我们假设 $0<s<1$, $N\geq 3$ 和 $\alpha\in(0,N)$。我们的第一个主要结果如下:

定理 1.2.1. 假设 f 满足 $(\mathrm{f1})$–$(\mathrm{f3})$。那么 (1.1) 在$H^1(\mathbb{R}^N)$中有一个弱解。

此外，我们证明，在附加假设 $(f4)$ 下，上述定理 1.2.1 中得到的弱解是一个基态解。

定理 1.2.2. 设 f 满足 $(\mathrm{f1})$–$(\mathrm{f4})$，且令 $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ 为定理 *1.2.1* 中得到的弱解。那么 u 是 (1.1)的一个基态解。

此外，我们证明基态解具有如下对称性结果。

定理 1.2.3. 设 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是满足 $(\mathrm{f1})$–$(\mathrm{f4})$ 的奇函数。假设 f在 $(0,\infty)$ 上不变号，且 $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是 (1.1) 的正基态解。那么 u 具有径向对称性。

我们以概述证明思路来结束本节。如 [27], 所述，由于我们的问题不是尺度不变的，因此无法像 [6] 中那样采用约束极小化来研究我们的问题。因此，受 [27], 启发，我们使用 L. Jeanjean [22] 引入的缩放技巧，在非线性项 f满足假设 (f1)-(f3) 的条件下，证明 (1.1) 存在非平凡弱解。

现在，为了得出这样构造的解是一个基态，需要建立 Pohožaev 恒等式，而这又要求解具有一定的正则性。受 [20, 27], 的启发，我们通过为具有一般非线性项f的混合算子问题建立临界 Brezis-Kato 正则性结果的对应版本，来处理正则性问题。即便如此，在得到 $W^{2}{}_{局部}{}^{q}(\mathbb{R}^N)$（对任意 $q \geq 2$）之后，我们仍无法像[27] 中那样使用标准测试函数来建立 Pohožaev 恒等式。这是因为非局部算子的分部积分公式要求解具有全局正则性，见 [2, 14]。为克服这一困难，我们采用了 [4]中提出的方法，将 [4]中的证明推广到具有一般非线性项的 Choquard 型非线性项情形。然而，这种方法需要对非线性项 f额外假设 (f4)。这些正则性结果和 Pohožaev 恒等式的证明构成了本文的主要创新，相关证明见附录。

最后，受 Moroz 和 Schaftingen [27] 证明基态解对称性的启发，我们证明了解的对称性。借助与狄利克雷积分和非局部积分相关的极化性质（参见 [27, 引理 5.4 和引理 5.5]），我们建立了解的 Gagliardo 半范数与其极化之间的关系，如引理 3.3.3 所示。最终，这使我们也能够证明关于分数阶拉普拉斯算子问题的基态解具有径向对称性。

2 函数空间设置与辅助结果

我们考虑 Banach空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$，其由满足 u 且其弱导数 u_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, N$属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 的可测函数 $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$组成，并赋予以下范数:

$$\|u\| = (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + [u]^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\|u\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, dx, \quad \|\nabla u\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx,$$

and

$$[u]^2 := \frac{C(N,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dxdy.$$

（1.1）的弱解概念如下:

定义 2.1.（弱解）称函数 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 为 (1.1) 的弱解，如果

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx + \ll u, v \gg + \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(u)) f(u) v \, dx, \tag{2.1}$$

对每个 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$，其中

$$\ll u, v \gg := \frac{C(N,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} \, dxdy. \tag{2.2}$$

定义 2.2.（基态解）我们称 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 是 (1.1) 的基态解，若 u 是 (1.1) 的弱解，并且

$$I(u) = m := \inf \left\{ I(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \ is \ a \ solution \ of \ (1.1) \right\}. \tag{2.3}$$

定义

$$A(u) := \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(u)) F(u) dx,$$

与问题 (1.1) 对应的能量泛函为

$$I(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2}[u]^2 - \frac{1}{2} A(u),$$

也就是说， I 的临界点是 (1.1) 的弱解。
指数 $\frac{N+\alpha}{N}$ 和 $\frac{N+\alpha}{N-2}$ 分别称为下临界指数和上临界指数，这与下述 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式有关，参见 [23,定理 4.3]:

命题 2.0.1。设 t、$r > 1$ 和 $0 < \alpha < N$ 满足 $1/t + 1/r = 1 + \alpha/N$、$f \in L^t(\mathbb{R}^N)$ 以及 $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$。存在一个最佳常数 C（t、r、α、N），与 f 和 h 无关，使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)h(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \, dxdy \le C(t,r,\alpha,N) \|f\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.4}$$

若 $t = r = 2N/(N+\alpha)$，则

$$C(t,r,\alpha,N) = C(N,\alpha) = \pi^{\frac{N-\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{N+\alpha}{2})} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(N)} \right\}^{-\frac{\alpha}{N}}. \tag{2.5}$$

当且仅当存在某些 $A \in \mathbb{C}$、$0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$ 和 $a \in \mathbb{R}^N$，使得 $f/h \equiv constant$ 和 $h(x) = A(\gamma^2 + |x-a|^2)^{-(N+\alpha)/2}$ 时，(2.4) 中的等号成立。

由不等式 (2.4) 可知，对于任意 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{A}_q(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^q |u(y)|^q}{|x-y|^{N-\alpha}} dxdy$$

若 $\frac{N+\alpha}{N} \leq q \leq \frac{N+\alpha}{N-2}$，则其定义良好。
利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，按标准方式可以验证：若 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足增长条件 (f1)，则定义在 Sobolev空间$H^1(\mathbb{R}^N)$ 上的能量泛函 I 是一个连续可微泛函。

记号

除非另有说明，本文将在余下部分使用如下记号：

- 对于 $\Sigma = \{\rho \in C([0,1];\, H^1(\mathbb{R}^N)) :\, \rho(0) = 0 \text{且 } I(\rho(1)) < 0\}$, 我们定义

$$b := \inf_{\rho\in\Sigma} \sup_{z\in[0,1]} I(\rho(z)).$$

- 对于 $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$，我们令

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx + \ll u, v \gg + \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx$$

  且 $\ll \cdot,\cdot \gg$ 由 (2.2) 定义。

- 对于 $p \geq 1$，$\|\cdot\|_p$ 表示 Banach空间 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 上的标准范数，其定义为

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

- $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$对于 $0 < s \leq 1$，满足 $N > 2s$。
- 令 $B_R(x)$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^N$ 为中心、半径为 $R > 0$ 的开球。
- 符号 C 和 C_i $(i \in \mathbb{N}^+)$ 表示正数常数，其取值可随行而变化。
- 符号 $\to$ 和 $\rightharpoonup$ 分别表示强收敛和弱收敛。

3 主要结果证明的预备知识

3.1 定理 1.2.1 证明的预备知识

定义 Pohožaev 泛函 P：$H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$P(u) := \left(\frac{N-2}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{2}\right)[u]^2 + \frac{N}{2}\|u\|_2^2 - \left(\frac{N+\alpha}{2}\right)A(u).$$

引理 3.1.1. 如果 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 (f1) 和 (f3)，那么存在一个序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得

1. $I(u_n) \to b > 0$ 当 $n \to \infty$ 时，
2. $I'(u_n) \to 0$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的对偶空间中强收敛，当 $n \to \infty$ 时，
3. $P(u_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时。

证明。**断言 1：** $b < +\infty$。
对于如 (f3) 中的 $t_0 \in \mathbb{R}$，我们令 $\omega := t_0\chi_{B_1(0)}$，其中 $\chi_{B_1(0)}$ 是特征函数，且 $B_1(0)$ 是以 0 为中心的单位球。显然 $w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$，并且

$$A(\omega) = F(t_0)^2 \int_{B_1}\int_{B_1} \frac{A_{N,\alpha}}{|x-y|^{N-\alpha}}\,dxdy > 0.$$

利用 (f1)，容易看出 A 在 $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ 中连续，因此由 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ 中的稠密性，我们可以找到 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$，使得 $A(v) > 0$。现在，对于固定的 $\tau > 0$，定义 $u_\tau(x) := v(\frac{x}{\tau})$，由此得到：

$$I(u_\tau) = \frac{\tau^{N-2}}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{\tau^{N-2s}}{2}[v]^2 + \frac{\tau^N}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\tau^{N+\alpha}}{2}A(v) < 0 \text{ for large } \tau > 0.$$

因此，存在某个 $u_{\tau_0} \in H^1(\mathbb{R}^N)$，使得 $I(u_{\tau_0}) < 0$。借助这个 u_{τ_0}，我们在 Σ中定义一条路径。定义 $\rho:\ [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$，使得 $\rho(t) := tu_{\tau_0}$。显然$\rho \in \Sigma$，因此 $b < +\infty$。

命题 2： $b > 0$。
根据命题 2.0.1、假设 (f1) 以及 Sobolev 不等式，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
A(u) &= \int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha * F(u))F(u)\,dx \le C\left(\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|^{\frac{2N}{N+\alpha}}\,dx\right)^{\frac{N+\alpha}{N}} \\
&\le C\left(\int_{\mathbb{R}^N}||u|^{\frac{N+\alpha}{N}} + |u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}|^{\frac{2N}{N+\alpha}}\,dx\right)^{\frac{N+\alpha}{N}} \le C_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2 + |u|^{\frac{2N}{N-2}})\,dx\right)^{\frac{N+\alpha}{N}} \\
&\le C\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\,dx\right)^{\frac{N+\alpha}{N}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N+\alpha}{N}}\right) \le C\left(\|u\|_2^{2(\frac{N+\alpha}{N})} + \|\nabla u\|_2^{2(\frac{N+\alpha}{N-2})}\right) \\
&\le C\left(\|u\|_2^{\frac{2\alpha}{N}}\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^{2(\frac{\alpha+2}{N-2})}\|\nabla u\|_2^2 + [u]^2\right).
\end{aligned}$$

显然，我们可以找到 $\delta > 0$，使得

$$A(u) \le \frac{1}{4}\left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + [u]^2\right) \text{ for all } u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ with } \|u\|^2 \le \delta.$$

因此，对所有满足$\|u\|^2 \leq \delta$的 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$I(u) \geq \frac{1}{4}\left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + [u]^2\right). \tag{3.1}$$

现在，对于任意的 $\rho \in \Sigma$，我们有:

$$\|\rho(0)\|^2 = 0 < \delta < \|\rho(1)\|^2,$$

那么，根据介值定理，我们可以找到 $\bar{\tau} \in (0,1)$，使得

$$\|\rho(\bar{\tau})\|^2 = \|\nabla\rho(\bar{\tau})\|_2^2 + \|\rho(\bar{\tau})\|_2^2 + [\rho(\bar{\tau})]^2 = \delta.$$

因此，由 (3.1) 可得， $I(\rho(\bar{\tau})) \geq \frac{\delta}{4}$，于是

$$\frac{\delta}{4} \leq I(\rho(\bar{\tau})) \leq \sup_{\tau\in[0,1]} I(\rho(\tau)).$$

由于 $\rho \in \Sigma$ 是任意的，我们得到:

$$b \geq \frac{\delta}{4} > 0.$$

现在我们定义 Φ： $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^N$、$t \in \mathbb{R}$ 和 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$，都有 $\Phi(t,v)(x) = v(e^{-t}x)$。于是,

$$I(\Phi(t,v)) = \frac{e^{(N-2)t}}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{e^{Nt}}{2}\|v\|_2^2 + \frac{e^{(N-2s)t}}{2}[v]^2 - \frac{e^{(N+\alpha)t}}{2}A(v).$$

令,

$$\tilde{b} := \inf_{\tilde{\rho}\in\tilde{\Sigma}} \sup_{\tau\in[0,1]} I(\Phi(\tilde{\rho}(\tau))),$$

其中， $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\rho} \in C([0,1];\ \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N))$： $\tilde{\rho}(0) = (0,\ 0)$，且 $(I \circ \Phi)(\tilde{\rho}(1)) < 0\}$，那么我们~声称 $b = b$。

因此，由 [33, 定理 2.9] 可知，存在一个序列 $\{(t_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$，使得

$$\{(I \circ \Phi)(t_n, v_n)\} \to b \text{ and } (I \circ \Phi)'(t_n, v_n) \to 0 \text{ as } n \to \infty. \tag{3.2}$$

现在，对于任意的 $(t,v) \in \mathbb{R}\times H^1(\mathbb{R}^N)$，我们有：

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}(I\circ\Phi)'(t_n,v_n)(t,v)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(e^{(N-2)t_n}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n\nabla v\,dx + e^{(N-2s)t_n}\ll v_n, v\gg + e^{Nt_n}\int_{\mathbb{R}^N} v_n v\,dx\\
&\quad -e^{(N+\alpha)t_n}A'(v_n)(v) + t\left(\frac{(N-2)e^{(N-2)t_n}}{2}\|\nabla v_n\|_2^2 + \frac{(N-2s)e^{(N-2s)t_n}}{2}[v_n]^2\right.\\
&\quad \left.+\frac{N}{2}e^{Nt_n}\|v_n\|_2^2 - \frac{(N+\alpha)e^{(N+\alpha)t_n}}{2}A(v_n)\right)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(I'(\Phi(t_n,v_n))(\Phi(t,v)) + tP(\Phi(t_n,v_n))\right). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，令 $u_n := \Phi(t_n,\ v_n)$。于是，由 (3.2) 和 (3.3)，我们得到

$$I(u_n)\to b; I'(u_n)\to 0 \text{ strongly in the dual space of } H^1(\mathbb{R}^N);\ \text{and } P(u_n)\to 0;$$

当 $n\to\infty$ 时。证明至此完成。 □

接下来，我们将利用上述构造的序列证明弱解的存在性。

引理 3.1.2. 设 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 (f1)、(f2) 和 (f3)，且设 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为引理 *3.1.1* 中构造的序列。那么，下列两种情形之一成立：

(a) 除去一个子列，$u_n\to 0$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛，当 $n\to\infty$ 时；

(b) 存在函数 $u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，使得 $I'(u)=0$，并且存在满足以下条件的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^N$

$$u_n(\cdot - y_n)\rightharpoonup u \quad \textit{weakly in } H^1(\mathbb{R}^N) \quad \textit{as } n\to\infty.$$

证明。 假设 (a) 不成立。那么我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2 > 0. \qquad (3.4)$$

断言 1： $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界。
根据引理 3.1.1，由于$\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$与$\{P(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$均收敛，存在与 n 无关的常数$\beta>0$，使得

$$\begin{aligned}
\beta &\geq I(u_n) - \frac{P(u_n)}{(N+\alpha)} = \left(\frac{\alpha+2}{2(N+\alpha)}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{\alpha+2s}{2(N+\alpha)}\right)[u_n]^2 + \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\|u_n\|_2^2\\
&\geq \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\left(\|\nabla u_n\|_2^2 + [u_n]^2 + \|u_n\|_2^2\right) = \frac{\alpha\|u_n\|^2}{2(N+\alpha)},
\end{aligned}$$

由此证明了断言 1。
命题 2： $\liminf_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |u_n|^p\,dx > 0$ 对所有 $p \in (2, 2^*)$。若可能，假设

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |u_n|^p\,dx = 0 \quad \text{for some } p \in (2, 2^*). \tag{3.5}$$

现在，由于 $\lim_{n\to\infty} P(u_n) = 0$，利用 (3.4)，我们有：

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} A(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\left(\frac{N-2}{N+\alpha}\right) \|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{N+\alpha}\right) [u_n]^2 + \frac{N}{N+\alpha} \|u_n\|_2^2 \right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{N-2}{N+\alpha}\right) \|u_n\|^2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

由 [26, 引理 2.3] 以及 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界性，我们有：

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_p^p &\leq \tilde{C} \left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |u_n|^p\,dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\|\nabla u_n\|_2^2 + \|u_n\|_2^2 \right) \\
&\leq \tilde{C} \left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |u_n|^p\,dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\|\nabla u_n\|_2^2 + \|u_n\|_2^2 + [u_n]^2 \right) \\
&\leq C' \left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |u_n|^p\,dx \right)^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

此外，由 (f2) 以及 F 的连续性，对任意 $\epsilon > 0$ 我们可以找到 $C_\epsilon > 0$ 使得

$$|F(t)|^{\frac{2N}{N+\alpha}} \leq \epsilon(|t|^2 + |t|^{2^*}) + C_\epsilon |t|^p,$$

从而，

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n)|^{\frac{2N}{N+\alpha}}\,dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\epsilon(\|u_n\|_2^2 + \|u_n\|_{2^*}^{2^*}) + C_\epsilon \|u_n\|_p^p \right) \\
&\leq \epsilon C_1 + C_\epsilon C' \liminf_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |u_n|^p\,dx \right)^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，利用 (3.5) 我们得到 $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) = 0$，从而由命题 2.0.1，$\liminf_{n\to\infty} A(u_n) = 0$。这与 (3.6) 矛盾，因此命题 2 必定成立。于是由 [24, 引理 I.1] 我们可以找到一个序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ 以及一个常数 $\delta > 0$使得

$$\int_{B_1(0)} |u_n(x - y_n)|^2 \geq \delta > 0.$$

现在，记 $v_n := u_n(. - y_n)$，显然 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 由于 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的有界性而在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界，因此存在 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，使得（至多取子列后） $v_n \rightharpoonup u$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛。此外，由于 I 连续可微，对任意

$\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$，若记 $\phi_n(x) := \phi(x + y_n)$，则

$$I'(u)(\phi) = \lim_{n\to\infty} I'(v_n)(\phi) = \lim_{n\to\infty} I'(u_n)(\phi_n) = 0,$$

由引理 3.1.1 的性质 2 得出。证明至此完成。 □

3.2 定理 1.2.2 证明的预备知识

本节将利用 Pohožaev 恒等式证明：定理 1.2.1 中得到的、满足附加假设 (f4) 的弱解 f 是方程 (1.1) 的一个基态。

引理 3.2.1。若 $f \in C(\mathbb{R};\ \mathbb{R})$ 满足 *(f1)*，且 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 是(1.1)的弱解，则可以找到一条路径 $\rho \in \Sigma$，使得

- $\rho(1/2) = u$;
- $I(\rho(t)) < I(u)$ 对所有 $t \in [0,1] \setminus \{1/2\}$ 均成立。

证明。定义 $\tilde{\rho}:\ [0,\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ 如下：

$$\tilde{\rho}(t)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{t}), & \text{for } t > 0, \\ 0, & \text{for } t = 0, \end{cases} \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N.$$

显然，$\tilde{\rho}$ 是连续的，并且根据 (5.1)

$$\begin{aligned} I(\tilde{\rho}(t)) &= \frac{t^{N-2}}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{t^{N-2s}}{2}[u]^2 + \frac{t^N}{2}\|u\|_2^2 - \frac{t^{N+\alpha}}{2}A(u) \\ &= \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{(N-2)t^{N+\alpha}}{2(N+\alpha)}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{t^{N-2s}}{2} - \frac{(N-2s)t^{N+\alpha}}{2(N+\alpha)}\right)[u]^2 \\ &\quad + \left(\frac{t^N}{2} - \frac{Nt^{N+\alpha}}{2(N+\alpha)}\right)\|u\|_2^2. \end{aligned}$$

对所有 $t \in [0,\infty)$ 定义 $g(t) := I(\tilde{\rho}(t))$，容易看出，$g$ 的一个非零临界点必须满足：

$$t^{-\alpha-2}\left(\left(\frac{N-2}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{2}\right)t^{2(1-s)}[u]^2 + \frac{N}{2}t^2\|u\|_2^2\right) = K_u,$$

其中 $K_u = \left(\frac{N-2}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{2}\right)[u]^2 + \frac{N}{2}\|u\|_2^2$。

断言：g 具有唯一的非零临界点。
否则，h 必须至少两次取到 K_u，其中

$$h(t) := t^{-\alpha-2}\left(\left(\frac{N-2}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{2}\right)t^{2(1-s)}[u]^2 + \frac{N}{2}t^2\|u\|_2^2\right) \text{ for all } t > 0.$$

因此， h 在 $(0, \infty)$ 中至少有一个临界点。但

$$h'(t) = -\frac{(\alpha+2)(N-2)}{2t^{\alpha+3}} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{(\alpha+2s)(N-2s)}{2t^{\alpha+2s+1}}[u]^2 - \frac{\alpha N}{2t^{\alpha+1}} \|u\|_2^2 < 0 \text{ for all } t > 0.$$

因此， g 在 $(0, \infty)$ 内有唯一的临界点，并且由于 $g'(1) = 0$，我们可以看出，0 和 1 是 g 的仅有临界点。现在， $g(0) = 0$ 且

$$g(1) = \frac{(\alpha+2)}{2(N+\alpha)} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{(\alpha+2s)}{2(N+\alpha)}[u]^2 + \frac{\alpha}{2(N+\alpha)} \|u\|_2^2 > 0,$$

因此 根据 g 的连续性，对于所有 $t \in [0, \infty) \setminus \{1\}$，必有 $g(t) < g(1)$，即 is

$$I(\tilde{\rho}(t)) < I(u) \text{ for all } t \in [0, \infty) \setminus \{1\}. \tag{3.7}$$

利用这一点，我们将构造所需的路径 ρ：$[0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$，如下：

$$\rho(t) = \tilde{\rho}(2t) \text{ for all } t \in [0,1].$$

显然， $\rho(0) = \tilde{\rho}(0) = 0$， $\rho(1/2) = \tilde{\rho}(1) = u$；此外，由 (3.7)，对于所有 $t \in [0,1] \setminus \{1/2\}$，有 $I(\rho(t)) = I(\tilde{\rho}(2t)) < I(u)$，并且

$$\begin{aligned} I(\rho(1)) &= I(\tilde{\rho}(2)) \\ &= 2^{N-1}\left(\left(\frac{(N+\alpha) - 2^{\alpha+2}(N-2)}{4(N+\alpha)}\right)\|\nabla u\|_2^2\right. \\ &\quad + \left(\frac{(N+\alpha) - 2^{\alpha+2s}(N-2s)}{4(N+\alpha)}\right)[u]^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{(N+\alpha) - 2^{\alpha} N}{4(N+\alpha)}\right)\|u\|_2^2\right) < 0. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3.3 定理 1.2.3 证明的预备知识

引理 3.3.1. 设 $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 满足 (f1)，且 $\rho \in \Sigma$。若 $t_0 \in [0,1]$ 且

$$b := I(\rho(t_0)) > I(\rho(t)) \quad \textit{for all } t \in [0,1] \setminus \{t_0\},$$

则 $I'(\rho(t_0)) = 0$。

证明。若可能有， $I'(\rho(t_0)) \neq 0$，那么我们可以找到 ϵ 和 $\delta > 0$ 使得

$$\|I'(w)\| > \frac{8\epsilon}{\delta} \text{ whenever } w \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ satisfies } |I(w) - I(\rho(t_0))| \le 2\epsilon. \tag{3.8}$$

因此，由 [33, 引理 2.3] 我们可以找到一条路径 $\eta \in C([0,1]\times H^1(\mathbb{R}^N), H^1(\mathbb{R}^N))$，使得

1. $\eta(t, w) = w$ 若 $t = 0$ 或 $|I(w) - I(\rho(t_0))| > 2\epsilon$，其中 $t \in [0,1]$ 且 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$；
2. $I(\eta(1, \rho(t_0))) \le I(\rho(t_0)) - \epsilon = b - \epsilon$；并且
3. $I(\eta(t, w))$ 关于变量 t 是非增的，对每个 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 均成立。

现在，由于 $b > 0$ 且 $\rho \in \Sigma$，我们可以找到 $\epsilon > 0$ 使得

$$2\epsilon < b = |I(\rho(t_0))| = |I(0) - I(\rho(t_0))| = |I(\rho(0)) - I(\rho(t_0))|.$$

由 1. 可得 $\eta(1, \rho(0)) = \rho(0) = 0$。此外，由上述性质 1. 和 3.，我们有$I(\eta(1, \rho(1))) \le I(\eta(0, \rho(1))) = I(\rho(1)) < 0$。因此，$\eta(1, \rho(1)) \in \Sigma$。现在，由于$I(\eta(1, \rho(t_0))) \le b - \epsilon < b$，且对于每个 $t \in [0,1] \setminus \{t_0\}$，我们都有

$$I(\eta(1, \rho(t))) \le I(\eta(0, \rho(t))) = I(\rho(t)) < b.$$

因此，由 I 和 η 的连续性可得

$$b > I(\eta(1, \rho(t_0))) = \sup_{\tau\in[0,1]} I(\eta(1, \rho(\tau))) \ge \inf_{\rho\in\Sigma} \sup_{\tau\in[0,1]} I(\rho(\tau)) = b.$$

因此，由反证法可得 $I'(\rho(t_0)) = 0$。 □

为了证明正解的径向对称性，我们回顾极化的概念。对于闭半空间 $H \subset \mathbb{R}^N$ 和函数 $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，我们将其极化 $g^H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$g^H(x) = \begin{cases} \max\{g(x), g(\rho_H(x))\} & \text{if } x \in H, \\ \min\{g(x), g(\rho_H(x))\} & \text{if } x \notin H, \end{cases}$$

其中 ρ_H 表示关于 H边界的反射。此外，我们有以下性质 [27]:

引理 3.3.2。 若 $0 < u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，则 $u^H \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 其中 $\left\|\nabla u^H\right\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2$ 且 $\left\|u^H\right\|_2 \le \|u\|_2$。

引理 3.3.3。 我们有以下极化关系

1. 对于 $\alpha \in (0, N)$，$0 \le w \in L^{\frac{2N}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$，我们有:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}\,dxdy \le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^H(x)w^H(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}\,dxdy, \tag{3.9}$$

当且仅当 $w = w^H$ 或 $w^H = w(\rho_H)$ 时等号成立，因此

$$A(u) \le A(u^H) \text{ for every } u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{3.10}$$

当且仅当 $u^H = u$ 或 $u^H = u$（ρ_H）时取等号。

2. 对于任意 $w \in H^s$（$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$），我们有：

$$[w^H]^2 \le [w]^2.$$

证明。如 [26, 引理 5.3], 中所做，对于任意 $\beta > 0$，我们有：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^\beta}\,dxdy &= \int_H\int_H \frac{(w(x)w(y)+w(\rho_H(x))w(\rho_H(y)))}{|x-y|^\beta}\,dxdy \\
&\quad + \int_H\int_H \frac{w(x)w(\rho_H(y))+w(\rho_H(x))w(y)}{|x-\rho_H(y)|^\beta}\,dxdy \\
&\le \int_H\int_H \frac{(w^H(x)w^H(y)+w^H(\rho_H(x))w^H(\rho_H(y)))}{|x-y|^\beta}\,dxdy \\
&\quad + \int_H\int_H \frac{w^H(x)w^H(\rho_H(y))+w^H(\rho_H(x))w^H(y)}{|x-\rho_H(y)|^\beta}\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^H(x)w^H(y)}{|x-y|^\beta}\,dxdy,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

当且仅当 $w^H = w$ 或 $w^H = w$（ρ_H）时取等号，见 [26, 引理 5.3], 。更确切地说，若 $w^H = w$ （ρ_H），则有：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^\beta} &= \int_H\int_H \frac{(w(x)w(y)+w(\rho_H(x))w(\rho_H(y)))}{|x-y|^\beta}\,dxdy \\
&\quad + \int_H\int_H \frac{w(x)w(\rho_H(y))+w(\rho_H(x))w(y)}{|x-\rho_H(y)|^\beta}\,dxdy \\
&= \int_H\int_H \frac{w(x)w(y)+w^H(x)w^H(y)}{|x-y|^\beta}\,dxdy \\
&\quad + \int_H\int_H \frac{w(x)w^H(y)+w^H(x)w(y)}{|x-\rho_H(y)|^\beta}\,dxdy,
\end{aligned}$$

现在，由于对于每个 $x \in \mathbb{R}^N$，都有 $w^H(\rho_H(x)) = w(\rho_H(\rho_H(x))) = w(x)$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^\beta} &= \int_H\int_H \frac{(w^H(x)w^H(y)+w^H(\rho_H(x))w^H(\rho_H(y)))}{|x-y|^\beta}\,dxdy \\
&\quad + \int_H\int_H \frac{w^H(x)w^H(\rho_H(y))+w^H(\rho_H(x))w^H(y)}{|x-\rho_H(y)|^\beta}\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^H(x)w^H(y)}{|x-y|^\beta}\,dxdy.
\end{aligned}$$

注意，对于任意 $w \in L^{\frac{2N}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$，(3.9) 中的积分都有定义，因此根据 (3.11)，不等式 (3.9) 成立。接下来，由于对于每个 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，我们有：

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u)|^{\frac{2N}{N+\alpha}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^2 + |u|^{2^*} \right) < +\infty,$$

也就是说，根据 (3.9)，$F(u) \in L^{\frac{2N}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A_\alpha F(u)(x) F(u)(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \, dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A_\alpha F(u)^H(x) F(u)^H(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \, dxdy. \quad (3.12)$$

此外，由于 F 是递增函数，并且

$$F(u)^H(x) = \begin{cases} \max\{F(u)(x), F(u)(\rho_H)(x)\} & \text{if } x \in H, \\ \min\{F(u)(x), F(u)(\rho_H)(x)\} & \text{if } x \notin H, \end{cases}$$

考虑所有可能情形，可以推知 $F(u^H) = F(u)^H$。例如，考虑 $x \in H$ 的情形，则

$$F(u)^H(x) = \max\{F(u)(x), F(u)(\rho_H)(x)\},$$

因此，我们有以下两种可能：
或者

$$F(u)^H(x) = F(u)(x) \Rightarrow F(u)(x) \geq F(u)(\rho_H(x)) \Rightarrow u(x) \geq u(\rho_H(x)),$$

由于 F 是递增函数。因此，在这种情况下，$u^H(x) = u(x)$，从而$F(u^H) = F(u) = F(u)^H$。
Or

$$F(u)^H(x) = F(u)(\rho_H(x)) \Rightarrow F(u)(x) \leq F(u)(\rho_H(x)) \Rightarrow u(x) \leq u(\rho_H(x)),$$

由于 F 是递增函数。因此，在这种情况下 $u^H(x) = u(\rho_H(x))$，从而$F(u^H) = F(u(\rho_H)) = F(u)^H$。类似地，可以研究 $x \notin H$ 的情形。于是 (3.12) 变为：

$$\begin{aligned} A(u) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A_\alpha F(u)^H(x) F(u)^H(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A_\alpha F(u^H)(x) F(u^H)(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} \, dxdy = A(u^H) \text{ for every } u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

接下来我们 将看到Gagliardo 半范数。假设 $w \in H^s(\mathbb{R}^N)$，则由(3.11)我们有 e:

$$\begin{aligned}
[w^H]^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w^H(x)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w^H(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy \\
&\quad -2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^H(x)w^H(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w^H(x)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w^H(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy \\
&\quad -2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy,
\end{aligned}$$

由于根据 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式（命题 2.0.1），上述积分是有定义的，因此由引理 3.3.2

$$\begin{aligned}
[w^H]^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|z|^{N+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w^H(y+z)|^2 dy\right) dz + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|z|^{N+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w^H(x+z)|^2 dy\right) dz \\
&\quad -2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\left\|w^H\right\|_2^2}{|z|^{N+2s}} dz - 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\|w\|_2^2}{|z|^{N+2s}} dz - 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w(x)w(y)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = [w]^2.
\end{aligned}$$

□

引理 3.3.4。假设 $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 是一个非负函数，则存在$x_0 \in \mathbb{R}^N$ 以及一个非递增函数 $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得 $u(x) = v(|x-x_0|)$几乎处处成立，当且仅当对于每个闭半空间 $H \subset \mathbb{R}^N$，或者 $u^H = u$，或者 $u^H = u(\rho_H)$。

证明。设 $0 \leq u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 满足：对于每个闭半空间 H，或者 $u^H = u$，或者 $u^H = u(\rho_H)$，则由 [26, 引理 5.4] 存在 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 以及一个非递增函数$v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处满足 $u(x) = v(|x-x_0|)$。反之，对于一个闭半空间 $H \subset \mathbb{R}^N$，若可能，存在 $x, y \in \mathbb{R}^N$，使得 $u^H(x) \neq u(\rho_H(x))$，且 $u^H(y) \neq uy$。于是我们得到以下几种情况：

情形 1：$x_0 \in H$。

现在，若 $y \in H$，则必有 $u(\rho_H(y)) > u(y)$，因此 $|\rho_H(y) - x_0| < |y - x_0|$，因为 v 是非增的。但是，由于 y，$x_0 \in H$，我们有 $|y - x_0| < |\rho_H(y) - x_0|$。同理，若 $y \notin H$，则得到 $|\rho_H(y) - x_0| > |y - x_0|$；但由于 x_0，$\rho_H(y) \in H$，便得到矛盾。因此 $u^H = u$。

情形 2：$x_0 \notin H$。

现在，如果 $x \in H$，那么我们必有 $u(\rho_H(x)) < u(x)$，从而 $|\rho_H(x) - x_0| > |x - x_0|$，因为 v 是非增的。但是，由于 $\rho_H(x)\ x_0 \notin H$，我们有 $|\rho_H(x) - x_0| < |x - x_0|$。类似地，如果 $x \notin H$，我们得到 $|\rho_H(x) - x_0| < |x - x_0|$，但由于 x_0，$x \notin H$我们得出矛盾。因此，$u^H = u(\rho_H)$。 □

4 主要结果的证明

4.1 定理 1.2.1 的证明

如果引理 3.1.2 的 (a) 成立，那么由 I 的连续性，我们得到 $b = 0$，这与引理 3.1.1 矛盾。因此，(a) 不成立。于是，引理 3.1.2 的 (b) 成立，这意味着存在 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$，使得 $I'(u) = 0$，因此 u 是方程 (1.1) 的弱解。证明完毕。

4.2 定理 1.2.2 的证明

根据第 3 节，我们可以找到一个 Pohožaev-Palais-Smale 序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其位于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的 b 水平，并且满足 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，使得 u 是方程 (1.1) 的弱解，且 $u_n \rightharpoonup u$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛。因此，由 (5.1) 可得：

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u) - \frac{P(u)}{N+\alpha} \\ &= \left(\frac{\alpha+2}{2(N+\alpha)}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{\alpha+2s}{2(N+\alpha)}\right)[u]^2 + \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\|u\|_2^2 \\ &\le \liminf_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\alpha+2}{2(N+\alpha)}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{\alpha+2s}{2(N+\alpha)}\right)[u_n]^2 + \frac{\alpha}{2(N+\alpha)}\|u_n\|_2^2\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty}\left(I(u_n) + \frac{P(u_n)}{N+\alpha}\right) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = b. \end{aligned}$$

此外，

$$I(u) \ge m := \inf\{I(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ is a weak solution of } (1.1)\},$$

因此，

$$m \le I(u) \le b. \tag{4.1}$$

现在，设 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 满足 v 是 (1.1) 的解，且 $I(v) \le I(u)$。由引理 3.2.1，我们可以找到 $\rho \in \Sigma$，使得 $\rho(1/2) = v$，并且对于所有 $t \in [0,1]\setminus\{1/2\}$，$I(\rho(t)) < I(v)$。因此，

$$I(u) \le b \le I(\rho(t)) \le I(v) \le I(u),$$

因此，对于每个满足 (1.1) 的 v，都有 $I(v) = I(u) = b$。因此，根据m 的定义和 (4.1)，我们有 $m = I(u) = b$，这意味着 u 是基态解。 □

4.3 定理 1.2.3 的证明

利用上述极化性质，我们来研究 (1.1) 的正解的对称性。

定理 1.2.3 的证明： 不失一般性，设 $f(x) \geq 0$ 对所有 $x \in (0,\infty)$ 都成立。由于 u 是 (1.1) 的弱解，根据引理 3.2.1，可找到一条路径 $\tilde{\sigma} \in \Sigma$，使得 $\tilde{\sigma}(1/2) = u$，并且对所有 $t \in [0,1] \setminus \{1/2\}$，都有 $I(\tilde{\sigma}(t)) < I(u)$。取 $\sigma = |\tilde{\sigma}|$，可得 $\sigma \in \Sigma$，满足 $\sigma(1/2) = u$，且对所有 $t \in [0,1]$，都有 $\sigma(t) \geq 0$。现在，对于 $\mathbb{R}^N$的一个闭半空间H，我们定义 $\sigma^H\colon [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$，使得

$$\sigma^H(z) = \sigma(z)^H \text{ for all } z \in [0,1].$$

显然，由 σ的连续性和极化可知，$\sigma^H \in C([0,1]; H^1(\mathbb{R}^N))$。现在，如引理 3.3.3 的证明中所述，对每个 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$，都有 $F(w)^H = F(w^H)$。因此，由引理 3.3.2 和引理 3.3.3 可得:

$$\begin{aligned} I(\sigma^H(z)) &\leq \frac{\|\nabla\sigma(z)\|_2^2}{2} + \frac{\|\sigma(z)\|_2^2}{2} + \frac{[\sigma(z)]^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(\sigma(z))^H) F(\sigma(z))^H \, dx \\ &\leq \frac{\|\nabla\sigma(z)\|_2^2}{2} + \frac{\|\sigma(z)\|_2^2}{2} + \frac{[\sigma(z)]^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(\sigma(z))) F(\sigma(z)) \, dx \\ &= I(\sigma(z)) \text{ for all } z \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

由此可得 $\sigma^H \in \Sigma$，进而

$$b \leq \max_{z\in[0,1]} I(\sigma^H(z)).$$

此外，由于 $I(|v|) \leq I(v)$，对所有 $z \in [0,1]$，我们有:

$$I(\sigma^H(z)) \leq I(\sigma(z)) = I(|\tilde{\sigma}(z)|) \leq I(\tilde{\sigma}(z)) \leq I(u) = b,$$

因此，$\max_{z\in[0,1]} I(\sigma^H(z)) \leq b$，进而 $b = \max_{z\in[0,1]} I(\sigma^H(z))$。现在，由于 u 是一个基态解，对所有 $z \in [0,1]$

$$I(\sigma^H(1/2)) = I(u^H) \geq I(u) \geq I(\tilde{\sigma}(z)) \geq I(|\tilde{\sigma}(z)|) = I(\sigma(z)) \geq I(\sigma^H(z)).$$

因此,

$$I(u) = b = \max_{z\in[0,1]} I(\sigma^H(z)) = I(\sigma^H(1/2)) = I(u^H).$$

由引理 3.3.2 和引理 3.3.3 可知，$I(u) = I(u^H)$ 意味着要么 $F(u)^H = F(u)$，要么 $F(u)^H = F(u)(\rho_H)$。现在，如果 $F(u)^H = F(u)$，那么对于所有 $x \in H$，我们有

$F(u)(x) \geq F(u)(\rho_H(x))$，因此

$$\int_{u(\rho_H(x))}^{u(x)} f(s)ds = F(u)(x) - F(u)(\rho_H(x)) \geq 0,$$

这意味着，对于所有 $x \in H$，要么 $u(x) \geq u(\rho_H(x))$，要么 $f(s) = 0$对于所有 $s \in [u(x)\ u(\rho_H(x))]$。因此，对于所有 $x \in H$，有 $f(u^H)(x) = f(u)(x)$。类似地，可以考察 $x \in \mathbb{R}^N \setminus H$的情形，并推得 $f(u^H) = f(u)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中。现在，由于对于所有 $z \in [0,1] \setminus \{1/2\}$，$b = I(u^H) = I(\sigma^H(1/2)) > I(\sigma^H(z))$，我们可以利用引理 3.3.1 得出，$u^H$ 是一个弱解

$$-\Delta u^H + (-\Delta)^s u^H + u^H = (I_\alpha * F(u^H))f(u^H) = (I_\alpha * F(u))f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

并且由于 u 满足方程 (1.1)，我们注意到 $u^H = u$。类似地，对于 $F(u)^H = F(u)(\rho_H)$ 的情形，可以推得 $u^H = u(\rho_H)$。由于 H是$\mathbb{R}^N$的任意闭半空间，根据引理 3.3.4，u 是径向对称的。□

5 附录：正则性与 Pohožaev 恒等式

本节证明如下所述的正则性结果和 Pohožaev 恒等式:

定理 5.0.1. 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，$u \neq 0$ 是 (1.1) 的弱解，其中 f 满足(f1)–(f3)。则对所有 $2 \leq q \leq \infty$，有 $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$。此外，对所有 $q \geq 2$，有 $u \in W^{2,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$，并且

$$u \in C^{1,\delta}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad \textit{for every } \delta \in (0,1).$$

利用这一正则性结果，我们进而得到以下 Pohožaev 恒等式。

定理 5.0.2. 若 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是满足 f 满足 (f1)–(f4) 的 (1.1) 的弱解，则它满足

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{2}\right)[u]^2 + \frac{N}{2}\|u\|_2^2 = \left(\frac{N+\alpha}{2}\right)A(u). \tag{5.1}$$

关于正则性结果，借助 [19] 的引理 3.5，我们可以参考 [27] 的工作，得到解的高阶可积性。具体而言，有如下结果:

引理 5.0.1. 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是满足条件 *(f1)-(f3)* 的 (1.1) 的弱解，其中 f 。则对于所有 $q \in [2, \frac{N}{\alpha}2^*)$，都有 $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ 。

为了证明上述结果，我们需要以下命题，该命题引自 [21,命题 2.1]。

proposition 5.0.1. 若 $H,\ \ K \in L^{\frac{2N}{\alpha}}(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{2N}{\alpha+2}}(\mathbb{R}^N)$ 且 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是解

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + u = (I_\alpha * Hu)K \ \ in\ \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

于是 $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ 对所有 $p \in [2, \frac{N}{\alpha}2^*)$均成立。

利用上述命题以及 F 的增长性质，我们可以如下证明引理 5.0.1：

引理 5.0.1 的证明： 定义 $H, K:\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 如下：

$$H(x) := \frac{F(u(x))}{u(x)} \text{ and } K(x) := f(u(x)).$$

由 (f1) 可得：

$$|H(x)| \le C\left(\frac{N}{N+\alpha}|u(x)|^{\frac{\alpha}{N}} + \frac{N-2}{N+\alpha}|u(x)|^{\frac{\alpha+2}{N-2}}\right),$$

and

$$|K(x)| \le C\left(|u(x)|^{\frac{\alpha}{N}} + |u(x)|^{\frac{\alpha+2}{N-2}}\right),$$

因此 $H, K \in L^{\frac{2N}{\alpha}}(\mathbb{R}^N) + L^{\frac{2N}{\alpha+2}}(\mathbb{R}^N)$。应用命题 5.0.1，即完成证明。□

定理 5.0.1 的证明： 设 $0 \neq u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (1.1) 的一个弱解，则由 (f1) 可得：

$$\begin{aligned}(I_\alpha * F(u))(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A_\alpha F(u(x-y))}{|y|^{N-\alpha}}dy \\ &\le C_\alpha\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x-y)|^{\frac{N+\alpha}{N}}}{|y|^{N-\alpha}}dy + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x-y)|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}}{|y|^{N-\alpha}}dy\right).\end{aligned}$$

现在，对于 $\beta \in \{\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}\}$，由半空间 H¨older 不等式和引理 5.0.1 可得：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x-y)|^\beta}{|y|^{N-\alpha}}dy &= \int_{B_1} \frac{|u(x-y)|^\beta}{|y|^{N-\alpha}}dy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \frac{|u(x-y)|^\beta}{|y|^{N-\alpha}}dy \\ &\le C_1\left(\int_{B_1} \frac{dy}{|y|^{\frac{(N-\alpha)\gamma}{\gamma-1}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + C_2\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \frac{dy}{|y|^{2N}}\right)^{\frac{N-\alpha}{2N}} < M,\end{aligned}$$

对某个 $M > 0$，只要 $1 < \frac{N}{\alpha} < \gamma < \frac{2^*N}{\alpha\beta}$ 成立即可。因此，

$$(I_\alpha * F(u)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{5.3}$$

因此，存在某个常数 $M_1 > 0$，使得 $(I_\alpha * F(u))(x) \le M_1$ 对每个$x \in \mathbb{R}^N$都成立。由 (f1) 可得：

$$|(I_\alpha * F(u))f(u)| \le M_1 C\left(|u|^{\frac{\alpha}{N}} + |u|^{\frac{\alpha+2}{N-2}}\right).$$

现在，如果 $|u(x)| \le 1$，则有 $|u|^{\frac{\alpha}{N}} + |u|^{\frac{\alpha+2}{N-2}} \le 2 \le 2(1 + |u|^{\frac{N+2}{N-2}})$；否则 $|u(x)| > 1$，从而$|u|^{\frac{\alpha}{N}} + |u|^{\frac{\alpha+2}{N-2}} < 2|u|^{\frac{N+2}{N-2}} \le 2(1 + |u|^{\frac{N+2}{N-2}})$。因此

$$|(I_\alpha * F(u))f(u)| \le 2M_1 C(1 + |u|^{2^*-1}) = C_1(1 + |u|^{2^*-1}). \tag{5.4}$$

现在，受 [32], 的启发，我们证明如下的 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 估计：对于 $\beta > 1$ 和 $k > 0$，定义：

$$\Phi_k(t) := \begin{cases} -\beta k^{\beta-1}(t+k) + k^\beta & \text{for } t \le k, \\ |t|^\beta & \text{for } -k < t \le k, \\ \beta k^{\beta-1}(t-k) + k^\beta & \text{for } k < t. \end{cases} \tag{5.5}$$

显然，Φ 是凸的、Lipschitz 的，并满足以下条件：

$$\Phi_k(t) \le |t|^\beta; \ \ |\Phi_k'(t)| \le \beta|t|^{\beta-1}; \ \ \Phi_k(t) \le t\Phi_k'(t) \le \beta\Phi_k(t). \tag{5.6}$$

现在，对于任意 $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$，根据 Φ_k 的凸性，我们有：

$$\begin{aligned} \ll \Phi_k(u), \psi \gg &= \frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\Phi_k(u(x)) - \Phi_k(u(y)))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &\le \frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(\psi(x)\Phi_k'(u(x)) - \psi(y)\Phi_k'(u(y)))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &= \ll u, \psi\Phi_k'(u) \gg, \end{aligned} \tag{5.7}$$

由于 $\psi(x)\Phi_k'(u(x))(u(x) - u(y)) \ge \psi(x)(\Phi_k(u(x)) - \Phi_k(u(y)))$（参见 [10, 引理 A.1]）。在 (5.7) 中用 $\Phi_k(u)$ 替换 ψ，根据 [15, 定理 6.5]，存在一个常数 $C_2 > 0$

$$\|\Phi_k(u)\|_{2_s^*}^2 \le C_2[\Phi_k(u)]^2 = C_2 \ll \Phi_k(u), \Phi_k(u) \gg \le \ll u, \Phi_k(u)\Phi_k'(u) \gg, \tag{5.8}$$

此外，由于 $\Phi_K(t)\Phi_K''(t) \ge 0$几乎处处成立，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(\Phi_k(u)\Phi_k'(u))\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_k'(u)^2|\nabla u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_k(u)\Phi_k''(u)|\nabla u|^2\,dx \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_k'(u)^2|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

因此，由 (5.9)、(5.8)、(5.6)，并在 (2.1) 中取 $\Phi_k'(u)\Phi_k(u)$ 为测试函数，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 |\Phi_k'(u)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_k(u)|^2\,dx \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 |\Phi_k'(u)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} u\Phi_k'(u)\Phi_k(u)\,dx \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(\Phi_k(u)\Phi_k'(u))\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} u\Phi_k'(u)\Phi_k(u)\,dx \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(u)) f(u)\Phi_k(u)\Phi_k'(u)\,dx - \ll u, \Phi_k'(u)\Phi_k(u) \gg \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(u)) f(u)\Phi_k(u)\Phi_k'(u)\,dx - \|\Phi_k(u)\|_{2_s^*}^2 \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(u)) f(u)\Phi_k(u)\Phi_k'(u)\,dx. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

现在，由连续嵌入 $H^1(\mathbb{R}^N) \to L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$、(5.4)、(5.6) 和 (5.10)，存在 $C_3 > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
\|\Phi_k(u)\|_{2^*}^2 \le& C_3 \left(\|\nabla \Phi_k(u)\|_2^2 + \|\Phi_k\|_2^2 \right) = C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_k'(u)|^2 |\nabla u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_k(u)|^2\,dx \right) \\
\le& C_3 \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * F(u)) f(u)\Phi_k(u)\Phi_k'(u)\,dx \\
\le& C_3 C_1 \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |u|^{2^*-1}) |\Phi_k(u)| |\Phi_k'(u)|\,dx \qquad (5.11) \\
\le& C_1 C_3 \beta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\beta-1}\,dx + C_1 C_3 \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-2}\,dx, \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

here

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-2}\,dx &= \int_{\{|u|\le k\}} |\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-2}\,dx + \int_{\{|u|>k\}} |\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-2}\,dx \\
&\le \int_{\{|u|\le k\}} |u|^{2\beta+2^*-2}\,dx + C_4 \int_{\{|u|>k\}} |u|^2 |u|^{2^*-2}\,dx \\
&\le k^{2\beta-2} \|u\|_{2^*}^{2^*} + C_4 \|u\|_{2^*}^{2^*} < +\infty,
\end{aligned}$$

由于 Φ_k 是关于 $|t| > k$的线性函数。因此，取 $\beta = \beta_1 := \frac{2^*+1}{2}$，(5.11) 右端有良好定义。现在，对任意 $R > 0$，由 H¨older 不等式

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-2}\,dx &= \int_{|u|\le R} \frac{|\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-1}}{|u|}\,dx + \int_{\{|u|>R\}} |\Phi_k(u)|^2 |u|^{2^*-2}\,dx \\
&\le R^{2^*-1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_k(u)^2}{|u|}\,dx \\
&\quad + \left(\int_{\{|u|>R\}} |\Phi_k(u)|^{2^*}\,dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\{|u|>R\}} |u|^{2^*}\,dx \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}},
\end{aligned}$$

取足够大的 $R>0$，使得

$$\left(\int_{\{|u|>R\}}|u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}\leq\frac{1}{2\beta C_1C_3},$$

由于 $\Phi_k(u)\leq|u|^{\beta_1}$ 根据 (5.11)，我们得到：

$$\|\Phi_k(u)\|_{2^*}^2\leq 2C_1C_3\beta\left(\|u\|_{2^*}^{2^*}+R^{2^*-1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta_1-1}\,dx\right)=2C_1C_3\beta(1+R^{2^*-1})\,\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

现在，取 $k\to\infty$，显然，$\Phi_k(t)\to|t|^{\beta_1}$，因此由 Fatou引理，我们有：

$$\|u\|_{2^*\beta_1}^{2\beta_1}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta_1}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\leq 2C_1C_3\beta(1+R^{2^*-1})\,\|u\|_{2^*}^{2^*}<+\infty.$$

因此

$$u\in L^{2^*\beta_1}(\mathbb{R}^N).$$

现在，假设 $\beta>\beta_1$，则在 (5.11) 中使用 $\Phi_k(u)\leq|u|^{\beta}$，我们有：

$$\|\Phi_k(u)\|_{2^*}^2\leq C_1C_3\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta-1}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right).\tag{5.13}$$

取 $A=\frac{2(\beta-1)}{2^*-1}>1$ 和 $B=\frac{2(\beta-1)}{2(\beta-1)-2^*+1}>1$；并使用 Young不等式，我们得到：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta-1}\,dx&=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{2^*}{A}}|u|^{2\beta-1-\frac{2^*}{A}}\,dx\\&\leq\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left(|u|^{\frac{2^*}{A}}\right)^A}{A}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left(|u|^{2\beta-2-\frac{2^*}{A}}\right)^B}{B}\,dx\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2^*}}{A}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2\beta+2^*-2}}{B}\,dx\\&\leq\|u\|_{2^*}^{2^*}+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx,\end{aligned}$$

因此 (5.13) 变为：

$$\|\Phi_k(u)\|_{2^*}^2\leq C_1C_3\beta\left(\|u\|_{2^*}^{2^*}+2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right)\leq C_4\beta\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right),\tag{5.14}$$

于是，根据 Fatou 引理

$$\|u\|_{2^*\beta}^{2\beta}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\leq C_4\beta\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right),$$

因此

$$\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta}\right)^{\frac{1}{2^*(\beta-1)}}\,dx\leq(C_5\beta)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*(\beta-1)}}.\tag{5.15}$$

令我们 定义序列 $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $2\beta_{n+1}+2^*-2=2^*\beta_n$，这意味着 t

$$\beta_{n+1}-1=\left(\frac{2^*}{2}\right)^n(\beta_1-1),$$

其中 $\beta_1=\frac{2^*+1}{2}$。在 (5.15) 中用 β_{n+1} 替换 β，得到

$$\begin{aligned}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta_{n+1}}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*(\beta_{n+1}-1)}} &\le (C_5\beta_{n+1})^{\frac{1}{2(\beta_{n+1}-1)}}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta_n}\,dx\right)^{\frac{1}{2(\beta_{n+1}-1)}}\\ &= (C_5\beta_{n+1})^{\frac{1}{2(\beta_{n+1}-1)}}\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta_n}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*(\beta_n-1)}}.\end{aligned}$$

记 $\tau_n':=C_5\beta_n$ 和 $A_n:=\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*\beta_n}\right)^{2^*\ \ \frac{1}{(\beta_n-1)}}$，得到:

$$\begin{aligned}A_{n+1}\le(\tau_{n+1}')^{\frac{1}{2(\beta_{n+1}-1)}}A_n &\le (\tau_{n+1}')^{\frac{1}{2(\beta_{n+1}-1)}}(\tau_n')^{\frac{1}{2(\beta_n-1)}}A_{n-1}\\ &\cdots\le\prod_{i=2}^{n+1}\gamma_i^{\frac{1}{2(\beta_i-1)}}A_1\le C_0A_1<+\infty,\end{aligned}$$

因为 $u\in L^{2^*\beta_1}(\mathbb{R}^N)$，且 $\frac{1}{\beta_i-1}=\left(\frac{2}{2^*}\right)\ \frac{1}{(\beta_1-1)}<\frac{1}{2}$。由此可得 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

接下来我们将证明，对所有 $q\ge 2$， $u\in L^q(\mathbb{R}^N)$ 也成立。回顾 (5.11)，由于 $\Phi_k(u)\trianglelefteq|u|^\beta$，因此如上所述，利用 Young不等式可得:

$$\begin{aligned}\|\Phi_k(u)\|_{2^*}^2 &\le C_1C_3\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta-1}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right)\\ &= C_1C_3\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{2^*}{A}}|u|^{2\beta-1-\frac{2^*}{A}}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right)\\ &\le C_1C_3\beta\left(\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx+\frac{1}{B}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right)\\ &\le C_6\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right),\end{aligned}$$

因此，由 Fatou引理

$$\|u\|_{2^*\beta}^{2^*\beta}\le\bar{C}_\beta\left(1+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx\right)^{\frac{2^*}{2}}\ \text{for all }\beta>1. \tag{5.16}$$

现在，令 $\gamma_0:=\frac{N}{\alpha}2^*$，那么根据引理 5.0.1，我们知道对所有 $q\in[2,\gamma_0)$， $u\in L^q(\mathbb{R}^N)$ 成立，因此

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx<+\infty\ \text{for all}\ 1<\beta<\frac{\gamma_0+2-2^*}{2},$$

因此由 (5.16)，对所有 $q\in\left(2^*,2^*\left(\frac{\gamma_0+2-2^*}{2}\right)\right)$，有 $u\in L^q(\mathbb{R}^N)$。取 $\gamma_1:=2^*\left(\frac{\gamma_0+2-2^*}{2}\right)>\gamma_0$，现在我们知道对所有 $q\in[2,\gamma_1)$，有 $u\in L^q(\mathbb{R}^N)$。以类似的方式继续，现在

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\beta+2^*-2}\,dx<+\infty\ \text{for all}\ 1<\beta<\frac{\gamma_1+2-2^*}{2},$$

因此由 (5.16)，对所有 $q \in [2, \gamma_2)$，有 $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$，其中 $\gamma_2 = 2^* \left(\frac{\gamma_1+2-2^*}{2}\right) > \gamma_1$。构造序列 $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 γ_0 如上所定义且 $\gamma_{n+1} = 2^* \left(\frac{\gamma_n+2-2^*}{2}\right)$；并如上所述迭代，我们得到对所有 $q \in [2, \gamma_n)$，有 $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$，且 $n \in \mathbb{N}$。由于 $\gamma_n \to \infty$，我们得到

$$u \in L^q(\mathbb{R}^N) \text{ for all } q \geq 2. \tag{5.17}$$

现在讨论索伯列夫正则性。按照 [21, 定理 1.2] 的证明，我们将问题改写为：

$$-\Delta u + \mathcal{L}_1(u) + u = (I_\alpha * F(u))f(u) - \mathcal{L}_2(u),$$

其中

$$\mathcal{L}_1(u) := C(N,s)P.V \int_{|x-y|\leq B} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy;$$

and

$$\mathcal{L}_2(u) := C(N,s)P.V \int_{|x-y|> B} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy,$$

对于某个固定的 $B > 0$。定义 $g := (I_\alpha * F(u))f(u) - \mathcal{L}_2(u)$，因为

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(I_\alpha * F(u))f(u)|^q \, dx \leq M_1 C \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{\frac{q\alpha}{N}} + |u|^{\frac{q(\alpha+2)}{N-2}} \right) dx < +\infty \text{ for all } q \geq \frac{2N}{\alpha},$$

并且，根据 Jensen 不等式，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{L}_2(u)|^q \, dx &\leq C(N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{|x-y|>B} \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{q(N+2s)}} dy \right) dx \\
&\leq 2C(N,q) \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q \left(\int_{|x-y|>B} \frac{1}{|x-y|^{q(N+2s)}} dy \right) dx \\
&\leq C(B,N,q) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx < +\infty \text{ for all } q \geq \frac{2N}{\alpha},
\end{aligned}$$

因此，由 [18, 定理 3.1.20]，取 Ω_I 为以原点为中心、半径为 B 的球，并取一个固定的有界区域 Ω，可得 $u \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 对所有 $q \geq \frac{2N}{\alpha}$ 成立，进而在 $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中对所有 $q \geq 2$ 成立。进一步利用 Sobolev 不等式，我们得到 $u \in C^{1,\delta}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$，对所有 $\delta \in (0, 1)$ 成立。□

现在我们可以仿照 [4, 定理 2.5] 的思路，给出 Pohožaev 恒等式的证明。

定理 5.0.2 的证明： 令 $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ 满足 $0 \leq \psi \leq 1$ 属于 $\mathbb{R}^N$，$\psi \equiv 1$ 对于 $|x| \leq 1$，且 $\psi(x) \equiv 0$ 对于 $|x| \geq 2$。我们定义 $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$，对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $\lambda > 0$ 均成立。注意，对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $\lambda > 0$，我们得到

$$0 \leq \psi_\lambda(x) \leq 1 \text{ and } |x||\nabla \psi_\lambda(x)| \leq C, \tag{5.18}$$

其中 常数 $C > 0$ 与 λ无关。此外，我们将 C^1 向量场定义为

$$\Psi_\lambda(x) = \psi_\lambda(x)x. \tag{5.19}$$

现在利用 (5.18)，我们得出

$$|\Psi_\lambda(x) - \Psi_\lambda(y)| \le C|x - y|,$$

对于某个与 λ 无关的常数 $C > 0$，因此 $\Psi_\lambda \in C^0_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$。然后取测试函数 $\varphi = \psi_\lambda \sum_{j=1} x_j D_j u$ ，其中 D_i，差商算子定义如下:

$$D_i v(x) = \frac{v(x + he_i) - v(x)}{h},$$

其中 $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ 是沿 x_i 坐标方向的单位向量，在 (2.1) 中，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))\varphi(x) - \varphi(y)) \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} ((I_\alpha * F(u))f(u) - u)\varphi \, dx, \tag{5.20}$$

其中，为简便起见，我们令 $d\mu = \frac{dxdy}{|x-y|^{N+2s}}$,并省略常数 $C(N, s)$。我们注意到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^{n} \psi_\lambda x_j D_j u \right) dx \\ &:= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{5.21}$$

其中

$$I_1 = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_i} x_j D_j u \, dx,$$

$$I_2 = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi_\lambda D_j(u)\delta_{ij} \, dx,$$

and

$$I_3 = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (D_j u)}{\partial x_i} \psi_\lambda x_j \, dx := I_{3,1} - I_{3,2},$$

其中

$$I_{3,1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_j(|\nabla u|^2)\psi_\lambda x_j \, dx,$$

and

$$I_{3,2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} (D_j(|\nabla u|^2) - \nabla u \cdot D_j(\nabla u))\psi_\lambda x_j \, dx.$$

这里 δ_{ij}其中， $\delta_{ij}=1$ 为克罗内克符号，即当 $i=j$ 时取 $\delta_{ij}=1$ ，否则取 0。此外 ,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\mu\\
=&\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(\psi_\lambda(x)x_jD_ju(x)-\psi_\lambda(y)y_jD_ju(y))\,d\mu\\
:=&\ J_1+J_2,
\end{aligned}\tag{5.22}$$

其中

$$J_1=\beta\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(\psi_\lambda(x)x_j-\psi_\lambda(y)y_j)D_ju(x)\,d\mu,$$

and

$$\begin{aligned}
J_2=&\beta\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(D_ju(x)-D_ju(y))\psi_\lambda(y)y_j\,d\mu\\
=&\beta\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(D_ju(x)-D_ju(y))\psi_\lambda(x)x_j\,d\mu\\
=&J_{2,1}-J_{2,2},
\end{aligned}$$

其中

$$J_{2,1}=\frac{\beta}{p}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}D_j(|u(x)-u(y)|^2)\psi_\lambda(x)x_j\,d\mu,$$

and

$$J_{2,2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Big(D_j(|u(x)-u(y)|^2)-2(u(x)-u(y))(D_ju(x)-D_ju(y))\Big)\psi_\lambda(x)x_j\,d\mu.$$

因此，考虑到 (5.21) 和 (5.22)，方程 (5.20) 化简为

$$I_1+I_2+I_{3,1}-I_{3,2}+(J_1+J_{2,1}-J_{2,2})=L,\tag{5.23}$$

其中

$$L=\int\limits_{\mathbb{R}^N}((I_\alpha*F(u))f(u)-u)\Big(\sum_{j=1}^{N}\psi_\lambda x_jD_ju\Big)\,dx.$$

现在，对 I_1, I_2, $I_{3,1}$, J_1 和 $J_{2,1}$ 的估计完全沿用 [4, 定理 2.5] 的证明思路，由此得到

$$\lim_{h\to 0} I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla \psi_\lambda)(x \cdot \nabla u)\, dx. \tag{5.24}$$

$$\lim_{h\to 0} I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \psi_\lambda \, dx, \tag{5.25}$$

$$\lim_{h\to 0} I_{3,1} = -\frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \psi_\lambda \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \nabla \psi_\lambda \cdot x \, dx, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} J_1 = &-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{div} \Psi_\lambda(x) \, dxdy \\ &+ \frac{(N+2s)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \frac{(x-y)\cdot(\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(y))}{|x-y|^{N+2s+2}} \, dxdy, \end{aligned} \tag{5.27}$$

and

$$\lim_{h\to 0} J_{2,1} = -\frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \psi_\lambda(x) \, d\mu - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \nabla \psi_\lambda(x) \cdot x \, d\mu. \tag{5.28}$$

可以注意到，为了估计 J_1 in[4], ，假设解属于$C^{0,\ell}(\mathbb{R}^N)$，其中某个 $\ell > s$。然而，紧支撑函数ψ的存在，使我们也可以将所有结果推广到 $u \in C^{0,\ell}_{loc}(\mathbb{R}^N)$（进而推广到 $u \in C^{1,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$）（另见 [2]中第2010页（3.3）之后固定适当 $R > 0$时的 $B_R(0) \times B_R(0)$论证）。

对$I_{3,2} + J_{2,2}$的估计：利用映射 $t \mapsto |t|^2$的凸性，我们可推得

$$D_j(|\nabla u|^2) - 2\nabla u \cdot D_j(\nabla u) \geq 0, \tag{5.29}$$

and

$$D_j(|u(x)-u(y)|)^2 - 2(u(x)-u(y))(D_j u(x) - D_j u(y)) \geq 0, \tag{5.30}$$

对每个 $x, y \in \mathbb{R}^N$。我们注意到，对于任意 $K \in L^1(\mathbb{R}^N)$，都有

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_j K \, dx = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^N} (K(x+he_j) - K(x)) \, dx = \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \, dx \right) = 0. \tag{5.31}$$

利用 (5.31)，得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_j|\nabla u|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} D_j((I_\alpha * F(u))F(u))\,dx = 0. \tag{5.32}$$

此外，仿照二重积分情形中 (5.31) 的论证，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} D_j(|u(x)-u(y)|^2)\,d\mu = 0, \tag{5.33}$$

在 (2.1) 中取 $\phi = \sum_{j=1}^N D_j u$ 为测试函数，利用 (5.3)、(f4)，并结合估计 (5.29)、(5.30)、(5.32) 和 (5.33)，可得

$$\begin{aligned}
&\left|I_{3,2}+J_{2,2}\right| \\
\le& C\sum_{j=1}^N\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Big(D_j(|\nabla u|^2)-2\nabla u\cdot\nabla(D_j u)\Big)dx\right. \\
&\left.+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(D_j(|u(x)-u(y)|^2)-2(u(x)-u(y))(D_j u(x)-D_j u(y))\Big)\,d\mu\right) \\
=& 2C\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}(D_j(I_\alpha * F(u))F(u)-(I_\alpha * F(u))f(u)D_j u)\,dx \\
\le& 2\|I_\alpha * F(u)\|_\infty C\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}(D_j F(u)-f(u)D_j u)\,dx, \\
=& 2C\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}(f(\tilde{u})-f(u))D_j u\,dx,
\end{aligned}$$

其中 $C = C(\lambda, u, \alpha) > 0$ 是一个常数，$\tilde{u}$ 介于 u 和 u之间（$\cdot + he_j$）。现在对上述估计应用 Hölder不等式，可得

$$\left|I_{3,2}+J_{2,2}\right| \le C\sum_{j=1}^N \|f(\tilde{u})-f(u)\|_2\|D_j u\|_2 \le C\sum_{j=1}^N \|f(\tilde{u})-f(u)\|_2\|\nabla u\|_2. \tag{5.34}$$

由于 $u(\cdot + he_j) \to u$属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$，可得 $\tilde{u} \to u$属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$。最后利用 (f4)，有$|f(\tilde{u})| \le |\tilde{u}|$，并且由于 $|\tilde{u}| \to |u|$属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$，由广义 Lebesgue控制收敛定理可得

$$\lim_{h\to 0}\|f(\tilde{u})-f(u)\|_2 = 0. \tag{5.35}$$

利用 (5.35) 以及 (5.34) 中的 $\|\nabla u\|_2 < \infty$，我们得到

$$\lim_{h\to 0}(I_{3,2}+J_{2,2}) = 0. \tag{5.36}$$

L **的估计：**我们有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} L &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} ((I_\alpha * F(u))f(u) - u)\Big(\sum_{j=1}^{N} \psi_\lambda(x) x_j D_j u\Big)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} ((I_\alpha * F(u))f(u) - u)\psi_\lambda(x)\nabla u \cdot x\, dx.\end{aligned} \tag{5.37}$$

将估计式 (5.24)、(5.25)、(5.26)、(5.36)、(5.27)、(5.28) 和 (5.37) 结合到 (5.23) 中，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} ((I_\alpha * F(u))f(u) - u)\psi_\lambda(x)\nabla u \cdot x\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla\psi_\lambda(x))(x \cdot \nabla u)\, dx + \frac{2-N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \psi_\lambda(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \nabla\psi_\lambda(x) \cdot x\, dx \\ &\quad - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \psi_\lambda(x)\, d\mu - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \nabla\psi_\lambda(x) \cdot x\, d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \mathrm{div}\Psi_\lambda(x)\, d\mu \\ &\quad + \frac{N+2s}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)-u(y)|^2 \frac{(x-y)\cdot(\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(y))}{|x-y|^{N+2s+2}}\, dxdy.\end{aligned} \tag{5.38}$$

最后，我们令 $\lambda \to 0$ 趋于 (5.38) 中的极限。为此，利用 (5.18)，我们注意到，对于每个 $x,\ y \in \mathbb{R}^N$ 满足 $x \neq y$ 和 $\lambda > 0$,

$$\left|\mathrm{div}(\Psi_\lambda(x)) + \mathrm{div}(\Psi_\lambda(y)) - (N+2s)\frac{(\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(y))\cdot(x-y)}{|x-y|^2}\right| \le C, \tag{5.39}$$

对于某个与 λ无关的常数 $C > 0$ 。利用 (5.18)、(5.39) 以及逐点收敛 $\psi_\lambda(x) \to 1$、$\nabla\psi_\lambda(x) \cdot x \to 0$、$\Psi_\lambda(x) \to x$ 和 $\mathrm{div}\,\Psi_\lambda(x) \to N$，对所有 $x \in \mathbb{R}^N$当 $\lambda \to 0$ 时，并按照 [26, 命题 3.1], 中的方法，我们应用 Lebesgue控制收敛定理，得到

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{N-2s}{2}\right)[u]^2 + \frac{N}{2}\|u\|_2^2 = \left(\frac{N+\alpha}{2}\right)A(u),$$

这就是所需的恒等式。 □

致谢

Prashanta Garain感谢IISER Berhampur提供的种子基金：IISERBPR/RD/OO/2024/15，日期：2024年2月8日。Nidhi Nidhi（总理研究员计划ID - 1402685）由教育部、政府-

印度政府根据总理研究员计划（PMRF）予以资助。Gurdev Chand Anthal目前在杨敏波教授的指导下担任博士后研究员。他感谢杨敏波教授的支持与指导。

参考文献

[1] N. Abatangelo 和 M. Cozzi。带有分数阶非线性项的椭圆边值问题。*SIAM J. Math. Anal.*，53(3):3577–3601，2021。[2] V. Ambrosio。关于半空间 H 中分数阶 p- 拉普拉斯算子上的 Pohožaev 恒等式。*Bull. Lond. Math. Soc.*，56(6):1999–2013，2024。[3] G. Anthal、J. Giacomoni 和 K. Sreenadh。带有奇异临界 Choquard 非线性项的混合局部与非局部椭圆方程。*Complex Var. Elliptic Equ.*，70(1):30–68，2025。[4] G. C. Anthal 和 P. Garain。具有应用的若干类拟线性局部与非局部椭圆方程及系统的 Pohožaev 型恒等式。*arXiv preprintarXiv:2506.08667*，2025。[5] G. C. Anthal、J. Giacomoni 和 K. Sreenadh。涉及混合局部与非局部算子的 Choquard 型方程。*J. Math. Anal. Appl.*，527(2):127440，2023。[6] H. Berestycki 和 P.-L. Lions。非线性标量场方程 I。*Arch. Ration.Mech. Anal.*，82(4)，1983。[7] H. Berestycki 和 P.-L. Lions。非线性标量场方程 II：无穷多个解的存在性。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，82(4)，1983。[8] S. Biagi、S. Dipierro、E. Valdinoci 和 E. Vecchi。混合局部与非局部椭圆算子：正则性与最大值原理。***Comm. Partial Differential Equations***，47(3):585–629，2022。[9] S. Biagi、D. Mugnai 和 E. Vecchi。混合局部与非局部算子的 Brezis–Oswald 方法。*Commun. Contemp. Math.*，26(02):2250057，2024。[10] L. Brasco 和 E. Parini。分数阶 p-拉普拉斯算子的第二特征值。*Adv.Calc. Var.*，9(4):323–355，2016。[11] J. Byeon、O. Kwon 和 J. Seok。涉及分数阶拉普拉斯算子的非线性标量场方程。*Nonlinearity*，30(4):1659，2017。[12] X. Chang 和 Z. Wang。涉及具有一般非线性项的分数阶拉普拉斯算子的标量场方程的基态。*Nonlinearity*，26(2):479–494，2013。

[13] S. Cingolani、M. Gallo 和 K. Tanaka。带有 Hartree 型非线性项的分数阶薛定谔方程。*Math Eng.*，4(6):056，2022。[14] S. Cingolani、M. Gallo 和 K. Tanaka。分数阶 Hartree 方程的无穷多个自由质量或预设质量解及 Pohožaev 恒等式。*Adv. NonlinearStud.*，24(2):303–334，2024。[15] E. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间指南。*Bull. Sci. Math.*，136(5):521–573，2012。[16] S. Dipierro、E. P. Lippi 和 E. Valdinoci。亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析。*Annales de l'Institut Henri Poincaré C*，40(5):1093–1166，2022。[17] P. Garain 和 E. Lindgren。混合局部与非局部退化椭圆方程的高阶 Hölder 正则性。*Calc. Var. Partial Differential Equations*，62(2):67，2023。[18] M. G. Garroni 和 J. L. Menaldi。二阶椭圆积分微分问题。Chapman and Hall/CRC，2002。[19] J. Giacomoni、D. Goel 和 K. Sreenadh。一类双重非局部问题的正则性结果。*J. Differential Equations*，268(9):5301–5328，2020。[20] J. Giacomoni、N. Nidhi 和 K. Sreenadh。涉及混合算子的临界增长 Choquard 方程的归一化解。*Asymptot. Anal.*，页码 ASY–241933，2024。[21] J. Giacomoni、N. Nidhi 和 K. Sreenadh。涉及混合局部与非局部算子的 Choquard 方程的归一化解。*NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*，32(6):1–38，2025。[22] L. Jeanjean。关于有界 Palais–Smale 序列的存在性及其在定义于 n 上的 Landesman–Lazer 型问题中的应用。*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*，129(4):787–809，1999。[23] E. H. Lieb 和 M. Loss。分析，第 14 卷。美国数学学会，2001。[24] P.-L. Lions。变分法中的集中紧性原理：局部紧情形（第二部分）。载于 *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analysenon linéaire*，第 1 卷，第 223–283 页。爱思唯尔，1984。[25] H. Luo。具有一般非线性项的分数阶 Choquard 方程的 Pohožaev 型基态解。*Comput. Math. Appl.*，77(3):877–887，2019。

[26] V. Moroz 和 J. Van Schaftingen. 非线性 Choquard 方程的基态：存在性、定性性质与衰减渐近行为. 《函数分析杂志》, 265(2):153– 184, 2013.[27] V. Moroz 和 J. Van Schaftingen. 一类非线性 Choquard 方程基态的存在性. 美国数学会汇刊, 367(9):6557–6579, 2015.[28]N. Nidhi 和 K. Sreenadh. 涉及混合算子的临界增长 Choquard 方程的多个归一化解的存在性. *arXiv* 预印本 *arXiv:2510.00893*, 2025.[29] N. Nidhi 和 K. Sreenadh. 涉及临界 Sobolev 指数的拟线性方程的归一化解. 《数学方法与应用科学》, 2025.[30] G. Pagnini 和 S. Vitali. 我该留下还是离开？莱维飞行随机游走中的零尺寸跳跃. 分数阶微积分与应用分析, 24(1):137–167, 2021.[31] Z. Shen、F. Gao 和 M. Yang. 一般非线性项下非线性分数阶 Choquard 方程的基态. 《数学方法与应用科学》, 39(14):4082–4098, 2016.[32] X. Su、E. Valdinoci、Y. Wei 和 J. Zhang. 关于混合局部与非局部椭圆方程的一些正则性性质. *J. Differential Equations*, 416:576–613, 2025.

[33] M. Willem。《极小极大定理》，第24卷。Springer Science & Business Media，2012年。

Gurdev Chand Anthal，浙江师范大学
数学科学学院，中国人民金华市
321004。电子邮件：
gurdevanthal92@gmail.com

Prashanta Garain，印度科学教育与研究学院贝汉布尔分
校数学科学系，永久校区，地址：Laudigam，邮局：
Laudigam，地区：Ganjam，奥迪沙邦，印度-760003

Nidhi Nidhi 印度理工学院德里
分校数学系

印度新德里豪兹卡斯，邮编 110016，电子
邮箱：nidhi.kaushik2809@gmail.com