# 由分数阶物质导数的凸组合驱动的非对称莱维行走

ŁukaszPłociniczak*、Marek A. Teuerle*、Hubert Woszczek*, †

arXiv:2602.02169v1 [math.NA] 2 Feb 2026

**摘要**

我们分析一类线性偏微分方程，这类方程作为莱维行走标度极限的确定性描述，其中输运由分数阶物质导数的凸组合及一个源项驱动。首先，利用傅里叶-拉普拉斯变换技术，我们证明了连续初始数据下温和解的存在性。随后，借助近期得到的分数阶物质导数逐点表示，我们确定了源项满足的充要条件，使解在任意时刻都保持为概率密度（非负且总质量为 1）。鉴于计算中需要保留这些概率性质，我们构造了一种从设计上保证概率守恒的有限体积离散格式。我们证明了离散稳定性，并建立了当空间和时间步长趋于零时连续弱解的收敛性结果。大量数值实验验证了该格式：总质量守恒，非负性得以保持，且计算所得解再现了与莱维行走过程相关的概率密度函数的已知解析表示。该理论与数值相结合的框架为研究由分数阶动力学支配的反常输运提供了可靠工具。

**关键词：** 分数阶物质导数，莱维行走，反常扩散，逐点表示，有限体积法

**数学学科分类代码：** 35R11, 60G51, 65M08

## 1 引言

非局部算子广泛出现于各种情境中，从随机过程到偏微分方程，无论是在理论研究还是应用建模中皆是如此。其中，以多种不同方式定义的分数阶导数或许是最突出的例子。它们从多个方面拓展了经典整数阶导数的概念；这一发展既源于越来越多的实验事实证明它们能够有效描述复杂现象，也出于内在的数学兴趣。显然，这类推广必须经过谨慎的构造，才能确保定义良好，并保持与经典对应形式相一致的自然性。

分数阶物质导数 是在 [45] 中提出的，作为一种确定性算子，能够描述莱维行走（LW）的概率密度函数的演化。莱维行走是一类刻画反常输运的随机过程。更确切地说，莱维行走的标度极限的概率密度函数是一个偏微分方程的温和解，该方程涉及分数阶物质导数（关于莱维行走与分数阶物质导数之间联系的更多细节，见 Płociniczak 和 Teuerle 的文章第 2 节 [41]

*纯粹与应用数学学院，弗罗茨瓦夫科技大学，Wyspiańskiego 堤岸 27 号，50-370 弗罗茨瓦夫，波兰

†通讯作者：hubert.woszczek@pwr.edu.pl

）。一般而言，对于反常扩散，从原点出发的粒子的均方位移（MSD）偏离经典的线性增长规律，即 $\langle x^2(t)\rangle \sim t$，而是按如下方式标度：

$$\langle x^2(t)\rangle \sim t^{\alpha}, \qquad \alpha \neq 1,$$

参见 [30]。当 $0 < \alpha < 1$ 时，该过程称为亚扩散，而 $1 < \alpha < 2$ 情形则对应于超扩散。莱维行走为后一种情形提供了典范模型，分数阶物质导数则为其宏观动力学提供了自然的确定性描述。莱维行走是一类随机过程，其中粒子相继进行飞行，飞行长度取自重尾概率分布，而每次飞行均以有限速度完成。步长与旅行时间的这种耦合将莱维行走与Lévy飞行区分开来，并导致在许多自然和物理系统中观测到的超扩散式扩展。反常动力学在异质或无序环境中的扩散描述里自然出现，并已在许多领域中被发现，例如多孔介质 [34, 35, 36, 33, 11], 神经组织 [27], 聚合物 [31], 生物物理学中的单粒子追踪 [48, 47, 52], 等离子体物理学 [8], 天体物理学 [18], 趋化性 [17]以及金融数学 [14]。另一方面，超扩散是指粒子比经典扩散更快地扩散的过程，这通常源于长程关联或重尾跳跃分布。超扩散动力学常由Lévy飞行和莱维行走来建模，并出现在多种应用中，例如流体和等离子体中的湍流输运 [44, 53],动物觅食模式 [50], 人类出行与移动性 [6, 12], 生态学与生物学 [13, 42, 3],随机介质中的光输运 [29, 5], ，乃至呈现重尾涨落的金融时间序列 [28]。

非局部微分方程也是值得研究和探讨的有趣数学对象。它们为相应方程提供了更深层的结构，也带来了更高的难度。我们无意全面回顾分数阶微分方程的文献，而是想提及理论和数值方法方面的几篇重要论文。关于线性反常扩散方程可解性的首个全面研究发表于 [43] ，作者证明，典型解的时间导数在原点处不连续。在随后的几年里，对类似时间非局部偏微分方程的研究沿着不同方向发展。例如，研究了非线性扩散方程和衰减性质，并引入了不同类型的解 [2, 51, 49, 1, 10, 39]。除了具有有趣的数学结构、需要在恰当的函数空间中谨慎设定之外，非局部方程的数值研究也面临许多有趣的难题。主要困难源于微分算子的非局部性、解缺乏足够的光滑性，以及更严格的稳定性条件。不过，过去二十年间已取得了长足进展。感兴趣的读者可参阅以下论文（及其中的参考文献），了解有限元方法 [15, 32, 37, 40, 38], 、谱格式 [20], 和快速卷积求积方法 [22, 7]。本文针对主要方程构造了一种有限体积格式，因为当我们希望保持解的质量（即概率）时，这种方法更为合适。相关结果见 [16, 21]（另可参阅一篇关于具有分数阶拉普拉斯算子的 Lévy-Fokker-Planck 方程的新近有趣综述 [4]）。

设 $L^1_{loc}(\Omega)$ 为 $\Omega$ 上局部（即在紧集 $K \subset\subset \Omega$ 上）可积函数的空间。定义由下式给出的 $y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ 的 $\alpha > 0$ 阶分数阶积分

$$I^{\alpha} y\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, y\,(s)\, ds.$$

主要的非局部 PD我们论文中的E由分数阶材料的凸组合构成

导数等于源项

$$\begin{cases} p\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u\left(x,t\right)+\left(1-p\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u\left(x,t\right)=f\left(x,t\right), \\ \lim_{t\to 0^{+}} I_{t}^{1-\alpha} u\left(x,t\right)=g\left(x\right), \end{cases} \tag{1}$$

其中，对于所有 $t\in\mathbb{R}_{+}$， $f(\cdot,t)\in L_{loc}^{1}(\mathbb{R})$；对于所有 $x\in\mathbb{R}$， $f(x,\cdot)\in L_{loc}^{1}(\mathbb{R}_{+})$， $g\in L_{loc}^{1}(\mathbb{R})$；分数阶物质导数则由傅里叶-拉普拉斯变换乘子定义

$$\mathcal{FL}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t)\right\}(\xi,s):=(s\mp i\xi)^{\alpha}\mathcal{FL}\left\{u(x,t)\right\}(\xi,s), \tag{2}$$

假设上述变换存在。文献 [45] 指出，方程（1）可作为一维莱维行走的一般确定性描述。文献 [41] 证明了一个有趣的事实：分数阶物质导数具有逐点表示，可用以下分数阶黎曼-刘维尔导数表示：

$$D^{\alpha}y\left(t\right)=\frac{d^{n}}{dt^{n}}I^{n-\alpha}y\left(t\right), \quad n=[\alpha]+1,$$

其中， $[\alpha]$ 是 $\alpha$的整数部分。特别地，对于具有物理意义的情形 $0<\alpha<1$，有

$$D^{\alpha}y\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{-\alpha}y\left(s\right)ds.$$

结果如下。

**定理1**。 *[41]*设对于所有 $t\in\mathbb{R}_{+}$， $u(\cdot,t)\in L_{loc}^{1}(\mathbb{R})$，且对于所有 $x\in\mathbb{R}$， $u(x,\cdot)\in L_{loc}^{1}(\mathbb{R}_{+})$。那么，当 $0<\alpha<1$ 时，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u\left(x,t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{-\alpha}u\left(x\mp\left(t-s\right),s\right)ds. \tag{3}$$

这种形式不仅使我们能够在正则性假设弱得多的情况下定义分数阶物质导数，还有助于设计高效的有限体积格式，甚至显式求解 $p=0{,}1$ 方程（见 [41]）。接下来，我们将利用它证明若干其他性质，并为 (1) 构造一种数值方法。

本文的主要结果如下：

- 在数据正则性较弱的情况下，方程 (1) 的温和解存在且唯一。
- 解为概率密度函数的充要条件。
- 可应用于 (1 的收敛且守恒的有限体积数值格式 ).

据我们所知，上述结果均为文献中的首创。它们完善了非对称莱维行走标度极限的一维确定性描述理论（$p\neq 0.5$）。

最后，我们介绍下文将要使用的函数空间。由于分数阶物质导数通常通过式 (2) 中的傅里叶-拉普拉斯乘子来定义，因此有必要定义使其良定义的空间。傅里叶变换自然作用的空间是施瓦茨空间，其中的函数衰减速度快于任何代数幂；更具体地说，我们定义

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right)=\left\{y\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right):\text{for all } n,m\in\mathbb{N}\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^{n}\frac{d^{m}y}{dx^{n}}\right|<\infty\right\}.$$

另一方面，拉普拉斯变换在指数型函数空间上有定义，即

$$X(\mathbb{R}_+) = \left\{ y\colon \ \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}\colon \text{存在常数 } M,\ T_0 \in \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{R} \text{ 使得 } |y(t)| \le Me^{at} \text{ 对 } t \ge t_0 \right\}.$$

幂次为 $1 \le p \le \infty$ 的可积函数所构成的勒贝格空间记作 $L^p(\Omega)$，其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 且满足 $d \ge 1$。具有连续 $k$ 阶导数的连续函数空间为 $C^{(k)}(\Omega)$；类似地，在无穷远处趋于零的函数空间记作 $C_0(\mathbb{R})$。

下一节中，我们将证明其解的存在唯一性。第 3 节介绍用于求解主要问题的守恒数值格式的构造。第 4 节中，我们将展示若干数值模拟，以验证理论结果。

# 2 存在唯一性

为完整讨论分数阶物质导数，我们将证明它的一些基本性质；据我们所知，这些性质尚未见诸文献。首先，我们简要说明分数阶物质导数的尺度变换，这或许有助于今后研究涉及分数阶物质导数方程的自相似解。这清楚地表明，分数阶物质导数确实是一个阶数为 $\alpha > 0$ 的微分算子。

**命题 1**。定义 $u_\lambda(x,\ t) := u(\lambda x,\ \lambda t),\ \lambda > 0$。则，

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u_\lambda \right)(x,t) = \lambda^\alpha \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right)(\lambda x, \lambda t).$$

证明。 利用逐点表示（3），通过直接计算可得

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u_\lambda \right)(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u_\lambda(x \mp (t-s), s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(\lambda(x \mp (t-s)), \lambda s)\, ds. \end{aligned}$$

现在，通过变量 $v = \lambda s$ 的变换，可得

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u_\lambda \right)(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\lambda t} \left( t - \frac{v}{\lambda} \right)^{-\alpha} u(\lambda(x \mp t) \pm v, v) \frac{dv}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda t} \pm \frac{\partial}{\partial \lambda x} \right) \int_0^{\lambda t} (\lambda t - v)^{-\alpha} u(\lambda(x \mp t) \pm v, v)\, dv \\ &= \lambda^\alpha \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right)(\lambda x, \lambda t), \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

请注意，逐点表示有助于以直接明了的方式得出上述结果。接下来，我们将建立分数阶物质导数与 $+$ 和 $-$ 之间的简单联系。

**命题 2**。令 $u(\cdot, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $u(x, \cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y = -x$。则

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x,t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha u(-y,t).$$

证明。 利用逐点表示 (3)，经直接计算可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mp\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}u\left(-y,t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mp\frac{\partial}{\partial y}\right)\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{-\alpha}u\left(-y\mp\left(t-s\right),s\right)ds=$$
$$=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{-\alpha}u\left(x\mp\left(t-s\right),s\right)ds=\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}u\left(x,t\right),$$

证明至此完成。 □

在上述简单陈述之后，我们现在转向本文的主要分析结论。在下一个定理中，我们证明（1）的解的存在唯一性。

**定理 2.** 设 $f(\cdot,t)\in C_0(\mathbb{R})$ 对所有 $t\in\mathbb{R}_+$ 且 $f(x,\cdot)\in X(\mathbb{R}_+)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$, $g\in C_0(\mathbb{R})$。则问题 (1) 存在唯一的温和解。此外，它由杜哈梅尔公式给出

$$u(x,t)=G_t(x)*g(x)+\int_0^t\left(G_{t-\tau}*f\right)(x,\tau)\,d\tau,$$

其中 $G_t(x)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\underline{p\ s-i\xi\ ^{\alpha}+\ ^{1}()(1-p)(s+i\xi)^{\alpha}}\right\}(t)\right\}(x)$。

证明。我们将证明分为两部分。首先，我们假设 $f(\cdot,t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 对所有 $t\in\mathbb{R}_+$ 且 $\hat{}f(x,\cdot)\in X(\mathbb{R}_+)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$, $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$。我们用 $\hat{}u(\xi,t)$ $f(\xi,t)$, $\hat{}g(\xi)$ 表示 $u$, $f$, $g$ 在空间中的傅里叶变换。我们用 $U(\xi,s)$ $F(\xi,s)$ 表示 $u$, $f$ 的傅里叶-拉普拉斯变换。已知黎曼-刘维尔导数的拉普拉斯变换由下式给出

$$\mathcal{L}\left\{D^{\alpha}f\left(t\right)\right\}\left(s\right)=s^{\alpha}\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(s\right)-\left[I_t^{1-\alpha}f\left(t\right)\right]_{t=0}.$$

利用这一事实，我们计算问题 (1) 的傅里叶-拉普拉斯变换

$$p\left[\left(s-i\xi\right)^{\alpha}U\left(\xi,s\right)-\hat{g}\left(\xi\right)\right]+\left(1-p\right)\left[\left(s+i\xi\right)^{\alpha}U\left(\xi,s\right)-\hat{g}\left(\xi\right)\right]=F\left(\xi,s\right),$$

并经整理后，得到

$$U\left(\xi,s\right)=\frac{F\left(\xi,s\right)+\hat{g}\left(\xi\right)}{p\left(s-i\xi\right)^{\alpha}+\left(1-p\right)\left(s+i\xi\right)^{\alpha}}.\tag{4}$$

现在，我们将证明可以求逆拉普拉斯变换。我们将使用布罗姆维奇积分 al

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{U\left(\xi,s\right)\right\}\left(t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}U\left(\xi,s\right)ds,$$

来证明这些变换可以求逆，从而得到问题的唯一温和解（这是由线性所保证的）。当满足以下条件时，该积分有定义：

- 该 当对于某个 $\gamma\in\mathbb{R}$, $\Re(s)>\gamma$ 时，拉普拉斯变换是一个解析函数 ,

在此区域内，• 随着 $|s|\to\infty$ 增大而充分快地衰减。

由于 $f$ 随时间呈指数变化，其拉普拉斯变换在某个 $a\in\mathbb{R}$下，对 $\Re(s)>a$ 是解析的。该性质也适用于傅里叶变换；因此， $F(\xi,\ s)$ 对 $\Re(s)>a$是 $s$-解析的。此外，$\hat{}g(\xi)$ 与 $s$无关，为常数，因此式 (4) 的分子是解析的。分母是形如 $(s\pm i\xi)^{\alpha}$的函数的组合。复幂函数 $z^{\alpha}$ 除了非正实轴外处处解析。令 $s=\sigma+i\omega$。对于右半平面 $\Re(s)=\sigma>0$中的任意 $s$， $s\pm i\xi$ 的实部均等于 $\sigma$，且为正。因此，分母的两个部分对于 $\Re(s)>0$均是解析的。

此外，在该区域内，分母没有零点。为证明这一点，假设分母存在一个零点 $s = s_0$。那么，

$$\left(\frac{s_0 - i\xi}{s_0 + i\xi}\right)^{\alpha} = -\frac{1-p}{p}.$$

T该等式右侧是一个负实数，因此其辐角为 s

$$\arg\left(-\frac{1-p}{p}\right) = (2n+1)\,\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

记 $w = (s_0 - i\xi)/(s_0 + i\xi)$。因此，取辐角可得

$$\arg\left(w^{\alpha}\right) = \alpha \arg\left(w\right).$$

因此，

$$\arg\left(w\right) = \frac{(2n+1)\,\pi}{\alpha}.$$

Now，我们直接计算 $w$ 的辐角。可得 $s_0 = \sigma + i\omega$、 $\sigma > 0$ 以及

$$\arg\left(w\right) = \arg\left(\frac{s_0 - i\xi}{s_0 + i\xi}\right) = \arg\left(\sigma + i\left(\omega - \xi\right)\right) - \arg\left(\sigma + i\left(\omega + \xi\right)\right) = \arctan\left(\frac{\omega - \xi}{\sigma}\right) - \arctan\left(\frac{\omega + \xi}{\sigma}\right).$$

因此，

$$-\pi < \arg\left(w\right) < \pi,$$

因为反正切函数的值域介于 $-\pi$ 和 $\pi$ 之间。综合起来可得

$$-\alpha < 2n + 1 < \alpha.$$

不存在能够满足该关系的整数 $n$，因此分母始终不为零。因此，我们得出结论：由于 $U\left(s,\ \xi\right)$是区域$\Re\left(s\right) > \max\ \{0, a\}$内分母处处非零的解析函数之比，所以它是解析函数。

由此，我们可以将布ромwich积分路径 $\gamma$ 置于直线$\max\{0, a\}$的右侧。接下来，我们证明 $U\left(\xi,\ s\right)$衰减得足够快，从而使积分收敛。同样，令$s = \gamma + i\omega$。于是有

$$p\left(s - i\xi\right)^{\alpha} + \left(1-p\right)\left(s + i\xi\right)^{\alpha} = \left(i\omega\right)^{\alpha}\left[p\left(1 + \frac{\gamma - i\xi}{i\omega}\right)^{\alpha} + \left(1-p\right)\left(1 + \frac{\gamma + i\xi}{i\omega}\right)^{\alpha}\right] = \left(i\omega\right)^{\alpha} B\left(\xi, \omega\right).$$

取绝对值，得到

$$\left|\left(i\omega\right)^{\alpha} B\left(\xi, \omega\right)\right| = \left|\omega\right|^{\alpha}\left|B\left(\xi, \omega\right)\right|.$$

由函数$(1+z)^{\alpha}$的泰勒展开，得到

$$\left|\omega\right|^{\alpha}\left|B\left(\xi, \omega\right)\right| = \left|\omega\right|^{\alpha}\left|1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right|. \tag{5}$$

因此，分母为 $\mathcal{O}(|s|)^{\alpha}$。对于分子，有

$$\left|F\left(\xi, s\right) + \hat{g}\left(\xi\right)\right| \leq \left|F\left(\xi, s\right)\right| + \left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|.$$

对于 $|F\left(\xi, s\right)|$，我们有

$$\left|F\left(\xi, s\right)\right| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st}\hat{f}\left(\xi, t\right) dt\right| \leq \int_0^{\infty}\left|e^{-st}\right|\left|\hat{f}\left(\xi, t\right)\right| dt.$$

由于 $s=\gamma+i\omega$，我们有 $|e^{-st}|=e^{-\gamma t}$。由于 $f(x,\cdot)\in X(\mathbb{R}_+)$，我们有

$$|F(\xi,s)|\leq\int_0^\infty e^{-\gamma t}Me^{at}=\frac{M}{\gamma-a}.$$

因此，$|F(\xi,\ s)|$ 被一个与 $s$无关的常数所界定。综上，我们得到

$$|U(\xi,s)|=\mathcal{O}\left(|s|^{-\alpha}\right)\quad\text{as}\quad\Re s\to\infty,$$

这正是证明布ром维奇反演合理性所需的衰减性质。由于 $\hat{}u(\cdot,\ t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，我们也可以进行傅里叶变换的逆变换，因此方程（1）存在唯一的温和解。

现在，令我们选择两个序列 $g_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，使得 $g_n\to g$一致地成立，并且对于所有$t\in\mathbb{R}_+$，$f_n(\cdot,\ t)\in C_0(\mathbb{R})$；同时，对于所有 $x\in\mathbb{R}$，$f_n(x,\ \cdot)\in X(\mathbb{R}_+)$，且 $f_n\to f$在 $x$ 中以及在 $t$中的空间$X$ 范数上一致。于是，对于每个 $(f_n,\ g_n)$，存在唯一的解 $u_n$，使得对于所有$t\in\mathbb{R}_+$，$u_n(\cdot,\ t)\in C_0(\mathbb{R})$；并且对于所有 $x\in\mathbb{R}$，$u_n(x,\ \cdot)\in X(\mathbb{R}_+)$。$u_n$ 可表示为

$$u_n(x,t)=\int_{\mathbb{R}}G_t(x-y)\,g_n(y)\,dy+\int_0^t(G_{t-\tau}*f_n)(x,\tau)\,d\tau,$$

其中

$$G_t(x)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(\xi,s)}\right\}(t)\right\}(x),\tag{6}$$

其中 $\zeta(\xi,\ s)=p(s-i\xi)^\alpha+(1-p)(s+i\xi)^\alpha$。记

$$P(\xi,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(\xi,s)}\right\}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\frac{1}{\zeta(\xi,s)}ds.$$

现在，对变量 $s=\lambda/t,\gamma=\gamma'/t$ 进行变换，得到

$$P(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty}e^{(\lambda/t)t}\frac{1}{\zeta(\xi,\lambda/t)}\frac{d\lambda}{t}.\tag{7}$$

我们还注意到

$$\zeta(\xi,\lambda/t)=p\left(\frac{\lambda}{t}-i\xi\right)^\alpha+(1-p)\left(\frac{\lambda}{t}+i\xi\right)^\alpha=\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha\left[p(\lambda-i\xi t)^\alpha+(1-p)(\lambda+i\xi t)^\alpha\right]=t^{-\alpha}\zeta(\xi t,\lambda),$$

结合式 (7)，可得

$$P(\xi,t)=t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty}\frac{e^\lambda}{\zeta(\xi t,\lambda)}d\lambda\right)=t^{\alpha-1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(\xi t,\lambda)}\right\}(1).$$

将 $P$ 代入式 (6)，得到

$$G_t(x)=\mathcal{F}^{-1}\{P(\xi,t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}t^{\alpha-1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(\xi t,\lambda)}\right\}(1)d\xi.$$

现在，我们进行变量替换 $y=\xi t$。于是，

$$\begin{aligned}G_t(x)&=t^{\alpha-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(y/t)x}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(y,\lambda)}\right\}(1)\right)\frac{dy}{t}=t^{\alpha-2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy(x/t)}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(y,\lambda)}\right\}(1)\right)dy\right)\\&=t^{\alpha-2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\zeta(y,\lambda)}\right\}(1)\right\}\left(\frac{x}{t}\right)=t^{\alpha-2}G_1\left(\frac{x}{t}\right).\end{aligned}$$

接下来，我们估计 $u_n$ 的上确界范数。利用解的积分表示，我们得到

$$\|u_n(\cdot,t)\|_\infty \le \left\| \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\, g_n(y)\, dy \right\|_\infty + \left\| \int_0^t G_{t-\tau}(\cdot) * f_n(\cdot,\tau)\, d\tau \right\|_\infty$$

根据杨氏卷积不等式 $\|f*g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ 对 $1/p+1/q=1+1/r$、 $1 \le p,\ q,\ r \le \infty$（我们可以应用该不等式，因为 $C_0 \subset L^\infty$）以及缩放性质，可得

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\, g_n(y)\, dy \right\|_\infty \le \|G_t\|_{L^1} \|g_n\|_\infty = t^{\alpha-1} \|G_1\|_{L^1} \|g_n\|_\infty .$$

同样地，对于第二个积分

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t G_{t-\tau}(\cdot) * f_n(\cdot,\tau)\, d\tau \right\|_\infty \le \int_0^t \|G_{t-\tau}(\cdot) * f_n(\cdot,\tau)\|_\infty\, d\tau \\ &\le \int_0^t \|G_{t-\tau}(\cdot)\|_{L^1} \|f_n(\cdot,\tau)\|_\infty\, d\tau = \|G_1\|_{L^1} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f_n(\cdot,\tau)\|_\infty\, d\tau \end{aligned}$$

我们需要证明 $\|G_1\|_{L^1} < \infty$。为此，写成

$$P(\xi) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\left\{ \frac{1}{\zeta(\xi,\lambda)} \right\}(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^\lambda}{\zeta(\xi,\lambda)} d\lambda.$$

注意到 $P(\xi)$ 是光滑的，因为 $\zeta(\xi,\ \lambda)$ 在积分路径 $\gamma$ 上可微且为正。

现在，我们需要证明可以交换导数与积分的顺序。利用莱布尼茨法则即可做到这一点。令 $\lambda = \gamma + i\eta$。于是，我们有

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right| = \mathcal{O}\left( |\eta|^{-(\alpha+n)} \right)$$

为证明这一点，我们采用归纳法。对于 $n=0$，结论由（5）可得。现在，假设对于所有 $j=0$、1，... ...，$n-1$，归纳假设成立。那么，对于 $n$，我们有

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right| = \left| -\frac{1}{\zeta} \right| \cdot \left| \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^j \zeta}{\partial \xi^j} d \frac{\partial^{n-j}}{\partial \xi^{n-j}} \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right| = \mathcal{O}\left( |\eta|^{-\alpha} \right) \mathcal{O}\left( |\eta|^{-n} \right) = \mathcal{O}\left( |\eta|^{-(\alpha+n)} \right). \quad (8)$$

因此，归纳假设成立。

因此，我们可以在积分号下对 $P(\xi)$ 求导，并且它是一个光滑函数。现在，让我们按如下方式改写 $P(\xi)$

$$P(\xi) = P(\xi)\,\phi(\xi) + P(\xi)\,(1-\phi(\xi)),$$

其中 $\phi(\xi)$ 是截断函数，即一个光滑函数，当 $|\xi| \le 1$ 时等于 1，当 $|\xi| \ge 2$ 时等于 0。令 $P_{low}(\xi) = P(\xi)\,\phi(\xi)$，$P_{high}(\xi) = P(\xi)\,(1-\phi(\xi))$，

$$G_{low}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} P_{low}(\xi)\, d\xi,$$

and

$$G_{high}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} P_{high}(\xi)\, d\xi.$$

两次使用分部积分，我们得到

$$G_{low}(x) = \frac{1}{2\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} P_{low}(\xi) \right) d\xi.$$

对两边取绝对值，可得

$$|G_{low}(x)| \leq \frac{1}{2\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^2}{d\xi^2} P_{low}(\xi) \right| d\xi.$$

由于 $P_{low}$ 在紧区间上光滑，且其所有导数都有界，并且右侧的积分是一个有限常数 $C_1$。因此，我们有

$$|G_{low}(x)| \leq \frac{C_1}{x^2}.$$

因此，$\|G_{low}\|_{L_1} < \infty$。对于 $G_{high}$，再次分部积分两次，可得

$$G_{high}(x) = \frac{1}{2\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} P_{high}(\xi) \right) d\xi.$$

对两边取绝对值，得到

$$|G_{high}(x)| \leq \frac{1}{2\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^2}{d\xi^2} P_{high}(\xi) \right| d\xi.$$

由 (8) 可知，$\left| \frac{d^2}{d\xi^2} P_{high}(\xi) \right|$ 在无穷远处的渐近行为类似于 $|\xi|^{-(\alpha+2)}$，因此上述不等式右侧收敛，从而得到

$$|G_{high}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2}.$$

最后，由于 $G_1(x) = G_{low}(x) + G_{high}(x)$，我们有

$$\|G_1\|_{L^1} \leq \|G_{low}\|_{L_1} + \|G_{high}\|_{L_1} < \infty.$$

记 $C = \|G_1\|_{L^1}$。于是，我们有

$$\|u_n(\cdot,t)\|_\infty \leq Ct^{\alpha-1} \|g_n\|_\infty + C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f_n(\cdot,\tau)\|_\infty d\tau.$$

有了这个估计，我们可以证明 $u_n(\cdot, t)$ 是柯西序列。也就是说，我们有

$$\|u_n(\cdot,t) - u_m(\cdot,t)\|_\infty \leq Ct^{\alpha-1} \|g_n - g_m\|_\infty + C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f_n(\cdot,\tau) - f_m(\cdot,\tau)\|_\infty d\tau.$$

由于 $g_n$ 和 $f_n$ 是柯西序列，上述不等式右侧趋于 0。因此，左侧也趋于 0，且 $u_n$ 是柯西序列。由于 $\mathcal{S}$ 在 $C_0$ 中稠密，$u_n \to u$ 在空间上一致。因此，存在唯一的解 $u$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$u(\cdot, t) \in C_0(\mathbb{R})$；并且对所有 $x \in \mathbb{R}$，$u(x, \cdot) \in X(\mathbb{R}_+)$。 □

在陈述下一个定理之前，我们将证明关于核 $G_t$ 的一个重要事实。

**命题 3**。设 $G_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{p\, s-i\xi^{\alpha}+} \right\}(t) \right\}(x)$。则，

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_t(x)\, dx = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

证明。 根据 $G_t$ 的定义，我们有

$$G_t(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(s-i\xi)^{\alpha}+(1-p)(s+i\xi)^{\alpha}}\right\}(t)\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}P(\xi,t)\,d\xi.$$

对空间积分，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_t(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}P(\xi,t)\,d\xi dx=\int_{-\infty}^{\infty}P(\xi,t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}dx\right]d\xi=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\xi,t)\,\delta(\xi)\,d\xi=P(0,t).$$

Thus

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_t(x)\,dx=P(0,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(s-i0)^{\alpha}+(1-p)(s+i0)^{\alpha}}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\right\}(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

□

由于我们关注式 (1) 与下一命题中相应随机过程之间的联系，因此我们求出源项 $f$ 满足什么充要条件，才能使解在所有时刻都是概率密度函数。

**命题 4.** 设 $u(x,t)$ 是式 (1) 的解，在 $x\to\pm\infty$ 时消失。此外，假设对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$，都有$f(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R})$，并且对于所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $f(x,\cdot)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$。那么，问题(1) 的解 $u$ 是概率密度函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx=1. \tag{9}$$

*and*

$$\lim_{t\to0^+}u(x,t)=\delta(x)$$

当且仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\,dx=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{10}$$

此外，该解由下式给出

$$u(x,t)=\int_0^t(G_{t-\tau}*f)(x,\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

证明。 利用 $L^1$ 空间在施瓦茨空间中稠密这一事实，并按照定理 2 证明中的相同推理，可得 $u$ 是式 (1) 的解。假设条件 (9) 成立。将杜哈梅尔公式 (11) 中的方程对 $\mathbb{R}$ 积分，并关于 $x$ 积分，得到

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G_{t-\tau}(x-y)\,f(y,\tau)\,dyd\tau dx$$

利用以下事实：$\int_{-\infty}^{\infty}G_t(x)\,dx=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$，我们得到

$$1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^{\alpha-1}f(y,\tau)\,dyd\tau=I_t^{1-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\,dx.$$

现在，假设条件 (10) 成立。再次对 $\mathbb{R}$ 中的杜哈梅尔公式关于 $x$ 进行积分，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G_{t-\tau}(x-y)\,f(y,\tau)\,dyd\tau dx.$$

再次利用 $\int_{-\infty}^{\infty} G_t(x)\,dx = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\,\alpha\,()}$ 这一事实，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\tau^{-\alpha}d\tau = 1.$$

剩下需要证明的是其收敛到狄拉克δ函数。为此，任取 $\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$，将其乘以 (11) 并积分，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\left(\int_0^t (G_{t-\tau} * f)(x,\tau)\,d\tau\right)dx.$$

此外，利用富比尼定理加上并减去 $\psi(0)$，再利用 $\int_{-\infty}^{\infty} G_t(x)\,dx = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\,\alpha\,()}$ 这一事实，结合 (10) 并根据贝塔函数的定义，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\left(\int_0^t (G_{t-\tau} * f)(x,\tau)\,d\tau\right)dx = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)(G_{t-\tau} * (\psi-\psi(0)))(y,\tau)\,dyd\tau +$$
$$\psi(0)\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} G_{t-\tau}(x-y)dx\right)dyd\tau = \psi(0) + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)(G_{t-\tau} * (\psi-\psi(0)))(y,\tau)\,dyd\tau$$

因此，剩下需要证明右侧的二重积分当 $t \to 0^+$ 时趋于零。为此，作时间变量替换 $\tau = ts$, $y = tv$, $z = t(1-s)w$，并利用核 $G_t(x) = t^{\alpha-2}G_1(x/t)$ 的缩放性质，得到

$$\left|\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)G_{t-\tau}(z)(\psi(y-z)-\psi(0))dzdyd\tau\right|$$
$$\le t^{\alpha+1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(tv,ts)G_1(w)|\psi(t(v-(1-s)w))-\psi(0)|dwdvds$$
$$\le \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\psi(t\xi)-\psi(0)|\,t^{\alpha+1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(tv,ts)G_1(w)dwdvds$$

现在，利用核 $G_t$ 的空间积分等于 $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$这一事实，并且由于满足条件 (10)，我们得到

$$\left|\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)G_{t-\tau}(z)(\psi(y-z)-\psi(0))dzdyd\tau\right|$$
$$\le \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\psi(t\xi)-\psi(0)|\,\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(tv,ts)\,dv\right)ds$$
$$= t\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\psi(t\xi)-\psi(0)|\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\,s^{-\alpha}dz = t\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\psi(t\xi)-\psi(0)|$$

根据 $\psi$ 的一致收敛性，上述右侧在 $t \to 0^+$ 时趋于 0。 □

值得注意的是，存在几种莱维行走，其解 $u = u(x,\ t)$ 可用精确的解析形式表示。这些显式公式是 [26] 通过概率方法推导得到的。

**例 1.** 对于等待时间优先莱维行走，我们有 [24]

$$\begin{cases} p\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t)+(1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\delta(x) \\ \lim_{t\to 0^{+}} u(x,t)=\delta(x). \end{cases}$$

该解具有显式的自相似形式 $u(x,\ t)=\frac{1}{t}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$，其中 - -

$$\phi(y)=\begin{cases} \frac{p\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{(1-y)^{\alpha}y^{-1+\alpha}}{p^{2}(1-y)^{2\alpha}+(1-p)^{2}(1+y)^{2\alpha}+2p(1-p)(1-y^{2})^{\alpha}\cos(\alpha\pi)}, & 0<y<1, \\ \frac{(1-p)\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{(1+y)^{\alpha}(-y)^{-1+\alpha}}{(1-p)^{2}(1-y)^{2\alpha}+p^{2}(1+y)^{2\alpha}+2p(1-p)(1-y^{2})^{\alpha}\cos(\alpha\pi)}, & -1<y<0, \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

**例 2**。 对于先跳跃 Lévy 行走 [25], ，主方程的形式为 [24]

$$\begin{cases} p\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t)+(1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t) \\ \qquad =\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t}^{\infty}\left(p\delta(x+u)+(1-p)\delta(x-u)\right)u^{-\alpha-1}du \\ \lim_{t\to 0^{+}} u(x,t)=\delta(x). \end{cases}$$

其解为 $u(x,\ t)=\frac{1}{t}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$, 其中

$$\phi(y)=\begin{cases} \frac{p\sin(\alpha\pi)}{\pi y}\frac{1}{p(y-1)^{\alpha}+(1-p)(y+1)^{\alpha}}, & y>1, \\ \frac{(1-p)\sin(\alpha\pi)}{-\pi y}\frac{1}{(1-p)(-y-1)^{\alpha}+p(-y+1)^{\alpha}}, & y<-1, \\ \frac{p(1-p)\sin(\alpha\pi)}{\pi|y|}\frac{|(1+y)^{\alpha}-(1-y)^{\alpha}|}{p^{2}(1-y)^{2\alpha}+(1-p)^{2}(1+y)^{2\alpha}+2p(1-p)(1-y^{2})^{\alpha}\cos(\alpha\pi)}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**例 3**。 现在考虑标准 Levy 行走。此时，控制方程的形式为[23]

$$\begin{cases} p\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t)+(1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(x,t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[p\delta(x+t)+(1-p)\delta(x-t)\right] \\ \lim_{t\to 0^{+}} u(x,t)=\delta(x). \end{cases}$$

其解具有显式形式 $u(x,\ t)=\frac{1}{t}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$，其中 - -

$$\phi(y)=\frac{p(1-p)\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{(1-y)^{\alpha-1}(1+y)^{\alpha}+(1+y)^{\alpha-1}(1-y)^{\alpha}}{p^{2}(1-y)^{2\alpha}+(1-p)^{2}(1+y)^{2\alpha}+2p(1-p)(1-y^{2})^{\alpha}\cos(\alpha\pi)}H(t-|x|),$$

其中 $H=H(t)$ 是 Heaviside 阶跃函数。

# 3 数值方法

本节中，我们设计一种求解 (1) 的数值方法。我们将使用 [41] 中针对分数阶物质导数方程得到的方法。为完整起见，我们回顾该格式的推导。对于时间和空间网格步长 $h>0$ （由于时间和空间处于同等地位，这是一个合理的假设），我们定义

$$x_i=ih,\quad t_i=nh,\quad i\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}$$

并将实直线划分为有限单元（控制体）

$$\mathbb{R}=\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}\left(x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right],\quad x_{i\pm\frac{1}{2}}=\left(i\pm\frac{1}{2}\right)h.$$

现在，我们将方程（3）在任意单元上积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}\mp(t-s)}^{x_{i+\frac{1}{2}}\mp(t-s)}u(y,s)\,dy\right)ds\\&\quad-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\left(u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\mp(t-s),s\right)-u\left(x_{i-\frac{1}{2}}\mp(t-s),s\right)\right)ds\\&\quad=\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}f(x,t)\,dx\end{aligned}$$

将方程两边除以 $h$，并定义单元平均值

$$\bar{u}(x_i,t)=\frac{1}{h}\int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}}u(x,t)\,dx.$$

于是得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\bar{u}(x_i\mp(t-s),s)\,ds\\&\quad-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\frac{u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\mp(t-s),s\right)-u\left(x_{i-\frac{1}{2}}\mp(t-s),s\right)}{h}ds=\bar{f}(x_i,t).\end{aligned}\tag{12}$$

现在，我们使用 **L1**格式对时间变量进行离散，即用时间上的线性插值近似未知函数，并进行积分（完整说明见 [38] ）。因此，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{-\alpha}\bar{u}(x_i\mp(t_n-s),s)\,ds&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_n-s)^{-\alpha}\bar{u}(x_i\mp(t_n-s),s)\,ds\\&=\frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1}b_{n-j}u_{i\mp(n-j)}^{j}+r_{in}(h),\end{aligned}$$

其中，$r_{in}(h)$是余项，$u_i^k:=\bar{u}(x_i,\ t_k)$，且

$$b_k=k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}.\tag{13}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{-\alpha}\bar{u}(x_i\mp(t_n-s),s)\,ds\\&\quad=\frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(u_{i\mp1}^{n}+\sum_{j=0}^{n-1}b_{n-j+1}u_{i\mp(n-j+1)}^{j}-b_{n-j}u_{i\mp(n-j)}^{j}\right)+R_{in}^{1}(h),\end{aligned}$$

其中，$R_{im}^{1}(h)$ 是余项；对于足够光滑的函数，例如二阶可微的函数，该近似的阶为 $2-\alpha$，也就是说，余项满足 [19]

$$\left|R_{im}^{1}\right|\leq Ch^{2-\alpha}.$$

现在，我们可以对空间变量进行离散化。我们假设 $u$ 的点值可以用其单元平均值来近似，即

$$\bar{u}\left(x_i,t\right)\approx\begin{cases}u\left(x_{i+\frac{1}{2}},t\right), & \text{in the "+" case,}\\ u\left(x_{i-\frac{1}{2}},t\right), & \text{in the "-" case,}\end{cases}$$

其精度为 $O(h)$，其中 $h\to 0^{+}$。因此，空间部分的离散化为

$$\begin{aligned}\frac{h^{-1}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{-\alpha}\left(u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\mp\left(t-s\right),s\right)-u\left(x_{i-\frac{1}{2}}\mp\left(t-s\right),s\right)\right)ds=\\ =\frac{h^{-\alpha}}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_{n-j}\left(u^j_{i\mp(n-j)}-u^j_{i\mp(n-j+1)}\right)\right)+R^2_{in}\left(h\right)\end{aligned}$$

截去余项并将上述所有公式合并，我们得到式 (12) 的离散化形式

$$\delta^{\alpha}_{\pm}u^n_i=\frac{h^{-\alpha}}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\left[u^n_{i\mp1}-\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)u^j_{i\mp(n-j+1)}\right]. \tag{14}$$

假设我们希望求出以下方程的解

$$\begin{cases}p\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}u\left(x,t\right)+\left(1-p\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}u\left(x,t\right)=f\left(x,t\right), & x\in\mathbb{R},\,0\le t\le T\\ u\left(x,0\right)=0, & x\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{15}$$

上述离散化版本的形式为

$$\begin{cases}u^n_i=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(pu^j_{i+(n-j)}+\left(1-p\right)u^j_{i-(n-j)}\right)+h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(pf^n_{i-1}+\left(1-p\right)f^n_{i+1}\right),\\ u^0_i=0.\end{cases} \tag{16}$$

下面展示格式 (16) 的一些基本性质。首先证明它是稳定的。引入离散的 $p$ 阶范数

$$\left\|u^n\right\|_{p,h}=\left(h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|u^n_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty. \tag{17}$$

下面的结果表明　表明解的二范数受数据的范数控制 a.

**命题 5** （稳定性）。 设 $u^n_m$ 为 (16) 在 $f(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R})$ 下的解，对每个 $t\in[0,T]$，$f(x,\cdot)\in L^{\infty}(0,T)$ 对每个 $x\in\mathbb{R}$ 以及 $h\le(1-\alpha)^{1/2\alpha}$。则我们有

$$\max_n\left\|u^n\right\|_{2,h}\le T^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\max_n\left\|f^n\right\|_{2,h}.$$

证明。 我们首先将（16）乘以 $hu^n_i$，并对 $i$ 求和，得到

$$\begin{aligned}\left\|u^n\right\|^2_{2,h}=h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(pu^j_{i+(n-j)}u^n_i+\left(1-p\right)u^j_{i-(n-j)}u^n_i\right)\right.\\ \left.+h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(pf^n_{i-1}u^n_i+\left(1-p\right)f^n_{i+1}u^n_i\right)\right].\end{aligned} \tag{18}$$

现在我们估计外层求和中的第一项和第二项。对于前者，利用柯西不等式（$ab \le \left(a^2+b^2\right)/2$），有

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(pu_{i+(n-j)}^{j}u_i^n+(1-p)\,u_{i-(n-j)}^{j}u_i^n\right)\right]\\
\le\ &\frac{h}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(p\left(\left(u_{i+(n-j)}^{j}\right)^2+(u_i^n)^2\right)+(1-p)\left(\left(u_{i-(n-j)}^{j}\right)^2+(u_i^n)^2\right)\right)\right].
\end{aligned}
$$

接下来，我们改变求和顺序，并将关于 $j$ 的求和拆分为三个不同的求和

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(pu_{i+(n-j)}^{j}u_i^n+(1-p)\,u_{i-(n-j)}^{j}u_i^n\right)\right]\\
\le\ &\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)h\sum_{i\in\mathbb{Z}}(u_i^n)^2+\frac{p}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(u_{i+(n-j)}^{j}\right)^2\\
&+\frac{1-p}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(u_{i-(n-j)}^{j}\right)^2.
\end{aligned}
$$

最后，利用范数的定义（17）、 $b_{n-j}-b_{n-j+1}\ge 0$ 这一事实，以及级数 $\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)$ 是望远镜级数，我们得到

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(pu_{i+(n-j)}^{j}u_i^n+(1-p)\,u_{i-(n-j)}^{j}u_i^n\right)\right]\\
&\le\frac{1}{2}\left\|u^n\right\|_{2,h}^2\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)+\frac{p}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{2,h}^2\\
&+\frac{1-p}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{2,h}^2=\frac{1}{2}\left(1-b_{n+1}\right)\left\|u^n\right\|_{2,h}^2+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{2,h}^2.
\end{aligned}
$$

对于（18）中的第二项，利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{i\in\mathbb{Z}}h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(pf_{i-1}^{n}u_i^n+(1-p)\,f_{i+1}^{n}u_i^n\right)\le h\sum_{i\in\mathbb{Z}}h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(p\left|f_{i-1}^{n}\right|\left|u_i^n\right|+(1-p)\left|f_{i+1}^{n}\right|\left|u_i^n\right|\right)\\
&\le h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(p\sqrt{h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|f_{i-1}^{n}\right|^2}\sqrt{h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|u_i^n\right|^2}+(1-p)\sqrt{h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|f_{i+1}^{n}\right|^2}\sqrt{h\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|u_i^n\right|^2}\right)\\
&=h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left\|f^n\right\|_{2,h}\left\|u^n\right\|_{2,h}.
\end{aligned}
$$

现在，结合上述不等式，可得

$$
\left\|u^n\right\|_{2,h}^2\le\frac{1}{2}\left(1-b_{n+1}\right)\left\|u^n\right\|_{2,h}^2+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{2,h}^2+h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left\|f^n\right\|_{2,h}\left\|u^n\right\|_{2,h},
$$

现在，对右侧的最后一项应用 $\varepsilon$–柯西不等式（$ab\le\left(a^2/\varepsilon+\varepsilon b^2\right)/2$），取 $a=\left\|f^n\right\|_{2,\,h}$, $b=\left\|u^n\right\|_{2,\,h}$ 和 $\varepsilon=b_{n+1}h^{-\alpha}/\Gamma\left(2-\alpha\right)$，我们得到

$$
\left\|u^n\right\|_{2,h}^2\le\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{2,h}^2+\frac{\left[h^{\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\right]^2}{b_{n+1}}\left\|f^n\right\|_{2,h}^2.
$$

然后对 $n$ 取最大值，利用级数的望远镜性质，并注意到根据（13），系数 $b_{n+1}$ 是递减的，我们可以得到

$$\max_j \left\|u^j\right\|_{2,h}^2 \leq (b_1 - b_{n+1}) \max_j \left\|u^j\right\|_{2,h}^2 + \frac{\left[h^\alpha \Gamma(2-\alpha)\right]^2}{b_{n+1}} \max_j \left\|f^j\right\|_{2,h}^2 .$$

由于根据 (13) 可得 $b_1 = 1$，因此我们可以进一步简化两边，得到

$$\max_j \left\|u^j\right\|_{2,h} \leq \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{b_{n+1}} \max_j \left\|f^j\right\|_{2,h} .$$

但是，根据中值定理，存在这样的 $n-1 \leq \xi \leq n$，使得

$$\frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{b_{n+1}} = \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}} = \frac{h^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{(1-\alpha)\xi^{-\alpha}} \leq (nh)^\alpha \Gamma(1-\alpha) \leq T^\alpha \Gamma(1-\alpha),$$

因此，乘法常数有界。证明完毕。 □

接下来，我们将证明该格式的收敛性。

**定理 3** (收敛性)。 设 $u(x,t)$ 是 ***(15)*** 的解， $u_i^n$ 是数值格式 (16) 的解。假设 $f(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$、 $f(x,\cdot) \in L^\infty(0,T)$ 对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都成立，并且截断误差满足

$$\left\| \delta_\pm^\alpha u^n - \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(\cdot, t_n) \right\|_{2,h} = \left\| R^n(h) \right\|_{2,h} \leq C h^r, \quad r > 0. \tag{19}$$

*Then*

$$\left\| u(\cdot,t_n) - u^n \right\|_{2,h} \leq T^\alpha \Gamma(1-\alpha) C h^r,$$

其中常数 $C$ 依赖于 $\alpha$、 $u$ 及其导数，而阶数 $r > 0$ 与解的正则性有关。

证明。 我们定义误差 $e_i^n = u(x_i,\ t_n) - u_i^n$并应用算子 $p\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha + (1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$。于是，

$$\begin{aligned} & p\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_i^n + (1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_i^n \\ & = p\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(u(x_i,t_n) - u_i^n\right) + (1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(u(x_i,t_n) - u_i^n\right). \end{aligned}$$

利用（15），在上述方程中加上并减去 $\delta^\alpha u_i^n = p\delta_-^\alpha u_i^n + q\delta_+^\alpha u_i^n$，可得

$$\begin{aligned} & p\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_i^n + (1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_i^n \\ & \qquad = f(x_i,t_n) - p\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_i^n - (1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_i^n + \delta^\alpha u_i^n - \delta^\alpha u_i^n \end{aligned}$$

现在，将作用于 $u_i^n$ 的相应算子结合起来，并利用离散分数阶物质导数（14）的定义以及该格式，我们进一步得到

$$\begin{aligned} & p\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_i^n + (1-p)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_i^n \\ & \qquad = f(x_i,t_n) - p\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha - \delta_-^\alpha\right] u_i^n - (1-p)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha - \delta_+^\alpha\right] u_i^n - f(x_i,t_n). \end{aligned}$$

因此，我们看到误差 $e_i^n$ 满足（15），其中源项等于离散分数阶物质导数截断误差的凸组合。于是，由（19）、我们的假设（19）以及命题 5，我们有

$$\begin{aligned}\left\|e_i^n\right\|_{2,h} &\leq T^\alpha\Gamma(1-\alpha)\left\|p\left[\delta_-^\alpha-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\right]u^n+(1-p)\left[\delta_+^\alpha+\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\right]u^n\right\|_{2,h}\\ &\leq T^\alpha\Gamma(1-\alpha)h^r,\end{aligned}$$

这标志着证明结束。 □

在莱维行走的背景下，方程 (1) 的解是一个概率（1）。自然地，我们希望离散近似也具有相同的性质，至少其误差与网格间距$h>0$相关。根据命题 4，我们知道，概率守恒意味着源项具有某种奇异性。从数值角度来说，基于高阶离散化构造格式并非最优。因此，只要截断误差的阶数保持不变，我们就可以自由修改方法。在下一个结果中，我们将证明，如果在较晚的时刻 $t=t_{n+1}$ 计算源项，就可以轻松证明离散概率守恒。因此，方程 (1) 的格式如下

$$\begin{cases}u_i^n=\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(pu_{i+(n-j)}^j+(1-p)\,u_{i-(n-j)}^j\right)+h^\alpha\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(pf_{i-1}^{n+1}+(1-p)\,f_{i+1}^{n+1}\right),\\ u_i^0=\psi\left(x_i\right),\end{cases}\tag{20}$$

where $\psi$ 是数值初始条件。下面我们证明它是守恒的 .

**定理4**。 设 $f$ 是满足(10) 的非负函数，其中

$$\left\|f^n\right\|_{1,h}=\frac{t_n^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}+\rho\left(h\right),\tag{21}$$

其求积误差为 $\rho\left(h\right)$，且 $t_n=nh\leq T$。那么，如果$\left\|u^0\right\|_{1,h}=1$则有

$$\left\|u^n\right\|_{1,h}\leq 1+T\Gamma\left(2-\alpha\right)h^{\alpha-1}\rho\left(h\right).$$

证明。 由于 $f\geq 0$，由 (20) 得 $u_j^n\geq 0$。由于 $b_{n-j}-b_{n-j+1}\geq 0$，将 (20) 乘以 $h$，并对 $i$ 求和，可得

$$\begin{aligned}\left\|u^n\right\|_{1,h}&=\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left(p\left\|u^j\right\|_{1,h}+(1-p)\left\|u^j\right\|_{1,h}\right)+h^\alpha\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(p\left\|f^{n+1}\right\|_{1,h}+(1-p)\left\|f^{n+1}\right\|_{1,h}\right)\\ &=\sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{1,h}+h^\alpha\Gamma\left(2-\alpha\right)\left\|f^{n+1}\right\|_{1,h}.\end{aligned}$$

现在，由 (21)、$\left\|u_0\right\|_{1,\ h}=1$ 以及 $t_{n+1}=(n+1)\,h$ 这一事实，可得

$$\left\|u^n\right\|_{1,h}=b_n-b_{n+1}+\sum_{j=1}^{n-1}\left(b_{n-j}-b_{n-j+1}\right)\left\|u^j\right\|_{1,h}+\frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha}+h^\alpha\Gamma\left(2-\alpha\right)\rho\left(h\right).$$

现在，我们将用归纳法证明

$$\left\|u^n\right\|_{1,h}\leq 1+nh^\alpha\Gamma\left(2-\alpha\right)\rho\left(h\right),\tag{22}$$

因为此时，

$$\|u^n\|_{1,h} \leq 1 + nhh^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\rho(h) \leq 1 + Th^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\rho(h),$$

这就是我们的结论。对于 $n=1$，由 (13) 可得

$$\left\|u^1\right\|_{1,h} \leq 2 - 2^{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{2^{1-\alpha}} + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h)$$

通过初等微积分可知，函数 $\alpha \mapsto 2 - 2^{1-\alpha} + (1-\alpha)(2^{\alpha-1}$ 为正，且下界为 2 (log $2 - e^{-1}$) /log 2，上界为 1。因此

$$\left\|u^1\right\|_{1,h} \leq 1 + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h).$$

现在，假设 (22) 对所有 $k=1$，2，.....，$n-1$ 均成立。对于 $n$，于是有

$$\left\|u^1\right\|_{1,h} \leq b_n - b_{n+1} + (1 + (n-1)h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h))\sum_{j=0}^{n-1}(b_{n-j} - b_{n-j+1}) + \frac{1-\alpha}{(n+1)^{\alpha}} + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h).$$

由于上面的和是望远镜求和，因此有

$$\left\|u^1\right\|_{1,h} \leq b_n - b_{n+1} + (1 + (n-1)h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h))(1-b_n) + \frac{1-\alpha}{(n+1)^{\alpha}} + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h) =$$
$$= 1 - b_{n-1} + \frac{1-\alpha}{(n+1)^{\alpha}} + (n-b_n)h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h) \leq 1 - b_{n-1} + \frac{1-\alpha}{(n+1)^{\alpha}} + nh^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h).$$

利用泰勒展开，可得

$$b_{n+1} \geq \frac{1-\alpha}{n^{\alpha}} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

因此，有

$$\left\|u^1\right\|_{1,h} \leq 1 - (1-\alpha)\left(\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\right) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} + nh^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h) \leq 1 + nh^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\rho(h),$$

这标志着证明结束。 □

# 4 数值模拟

本节通过几个数值示例来说明我们的结果。首先，采用余弦近似的形式 [9] 对狄拉克δ函数进行离散化

$$\delta(x) \approx \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{Kh}\right)}{2Kh}\mathbf{1}_{\{-Kh \leq x \leq Kh\}}(x),$$

其中，$h$ 为离散步长，$K \in \mathbb{N}_0$ 为选定的数值（我们取 $K=2$），而 **1** 为示性函数。在图 1、2 和 3 中，我们比较了对应于三类莱维行走的方程的数值解和解析解（使用 20），其中 $p \in \{0.05, 0.25, 0.5\}$ 和 $\alpha = 0.5$。我们取 $h = 2^{-11}$ 和 $T=1$。可以看出，该格式的有效性得到了验证，且精度良好。

类似地，在图 4、5 和 6 中，我们比较了对应于三类莱维行走的方程的数值解和解析解，其中 $\alpha \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ 和 $p = 0.25$。我们取$h = 2^{-11}$ 和 $T=1$。在所有情况下，我们的格式都表现出很高的精度。

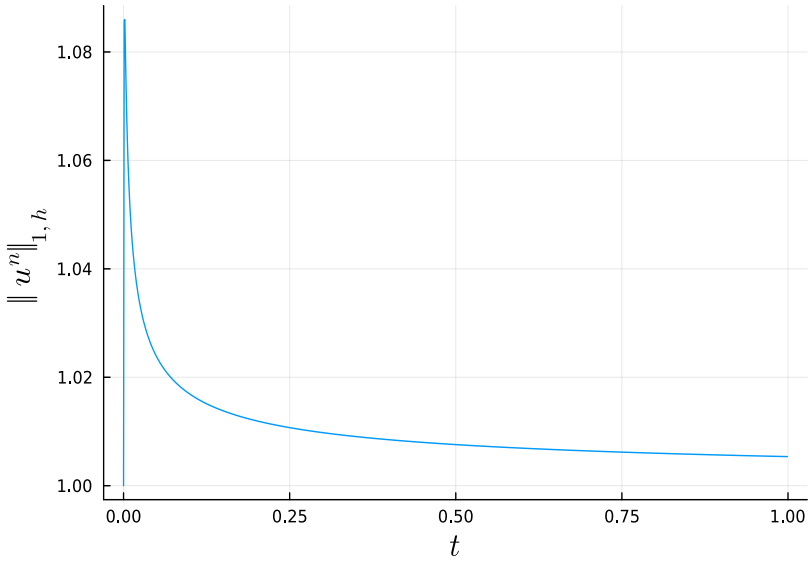


**图 7：** 采用标准有限体积迎风格式 (16)，对先等待 Lévy 行走标度极限的概率密度函数问题进行数值求解，并展示数值解在连续时间点上的总概率守恒定律。数值格式中使用的参数为$\alpha = 0.5,\quad p = 0.5,\quad h = 2^{-10}$。

图 7 和图 8 展示了各格式在求解先等待 Lévy 行走标度极限对应的方程时，随时间推移保持总概率的效果。传统有限体积迎风方法（(16)，图 7）和我们的改进方法（采用下一时间层的值计算源项；(20)，图 8）都满足守恒，即总概率从任一侧随时间逐渐趋近于 1。请注意，在 $t = 0$ 之后，狄拉克δ函数初始条件 $u(x,\ 0) = \delta(x)$ 会使初始概率值发生偏移。越过这一初始瞬态后，两种方法呈现出相反的行为：标准迎风离散得到的总概率持续下降，而改进格式则产生单调递增的曲线。特别是，命题 4 严格保证了改进格式中总概率的单调增长。

现在，我们在齐次问题 (15) 上检验格式，其中 $u(x,\ 0) = 0$ 且 $f(x,\ t) = t^{\mu}$ 满足$\mu > 0$。在这种情况下，解具有解析形式 $u(x,\ t) = \Gamma(\mu + 1)\, t^{\mu+\alpha}/\Gamma(\mu + \alpha + 1)$。这个闭式表达式使我们能够直接测量数值误差，并提取经验收敛阶。图 9 和图 10 展示了 $\mu = 1,\ 2$、网格尺寸为 $h \in \{2^{-12}, 2^{-11}, \ldots, 2^{-4}\}$ 和 $\alpha \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9\}$ 时的收敛率。数值实验表明，当$\mu = 1,\ 2$ 时，该格式在 $L^{\infty}$ 范数下的收敛率为 $r = 2 - \alpha$，这证实了高正则性情形下标准文献中的结果 [38]。另一方面，图 11 展示了首个等待时间为零的 Lévy 行走标度极限的概率密度函数在网格尺寸为 $h \in \{2^{-12}, 2^{-11}, \ldots, 2^{-4}\}$ 和 $\alpha \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9\}$ 时的收敛率。对于 $\alpha$ 的所有取值，范数 $L^2$ 下估计得到的收敛率均为 1，这证实了定理 3 的理论结果，并且与远离初始时刻计算的 Caputo 导数的 L1 离散相一致（见 [46]）。

# 5 结论

在本文中，我们引入并分析了一类由分数阶物质导数的凸组合驱动的线性输运方程，其动机来自 Lévy 行走的确定性极限。这是对 [41], 中所给出结果的重要推广，其中仅考虑了仅由单个分数阶物质导数驱动的方程。我们证明了存在性以及

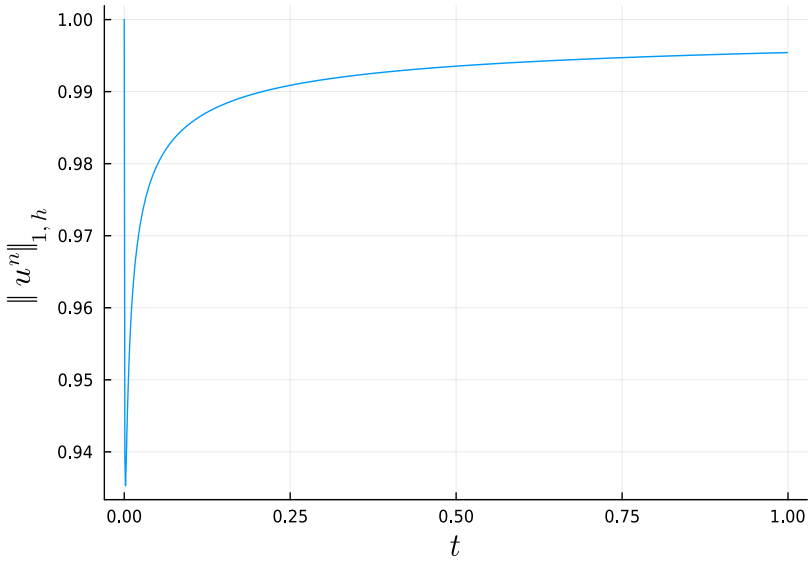


**图 8：** 先等待 Lévy 行走标度极限的概率密度函数问题（例 1）数值解在连续时间点上总概率守恒定律的可视化，采用修正有限体积迎风格式 (20)。数值格式所用参数为$\alpha = 0.5,\ \ p = 0.5,\ \ h = 2^{-10}$。

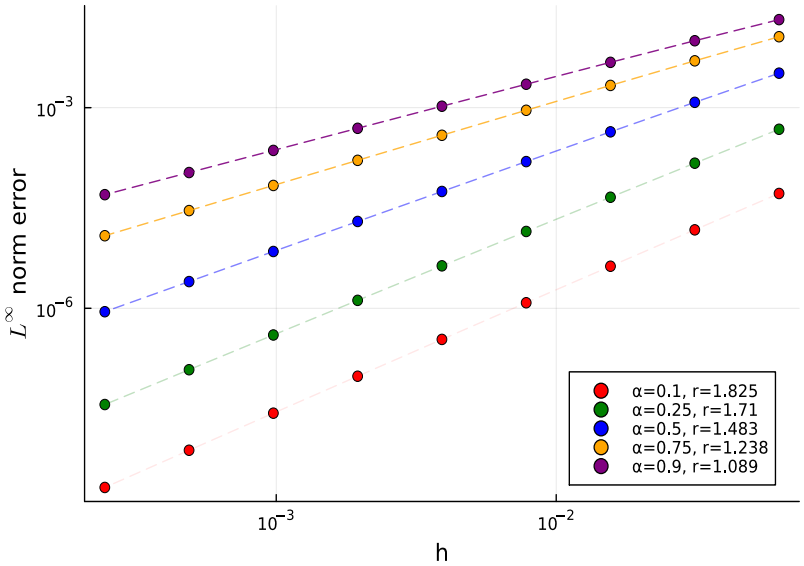


**图 9：** 在双对数坐标下，方程 (15) 在 $u(x,\ 0) = 0$、$f(x,\ t) = t$ 和 $p = 0.5$ 条件下的数值解关于 $h \in \{2^{-12}, 2^{-11}, \ldots, 2^{-4}\}$ 与 $\alpha \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9\}$ 的 $L^\infty$ 范数误差。

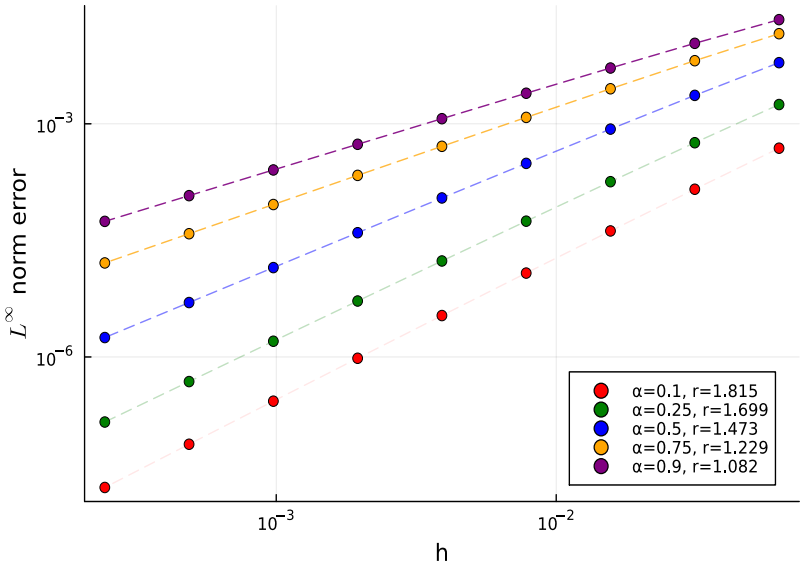


**图 10：** 在双对数坐标下，$u(x,\ 0) = 0$、$f(x,\ t) = t^2$ 和 $p = 0.5$ 时，方程 (15) 数值解的 $L^\infty$ 范数误差（$h \in \{2^{-12}, 2^{-1}, \ldots, 2^{-4}\}$ 和 $\alpha \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9\}$）。

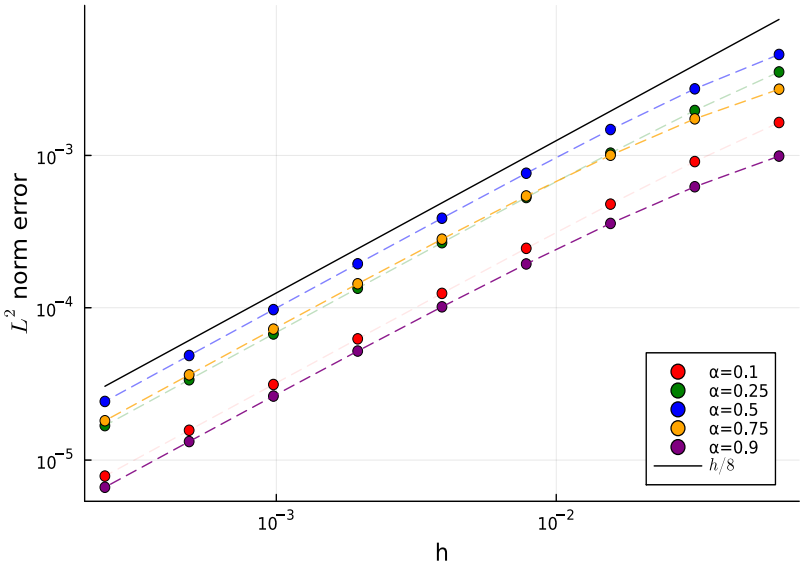


**图 11：** 在双对数坐标下，先等待 Lévy 行走标度极限的概率密度函数问题（见例 1）数值解的 $L^2$ 范数误差（$h \in \{2^{-12}, 2^{-1}, \ldots, 2^{-4}\}$ 和 $\alpha \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9\}$）。

（温和）解的唯一性。借助近期发展的分数阶物质导数逐点表示，我们确定了一个尖锐的充要条件，可确保解在所有时刻均保持为概率密度（非负性及总质量守恒）。为实现能够可靠计算且符合这些概率性质的方法，我们设计了一种有限体积离散化格式，其构造本身即可保证质量守恒。我们证明了离散稳定性，并建立了随着网格细化而收敛至连续解的结果；数值实验表明，该格式保持正性、在离散误差范围内守恒质量，并再现了与非对称莱维行走动力学相关的反常扩散现象，即右跳与左跳概率不相等的莱维行走的标度极限。总体而言，理论与数值结果相结合，为通过分数阶物质动力学对反常输运进行确定性建模与模拟，提供了一套一致且实用的框架。

本研究值得进一步探索的方向包括非线性模型、变系数与非均质介质、高维与各向异性，以及更精确的误差估计和收敛率（在存在奇异性的情况下尤为重要）。

## 致谢

本研究得到波兰国家科学中心（NCN）Sonata Bis 项目资助，项目编号为 NCN 2020年/38/E/ST1/00153。

## 参考文献

[1] Goro Akagi. 希尔伯特空间中由次微分驱动的分数阶流. 《以色列数学杂志》, 234(2):809–862, 2019年.[2] Mark Allen、Luis Caffarelli和Alexis Vasseur. 含分数阶时间导数的抛物问题. 《理性力学与分析档案》, 221:603–630, 2016年.[3] Luiz GA Alves、Débora B Scariot、Renato R Guimaraes、Celso V Nakamura、Renio S Mendes和Haroldo V Ribeiro. 锥虫类鞭毛原生动物运动模式中的瞬态超扩散与长程关联. *PLOS One*, 11(3):e0152092, 2016年.[4] Rafael Bailo、José A Carrillo、Stefano Fronzoni和David Gómez-Castro. 有界区域上分数阶扩散的有限体积格式. 《欧洲应用数学杂志》, 36(2):398–418, 2025年.[5] Pierre Barthelemy、Jacopo Bertolotti和Diederik S Wiersma. 光的莱维飞行. 《自然》, 453(7194):495–498, 2008年.[6] Dirk Brockmann、Lars Hufnagel和Theo Geisel. 人类出行的标度律. 《自然》, 439(7075):462–465, 2006年.[7] Eduardo Cuesta、Christian Lubich和Cesar Palencia. 分数阶扩散波动方程的卷积求积时间离散. 《计算数学》, 75(254):673–696, 2006年.[8] Diego del Castillo-Negrete、Benjamin A Carreras和Vickie E Lynch. 等离子体湍流中的非扩散输运：一种分数阶扩散方法. 《物理评论快报》, 94(6):065003, 2005年.[9] Vincenzo Schiano Di Cola、Salvatore Cuomo和Gerardo Severino. 关于狄拉克δ函数数值逼近的注记. 《应用数学进展》, 12:100200, 2021年.

[10] Serena Dipierro、Enrico Valdinoci和Vincenzo Vespri. 含分数阶时间扩散的演化方程的衰减估计. 演化方程杂志, 19:435–462, 2019年.[11] Abd El-Ghany El Abd、SE Kichanov、Mohamed Taman、Kuanysh M Nazarov、Denis P Kozlenko和Wael M Badawy. 用中子照相测定多孔建筑砖中的水分分布. 应用辐射与同位素, 156:108970, 2020年.[12] Marta C Gonzalez、Cesar A Hidalgo和Albert-Laszlo Barabasi. 理解个体人类移动模式. 《自然》, 453(7196):779–782, 2008年.[13] Nicolas E Humphries和David W Sims. 最优觅食策略：莱维行走在非常广泛的条件下平衡搜索与斑块利用. 理论生物学杂志, 358:179–193, 2014年.[14] Antoine Jacquier和Lorenzo Torricelli. 期权价格中的反常扩散：关联交易持续时间与波动率期限结构. *SIAM*金融数学杂志, 11(4):1137–1167, 2020年.[15] 金邦梯、李步扬和周智. 含时系数的亚扩散：分析与数值解. 《计算数学》, 88(319):2157–2186, 2019 年 .[16] Samir Karaa 、 Kassem Mustapha 和 Amiya K Pani. 二维分数次扩散问题的有限体积元法. *IMA*数值分析杂志, 37(2):945–964, 2017年.[17] Trevor AM Langlands和Bruce I Henry. 分数趋化扩散方程. 《物理评论*E*》—统计、非线性与软物质物理, 81(5):051102, 2010年.[18] John K Lawrence和Carolus J Schrijver. 磁元横越太阳表面的反常扩散. 天体物理学报，第*1*部分（*ISSN 0004-637X*），第*411*卷，第*1*期，第*402-405*页。, 411:402–405, 1993年.[19]李常品和曾凡海. 分数阶微积分的数值方法. Chapman & Hall/CRC数值分析与科学计算. CRC出版社，博卡拉顿, 2015年.[20] 林玉民和许传炬. 时间分数扩散方程的有限差分/谱逼近. 计算物理杂志, 225(2):1533–1552, 2007年.[21] 刘发旺、庄平辉、Ian Turner、Kevin Burrage和Vo Anh. 求解分数扩散方程的一种新的分数有限体积法. 应用数学建模, 38(15-16):3871–3878, 2014年.[22] Maria López-Fernández和Łukasz Płociniczak. 拟线性次扩散方程的卷积求积. *SIAM*数值分析杂志, 63(4):1482–1511, 2025年.[23] Marcin Magdziarz、Hans-Peter Scheffler、Peter Straka和Piotr Żebrowski. 莱维行走的极限定理与控制方程. 随机过程及其应用, 125(11):4021–4038, 2015年11月.[24] Marcin Magdziarz和Marek Teuerle. 多维莱维游走的渐近性质与数值模拟. 《非线性科学与数值模拟通讯》, 20(2):489–505, 2015年.[25] Marcin Magdziarz、Marek Teuerle和Piotr Żebrowski. 过冲莱维游走的标度极限. 《波兰物理学报*B*》, 43:1111–1132, 2012年.

[26] Marcin Magdziarz 和 Tomasz Zorawik。莱维行走的极限性质。《物理学杂志*A*：数学与理论》，53(50):504001，2020年11月。[27] Richard L Magin。生物组织复杂动力学的分数阶微积分模型。《计算机与应用数学》，59(5):1586–1593，2010年。[28] Rosario N Mantegna 和 H Eugene Stanley。经济指数动态中的标度行为。《自然》，376(6535):46–49，1995年。[29] Nicolas Mercadier、William Guerin、Martine Chevrollier 和 Robin Kaiser。热原子蒸气中的光子莱维飞行。《自然·物理》，5(8):602–605，2009年。[30] Ralf Metzler 和 Joseph Klafter。反常扩散指南：分数阶动力学方法。《物理学报告》，339(1):1–77，2000年。[31] Sebastian Müller、Markus Kästner、Jörg Brummund 和 Volker Ulbricht。聚合物的非线性分数阶黏弹性材料模型。《计算材料科学》，50(10):2938–2949，2011年。[32] Kassem Mustapha。时间分数阶扩散方程的有限元法：新颖的最优误差分析。《计算数学》，87(313):2259–2272，2018年。[33] Yakov Pachepsky、David Benson 和 Walter Rawls。利用分数阶对流-弥散方程模拟土壤中尺度依赖的溶质运输。《美国土壤科学学会杂志》，64(4):1234–1243，2000年。[34] Łukasz Płociniczak。Erdélyi–Kober算子的近似及其在时间分数阶多孔介质方程中的应用。《*SIAM*应用数学杂志》，74(4):1219–1237，2014年。[35] Łukasz Płociniczak。时间分数阶多孔介质方程的解析研究：推导、近似与应用。《非线性科学与数值模拟通讯》，24(1-3):169–183，2015年。[36] Łukasz Płociniczak。水文环境中分数阶多孔介质方程非局部压力形式的推导。《非线性科学与数值模拟通讯》，76:66–70，2019年。[37] Łukasz Płociniczak。时变系数和非光滑数据下半线性亚扩散方程的Galerkin格式误差。《计算机与应用数学》，127:181–191，2022年。[38] Łukasz Płociniczak。拟线性亚扩散方程的线性Galerkin数值方法。《应用数值数学》，185:203–220，2023年。[39] Łukasz Płociniczak 和 Mateusz Świtała。时间分数阶非线性扩散方程的存在唯一性结果。《数学分析与应用杂志》，462(2):1425–1434，2018年。[40] Łukasz Płociniczak 和 Kacper Taźbierski。含非光滑数据和时变系数的半线性亚扩散方程的全离散Galerkin格式。《计算机与应用数学》，165:217–223，2024年。[41] Łukasz Płociniczak 和 Marek A Teuerle。从莱维行走到分数阶物质导数：逐点表示与数值格式。《非线性科学与数值模拟通讯》，139:108316，2024年12月。

[42] Andy M Reynolds 和 Christopher J Rhodes。莱维飞行范式：随机搜索模式及其机制。《生态学》，90(4):877–887，2009年。[43] Kenichi Sakamoto 和 Masahiro Yamamoto。分数阶扩散波方程的初值/边值问题及其在若干反问题中的应用。《数学分析与应用杂志》，382(1):426–447，2011年。[44] Michael F Shlesinger、George M Zaslavsky 和 Joseph Klafter。奇异动力学。《自然》，363(6424):31–37，1993年。[45] Igor M. Sokolov 和 Ralf Metzler。迈向莱维行走的确定性方程：分数阶物质导数。《物理评论*E*》，67(1):010101，2003年。[46] Martin Stynes、Eugene O'Riordan 和 José Luis Gracia。分级网格上时间分数扩散方程有限差分法的误差分析。*SIAM*数值分析杂志，55(2):1057–1079，2017年。[47] Titiwat Sungkaworn、Marie-Lise Jobin、Krzysztof Burnecki、Aleksander Weron、Martin J Lohse 和 Davide Calebiro。单分子成像揭示细胞表面热点处的受体–G蛋白相互作用。《自然》，550(7677):543，2017年。[48] SM Ali Tabei、Stanislav Burov、Hee Y Kim、Andrey Kuznetsov、Toan Huynh、Justin Jureller、Louis H Philipson、Aaron R Dinner 和 Norbert F Scherer。胰岛素颗粒的细胞内运输是一种从属随机游走。《美国国家科学院院刊》，110(13):4911–4916，2013年。[49] Vicente Vergara 和 Rico Zacher。通过能量方法获得时间分数阶及其他非局部亚扩散方程的最优衰减估计。《*SIAM*数学分析杂志》，47(1):210–239，2015年。[50]Gandimohan M Viswanathan、Sergey V Buldyrev、Shlomo Havlin、Marcos GE da Luz、Ernesto P Raposo 和 H Eugene Stanley。优化随机搜索的成功率。《自然》，401(6756):911–914，1999年。[51] Petra Wittbold、Patryk Wolejko 和 Rico Zacher。时间分数阶多孔介质型及更一般的非线性退化演化积分微分方程的有界弱解。《数学分析与应用杂志》，499(1):125007，2021年。[52] Ian Y Wong、Margaret L Gardel、David R Reichman、Eric R Weeks、Megan T Valentine、Andreas R Bausch 和 David A Weitz。反常扩散揭示缠结F-肌动蛋白网络的微观结构动力学。《物理评论快报》，92(17):178101，2004年。[53] Vasily Zaburdaev、Sergey Denisov 和 Joseph Klafter。莱维行走。《现代物理评论》，87(2):483–530，2015年。