arXiv:2602.02183v1 [math.GR] 2 Feb 2026

密度为 $d < 1/2$ 的随机群：广义挠的尖锐长度不等式，以及通过一阶迁移实现的固定宽度排除

HYUNGRYUL BAIK

Abstract. 设 G 是 Gromov 密度模型 $G(m, d, L)$ 中的一个随机群，且 $d < \frac{1}{2}$。我们证明，等于单位元的共轭元乘积满足一个尖锐的定量约束：对于任意 $n \geq 1$ 和 $\varepsilon > 0$，当 $L \to \infty$ 时，以压倒性概率，任意紧字

$$W = \prod_{i=1}^{n} h_i^{-1} g h_i = 1 \quad \text{in } G$$

（其中 $g \neq 1$ 是一个字）都满足不等式

$$\sum_{i=1}^{n} |h_i| \; > \; \frac{1 - 2d - \varepsilon}{2} \, L \; - \; \frac{n}{2} \, |g|.$$

证明基于一个简短的范坎彭图论证：Ollivier 的尖锐等周不等式迫使某个 2- 胞腔有相当大比例的边界落在外边界上，而一个简单的边界分块计数估计则给出这一走廊型下界。作为推论，我们得到在任意密度 $d < \frac{1}{2}$ 下关于广义挠的一致短见证排除和宽度–长度权衡。我们还根据 Kharlampovich、Miasnikov 和 Sklinos 最近的一阶转移定理，推得随机群不存在任何固定宽度的广义挠。

1. Introduction

Gromov 密度模型为研究“典型”的有限表现群提供了一个框架。对于密度 $d < \frac{1}{2}$，随机群几乎必然是非初等双曲群，并满足线性等周不等式。Ollivier 给出了一种特别强的形式：对于每个 $\eta > 0$，当 $L \to \infty$ 时，以压倒性概率，每个约化范坎彭图 Δ 都满足

$$|\partial \Delta| \; \geq \; (1 - 2d - \eta) \, L \cdot \mathrm{Area}(\Delta)$$

[6, 7]。（在全文中，w.o.p. 表示当 $L \to \infty$ 时概率趋于 1，其中固定 m, d。）

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20F65, 20F67, 20E08, 20P05, 03C60.
Key words and phrases. 随机群、Gromov 密度模型、广义挠元、等周不等式、一阶逻辑。

我们关注广义挠。非平凡元素 $g \in G$ 具有宽度为 n 的广义挠，当且仅当

$$(h_1^{-1} g h_1) \cdots (h_n^{-1} g h_n) = 1$$

对某些 h_1、……、$h_n \in G$ 成立。这是对双序性的一个障碍（自由群是广义无挠的），但双曲性并不能排除这种情况：无挠双曲群可能含有广义挠 [1]。虽然已知随机群不是左可序的 [8], ，但广义挠的定量约束仍值得研究。

主要定量结果。我们的主要贡献是在任意密度下，对乘积等于单位元的共轭元乘积给出一个尖锐长度不等式$d < \frac{1}{2}$。证明结合了 Ollivier 的尖锐等周不等式与一个简短的边界计数论证：尖锐等周不等式迫使某个 2-胞腔贡献许多边界边，而对这些边中落在 g-块内的边数作最坏情形上界，即可得到该不等式。

定理 1.1（密度 $d < 1/2$ 下的尖锐长度不等式）。固定 $d < 1/2$、$n \geq 1$ 和 $\varepsilon > 0$。在密度模型 $G(m, d, L)$ 中，当 $L \to \infty$ 时，以压倒性概率，以下结论成立。

若一个紧字

$$W = \prod_{i=1}^{n} h_i^{-1} g h_i$$

（其中 $g \neq 1$ 是一个字，且循环旋转后括号两侧不会发生约简）在随机群中表示1，那么

$$\sum_{i=1}^{n} |h_i| \; > \; \frac{1 - 2d - \varepsilon}{2} \, L \; - \; \frac{n}{2} \, |g|. \tag{1}$$

在第 3 节中，我们推导出两个直接推论：一致的短见证排除，以及宽度—长度权衡（推论 3.2–3.3）。

一个一般性的图示原理及其逻辑推论。第 2 节提炼出其潜在机制：在任何关系词长度固定且满足严格线性等周不等式的群表示中，同一不等式都成立（定理 2.7）。最后，利用 Kharlampovich–Miasnikov–Sklinos [4] 的一阶转移定理（另见 [2, 3]），我们推导出随机群的固定宽度排除结论（推论 4.2）。

2. A general estimate from a large boundary face

紧共轭正规形。

定义 2.1（紧共轭正规形）。边界标记 W 处于紧共轭正规形，宽度为 n，如果它写成

$$W = \prod_{i=1}^{n} h_i^{-1} g h_i$$

其中 g, h_1, ..., h_n 各自都是自由约化的, $g \neq 1$ 作为一个字亦然, 并且在括号之间不发生消去（在旋转该乘积之后, 按循环意义）。

注 2.2. 任何形如 $\prod_{i=1}^{n}(h_i^{-1}gh_i) = 1$ 的等式, 都可以通过自由约化和循环旋转收紧为定义 2.1 的形式, 且不会增大 $|g|$ 或 $\sum_i |h_i|$。因此, 我们始终采用紧形式。关键的是, 若 W 是紧的, 则它作为一个词是**循环约化**的。这保证了 W 的任何最小范坎彭图都是约化的（即不含支刺或细丝）, 从而可以对约化图应用等周不等式。

由一个大边界面得到的下界。

引理 2.3 （由一个大边界面得到的下界）。 设 $W = \prod_{i=1}^{n} h_i^{-1}gh_i$ 处于紧共轭正规形式, 并假设 $W = 1$ 属于某个群表示。设 Δ 是 W 的约化范坎彭图。若存在一个 *2*-胞腔 D , 满足

$$|\partial D \cap \partial\Delta| > \alpha,$$

then

$$\sum_{i=1}^{n} |h_i| \;>\; \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{2}|g|. \tag{2}$$

证明。 令 $q := \partial D \cap \partial\Delta$。沿着 $\partial\Delta$, 边界词 W 由 n个 $g^{\pm 1}$-块（每块长度为 $|g|$）和 $2n$个 $h_i^{\pm 1}$-块（总长度为$2\sum_i |h_i|$）组成。

令 $S_g(q)$表示 q 中位于 $g^{\pm 1}$-块内的边数, $S_h(q)$表示位于 $h_i^{\pm 1}$-块内的边数。于是 $S_g(q) + S_h(q) = |q|$。由于 q 是 $\partial\Delta$的一条子路径, q 中的 g-边数不能超过 $\partial\Delta$中的 g-边总数。因此 $S_g(q) \leq n|g|$。由此可得

$$S_h(q) = |q| - S_g(q) > \alpha - n|g|.$$

但 $S_h(q) \leq 2\sum_i |h_i|$, 因为 $S_h(q)$是 $\partial\Delta$上总 h-长度的一部分。因此 $2\sum_i |h_i| > \alpha - n|g|$, 即式 (2)。□

注记 2.4. 一个 2-胞腔所贡献的边界部分 q 控制了“支撑”该字所需的总 h-长度, 且仅使用最坏情形上界 $S_g(q) \leq n|g|$。我们不要求 q 为单条弧; 只有其总长度起作用。

一个严格的线性等周推论（小幅推广）。

定义 2.5。 设 $\langle X \mid R\rangle$ 是一个群表示, 其中每个关系词的长度都恰好为 L。固定 $\beta \in (0, 1]$。我们称该群表示满足 严格（β, L）线性等周不等式, 如果每个约化范坎彭图Δ 满足 $\mathrm{Area}(\Delta) \geq 1$, 则有

$$|\partial\Delta| \;>\; \beta L \cdot \mathrm{Area}(\Delta).$$

引理 2.6（严格线性等周性给出的大边界面）。 假设每个关系词的长度都恰好为 L。如果一个约化范坎彭图Δ 满足 $|\partial\Delta| > \beta L \cdot \mathrm{Area}(\Delta)$，其中某个 $\beta > 0$，那么存在一个 2-胞腔D，使得

$$|\partial D \cap \partial\Delta| > \beta L.$$

证明。 $\partial\Delta$ 的每条边界边都与唯一一个 2-胞腔关联。因此

$$\sum_D |\partial D \cap \partial\Delta| = |\partial\Delta|.$$

除以 Area(Δ) 后，每个面的平均边界贡献为$|\partial\Delta|/$ Area(Δ)。若该平均值为 $> \beta L$，则存在某个面满足 $|\partial D \cap \partial\Delta| > \beta L$。□

定理 2.7（严格线性等周不等式推出的结论）。 假设 $\langle X \mid R\rangle$的关系词长度恰为 L，并且按照定义 *2.5* 的意义满足严格的 (β, L)-线性等周不等式。若 $W = \prod_{i=1}^n h_i^{-1} g h_i$ 处于紧共轭正规形，且在 $G = \langle X \mid R\rangle$中表示 1，则

$$\sum_{i=1}^n |h_i| \;>\; \frac{\beta}{2} L \;-\; \frac{n}{2} |g|.$$

证明。 设 Δ 是 W的一个约化范坎彭图。根据假设，$|\partial\Delta| > \beta L\mathrm{Area}(\Delta)$, 且 Area(Δ) ≥ 1，因为 $g \neq 1$ 并且 W 是紧的。应用引理 2.6，得到一个满足 $|\partial D \cap \partial\Delta| > \beta L$的 2-胞腔 D，再应用引理 2.3，其中 $\alpha = \beta L$。□

确定性的 $C'(1/6)$ 比较。 我们纳入经典的确定性特例，由此得到直接的小消去类比。

命题 2.8。 假设有限表示 $\langle X \mid R\rangle$ 满足 $C'(1/6)$，并令 $L_{\min} = \min\{|r| : r \in R\}$。若 $W = \prod_{i=1}^n h_i^{-1} g h_i$ （紧共轭正规形）在 G 中表示 1，则

$$\sum_{i=1}^n |h_i| \;>\; \frac{1}{4} L_{\min} \;-\; \frac{n}{2} |g|.$$

特别地，若 $\sum_i |h_i| < \frac{1}{4} L_{\min}$，则必有 $|g| \geq \frac{1}{4n} L_{\min}$。

证明。 设 Δ 是 W的一个约化范坎彭图。在 $C'(1/6)$ 条件下，格林林格引理给出一个 2-胞腔 D，其外弧 $q \subset \partial\Delta$ 的长度为$|q| > \frac{1}{2} L_{\min}$（例如参见 [5, 第 V 章]）。因此 $|\partial D \cap \partial\Delta| > \frac{1}{2} L_{\min}$。应用引理 2.3，其中 $\alpha = \frac{1}{2} L_{\min}$。□

注 2.9。 在许多标准的非退化情形中（例如，循环约化边界且 Area(Δ) ≥ 2），可得到两个不同的面，它们各自贡献一条外弧 $> \frac{1}{2} L_{\min}$。将二者结合起来（边界边互不相交），可将常数改进为 $\sum_i |h_i| > \frac{1}{2} L_{\min} - \frac{n}{2} |g|$。

3. Random groups at density $d<1/2$ (proof of Theorem 1.1)

现在，我们将讨论专门应用于 Gromov 密度模型 $G(m,\ d,\ L)$ 的情形，并证明定理 1.1 及其推论。

引理 3.1 (Ollivier [6, 7])。 固定 $d<1/2$ 和 $\eta>0$。在 $G(m,d,L)$ 中，当 $L\to\infty$ 时，以压倒性概率，每个约化范坎彭图 Δ 都满足

$$|\partial\Delta|\ \geq\ (1-2d-\eta)\,L\cdot\mathrm{Area}(\Delta). \tag{3}$$

定理 *1.1* 的证明。固定 $d<1/2$、$n\geq 1$ 和 $\varepsilon>0$。设 G 是 $G(m,\ d,\ L)$ 中的一个随机群。设 $W=\prod_{i=1}^{n}h_i^{-1}gh_i$ 是紧的，并假设 $W=1$ 属于 G。设 Δ 是 W 的一个约化范坎彭图。

应用引理 3.1，其中取 $\eta=\varepsilon/2$。于是，以压倒性概率

$$|\partial\Delta|\ \geq\ (1-2d-\varepsilon/2)\,L\cdot\mathrm{Area}(\Delta)\ >\ (1-2d-\varepsilon)\,L\cdot\mathrm{Area}(\Delta),$$

因此，随机群表示满足定义 2.5 中的严格 $(\beta,\ L)$-线性等周不等式，其中 $\beta\ =\ 1-2d-\varepsilon$。应用定理 2.7 可得 (1)。□

推论 3.2 (短见证排除)。 固定 $d<1/2$、$n\geq 1$ 和 $\varepsilon>0$。在$G(m,d,L)$中，当 $L\to\infty$ 时，以压倒性概率不存在满足以下条件的紧关系 $W=\prod_{i=1}^{n}h_i^{-1}gh_i=1$

$$|g|\leq\frac{1-2d-\varepsilon}{2n}\,L\qquad and\qquad \sum_{i=1}^{n}|h_i|\leq\frac{1-2d-\varepsilon}{4}\,L.$$

证明。 假设 $|g|\leq\frac{1-2d-\varepsilon}{2n}L$。那么由定理 1.1 可得

$$\sum_{i=1}^{n}|h_i|>\frac{1-2d-\varepsilon}{2}L-\frac{n}{2}\cdot\frac{1-2d-\varepsilon}{2n}L=\frac{1-2d-\varepsilon}{4}L,$$

这与 $\sum_{i=1}^{n}|h_i|\leq\frac{1-2d-\varepsilon}{4}L$ 的假设相矛盾。 ——— □

推论 3.3 (宽度—长度权衡)。 固定 $d<1/2$ 和 $\varepsilon>0$。在$G(m,d,L)$中，当 $L\to\infty$ 时，以压倒性概率，任意紧关系 $W=\prod_{i=1}^{n}h_i^{-1}gh_i=1$ 都满足

$$n\ >\ \frac{(1-2d-\varepsilon)L-2\sum_{i=1}^{n}|h_i|}{|g|}. \tag{4}$$

特别地，如果 $|g|$ 不依赖于 L 和 $\sum|h_i|\leq cL$而有界，且$c<\frac{1}{2}(1-2d-\varepsilon)$，那么 n必然随 L线性增长。

证明。 将 (1) 重写为 $n|g|>(1-2d-\varepsilon)L-2\sum_i|h_i|$，再除以 $|g|>0$。□

注 3.4. 在 $d<1/12$，以压倒性概率 $C'(1/6)$ 和 $L_{\min}=L$ 成立，而命题 2.8 给出了确定性比较。定理 1.1 将定量障碍推广到每个 $d<1/2$，其常数为最优值 $1-2d$。

4. First-order transfer and a fixed-width corollary

我们在群的语言 $L_{\mathrm{grp}} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ 中进行讨论。对于每个 $n \geq 1$，考虑以下句子

$$\varphi_n := \exists g \neq 1 \ \exists h_1, \ldots, h_n \ \big((h_1^{-1} g h_1) \cdots (h_n^{-1} g h_n) = 1\big).$$

那么，当且仅当 G 包含一个宽度为 n 的广义挠元时，$G \models \varphi_n$。

非阿贝尔自由群可双序（例如借助 Magnus 序），因此是广义无挠的。所以对所有 $n \geq 1$，$F_m \models \neg\varphi_n$。

我们使用以下转移定理。

定理 4.1 (Kharlampovich–Miasnikov–Sklinos [4])。 固定 $d < 1/2$。一阶句子 σ 在随机群（密度 d）中以压倒性概率成立，当且仅当它在非阿贝尔自由群中成立。

推论 4.2 （通过一阶迁移进行固定宽度排除）。 固定 $n \geq 1$ 和 $d < 1/2$。在 *Gromov* 密度模型 $G(m, d, L)$ 中，随机群 G 以压倒性概率满足：当 $L \to \infty$ 时，不含宽度为 n 的广义挠。

证明。 由于 $F_m \models \neg\varphi_n$，定理 4.1 表明，在密度为 $d < 1/2$ 的情况下，随机群以压倒性概率满足 $\neg\varphi_n$。□

注 4.3。 推论 4.2 是定性的（它排除了每一个固定宽度），而定理 1.1 则给出了适用于任何潜在见证的显式长度不等式，并在长度限制下对宽度施加定量约束。

Acknowledgements

作者感谢 Khanh Le 和 Wonyong Jang 进行的许多富有成果的讨论。本研究得到韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：RS-2025-00513595）支持。

References

[1] T. Ito、K. Motegi 和 M. Teragaito, *Generalized torsion for hyperbolic 3-manifold groups with arbitrary large rank* **55** 6 2023 2870 2879 ，《伦敦数学学会通报》（）（）–。[2] O. Kharlampovich 和 R. Sklinos, *First-order sentences in random groups I: universal sentences* 2106 05461 2021 ，预印本，arXiv:。（）。

[3] O. Kharlampovich 和 R. Sklinos, *First-order sentences in random groups II: ∀∃-sentences* 2212 11780 2022 ，预印本，arXiv:。（）。

[4] O. Kharlampovich、A. Miasnikov 和 R. Sklinos, *First-order sentences in random groups III* 2507 19740 2025 ，预印本，arXiv:。（）。

[5] R. C. Lyndon 和 P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer, 1977。[6] Y. Ollivier, *Some small cancellation properties of random groups*, 预印本, arXiv:math/0409226（2004）。[7] Y. Ollivier, *Some small cancellation properties of random groups*, 《国际代数与计算杂志》**17(1)**（2007）37–51。[8] D. Orlef, *Random groups are not left-orderable*, 《Colloq. Math.》**150(2)**（2017）175–185。

Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon, 34141, South Korea*Email address*: hrbaik@韩国科学技术院.ac.kr