arXiv:2602.02194v1 [math.DG] 2 Feb 2026

闵可夫斯基空间中的格罗莫夫双曲域

ADAM CHALUMEAU

摘要。我们研究闵可夫斯基空间中的区域，这些区域相对于 Markowitz 于 20 世纪 80 年代引入的一种 Kobayashi 类度量具有格罗莫夫双曲性。对于凸的未来完备域，我们证明，格罗莫夫双曲性等价于其边界的稳定非因果性。对于有界、凸且因果凸的域，我们还从其 Geroch–Kronheimer–Penrose 因果边界的稳定非因果性出发，得到类似的刻画。我们的方法基于 Markowitz度量、Sormani–Vega 零距离和拟双曲度量之间的显式比较。我们还运用了类似于 Benoist 和 Zimmer 在射影几何与复几何中的动力学论证。最后，我们比较了 Markowitz度量与希尔伯特度量。

1. 引言

本文研究区域Ω在闵可夫斯基空间 $\mathbf{R}^{1,n}$ 使得某个 Kobayashi 类度量在格罗莫夫意义下是双曲的 [Gro87]。该度量记为 δ_Ω，由 Markowitz 引入并研究 [Mar81，Mar82] ，其背景为共形伪黎曼流形，作为射影几何中 Kobayashi–Hilbert 度量的类比 [Kob84]。它最近被 Galiay 与作者 [CG25] 用来证明伪黎曼闵可夫斯基空间中有界域的一个刚性结果，此后又在 [Cha24，Cha25，Gal25] 中得到进一步研究。在本工作中，我们聚焦于空间 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 的度量性质，并特别关注以下问题：

问题 1. 1. 对于哪些区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n}$，度量空间 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的?

这个问题的动机在于，关于其他 Kobayashi 类度量的类似问题已有深入研究。在射影几何中，Karlsson 和 Noskov [KN02] 给出了凸域边界的充要条件，以判定希尔伯特度量是否具有格罗莫夫双曲性 $\Omega\ H_\Omega$，推广了 Benoist [Ben04] 关于可除凸域的一个结果。随后，Benoist [Ben03]对希尔伯特度量的双曲性给出了完整刻画：

定理 1.2 (Benoist)。 设Ω 是$\mathbf{R}^n$中的有界凸域。那么，$(\Omega\ H_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的，当且仅当Ω 是拟对称凸的。

在复几何中，域 K_Ω 上的 Kobayashi 度量$\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 的格罗莫夫双曲性也是一个核心课题。Balogh 和 Bonk [BB00] 证明了，$\mathbf{C}^n$ 中的有界强拟凸域上的 Kobayashi 度量是格罗莫夫双曲的。Gaussier 和 Seshadri[GS18] 随后研究了有界光滑凸域的格罗莫夫双曲性，而 Zimmer [Zim16]给出了这一情形下的完整刻画：

定理 1.3 （Zimmer）。 设 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中具有光滑边界的有界凸域。则 $(\Omega\ K_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 Ω 具有有限型。

后来， [Zim17、Zim22、Fia22]在更一般的情形下给出了进一步的刻画。Fiacchi 还研究了另一种 Kobayashi 类度量的双曲性 [Fia24],

他给出了由 Forstnerič 和 Kalaj 引入的极小度量具有格罗莫夫双曲性的充要条件 [FK24]。最近，Wang 和 Zimmer [WZ24]证明了，在Ω 上的$\mathbf{R}^n$ 有界凸域中，若边界光滑，则该极小度量是格罗莫夫双曲的，当且仅当仿射平面与 $\partial\Omega$的接触阶有限。他们的工作还为 Benoist 和 Zimmer 的上述结果提供了新的证明。

本文旨在将洛伦兹背景下 Kobayashi 类度量的格罗莫夫双曲性研究加以拓展。

1.1. 主要结果。我们首先在 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中有界、凸且因果凸的域这一情形下讨论问题 1.1；这意味着，任何端点位于 Ω 中的 $\mathbf{R}^{1,n}$ 因果曲线都完全包含在 Ω 内。从洛伦兹几何的角度来看，这一假设很自然，因为它保证 Ω 配备诱导共形结构后是整体双曲的。在这种背景下，Ω 的边界包含两个典范的拓扑超曲面$\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$，分别称为未来因果边界和过去因果边界。根据 Smaï [Sma23],的研究，这些超曲面与 Geroch–Kronheimer–Penrose [GKP72], 所定义的抽象因果边界典范地同一，见第 3 节。

我们的第一个结果根据因果边界的几何性质，刻画了 Markowitz度量的格罗莫夫双曲性。若$\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个子集满足：即使对$\mathbf{R}^{1,n}$上的平坦度量作微小扰动，其中任意两点仍由一条类空线段连接，则称该子集是稳定非因果 的，见定义 3.6。

定理 A. 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个有界、凸且因果凸域。那么，$(\Omega\ \delta_\Omega)$是格罗莫夫双曲的，当且仅当 $\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 是稳定非因果的。

有些出人意料的是，前述区域的拓扑边界 $\partial\Omega$ 从来不是 C^1 类的。这与$\mathbf{RP}^n$ 中凸域的情形形成对比：对于这类域，若希尔伯特度量是格罗莫夫双曲的，则边界必须是 C^1，见 [KN02,Ben03]。特别地，定理 A 表明，存在无穷多个$\mathbf{R}^{1,n}$中的凸域 Ω，使得度量 δ_Ω 不等价于希尔伯特度量 H_Ω，见推论 10.1。更一般地，这两种度量似乎不可比较；关于二维情形的完整比较，见第 10 节。

前面的定理对于某些无界因果凸域也有类似结论。回忆一下，域Ω 是未来完备的，如果在$\mathbf{R}^1\Phi^n$ 从Ω 出发的任何未来指向因果曲线都完全包含在Ω内。有界因果凸域在研究整体双曲平坦时空 [Bon05、Bar05] 和共形平坦时空[Sma24、Sma25], 中发挥着重要作用，而如今人们已经相当深入地了解了它们的几何性质，例如参见 [BSS23]。

定理 B。 设Ω 是$\mathbf{R}^1\Phi^n$ 不含类光直线的凸未来完备域。那么$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 $\partial\Omega$ 是稳定非因果的。

再次地，定理 B 给出了一大类边界可能不光滑的格罗莫夫双曲区域 Ω。例如，爱因斯坦–德西特空间，即由类空超平面界定的半空间，是格罗莫夫双曲的。在此情形下，度量空间$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 与实双曲空间$\mathbf{H}^{n+1}$双利普希茨等距，见第 9 节。

相比之下，根据定理 B，任何边界包含类光线段的凸未来完备域都不是格罗莫夫双曲的。例如，闵可夫斯基空间中的正则域不是格罗莫夫双曲的，因为它们的边界包含类光线段，参见 [Bon05]。

注 1.4. 请注意，在定理 B 中，假设 Ω 不包含类光直线，仅用于确保 δ_Ω 在 Ω 上定义了一个距离，参见命题 2.9。此外，对于“若”方向，可以去掉 Ω 的凸性假设，参见定理 5.1。

1.2. **与零距离的比较**。 本文提供了一个机会，让我们将 Markowitz度量与最近在时空上定义的一种度量进行比较，该度量称为零距离。Sormani–Vega [SV16] 将这种距离引入为共形时空 $M, [g])$ 上与时间函数 τ相关的度量构造 M。事实证明，它是分析时空及其收敛性的有力工具，例如参见 [AB22,KS22,BGH24]。Markowitz度量和零距离都根据分段类光曲线的某些长度概念来定义，因此自然会想到它们应该具有可比性，详见第 6.2 节中的讨论。在许多情形下，我们证明了 Markowitz度量与零距离等价或拟等距等价，参见第 6 节。如下文所述，这些比较用于定理 A 和 B 的证明。这些比较的另一个结果是下面的定理。

定理 C. 定理 *A* 和 *B* 对零距离也有相应的结论。具体而言，若将 δ_Ω 替换为零距离 $\hat{}d_{\ln(\tau^-/\tau^+)}$，其中 τ^+ 和 τ^- 是$\hat{}\Omega$ 的宇宙学时间函数，则定理 *A* 成立；若将 δ_Ω 替换为零距离 $d_{\ln(\tau)}$，其中 τ 是Ω 的宇宙学时间函数，则定理 *B* 成立。

值得指出的是，Markowitz 度量的其他定理也有关于零距离的对应结论，见第 6.5 节。

1.3. **一个必要条件**。 定理 A 的一个推论是，有界、凸且因果凸的格罗莫夫双曲区域可以柯西延拓到整体双曲时空中。更确切地说，这些时空并非 C-极大，其含义见 [Sal15],第 8 节。我们能够对非凸区域证明这一事实。

定理D。 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的有界因果凸域。如果(Ω δ_Ω) 是格罗莫夫双曲的，那么Ω不是 C-极大域。

定理 B 的例子很好地说明了上述定理。事实上，若 Ω 是 $\mathrm{R}^{1,n}$ 中边界稳定非因果的凸未来完备区域，那么包含映射 $\Omega \hookrightarrow \mathrm{R}^{1,n}$ 是一个非平凡的柯西扩张，因此 Ω 不是 C-极大域。定理D表明，若 Ω 是 $\mathrm{R}^{1,n}$ 中的有界域，且 (Ω δ_Ω) 是格罗莫夫双曲的，那么 Ω 按照 Zimmer [Zim18], 的定义并非对偶凸，参见第 8 节。Galiay 在其学位论文中证明了这一最后结论，并将其推广到一类更广泛的、称为 Nagano对的几何结构；该证明还需要额外假设，参见 [Gal25，第 8.2 节.1]。这项工作扩展了 Zimmer 未发表的成果 [Zim15]。我们在此给出的证明独立于该工作，并依据 Smaï [Sma22, Sma25] 对因果凸极大域的几何描述。

1.4. **策略**。 回答问题 1.1 的主要困难在于我们对 Markowitz测地线缺乏了解。一般而言，对于某些区域 Ω in$\mathbf{R}^{1,n}$，只能说 Ω 中的类光测地线是 (Ω δ_Ω)的度量空间测地线，参见 [Cha25，定理 C]。

定理 A 和 B 中“仅当”方向的证明，首先要找出 Markowitz度量的其他（拟）测地线。我们通过与零距离的比较来完成这一步；这些比较表明，对于任意不含类光直线的凸因果凸域 Ω，因果曲线都是 (2,0)-拟测地线（Ω δ_Ω）的，参见引理 7.4。由此我们得出结论：格罗莫夫双曲域的边界不可能包含折线类光线段，参见定理 7.3。随后，我们采用一种与 Benoist 和 Zimmer 所用方法类似的动力学论证，证明格罗莫夫双曲域的边界是稳定非因果的，参见引理 7.2 和第 7.3 节。

定理 A 和 B 中“若”方向的证明，是通过比较 Markowitz度量与拟双曲度量得出的。Bonk–Koskela–Heinonen [BHK01] 和 Balogh–Buckley [BB03]的研究已充分揭示了该度量的格罗莫夫双曲性。该

证明在于说明，对于边界稳定非因果的因果凸域，Markowitz度量与拟双曲度量在定量意义上等价，见定理 4.1。

1.5. **论文结构**。 第 2 节介绍 Markowitz 伪距离。第 3 节回顾因果凸域的基本性质。第 4 节和第 6 节分别比较拟双曲距离和零距离。定理 A 和 B 中的充分条件和必要条件分别在第 5 节和第 7 节证明。定理C和D分别在第 6 节和第 8 节证明。

1.6. **致谢**。 作者感谢 Andrea Seppi 建议将 Markowitz 度量与零距离进行比较，这最终促成了本文。作者还感谢 Pierre-Louis Blayac、Charles Frances、Karin Melnick 和 Ry m Smaï 在本项目期间进行的富有启发性的讨论。

2. 伪距离

2.1. 共形时空。共形洛伦兹流形是一个流形 M，其上赋有一个洛伦兹度量的共形类 $[g]$。如果 $g(v,v)$ 分别为负、零、正或非正，则向量 $v \in TM$ 分别称为类时、类光、类空或因果向量。共形洛伦兹流形 $(M,[g])$ 上的时间定向是一个全局类时向量场。给定时间定向 X，若因果向量 v 满足 $g(v,X) < 0$，则称其为未来因果向量；否则称为过去因果向量。上述无穷小语言可以转化为曲线：分段光滑曲线 $\gamma : \mathrm{R} \to M$ 若其速度 $\gamma'(t)$ 对所有 $t \in \mathrm{R}$ 均为未来因果向量，则称为未来因果曲线。给定共形时空 $(M,[g])$ 中的两个点 x、y，若存在一条从 x 到 y 的未来因果曲线（分别为未来类时曲线），则记作 $x \leq y$（分别记作 $x \ll y$）。共形时空 M 中的拓扑超曲面 Σ 若与每条不可延拓因果曲线恰好相交一次，则称为柯西超曲面。若共形时空 $(M,[g])$ 存在柯西超曲面，则称其为整体双曲。

2.2. **Markowitz伪距离**。 设 $(M,[g])$ 是一个共形时空，g 是共形类中的一个度量，其对应的 Levi-Civita联络为 ∇。给定一条类光∇测地线 $\gamma(t)$，函数 $u(t)$ 若满足以下微分方程，则称其为沿射影参数化类光测地线 γ 的射影参数

$$Su(t) = \frac{2}{n-2}\mathrm{Ric}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)),$$

其中，Su 表示 u 的 Schwarzian导数。给定一条测地线 $\gamma(t)$ 及其射影参数 $u(t)$，重新参数化后的测地线 $\gamma(u) = \gamma \circ u^{-1}$ 称为 $(M,[g])$ 的射影参数化类光测地线 。射影参数化类光测地线族与度量 g的选择无关，并且在射影变换复合下保持不变。下文中，我们分别用 $I = (-1,1)$ 和 $\mathrm{PPL}(I,M)$ 表示射影参数化类光测地线 γ 的集合：$I \to (M,[g])$。

设 x，$y \in M$。从 x 到 y 的 类光链 记为 $\mathcal{C}$，由有限序列γ_1，……，$\gamma_m \in \mathrm{PPL}(I, M)$ 以及两个点的有限序列 s_1，……，$s_m \in I$和 t_1，……，$t_m \in I$组成，且满足 $\gamma_1(s_1) = x$、$\gamma_m(t_m) = y$，并且对所有 k，都有 $\gamma_k(t_k) = \gamma_{k+1}(s_{k+1})$。我们将 $\mathcal{C} = ((\gamma_k),(s_k),(t_k))$ 记作。

定义 2.1. 设 $(M,[g])$ 是一个共形时空。两点 $x, y \in M$ 之间的 ***Markowitz*伪距离** 定义为

$$\delta_M(x,y) = \inf_{\mathcal{C}} \rho_I(s_1,t_1) + \cdots + \rho_I(s_m,t_m), \tag{2.1}$$

其中，下确界取遍从 x 到 y的所有类光链 $\mathcal{C} = ((\gamma_k),(s_k),(t_k))$；$\rho_I$ 表示 I 的距离，由 $\rho_I(s, t) = |\ln\left(\frac{(s-1)(t+1)}{(s+1)(t-1)}\right)|$给出，对所有 $s, t \in$ ~~I 均成立~~。

Markowitz伪距离是对称的，并满足三角不等式，但可能不具正定性。它满足以下函子性质。

命题 2.2。 设 $f\colon M \to N$是一个共形映射。那么，对于所有 x、$y \in M$，均有 $\delta_N(f(x)\ f(y)) \leq \delta_M(x, y)$。 此外，若 f是微分同胚，则前述不等式取等号。

2.3. **无穷小泛函**。 Markowitz伪距离有一种定义在类光向量丛上的无穷小形式。

定义 2.3。 设 $(M, [g])$ 是一个保角时空，且 $v \in TM$为类光的。在 v 处的无穷小泛函 定义为

$$F_M(v) = \inf_{\gamma}\{|u| \,|\, \gamma \in \mathsf{PPL}(I, M),\, u \in TI \text{ and } \gamma_* u = v\}. \tag{2.2}$$

无穷小泛函与 Markowitz伪距离之间由下列公式联系。

定理 2.4 ([Mar81，定理 4。8])。 设 $(M, [g])$ 是一个共形时空。那么，对所有x，$y \in M$，有

$$\delta_M(x, y) = \inf_{\gamma} \int F_M(\gamma'(t))dt,$$

wh其中，下确界取遍所有从 x到 y的分段类光测地曲线 γ 。 ♦

2.4. **射影映射**。 设 J 是<R>中的一个严格区间，且 h是一个射影变换，满足$h(I) = J$。令 $\rho_J = h_*\rho_I$。 J上的这个距离与 h的选取无关。

例 2.5。 若 $J = \mathbf{R}_{>0}$，则对所有 $x, y \in J$，有 $\rho_J(x, y) = |\ln(x/y)|$。

定义 2.6。 设 $(M, [g])$ 是一个共形时空。函数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ 若满足对每个 $\gamma \in \mathsf{PPL}(I, M)$， $f \circ \gamma$ 都是一个射影变换，则称其为射影的。

命题 2.7 ([Mar82])**.** 设 $(M, [g])$ 是一个共形时空，并设 $f\colon M \to \mathbf{R}$ 是一个射影映射。假设 $J = f(M)$是一个严格区间。那么，对每个 $x, y \in M$，都有

$$\rho_J(f(x), f(y)) \leq \delta_M(x, y).$$

2.5. **闵可夫斯基空间**。 闵可夫斯基空间闵可夫斯基空间，记作 $\mathbf{R}^{1,n}$，是赋有典范平坦洛伦兹度量 $\mathbf{b}$ 的仿射空间$\mathbf{R}^{n+1}$。下面固定一些记号：

- 令 ∂_t 是$\mathbf{R}^{1,n}$ 上的平行单位类时向量场；
- 固定一个正交分解 $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$，其中 $\mathbf{R}$ 是由 ∂_t 生成的直线；
- 根据上述分解，我们写作 $x = (t, p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$。在这些坐标中，度量$\mathbf{b}$ 表示为：

$$\mathbf{b} = -dt^2 + d\sigma^2 = -dt^2 + dp_1^2 + \cdots + dp_n^2.$$

- 平行类时向量场 ∂_t 为$\mathbf{R}^{1,n}$ 赋予时间定向。与点 $x \in \mathbf{R}^{1,n}$ 相关的因果集记作：

$I^+(x) = \{y \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, x \ll y\}$， $J^+(x) = \{y \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, x \leq y\}$， $C^+(x) = J^+(x) \setminus I^+(x)$,$I^-(x) = \{y \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, y \ll x\}$， $J^-(x) = \{y \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, y \leq x\}$， $C^-(x) = J^-(x) \setminus I^-(x)$。令 $I(x, y) = I^+(x) \cap I^-(y)$，且 $J(x, y) = J^+(x) \cap J^-(y)$。形如$I(x, y)$的区域称为菱形区域；

- 定义时间分离函数 $\mathcal{T}$ 在 $\mathbf{R}^{1,n}$ 上为 $\mathcal{T}(x,y) = \sqrt{|\mathbf{b}(y-x,y-x)|}$ 对所有满足 $x \leq y$ 的 $x, y \in \mathbf{R}^{1,n}$；
- 沿 ∂_t 对 $\mathbf{b}$ 进行 *Wick* 旋转 后得到的黎曼度量为 $h = dt^2 + d\sigma^2$。其在 $\mathbf{R}^{1,n}$ 上的相应范数和距离分别记为 $|\cdot|$ 和 d_h。
- 对于 $\varepsilon > 0$，我们令

$$\mathbf{b}_\varepsilon = -(1+\varepsilon)^2 dt^2 + dp_1^2 + \cdots + dp_n^2.$$

共形时空 $(\mathbf{R}^{1,n}, [\mathbf{b}_\varepsilon])$ 具有相同的时间定向 ∂_t，其因果集记为 $I_\varepsilon^\pm(x)$ $J_\varepsilon^\pm(x)$ 和 $C_\varepsilon^\pm(x)$。

2.6. 闵可夫斯基空间中区域的 Markowitz度量。 我们将域 $\mathbf{R}^{1,n}$中的非空、连通、正则开子集称为域。设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个域，且$x \in \Omega$ 和 $v \in T_x\Omega$ 是类光向量。令 $x_v^+, x_v^- \in \mathbf{R}^{1,n}$ 分别表示与 v 相切且包含于 Ω 中的极大类光线段的未来端点和过去端点。如果 Ω 中与 v 相切的极大类光测地线在未来或过去方向上是完备的，这些点可能是无穷远点。

命题 2.8 ([Cha25，命题 4。5])。设 Ω 是$\mathbf{R}^1$中的一个域，^{n} 且 $v \in T_x\Omega$ 是类光的。则

$$F_\Omega(v) = \frac{|v|}{d_h(x, x_v^-)} + \frac{|v|}{d_h(x, x_v^+)},$$

其中，当 $x_v^\pm$为无限时，$d_h(x, x_v^\pm)$ 也理解为无限。 ♦

命题 2.9。 设Ω是$\mathbf{R}^1$中的一个凸域，^{n}。以下性质等价：

(1) δ_Ω 是Ω上的完备距离；*(2)* δ_Ω 是Ω上的距离；*(3)* Ω中的所有类光直线都不完备。

证明。 这是 [Cha25，定理 C]的推论。 ♦

3. 因果凸性与未来完备性

若 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个域，则当其中任意一条端点位于 Ω 内的因果曲线都包含在 Ω 内时，称 Ω因果凸。若从 Ω 出发的任意未来因果曲线都完全包含在 Ω 内，则称 Ω未来完备。任何未来完备域都是因果凸的。

事实 3.1。$\mathbf{R}^{1,n}$ 中的因果凸域是整体双曲的。

证明。设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$中的一个因果凸域。那么 Ω中的任意菱形都是$\mathbf{R}^{1,n}$中的菱形。Ω 中的任意菱形因此都是紧致的。由此可知 Ω是整体双曲的，见[Ger70]和 [MS08]。♦

命题 3.2。设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个域。那么Ω 是因果凸的，当且仅当存在一个开子集 $U \subset \mathbf{R}^n$ 以及两个 *1*-利普希茨函数 $f_\pm : U \to \mathbf{R}$，使得 $f_- < f_+$ 在U上，$f_- = f_+$在 ∂U上，并且

$$\Omega = \{(t,p) \in \mathbf{R} \times U \,|\, f_-(p) < t < f_+(p)\}.$$

此外，域Ω 是未来完备的当且仅当 $f^+ = +\infty$，域Ω 是有界的当且仅当 U 在$\mathbf{R}^n$中有界，并且域Ω是凸的当且仅当 U 和 f_- 是凸的且 f_+ 是凹的。

证明。“当且仅当”部分的证明与 [Sma23第3.5]节相同。让我们回顾当Ω为因果凸时，映射 f_+ 和 f_- 是如何构造的。设 $\pi:\mathbf{R}^{1,n}\to\mathbf{R}^n$ 为正交投影映射，并设 $U=\pi(\Omega)$。对每一个 $p\in U$，集合$\Omega\cap\pi^{-1}(\{p\})$具有形式$(f_-(p),f_+(p))\times\{p\}$，因为Ω是因果凸的。设 $p,\ q\in U$，并设 $x=(f_+(p),p)$和 $y=(f_+(q),q)$。这定义了两个映射 $f_\pm:\ U\to\mathbf{R}$。由构造可知，点 x 和 y不能因果相关，这意味着

$$0\le\mathbf{b}(y-x,y-x)=-(f_+(p)-f_+(q))^2+|p-q|^2.$$

因此 $|f_+(p)-f_+(q)|\le|p-q|$，所以 f_+ 是1-利普希茨的。同理，f_- 是1-利普希茨的。Ω 的未来完备性、有界性或凸性的刻画可直接由 U、f_+ 和 f_- 的构造得出。♦

定义 3.3。设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个因果凸域，并设 f_+ 和 f_- 是由命题 3.2 给出的两个函数。Ω 的未来（分别为过去）因果边界记作$\partial_c^+\Omega$（分别为 $\partial_c^-\Omega$），定义为 f_+（分别为 f_-）的图。按照约定，若f_+ 为无穷大，则令 $\partial_c^+\Omega=\emptyset$，$\partial_c^-\Omega$ 的定义也类似。

可以验证，未来（分别为过去）因果边界上的点恰好是 Ω 中未来（分别为过去）不可延拓因果曲线的端点。因此，未来（分别为过去）因果边界的概念与分裂 $\mathbf{R}^{1,n}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的选取无关。事实上，未来因果边界和过去因果边界与 Geroch–Kronheimer–Penrose 定义的因果边界密切相关。

定义 3.4 ([GKP72])。设 $(M,[g])$ 是一个整体双曲时空。M 的未来因果边界 M 是未来不可延拓因果曲线 $\gamma:[0,+\infty)\to M$在等价关系 $\gamma_1\sim\gamma_2$ 当且仅当 $I^-(\gamma_1)=I^-(\gamma_2)$下所构成的等价类集合。过去因果边界的定义类似。这些边界自然带有亚历山德罗夫拓扑。

事实 3.5 ([Sma24])。设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个因果凸域。假设存在一个稳定过去光锥 C_ε^-，使得 Ω 包含于 $I^+(C_\varepsilon^-)$。那么 $\partial_c^-\Omega$ 在 *Geroch–Kronheimer–Penrose* 的意义下自然同胚于 Ω 的过去因果边界。若反转符号，$\partial_c^+\Omega$ 也具有相同性质。

证明。设 $\gamma:\ [0,1)\ \to\ \Omega$ 是 Ω中的一条不可延拓的过去因果曲线。由于 C_ε^-是 $\mathbf{R}^{1,n}$的柯西超曲面，曲线 γ 必定在某个点 $y\in\mathbf{R}^{1,n}$处累积。映射 $[\gamma]\to\lim_{t\to1}\gamma(t)$ 给出了所需的同胚，参见 [Sma24，推论 4。1]。♦

3.1. **稳定非因果性**。如果集合 $\mathcal{C}$ 中的任意两个不同点在$\mathbf{R}^{1,n}$中都不存在因果／类时关系，则称 $\mathcal{C}$ 是非因果／非类时的。

定义 3.6。设 $\varepsilon>0$，且 $\mathcal{C}$ 是$\mathbf{R}^{1,n}$的一个子集。那么，如果 $\mathcal{C}$ 是 $(\mathbf{R}^{1,n},[\mathbf{b}_\varepsilon])$中的非因果子集，则称 ε 是 ε-稳定非因果的。若存在某个 $\varepsilon>0$ 使得 $\mathcal{C}$ 是 ε-稳定非因果的，则称 $\mathcal{C}$ 是稳定非因果的。

注意，ε-稳定非因果性这一概念取决于分裂$\mathbf{R}^{1,n}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$的选择，因为$\mathbf{b}_\varepsilon$ 的取值取决于该分裂。然而，稳定非因果性与分裂的选择无关。

3.2. **宇宙学时间函数**。设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个因果凸域。Ω 上的过去和未来宇宙学时间函数是映射 $\tau^-:\Omega\to(0,+\infty]$和 $\tau^+:\Omega\to(0,+\infty]$，定义如下：

$$\tau^\pm(x)=\sup\{\mathcal{T}(x,y)\,|\,y\in\Omega\text{ and }y\in J^\pm(x)\}.$$

过去宇宙学时间函数就是[AGH98]中研究的标准宇宙学时间函数。未来宇宙学时间函数并非标准意义上的时间函数，因为它沿未来因果曲线递减。当Ω 未来完备时，则有 $\tau^+ = +\infty$。在这种情况下，我们可以将 $\tau = \tau^-$ 记作 Ω 的（过去）宇宙学时间函数Ω。回顾一下，对于共形时空$(M,\ [g])$，若宇宙学时间函数 τ 有限，且沿任意不可延拓的过去因果曲线正则，则称其为 $\tau \to 0$ 。正则时间函数特别连续，见 [AGH98]。

命题 3.7。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$中的因果凸域，并设 $\varepsilon > 0$。假设存在一个稳定过去光锥 C_ε^-，使得 Ω 包含于 $I^+(C_\varepsilon^-)$ 中。那么 τ^- 是正则的。此外，对于每个 $x \in \Omega$，至少存在一个 $y \in \partial_c^-\Omega$，使得 $\tau^-(x) = \mathcal{T}(y,x)$。若 Ω 是凸的，则 y 唯一，且在 y 处与 $x-y$ 正交的超平面是 Ω 在 y处的支撑超平面。若符号反转，则 τ^+ 也同样成立。

证明。设 $x \in \Omega$。由于 C_ε^-是 $\mathrm{R}^{1,n}$的柯西超曲面，故 $K = J^-(x) \cap J^+(C_\varepsilon^-)$ 是紧致的。由于 $J^-(x) \cap \Omega \subset K$，我们推得 τ^- 是有限的，并且存在 $y \in \partial\Omega$，使得 $\tau^-(x) = \mathcal{T}(y,x)$ 且 $y \leq x$。由此可得 $y \in \partial_c^-\Omega$。设 $\gamma\colon [0,1) \to \Omega$ 是一条从 x出发的不可延拓的过去因果曲线，并设 $z \in \partial_c^-\Omega$ 是其端点。取 $t_k \to 1$ 如 $k \to \infty$，以及 $z_k \in \partial_c^-\Omega$，使得对所有 $k \geq 0$，均有 $\tau^-(\gamma(t_k)) = \mathcal{T}(z_k,\gamma(t_k))$。由于对所有 $k \geq 0$均有 $z_k \in K$，我们总能从 z_k 中抽取一个子列，并设 $z_k \to z$，其中 $z \in \partial_c^-\Omega$。于是$z \in J^-(y) \cap \Omega \subset C^-(y)$，因此 $\mathcal{T}(z,y) = 0$。由此可得 $\tau(\gamma) \to 0$，且 τ是正则的。凸情形由 Bon05，第 4] 节推出。♦

根据 [AGH98], ，如果 $y \in \partial_c^\pm\Omega$ 是终端／初始奇点，则称 $x \in \Omega$中的 $\tau^\pm(x) = \mathcal{T}(y,x)$为该点。

命题 3.8。 设Ω 是$\mathbf{R}^{1}$中的^n 一个因果凸域，且 $\partial_c^-\Omega$ 是 ε-稳定非因果的。设 $y \in \Omega$，并设 $x \in \partial_c^-\Omega$ 是 y的初始奇点。则

$$y - x \in \{(t,p) \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, (1+\varepsilon)|p| \leq t\}.$$

证明。 记作 $y - x = (t,p)$。设 $\mathcal{H} = \{z \in I^-(y) \,|\, \mathcal{T}(z,y) = \mathcal{T}(x,y)\}$。由于 $\mathcal{H}$ 包含于 $I^-(\Omega)$ 中，因此它与 $I_\varepsilon^+(x)$不相交。由此可知， $T_x\mathcal{H}$ 是 $(\mathbf{R}^{1,n}, [\mathbf{b}_\varepsilon])$ 中的类空或类光子空间。由于 $(T_x\mathcal{H})^{\perp_{\mathbf{b}_\varepsilon}}$ 由 $v = \left(\frac{t}{1+\varepsilon}(), p\right)$张成，我们得到

$$\mathbf{b}_\varepsilon(v,v) = -\frac{t^2}{(1+\varepsilon)^2} + |p|^2 \leq 0.$$

因此 $(1+\varepsilon)|p| \leq t$。 ♦

4. 与拟双曲度量的比较

回忆一下， $h = dt^2 + d\sigma^2$ 是沿着 ∂_t 对$\mathbf{b}$ 进行的 Wick 旋转。设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个域。Ω 的拟双曲度量 定义为

$$\mathfrak{h}_\Omega = \frac{1}{d_h(x,\partial\Omega)^2} h.$$

我们将其对应的黎曼距离记为 k_Ω，称为 Ω 的拟双曲距离。本节旨在证明以下定理。

定理 4.1. 设Ω 是$\mathbf{R}^{1}$中的因果凸域，^{n} 且令 $\varepsilon > 0$。假设 $\partial_c^+\Omega$和 $\partial_c^-\Omega$ 是 ε-稳定非因果的。那么

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}\mathrm{k}_\Omega \leq \delta_\Omega \leq 2\sqrt{2}\mathrm{k}_\Omega. \tag{4.1}$$

证明将在本节末尾给出。我们先介绍下面的引理。

引理 4.2。 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个域，且 $f:\Omega\to\mathbf{R}_{>0}$ 是一个连续函数。设$\mathfrak{h}=f^2\cdot h$。对于每个 $x\in\Omega$ 以及每个 $\varepsilon>0$，存在 $V_x\subset\Omega$ 的一个邻域，使得对每个线段 $[a,b]\subset V_x$，都存在一条任意接近 $[a,b]$的分段类光测地曲线 γ，满足

$$L_{\mathfrak{h}}(\gamma)\le(\sqrt{2}+\varepsilon)L_{\mathfrak{h}}([a,b]).$$

证明。 设 $x\in\Omega$和 $\varepsilon>0$，并设 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\frac{f(x)+\varepsilon_0}{f(x)-\varepsilon_0}\le 1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$。由于 f是连续的，我们可以找到 x 的一个邻域 V_x，使得对每个 $y\in V_x$，$|f(y)-f(x)|<\varepsilon_0$ 成立。设$[a,b]$ 是包含于 V_x 中的一条仿射线段，设 Π 是包含 $[a,b]$ 和 ∂_t的一个平面。那么Π 是一个洛伦兹平面，并且由两个关于 h正交的类光直线分布 Δ_+ 和 Δ_- 所 foliated。于是，可以找到一条从 a 到 b 的分段仿射曲线，该曲线与 Δ_+ 或 Δ_-相切，任意接近 $[a,b]$，并且满足

$$L_h(\gamma)\le\sqrt{2}L_h([a,b]).$$

于是，取 γ充分接近 $[a,b]$ 使得 $\gamma\subset V_x$，并且由于 $(f(x)-\varepsilon_0)^2\mathfrak{h}\le h\le(f(x)+\varepsilon_0)^2\mathfrak{h}$ 在 V_x上成立，可得

$$\begin{aligned}L_{\mathfrak{h}}(\gamma)&\le(f(x)+\varepsilon_0)L_h(\gamma)\\&\le\sqrt{2}(f(x)+\varepsilon_0)L_h([a,b])\\&\le\sqrt{2}\frac{f(x)+\varepsilon_0}{f(x)-\varepsilon_0}L_{\mathfrak{h}}([a,b])\\&=(\sqrt{2}+\varepsilon)L_{\mathfrak{h}}([a,b]).\end{aligned}$$

⧫

定义 4.3。 设 $\mathfrak{h}$ 是开子集 $\Omega\subset\mathbf{R}^{1,n}$上的一个 C^0 黎曼度量。对于每个$x,y\in\mathbf{R}^{1,n}$，记

$$d_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{light}}(x,y)=\inf_{x\rightsquigarrow y}L_{\mathfrak{h}}(\gamma),$$

其中，下确界取遍从 x 到 y的所有分段类光测地曲线。

推论 4.4。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个域，并设 $\mathfrak{h}=f^2\cdot h$，其中 $f:\Omega\to\mathbf{R}_{>0}$ 连续。则

$$d_{\mathfrak{h}}\le d_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{light}}\le\sqrt{2}\,d_{\mathfrak{h}}.$$

证明。 根据 $d_{\mathfrak{h}}$ 和 $d_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{light}}$ 的定义，第一个不等式显然成立。设 $x,y\in\Omega$ 且设$\varepsilon>0$。我们可以找到一条 C^1 曲线 $\alpha:[0,1]\to\Omega$，使得 $L_{\mathfrak{h}}(\alpha)<d_{\mathfrak{h}}(x,y)(1+\varepsilon)$。对于 $k\ge1$，令$\alpha_k:[0,1]\to\Omega$ 为线段 $[\alpha(\frac{i}{k})\ \alpha(\frac{i+1}{k})]$的拼接。于是，当 $k\to\infty$时，$\alpha_k\to\alpha$在 C^1拓扑中收敛，因此可以找到 $k\ge1$ 使得

$$|L_{\mathfrak{h}}(\alpha)-L_{\mathfrak{h}}(\alpha_k)|<\varepsilon L_{\mathfrak{h}}(\alpha).$$

由于 α_k 的像是 Ω 的一个紧子集，我们可以找到 $r>0$，使得将 α 限制在任意长度为 $\le r$ 的线段上时，其取值都落在引理 4.2 中所述的子集 V_x 内。因此，存在一条与 α_k 任意接近的分段类光曲线 γ，使得 $L_{\mathfrak{h}}(\gamma)\le(\sqrt{2}+\varepsilon)L_{\mathfrak{h}}(\alpha_k)$。于是

$$\begin{aligned}d_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{light}}(x,y)\le L_{\mathfrak{h}}(\gamma)&\le(\sqrt{2}+\varepsilon)(1+\varepsilon)L_{\mathfrak{h}}(\alpha)\\&\le(\sqrt{2}+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2d_{\mathfrak{h}}(x,y).\end{aligned}$$

由于前述不等式对任意 $\varepsilon>0$ 成立，我们推得 $d_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{light}}(x,y)\le\sqrt{2}d_{\mathfrak{h}}(x,y)$。 ⧫

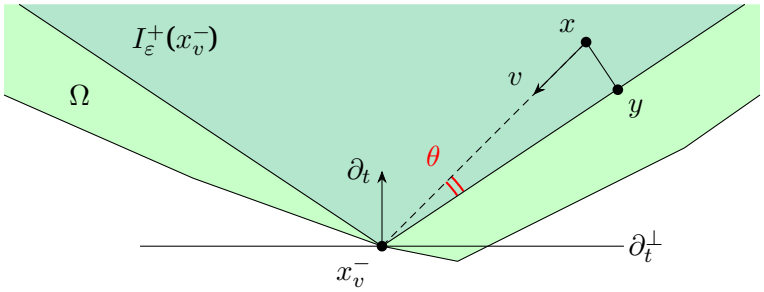


图1. 命题 4.5 证明中的论证。

命题 4.5. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的未来完备域。若 $\partial\Omega$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 是 ε-稳定非因果的，则对每个 $x \in \Omega$ 以及 $v \in \mathbf{R}^{1,n}$ 类光，有

$$d_h(x, \partial\Omega) \leq d_h(x, x_v^-) \leq \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon} d_h(x, \partial\Omega).$$

证明将用到以下初等事实：

事实4.6. 设 $\Delta = \{y = ax\}$ 和 $\Delta' = \{y = bx\}$ 是$\mathbf{R}^2$ 中的两条直线，且满足 $0 < a < b$。记 θ 为 Δ 与 Δ'之间的角。则 $\tan(\theta) = \frac{b-a}{1+ab}$。♦ ——

命题*4.5*的证明。 设 $x \in\Omega$ 和 $v \in \mathbf{R}^{1,n}$ 是类光的。第一个不等式显然成立，因为 $x_v^- \in \partial\Omega$。为简单起见，假设 $x_v^- = 0$。由于 $\partial\Omega$ 是 ε-稳定非因果的，因此有$I_\varepsilon^+(0) \subset \Omega$。设 $\Delta_x = (\mathbf{R}\partial_t \times \mathbf{R}_{\geq 0}x) \cap C_\varepsilon^+(0)$, 并设 $y \in \Delta_x$ 为 x 在 Δ_x上的 h-正交投影。于是 $d_h(x, C_\varepsilon^+(0)) = d_h(x, y)$. 设 θ 表示 x 与 y之间的 h-角。根据事实4.6，有

$$\tan(\theta) = \frac{1 - \frac{1}{1+\varepsilon}}{1 + \frac{1}{1+\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

因此 $\sin(\theta) = \tan(\theta)\sqrt{1+\tan^2(\theta)} \overset{=}{\varepsilon} \sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}$。第二个不等式随即得出，因为

$$d_h(x, \partial\Omega) \geq d_h(x, C_\varepsilon^+(0)) = \sin(\theta) d_h(x, x_v^-).$$

♦

推论 4.7。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的因果凸域，既非未来完备，也非过去完备。若 $\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 是 ε- 稳定非因果的，则对每个 $x \in\Omega$ 和 $v \in\mathbf{R}^{1,n}$ 类光，都有

$$d_h(x, \partial\Omega) \leq \min\{d_h(x, x_v^-), d_h(x, x_v^+)\} \leq \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon} d_h(x, \partial\Omega).$$

证明。 设 $x \in\Omega$ 和 $v \in \mathbf{R}^{1,n}$ 为类光。再次，第一条不等式是显然的。由于$\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 是 ε-稳定非因果的，因此有 $I_\varepsilon^+(x_v^-, x_v^+) \subset \Omega$。由命题 4.5 的证明可得

$$d_h(x, x_v^\pm) = \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon} d_h(x, C_\varepsilon^\mp(x_v^\pm)).$$

因此

$$\begin{aligned}\min\{d_h(x,x_v^-),d_h(x,x_v^+)\} &= \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\min\{d_h(x,C_\varepsilon^+(x_v^-)),d_h(x,C_\varepsilon^-(x_v^+))\}\\ &= \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon}d_h(x,\partial I_\varepsilon(x_v^-,x_v^+))\\ &\le \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon}d_h(x,\partial\Omega).\end{aligned}$$

♦

定理 *4.1* 的证明。 设 $x\in\Omega$ 和 $v\in T_x\Omega$ 为类光。由命题 4.5 和推论 4.7，以及命题 2.8 给出的公式，可得

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}\sqrt{\mathfrak{h}_\Omega(v,v)}\le F_\Omega(v)=\frac{|v|}{d_h(x,x_v^-)}+\frac{|v|}{d_h(x,x_v^+)}\le 2\frac{|v|}{d_h(x,\partial\Omega)}=2\sqrt{\mathfrak{h}_\Omega(v,v)}.$$

由定理 2.4 可推得

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{(2+\varepsilon)^2+\varepsilon^2}}d_{\mathfrak{h}_\Omega}^{\text{light}}\le\delta_\Omega\le 2d_{\mathfrak{h}_\Omega}^{\text{light}}.$$

由于 $d_h(\cdot,\partial\Omega)$ 连续，推论 4.4 表明 $\mathsf{k}_\Omega\le d_{\mathfrak{h}_\Omega}^{\text{light}}\le\sqrt{2}\mathsf{k}_\Omega$。结论得证。 ♦

推论 4.8。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的因果凸域。若 $\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 是稳定非因果的，则 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是完备度量空间。

证明。 这由定理 4.1 以及 $(\Omega,\mathsf{k}_\Omega)$ 是完备度量空间这一事实得出，参见 [BHK01，命题 2。8]。 ♦

5. Stable acausality implies Gromov hyperbolicity

本节的主要目标是证明以下定理。

定理 5.1。 设Ω是$\mathbf{R}^1$中的未来完备域，^{n} 且 $\partial\Omega$稳定非因果；或者设其为$\mathbf{R}^1$中的有界、凸且因果凸域，^{n} 且 $\partial_c^+\Omega$ 与 $\partial_c^-\Omega$均稳定非因果。则$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的。

定理 A 和 B 的“若”部分可由定理 5.1 立即推出。本节末尾，我们将讨论 Gromov 边界，以及因果薄时空这一新概念。

5.1. **格罗莫夫双曲度量空间**。 我们回顾格罗莫夫双曲度量空间的一些术语和性质，例如参见 [BH99，第 III.H 章]。以下所有命题均针对正则测地度量空间陈述，但也适用于完备、局部紧致的长度度量空间，因为根据霍普夫-里诺定理，这类空间总是正则且为测地度量空间，参见 [BH99，第 I 章。3]。

定义 5.2. 一个正则测地度量空间（X,d）是格罗莫夫双曲 的，如果存在$\delta>0$，使得每个测地三角形都是 δ-细的，也就是说，对每个测地三角形 $xyz\subset X$，线段 $[x,y]$ 包含在 $[x,z]\cup[y,z]$的 δ-邻域中。此时，（X,d）称为 δ-格罗莫夫双曲。

在度量空间（X， d）中，格罗莫夫积定义为

$$(x,y)_z=\frac{1}{2}\left(d(z,x)+d(z,y)-d(x,y)\right).$$

命题 5.3 （[BH99，第 III.H 章]）。设（X，d）是一个正则测地度量空间。那么（X，d）是格罗莫夫双曲的，当且仅当存在一个常数 $\delta > 0$ 使得

$$(x,z)_w \geq \min\{(x,y)_w, (y,z)_w\} - \delta,$$

对所有 x、y、z、$w \in X$。 ♦

两个距离 d_1 与 d_2 在集合 X 上是拟等距等价，如果存在常数$\alpha, \beta > 0$，使得对所有 x, $y \in X$，有

$$\frac{1}{\alpha} d_1(x,y) - \beta \leq d_2(x,y) \leq \alpha d_1(x,y) + \beta.$$

命题 5.4 ([BH99, 第 III.H 章]). 设 d_1, d_2 为集合 X 上的两个正则测地距离。如果 d_1 与 d_2 拟等距等价，则 (X, d_1) 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 (X, d_2) 是格罗莫夫双曲的。 ♦

设 (X, d) 为一个度量空间。给定 $A \geq 1$ 与 $B > 0$，一条 (A, B)-拟测地线 是一条曲线$\gamma : I \to (X, d)$，其中 I 是实数直线的一个区间，使得

$$\frac{1}{A}|t-s| - B \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq A|t-s| + B,$$

对所有 $s, t \in I$。

命题 *5.5*（[*BH99*，第 *III.H* 章]）。设（X, d）是一个完备的测地 δ-格罗莫夫双曲度量空间。那么，对于任意 $A \geq 1$ 和 $B > 0$，存在一个常数 $\delta' = \delta'(\delta, A, B) > 0$，使得 X 中每个（A, B）-拟测地三角形都是 δ'-薄的。♦

由此可以推出格罗莫夫双曲性的以下必要条件。

命题 5.6。设 (X, d) 是一个正则的测地格罗莫夫双曲度量空间。设$A \geq 1$和 $B \geq 0$，并设 $x_k y_k z_k$是一个由(A, B)-拟测地三角形组成的序列。若 $[x_k, y_k]$ 和$[y_k, z_k]$ 最终与每个紧子集不相交，则 $[x_k, z_k]$ 最终也与每个紧子集不相交。

证明。由命题 5.5，取 $\delta > 0$，使得 X 中每个 (A, B)-拟测地三角形都是 δ-薄的。设 K 是 X 的一个紧子集，并设 $K' = \mathcal{N}_{\delta+1}(K)$ 是它在 (X, d) 中的 $(\delta+1)$-邻域。由于 X 是正则的，K' 是紧致的。取足够大的 $k \geq 0$，使得 $[x_k, y_k]$ 和 $[y_k, z_k]$ 与 K' 不相交。取 $a \in [x_k, z_k]$，并取 $b \in [x_k, y_k] \cup [y_k, z_k]$ 使得 $d(a, b) \leq \delta$。那么

$$d(a, K) \geq d(b, K) - d(a, b) \geq d(b, K) - \delta > 0,$$

因此 $a \notin K$ 和 $[x_k, z_k]$ 与 K 不相交。 ♦

5.2. **拟双曲度量的双曲性**。设 $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n}$，并设 $x, y \in \Omega$。设 γ 是 Ω 中一条连接 x 和 y 的分段光滑曲线。若满足以下两个性质，则称 γ 是 α-一致 的，其中常数为 $\alpha > 0$：

- γ相对于 $h = dt^2 + d\sigma^2$ 以弧长参数化，且 $L_h(\gamma) \leq \alpha\, d_h(x, y)$，
- 对所有 $t \leq L_h(\gamma)/2$，都有 $B_h(\gamma(t), \frac{t}{\alpha}) \subset \Omega$，且 $B_h(\gamma(T-t), \frac{t}{\alpha}) \subset \Omega$，其中$B_h(a, r)$表示以 a 为中心、半径为 r的 h球。

以下定义可以推广，参见 [BHK01]。不过，我们只对$\mathbf{R}^{1, n}$中的区域陈述此定义。

定义 5.7。 $\mathbf{R}^{1,n}$中的域 Ω 若存在 $\alpha > 0$，使得 Ω 中任意两点都可以由一条 α-一致曲线连接，则称其为一致域。在这种情况下，Ω 称为 α-一致域。

注意，对于固定的 $\alpha > 0$， α-一致域的概念取决于度量h的选择，因而取决于$\mathbf{R}^{1,n} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$的分裂方式。然而，一致域的概念与这种分解方式无关。

定理 5.8 ([BHK01，定理 1。11])。设 $\alpha > 0$。若 Ω 是$\mathbf{R}^{1, n}$中的 α-一致域，则(Ω，k_Ω) 是 δ-格罗莫夫双曲的，其中某个常数 $\delta = \delta(\alpha)$ 仅依赖于 α。♦

命题 5.9。 $\mathbf{R}^{1, n}$ 中的任何未来完备域都是 $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$ -一致的。

证明。 设 Ω 是一个未来完备域，并设 $x = (p, s) \in \Omega$ 和 $y = (q, t) \in \Omega$。

情形 *1*： x 和 y 因果相关。例如，不妨设 $x \leq y$。令 $z = (p, t)$，并令 γ 为线段 $[x, z]$ 和 $[z, y]$的并集。则 γ 的长度为 $L(\gamma) \leq \sqrt{2}d(p, q)$，且$\gamma$ 是从 x 到 y的一条 $\sqrt{2}$-一致曲线。

情形 *2*： x 和 y 并非因果相关。例如，我们可以假设 $t \geq s$，于是$d(p, q) \geq t - s$。令 $z = (q, t + \frac{3}{2}d(p, q))$，并令 γ为线段 $[x, z]$ 和 $[z, y]$的并集。于是

$$L(\gamma) = L([x, z]) + L([z, y]) = \sqrt{d(p, q)^2 + \left(\frac{3}{2}d(p, q)\right)^2} + \frac{1}{2}d(p, q) + t - s \leq \frac{3 + \sqrt{10}}{2}d(p, q).$$

此外，由于 f 是 1-利普希茨的，因此有 $B = B(z, \frac{d(p, q)}{2\sqrt{2}}) \subset \Omega$，且凸包 Conv($x$, B) 和 Conv(y, B) 都包含于 Ω 中。若 m 表示 γ的中点，则

$$\frac{L(\gamma)/2}{L([x, z])} B\left(m, \frac{d(p, q)}{2\sqrt{2}}\right) \subset \Omega.$$

因此 $B(m, r) \subset \Omega$，其中

$$r = \frac{L(\gamma)d(p, q)}{L([x, z])4\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{10}}{4\sqrt{20}}d(p, q) \geq \frac{2}{3 + \sqrt{10}}d(p, q).$$

因此 γ 是 $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$ -一致的。由这两种情形可知，Ω 是 $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$ -一致的。 ♦

定理 5.10 （例如参见 [Vä98，定理 2。19]）。*R* 上任意有界凸域$\mathbf{R}^{1, n}$都是一致的。更准确地说，若 Ω 是凸的，且 r_1、$r_2 > 0$ 满足 $B_h(x, r_1) \subset \Omega \subset B_h(x, r_2)$ 对某个 $x \in \Omega$成立，则 Ω 是 $\frac{r_2}{r_1}$-一致的。♦

定理 *5.1* 的证明。 设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的有界、凸、因果凸域，或是$\mathbf{R}^{1,n}$中的未来完备域。由命题 5.9 和定理 5.10，域 Ω 是一致的。由定理 5.8，度量空间 (Ω,k_Ω) 是格罗莫夫双曲的。假设 $\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 稳定非因果。那么，由定理 4.1，度量空间 (Ω δ_Ω) 与 (Ω,k_Ω) 双利普希茨等距。因此，由命题 5.4，(Ω δ_Ω) 是格罗莫夫双曲的。♦

5.3. **格罗莫夫边界与因果边界**。 本节比较格罗莫夫边界与因果边界。

定义 5.11 （Gromov 边界）. 设 (X, d) 是一个正则测地度量空间。 X的*Gromov* 边界 记作 $\partial_\infty X$，是测地射线 $\gamma : [0, +\infty) \to X$ 的等价类集合，关系 $\gamma_1 \sim \gamma_2$ 当且仅当存在 M 使得 $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < M$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立。

Gromov 边界 $\partial_\infty X$ 自然带有在紧致子集上一致收敛的拓扑。在此拓扑下，集合的并集 $X \cup \partial_\infty X$ 是一个紧致拓扑空间。

命题 5.12 ([BH99，第 III.H 章])。 若 d_1 和 d_2 是集合 X上的两个正则、测地且准等距等价的距离$(X,\ d_1) \to (X,\ d_2)$，则恒等映射可延拓为它们的 *Gromov* 边界之间的同胚。

命题 5.13。 设Ω是$\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个有界、凸且因果凸的域（未来完备域$\mathbf{R}^{1,n}$中的域），且 ∂_c^+Ω和 ∂_c^-Ω均为稳定非因果。则恒等映射Ω →Ω 可延拓为一个嵌入

$$\Omega \cup \partial_c\Omega \to \Omega \cup \partial_\infty\Omega,$$

其中 $\partial_\infty\Omega$ 是(Ω δ_Ω) 的 *Gromov* 边界，并且 $\partial_c\Omega = \partial_c^+\Omega \cup \partial_c^-\Omega$。

证明。根据命题 5.12 和定理 4.1，我们总可以将 δ_Ω 替换为拟双曲距离。由 [BHK01，命题 3。12]，恒等映射可延拓为一个同胚 $\Omega \cup \partial_\star\Omega \to \Omega \cup \partial_\infty\Omega$，其中 $\partial_\star\Omega = \partial\Omega$ 若 Ω 有界，而 $\partial_\star\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 在 Ω 未来完备时的一点紧化。结论得证。 ♦

注意，Bonk–Heinonen–Koskela [BHK01] 证明，对于 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的无界一致域 Ω，任何逃离 Ω 中每个紧子集的测地射线 γ （Ω,k_Ω）都必须收敛到 Ω 中同一个点 ∂_∞。由此可得以下推论。

命题 5.14. 设 $\varepsilon > 0$，且设 Ω 为 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的未来完备域，并且 $\partial\Omega$ 是ε稳定非因果的。那么存在常数 $M = M(\varepsilon) > 0$，使得对于每个 $x \in \Omega$ 以及每一对从 x 出发的未来因果曲线 γ_1 和 γ_2，有 $\delta_\Omega(\gamma_1, \gamma_2) \leq M$. 。 $d_{\ln(\tau)}$ 也满足同一 ˆ 性质，其中 τ 是 Ω 的宇宙学时间函数。

证明。由定理 5.8 和命题 5.9，存在一个与 Ω 无关的 $r > 0$，使得 $(\Omega, \mathrm{k}_\Omega)$ 是 r-格罗莫夫双曲的。由定理 6.7 和定理 4.1，存在 $A_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$，使得 Ω 中的任意因果曲线都是 $(\Omega, \mathrm{k}_\Omega)$ 的 $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$-拟测地线。设 $x \in \Omega$，并设 $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0, +\infty) \to \Omega$ 是从 x 出发的两条不可延拓的未来因果曲线。那么，γ_1 和 γ_2 在 $\partial_\infty\Omega$ 中有相同的端点，因为它们具有无限的 h-长度，参见 [BHK01，第 3.12] 条命题。因此，根据命题 5.5，存在常数 $M = M(\varepsilon)$，使得 $\mathrm{k}_\Omega(\gamma_1, \gamma_2) \leq M(\varepsilon)$。 ˆ 对于 δ_Ω 和 $d_{\ln(\tau)}$，同一性质也成立，因为根据定理 6.7 和定理 4.1，所有这些距离在定量意义下拟等距等价。♦

5.4. **因果薄时空**。 在完全一般的情形下，定理 5.1 对任意因果凸域并不成立，即使假定它们是凸的，见例 9.2。尽管如此，稳定非因果性仍然蕴含某种形式的稀薄性。

定义 5.15 （因果薄时空）。 设 $(M, [g])$ 是赋予距离 d 的共形时空。我们称 $(M, [g])$ 是因果稀薄 的，如果因果菱形在如下意义下是一致稀薄的：存在 $r > 0$，使得每个因果菱形 $J(x, y)$ 都包含在连接 x 与 y 的任意因果曲线的 r-邻域中。

注记 5.16. 前述定义可作如下解释：在因果薄时空 $((M, [g], d)$ 中，两条在某一事件相遇并在稍后再次相遇的因果曲线，在其间不能彼此任意远离。它们相对于 d测得的相互距离是一致有界的，与它们的轨迹以及初始和终端交会点无关。

定理 5.17. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的因果凸域。若 $\partial_c^-\Omega$ 与 $\partial_c^+\Omega$ 稳定非因果，则 $(\Omega\delta_\Omega)$ 是因果稀薄的。

该证明基于引理 7.4 以及以下引理。

引理 5.18. 对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $r = r(\varepsilon)$，使得对于每个满足 $a \le b$ 的 $a, b \in \mathbf{R}^{1,n}$，度量空间 $(I_\varepsilon(a,b)^{\delta_{I_\varepsilon(a,b)}})$ 都是 r-格罗莫夫双曲的。

证明。令 $\varepsilon > 0$，并令 $K = \{v \in I^+(0) \mid h(v, v) = 1\}$。对于 $v \in K$，稳定菱形 $I_\varepsilon(0, v)$ 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的非空有界凸域。因此，存在 $s \ge 1$ 使得存在 $x \in I_\varepsilon(0, v)$ 和 $\rho > 0$，满足

$$B_h(x, \rho) \subset I_\varepsilon(0, v) \subset B_h(x, s\rho).$$

令 s_v 为具有此性质的最小 $s \ge 1$。映射 $f\colon v \in K \mapsto s_v$ 为正且连续。由于 K 是紧致的，映射 f 取得最小值 $s_{\min} > 0$。令 $a, b \in \mathbf{R}^{1,n}$ 使得 $a \le b$。存在一个等距变换部分平凡的相似变换 g，使得 $g(a) = 0$ 且 $g(b) \in K$。令 $x \in I_\varepsilon(0, g(b))$，并令 $\rho > 0$ 使得 $B_h(x, \rho) \subset I_\varepsilon(0, g(b)) \subset B_h(x, s_{\min}\rho)$。那么，若 $y = g^{-1}(x)$，则有

$$B_h(y, \rho/\lambda) \subset I_\varepsilon(a, b) \subset B_h(y, s_{\min}\rho/\lambda),$$

其中 λ 是 g 的畸变。由定理 5.10，域 $I_\varepsilon(a, b)$ 是 $s_{\min}$-一致的。该结果由定理 5.8 得出。♦

定理 5.17 的证明。设 $\varepsilon > 0$ 使得 $\partial_c^+\Omega$ 与 $\partial_c^-\Omega$ 为 ε-稳定非因果。由命题 5.5 与引理 5.18，存在 $r = r(\varepsilon)$，使得对每个 $a, b \in \mathbf{R}^{1,n}$，$(I_\varepsilon(a,b)^{\delta_{I_\varepsilon(a,b)}})$ 中的任一 (2, 0)-拟测地三角形都是 r-细的。设 β, γ 为 Ω 中具有相同端点的两条因果曲线。设 $a, b \in \Omega$ 使得 $I(a, b)$ 包含 γ 的像。由于 $\partial_c^+\Omega$ 与 $\partial_c^-\Omega$ 为 ε-稳定非因果，稳定菱形 $I_\varepsilon(a, b)$ 包含于 Ω 中。由下面的引理 7.4，三角形 $\beta \cup \gamma$ 是 $(I_\varepsilon(a,b)^{\delta_{I_\varepsilon(a,b)}})$ 的一个 (2, 0)-拟测地双边形。因此 $\delta_{I_\varepsilon(a,b)}(\beta, \gamma) \le r$. 由命题 2.2，我们推出

$$\delta_\Omega(\beta, \gamma) \le \delta_{I_\varepsilon(a,b)}(\beta, \gamma) \le r.$$

由此可知 (Ω, δ_Ω) 是因果稀薄的。♦

6. 与零距离的比较

6.1. 时空上的零距离。 一个时间函数 在共形时空 $(M, [g])$ 上是连续函数 $\tau : M \to \mathbf{R}$，且沿未来因果曲线严格递增。

定义 6.1 ([SV16]). 设 $(M, [g])$ 为配备时间函数 τ 的共形时空。零距离 在两点 x、$y \in M$ 之间定义为

$$\hat{d}_\tau(x, y) = \inf_{x_1, \dots, x_m} \sum_{k=1}^{m} |\tau(x_{i+1}) - \tau(x_i)|,$$

其中下确界取遍所有点的有限序列，使得 $x_1 = x$，……，$x_m = y$ 与 x_k 以及 x_{k+1} 对所有 k 均因果相关。

ˆ函数 d_τ 总是在 M 上定义一个伪距离，但它可能不是正定的，例如参见 [SV16，命题 3.4]。

事实 6.2. 设 $(M, [g])$ 是一个配备时间函数 τ 的共形时空。设 $x, y \in M$ ˆ满足 $x \le y$。则 $d_\tau(x, y) = \tau(y) - \tau(x)$. ♦

事实 6.3 ([SV16，注3。7])。若将下确界取遍所有满足任意相邻两点由类光测地线连接的有限序列 x_1，……，x_m，则定义 *6.1* 保持不变。♦

6.2. **一般比较**。 本节旨在共形时空的背景下比较 Markowitz 伪距离与零距离。尽管这两种距离的定义相似——都基于分段类光测地曲线的长度，但长度的定义方式不同——我们还是来指出它们之间的以下差异：

- (定义) δ_M 适用于任何时空，事实上也适用于任何伪黎曼流形，而 d_τ 则要求存在一个时间函数 τ，并且需要选定该函数。
- (正则性) δ_M 要求共形类 $[g]$ 中包含一个 C^2 正则度量，因为射影参数是根据里奇曲率定义的。相比之下，d_τ 可用于低正则性时空，参见 [KS22]。
- (不变性) δ_M 在整个共形群 $\mathrm{Conf}(M)$ 下保持不变，而 d_τ 通常仅在保角变换的子群 $\mathrm{Conf}_\tau(M) \subset \mathrm{Conf}(M)$ 下保持不变，该子群保持因果曲线的 τ-长度。
- (可计算性) 计算 δ_M 通常颇具挑战。相比之下，两个因果相关点之间的零距离可显式求得，并且所有因果曲线对于 d_τ而言都是测地线。

以下 两个引理用于对这两个距离进行一般性比较 .

引理 6.4. 设$(M, [g])$ 是一个赋有时间函数 τ 的共形时空。假设存在 $\alpha > 0$，使得对于任意位于同一条类光测地线上的 $x, y \in M$，都有

$$\hat{d}_\tau(x, y) \leq \alpha\, \delta_M(x, y). \tag{6.1}$$

则 $d_\tau \leq \alpha\, \delta_M$。若交换 d_τ 和 δ_M 的角色，同样的结论也成立。

证明. 设 $x, y \in M$，且 $\mathcal{C} = \{(\gamma_k), (s_k), (t_k)\}$ 是一条从 x 到 y 的类光链。记$x_k = \gamma_k(s_k)$ 表示所有 k。由于 x_k 和 x_{k+1} 位于同一条类光测地线上，因此有

$$\hat{d}_\tau(x, y) \leq \sum_{k=1}^{m} \hat{d}_\tau(x_{k-1}, x_k) \leq \sum_{k=1}^{m} \alpha\, \delta_M(x_{k-1}, x_k) \leq \alpha \sum_{k=1}^{m} \rho_I(s_k, t_k) = \alpha L(\mathcal{C}).$$

对所有从 x 到 y 的链 $\mathcal{C}$ 取下确界，可得 $d_\tau(x, y) \leq \alpha\, \delta_M(x, y)$。

反之，假设 $d_\tau(x, y) \leq \alpha\, \delta_M(x, y)$ 对位于同一条类光测地线上的每一个 $x, y \in M$ 成立。设 $x, y \in M$，并设 $x_0 = x, \ldots, x_m = y$ 为一个有限点列，使得 x_k 与 x_{k+1} 位于同一条类光测地线上。则

$$\delta_M(x, y) \leq \sum_{k=1}^{m} \delta_M(x_{k-1}, x_k) \leq \sum_{k=1}^{m} \alpha\, \hat{d}_\tau(x_{k-1}, x_k) = \alpha \sum_{k=1}^{m} \hat{d}_\tau(x_{k-1}, x_k).$$

对所有相邻点位于同一条类光测地线上的有限序列 $x_0, \ldots, x_m$ 取下确界，由事实6.3可推得 $\delta_M(x, y) \leq \alpha\, d_\tau(x, y)$。♦

共形时空 $(M, [g])$ 上的时间函数 $\tau\colon M \to \mathbf{R}$ 是柯西的，如果其水平集为空集，或者是 $(M, [g])$ 的柯西超曲面。

引理 6.5. 设$(M, [g])$ 是配备射影柯西时间函数 $\tau\colon M \to \mathbf{R}$的整体双曲共形时空。若 $J = \tau(M)$ 是 $\mathbf{R}$的严格区间，则

$$\delta_M = \hat{d}_{f \circ \tau} \tag{6.2}$$

其中 $f\colon (J, \rho_J) \to \mathbf{R}$ 是到欧氏直线上的任意等距映射。

证明。 根据引理 6.4，只需验证当 x和 y 位于同一条类光测地线上时，前述等式成立。设 γ 为一条极大类光测地线，令 $\gamma : J \to M$ 为其τ-参数化。设 $x, y \in \gamma$，并记 $s = \tau(x)$ 和 $t = \tau(y)$。根据命题 2.7，有 $\rho_J(\tau(x)\ \tau(y)) \le \delta_M(x, y)$。 由于 γ是射影参数化的，因此有

$$\delta_M(x, y) \le \rho_J(s, t) = \rho_J(\tau(x), \tau(y)).$$

ˆ 因此 $\delta_M(x,\ y) = \rho_J(\tau(x)\ \tau(y)) = d_{f\circ\tau}(x,\ y)$。 ♦

6.3. **未来完备情形**。 我们回到闵可夫斯基空间中的设定。

定理 6.6。 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,\ n}$ 中的一个不含类光直线的凸未来完备区域。设 τ 为其宇宙学时间函数。则

$$\hat{d}_{\ln(\tau)} \le \delta_\Omega \le 2\hat{d}_{\ln(\tau)}. \tag{6.3}$$

此外，等式（*6.3*）的左侧（分别地，右侧）成立等号，当且仅当Ω 是一 个类空超平面的未来（分别地，一点的未来）。

证明。 首先，当 Ω 是一点的未来时，我们证明等式（6.3）的右侧成立等号。设 $a \in \mathbf{R}^{1,\ n}$ 并令 Ω $= I^+(a)$。在这种情况下，点 a 是唯一的初始奇点，而宇宙学时间函数对所有$x \in$ Ω 都由 $\tau(x) = \mathcal{T}(a,\ x)$ 给出。令 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}_{>0}$由 $f(x) = \mathcal{T}(a,\ x)^2$定义。设 $\gamma(t) = b + tv$ 是 Ω 中的一条仿射类光测地线。则

$$f(\gamma(t)) = \mathbf{b}(b - a, b - a) + 2\mathbf{b}(b - a, v)t.$$

因此，映射 f 是射影的。因此， f 是射影柯西时间函数。由引理 6.5 可得

$$\delta_\Omega = \hat{d}_{\ln(f)} = 2\hat{d}_{\ln(\tau)}.$$

现在我们证明，当 Ω 是一个类空超平面的未来时，等式（6.3）左侧的等号成立。设 H 是一个类空超平面，并令 Ω $= I^+(H)$。令 p_H表示到 H的正交投影。则 Ω 的宇宙学时间函数为 $\tau(x) = \mathcal{T}(p_H(x)\ x)$。此函数 τ是一个射影柯西时间函数，因为它实际上是线性的。因此，由引理 6.5 可得 $\delta_\Omega = d_{\ln(\tau)}$.

现在转向一般情形。由于 Ω 不包含完整的类光直线，它至少有一个类空支撑超平面。由命题 3.7，宇宙学时间函数τ 是有限的，并且每个 $x \in \Omega$ 都有唯一的初始奇点 $r(x)$。令 x, $y \in \Omega$，使得$x \le y$。由于 $r(x) \ll x$， $r(x)$ 的未来包含 x 和 y。由于 $I^+(r(x)) \subset \Omega$，命题 2.2 和前面的计算表明

$$\delta_\Omega(x, y) \le \delta_{I^+(r(x))}(x, y) = 2\ln(\mathcal{T}(r(x), y)) - 2\ln(\mathcal{T}(r(x), x)).$$

现在，由于 $r(x) \le y$，根据 τ 的定义，我们有 $\mathcal{T}(r(x)\ y) \le \tau(y)$。因此

$$\delta_\Omega(x, y) \le 2\ln(\tau(y)) - 2\ln(\tau(x)) = 2\hat{d}_{\ln(\tau)}(x, y).$$

令 H 表示包含 $r(x)$ 且相对于 $\mathbf{b}$ 与 $x - r(x)$ 正交的超平面，并令 p_H 表示到 H 的正交投影。根据命题 3.7，域 Ω 包含于 $I^+(H)$，因此

$$\delta_\Omega(x, y) \ge \delta_{I^+(H)}(x, y) = \ln(\mathcal{T}(p_H(y), y)) - \ln(\mathcal{T}(p_H(x), x)).$$

由于 $r(y) \in J^+(H) \cap J^-(y)$，我们有 $\tau(y) \le \mathcal{T}(p_H(y)\ y)$。由于 $r(x) = p_H(x)$，我们得到

$$\delta_\Omega(x, y) \ge \ln(\tau(y)) - \ln(\tau(x)) = \hat{d}_{\ln(\tau)}(x, y).$$

这表明等式（6.3）对任意 $x \le y$ 都成立。由引理 6.4 可推得，等式（6.3）在 Ω 上处处成立。

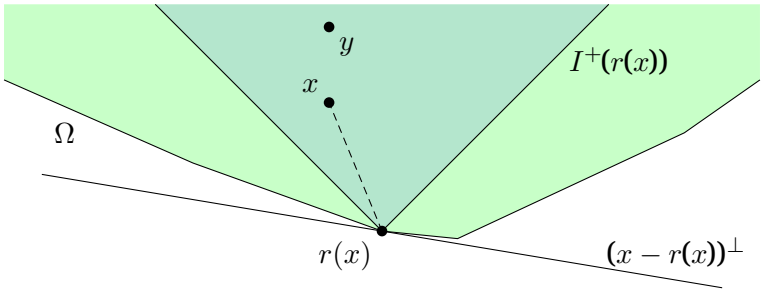


图 2. 定理 6.6 证明中的论证。

我们来证明：若等式（6.3）右侧对所有 x，$y \in \Omega$ 都取等号，则 Ω 是一点的未来。事实上，在这一假设下，对所有 x，$y \in \Omega$，不等式$\mathcal{T}(r(x)\ y) \leq \tau(y)$ 必须取等号，因此 $r(x) = r(y)$。特别地，映射 r 局部为常数，因而是常数，且等于某个 $p \in \partial\Omega$。由此可得 $\Omega = I^+(p)$。类似的论证表明，等式（6.3）左侧取等号，当且仅当 Ω 是一个类空超平面的未来。♦

定理 6.7. 设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个未来完备域。若 $\partial\Omega$是 ε-稳定非因果的，则

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}+1}\hat{d}_{\ln(\tau)} - c_\varepsilon \leq \delta_\Omega \leq 2\hat{d}_{\ln(\tau)}.$$

其中 $c_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}} \ln\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)^2-1}\right)$ $(1+\varepsilon)$。

定理 6.7 的证明基于以下三个引理。设 $\varepsilon > 0$，并设

$$\Omega_\varepsilon = \mathbf{R}^{1,n} \setminus J_\varepsilon^-(0) = \{x = (t,p) \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, |p| < (1+\varepsilon)t\}.$$

域 Ω_ε 是未来完备的，且其边界稳定非因果。对于满足$x \notin \mathbf{R}\partial_t$的 $x \in \Omega_\varepsilon$，令 $\Delta_x = (\mathbf{R}\partial_t \times \mathbf{R}_{\geq 0}x) \cap C_\varepsilon^-(0)$.

Le引理 6.8. Ω_ε 的宇宙学时间函数为 $\tau(t,\ p) = \frac{1+\varepsilon\ t+|p|)}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-}\quad\quad\quad

证明。设 $x=(t,p)\in\Omega_\varepsilon$。首先假设 $x\notin C^+(0)$，从而 $C(x)$与 $C_\varepsilon^-(0)$横截相交于一个光滑的$(n-1)$维类空球面，记为 Σ。设 $f\colon \Sigma\to\mathbf{R}$ 为由 $f(y)=d_h(x,y)$给出的函数。设 $y\in\Sigma$为 f的一个临界点。则

$$\nabla_h f(y)\in T_y\Sigma^{\perp_h}=T_yC_\varepsilon^-(0)^{\perp_h}\cap T_yC(x)^{\perp_h},$$

其中 $\nabla_h f$表示 f的 h-梯度。记作 $y=(s,\ q)$。由前面的等式可得

$$\begin{pmatrix} s-t\\ q-p\end{pmatrix}\in\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} s\\ -(1+\varepsilon)^2q\end{pmatrix},\begin{pmatrix} s-t\\ -(q-p)\end{pmatrix}\right).$$

由此可知，p 和 q 共线，且 f 分别存在唯一的最大值和最小值。f 的最大值在点 $y\in\Sigma$ 处取得，其中 p 和 $q-p$ 同向成比例。换言之，f 的最大值在 Δ_x 与 $\Delta=\{q=-s+t-p\}$的交点处取得。记 $y=(s,\ q)$为使 f取最大值的点，则

$$\begin{cases}|q|=-s+t+|p|,\\ |q|=-(1+\varepsilon)s.\end{cases}$$

由此可得 $s=-(t+|p|)/\varepsilon$，并且

$$d_h(x,y)^2=2(s-t)^2=2\frac{\left((1+\varepsilon)t+|p|\right)^2}{\varepsilon^2}.$$

由引理 6.8 可推得

$$\sup_\Sigma f=\frac{\sqrt{2}((1+\varepsilon)t+|p|)}{\varepsilon}=\frac{\sqrt{2(1+\varepsilon)^2-2}}{\varepsilon}\tau(x).$$

由于对所有类光向量 $v\in T_x\Omega_\varepsilon$，都有 $x_v^-\in\Sigma$，所需的不等式便得证 . ♦

引理 6.10。令 τ 为 Ω_ε 的宇宙学时间函数。则 $\hat{}d_{\ln(\tau)}\le\frac{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}{\varepsilon}\delta_{\Omega_\varepsilon}$.

证明。令 $x=(t,p)\in\Omega_\varepsilon$，其中 $p\neq 0$，并令 v 为类光向量。由命题 2.8 和引理 6.9，得

$$T_x\ln(\tau)\cdot v=\frac{h(\nabla_h\tau(x),v)}{\tau(x)}\le\frac{|\nabla_h\tau(x)|\,|v|}{\tau(x)}\le|\nabla_h\tau(x)|\frac{\sqrt{2(1+\varepsilon)^2-2}}{\varepsilon}F_{\Omega_\varepsilon}(v).$$

现在，由引理 6.8，得

$$|\nabla_h\tau(x)|=\frac{|(1+\varepsilon,p/|p|)|}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}}=\frac{\sqrt{1+(1+\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}},$$

因此

$$T_x\ln(\tau)\cdot v\le\frac{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}{\varepsilon}F_{\Omega_\varepsilon}(v).$$

令 $x,y\in\Omega_\varepsilon$，使得 $x\le y$，并令 $\gamma\colon[0,1]\to\Omega_\varepsilon$ 为一条从 x 到 y 的分段类光测地曲线。则

$$\hat{d}_{\ln(\tau)}(x,y)=\ln(\tau(y)/\tau(x))=\int_0^1\ln(\tau(\gamma(t))'dt\le\frac{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}{\varepsilon}\int_0^1F_{\Omega_\varepsilon}(\gamma'(t))dt.$$

对所有 γ取下确界，结论由定理 2.4 和引理 6.4 得出。 ♦

定理 *6.7* 的证明。 现在假设 $\partial\Omega$ 是 ε稳定非因果的。注意，在定理 6.6 的证明中，只需用到未来完备性即可证明 $\delta_\Omega \leq 2d_{\ln(\tau)}$。因此，由于 Ω 未来完备，右侧的不等式成立。令 $x, y \in \Omega$ 满足 $x \leq y$，并令$r(x) \in \partial\Omega$ 是 x的一个初始奇点。记 $U = \mathbf{R}^{1,n} \setminus J_\varepsilon^-(r(x))$，并令 τ_U 为 U 的宇宙学时间函数。于是 $\Omega \subset U$，因为 $\partial\Omega$ 是 ε 稳定非因果的。由命题 2.2 和推论 6.10，可得

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}} \ln(\tau_U(y)/\tau_U(x)) \leq \delta_U(x,y) \leq \delta_\Omega(x,y).$$

现在，由于 $\Omega \subset U$，有 $\tau_U(y) \geq \tau(y)$。记 $x - r(x) = (t, p)$。由命题 3.8，有 $(1+\varepsilon)|p| \leq t$。因此

$$(1+\varepsilon)t + |p| \leq \frac{(1+\varepsilon)^2+1}{1+\varepsilon} t,$$

and

$$\frac{(1+\varepsilon)^2-1}{(1+\varepsilon)^2} t^2 = \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right) t^2 \leq \left(t^2 - |p|^2\right) = \tau(x)^2,$$

从而

$$(1+\varepsilon)t + |p| \leq \frac{(1+\varepsilon)^2+1}{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2-1}} \tau(x) = \frac{(1+\varepsilon)^2+1}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}} \tau(x).$$

由引理 6.8，我们得到

$$\tau_U(x) = \frac{(1+\varepsilon)t + |p|}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2+1}{(1+\varepsilon)^2-1} \tau(x).$$

最后

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}} \left(\ln \frac{\tau(y)}{\tau(x)} - \ln \left(\frac{(1+\varepsilon)^2+1}{(1+\varepsilon)^2-1} \right) \right) \leq \delta_\Omega(x,y).$$

该不等式由引理 6.4 得出。 ⧫

6.4. **因果凸情形**。 我们对因果凸域进行与上述类似的估计。

定理 6.11。 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的凸因果凸域。假设Ω 包含于两个类空超平面之间。令 τ^-和 τ^+ 分别为相应的过去和未来宇宙学时间函数。则

$$\frac{1}{2} \hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)} \leq \delta_\Omega \leq 2\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}.$$

证明。 我们证明，当 $\Omega = I(a,b)$ 对某个$a, b \in \mathbf{R}^{1,n}$且满足 $a \ll b$ 时，右侧等号成立。在此情形下，对于所有$x \in \Omega$，都有 $\tau^+(x) = \mathcal{T}(x,b)$ 以及 $\tau^-(x) = \mathcal{T}(a,x)$。令 $\tau : \Omega \to \mathbf{R}$ 为下式给出的时间函数

$$\tau(x) = \frac{\mathcal{T}(a,x)^2}{\mathcal{T}(x,b)^2}.$$

于是，若 $\gamma(t) = x + tv$ 是仿射类光测地线，则

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\mathcal{T}(a,x)^2 + 2\mathbf{b}(x-a,v)t}{\mathcal{T}(x,b)^2 + 2\mathbf{b}(x-b,v)t}$$

是一个射影变换，因此 τ 是射影的。此外，如果 $I(a, b)$中的 γ 是一条不可延拓因果曲线，那么 γ 分别在 $C^+(a)$和 $C^-(b)$中有一个过去端点和未来端点。因此， τ 与每个

水平集 $\tau^{-1}(\{t\})$相交，其中 $t>0$，因此 τ是一个柯西时间函数。现在 $\tau(\Omega)=\mathbf{R}_{>0}$，因此由引理 6.5可得

$$\delta_\Omega=\hat{d}_{\ln(\tau)}=2\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}. \tag{6.4}$$

现在回到一般情形。对于 $x\in\Omega$，我们用 $r^+(x)$ 和 $r^-(x)$ 分别表示 x 的终端奇点和初始奇点，它们由命题 3.7 给出。我们用 $H^\pm(x)$表示在 $r^\pm(x)$ 处与 $r^\pm(x)-x$ 正交的支撑超平面，并用 $p_x^\pm\colon \mathbf{R}^{1,n}\to H^\pm(x)$ 表示到 $H_\pm(x)$ 的正交投影。令 $x,y\in\Omega$ 满足 $x\le y$。如定理 6.6 的证明所示，有

$$\begin{aligned}\delta_\Omega(x,y)&\ge\delta_{I^+(H^-(x))}(x,y)\\&=\ln(\mathcal{T}(p_x^-(y),y))-\ln(\mathcal{T}(p_x^-(x),x))\\&\ge\ln(\tau^-(y))-\ln(\tau^-(x)).\end{aligned}$$

同理，有

$$\delta_\Omega(x,y)\ge\delta_{I^-(H^+(y))}(x,y)\ge\ln(\tau^+(x))-\ln(\tau^+(y)).$$

结合前两个不等式，我们推出

$$\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}(x,y)=\ln(\tau^-(y))-\ln(\tau^+(y))-\ln(\tau^-(x))+\ln(\tau^+(x))\le 2\delta_\Omega(x,y).$$

令 $a=r^-(x)$ 和 $b=r^+(y)$，并令 $D=I(a,b)$。那么 $x,y\in D\subset\Omega$，因此

$$\begin{aligned}\delta_\Omega(x,y)&\le\delta_D(x,y)\\&=\ln\left(\frac{\mathcal{T}(a,y)^2}{\mathcal{T}(y,b)^2}\frac{\mathcal{T}(x,b)^2}{\mathcal{T}(a,x)^2}\right)\\&=2\ln\left(\frac{\mathcal{T}(a,y)}{\tau^+(y)}\frac{\mathcal{T}(x,b)}{\tau^-(x)}\right)\\&\le 2\ln\left(\frac{\tau^-(y)}{\tau^+(y)}\frac{\tau^+(x)}{\tau^-(x)}\right)=2\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}(x,y).\end{aligned}$$

因此，所需的不等式对每个 $x\le y$ 都成立。由引理 6.4，不等式对一般的 $x,y\in\Omega$ 也成立。

♦

定理 6.12。设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个因果凸域，既非未来完备，也非过去完备。设 τ^-和 τ^+分别为相应的过去和未来宇宙学时间函数。若 $\partial_c^+\Omega$和$\partial_c^-\Omega$ 是 ε-稳定非因果的，则

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}-c_\varepsilon\le\delta_\Omega\le 2\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}.$$

^证明。不等式 $\delta_\Omega\le 2d_{\ln(\tau^-/\tau^+)}$ 仍然成立，因为 Ω 是因果凸的。由命题 3.7 可知，宇宙学函数是有限的，因为它们是正则的。取 $x,y\in\Omega$，使得 $x\le y$。我们选取一个初始奇点 $r(x)\in I^-(x)$，并令 $U=\mathbf{R}^{1,n}\setminus J_\varepsilon^-(r(x))$，且设 τ_U为 U的宇宙学时间函数。于是由引理 6.10 可得

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}\ln(\tau_U(y)/\tau_U(x))\le\delta_U(x,y)\le\delta_\Omega(x,y).$$

随后，采用与定理 6.7 的证明类似的计算可得

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}\ln\frac{\tau^-(y)}{\tau^-(x)}-c_\varepsilon\le\delta_\Omega(x,y).$$

将类似的论证应用于 y 未来中的一个终端奇点，可得

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}\ln\frac{\tau^+(x)}{\tau^+(y)}-c_\varepsilon\leq\delta_\Omega(x,y).$$

结合前面的两个不等式可得

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2+2(1+\varepsilon)^2}}\hat{d}_{\ln(\tau^-/\tau^+)}(x,y)-c_\varepsilon\leq\delta_\Omega(x,y).$$

由引理 6.4 即得。 ♦

6.5。 **零距离的推论**。本节证明定理 C .

命题 6.13。 设Ω是$\mathbf{R}^{1}$中的^{n}未来完备（分别为因果凸且既非未来完备也非过去完备）的域，并设 τ是其宇宙学时间函数（分别为 $\tau=\tau^-/\tau^+$）。若 $\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 是稳定非因果的，或者 Ω 是凸的且不包含任何类光直线，则ˆ(Ω $d_{\ln(\tau)}$) 是一个完备度量空间。

证明。 由命题 2.9 和推论 4.8，度量空间 (Ω δ_Ω) 是完备的。根据ˆ定理 6.6、6.7、6.11 和 6.12，我们 deduce 得出 (Ω $d_{\ln(\tau)}$) 是一个完备度量空间。♦

注记 6.14。 Burtsher–García-Heveling 已在 [BGH24]证明，共形时空ˆ$(M,[g])$ 整体双曲，当且仅当它存在一个时间函数 τ使得 (M,d_τ) 是完备度量空间。若 $M=(\Omega,[\mathbf{b}])$ 如前一推论所述，则 M 是整体双曲的，参见事实 3.1。时间函数 $\ln(\tau)$（其中 τ 如上所述）是一个具体例子，说明了 Burtsher–García-Heveling 定理 [BGH24]。

定理 *C* 的证明。 设 Ω 是一个凸域，它要么有界且因果凸，要么未来完备且不含类光直线，并令 τ 为相应的时间函数，如命题 6.13 中所述。由命题 6.13 可知，度量空间 (Ω $d_{\ln(\tau)}$) 是完备的。根据定理 6.6、6.7、6.11 和 6.12，距离 δ_Ω 与 $d_{\ln(\tau)}$ 拟等距等价。由命题 5.4 可推得，(Ω δ_Ω) 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 (Ω $d_{\ln(\tau)}$) 是格罗莫夫双曲的。 ♦

注记 6.15。 注意，前面的证明表明，定理 5.1 和 5.17 对零距离也有相应的结论。确切地说，若 Ω 未来完备，或者 Ω 因果凸且既非未来完备也非过去完备，则将 δ_Ω 替换为 ˆ ˆ$d_{\ln(\tau)}$ 或 $d_{\ln(\tau^-/\tau^+)}$ 后，这些定理仍然成立。

7. 格罗莫夫双曲性蕴含稳定非因果性

本节证明定理 A 和 B 的“仅当”部分。

7.1. 凸域的极限。 回顾一下，$\mathbf{R}^{1,n}$ 的紧子集具有由 Hausdorff 距离诱导的自然拓扑，该拓扑可表示为

$$d_{\mathrm{Haus}}(C,C')=\max_{x\in C'}d_h(x,C)+\max_{y\in C}d_h(y,C').$$

我们称$\mathbf{R}^{1,n}$ 中的凸域序列(Ω_k)收敛 到凸域Ω，如果对每个紧致 $C\subset\mathbf{R}^{1,n}$，紧子集序列 $C\cap\Omega_k$ 关于Hausdorff距离收敛到 $C\cap\Omega$。

引理 7.1. 设(Ω_k) 与Ω 为$\mathbf{R}^{1,n}$ 中不含类光直线的凸域。若(Ω_k)收敛到Ω，则 $\delta_{\Omega_k} \to \delta_\Omega$ 在Ω的紧子集上一致。更精确地说，对每个紧致 $K \subset \Omega$，对每个 $\varepsilon > 0$，存在 k_0，使得对每个 $k \geq k_0$，对每个 x， $y \in K$，有

$$(1-\varepsilon)\delta_{\Omega_k}(x,y) \leq \delta_\Omega(x,y) \leq (1+\varepsilon)\delta_{\Omega_k}(x,y)$$

证明。 证明与 [VLZ19，附录 B]中完全相同。 ♦

我们推得以下推论，其与 [Zim16，定理 51]类似。

推论 7.2。 设(Ω_k) 和Ω 是$\mathbf{R}^1$中的^n 凸域，且不含类光直线，并满足(Ω_k) 收敛到Ω，再设 $r > 0$。若对所有 $k \geq 0$，$(\Omega_k, \delta_{\Omega_k})$ 都是 r-格罗莫夫双曲的，则$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的。

证明。 由于 Ω_k 是 r-格罗莫夫双曲的，存在一个常数 $r \geq 0$，使得

$$(x,z)_w^k \geq \min\{(x,y)_w^k, (y,z)_w^k\} - r,$$

对所有 x、y、z、$w \in \Omega_k$，其中 $(\cdot|\cdot)^{(k)}$ 是 $(\Omega_k$、$\delta_{\Omega_k})$ 的格罗莫夫积。当$k \to \infty$取极限时，引理 7.1 表明

$$(x,z)_w \geq \min\{(x,y)_w, (y,z)_w\} - r,$$

对所有 x， y， z， $w \in \Omega$。由命题 5.3 可知，$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的。 ♦

7.2. **较弱的必要条件**。由两条类光线段组成的曲线称为折线状类光线段。这样的曲线要么是因果的，要么是非类时的。

定理 7.3。设Ω 是$\mathbf{R}^{1,\ n}$中的凸因果凸域。若$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的，则 $\partial\Omega$ 不包含因果折线类光线段。此外，若Ω 还是未来完备的，则 $\partial\Omega$ 是非因果的。

引理 7.4。设Ω 是$\mathbf{R}^{1,\ n}$中的凸未来完备域，或$\mathbf{R}^{1,\ n}$中的有界凸因果凸域。若Ω 是未来完备的，令 τ 为宇宙学时间函数；否则令 $\tau = \tau^-/\tau^+$。那么，每条以 $t = \ln(\tau)$ 为参数的因果曲线 $\gamma(t)$ 都是$(\Omega\ \delta_\Omega)$中的$(2,\ 0)$-拟测地线。

证明。 设 $\gamma(t)$ 是一条参数化因果曲线，使得 $t = \ln(\tau(\gamma))$。根据事实 6.2， γ 是 $(\Omega\ d_{\ln(\tau)})$ 的度量ˆ空间测地线。因此，定理 6.6 和定理 6.11 推出

$$\frac{1}{2}|t-s| = \frac{1}{2}\hat{d}_{\ln(\tau)}(\gamma(s),\gamma(t)) \leq \delta_\Omega(\gamma(s),\gamma(t)) \leq 2\hat{d}_{\ln(\tau)}(\gamma(s),\gamma(t)) = 2|t-s|,$$

对所有 s， $t \in \mathbf{R}$。 ♦

推论 7.5。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个凸且因果凸的域，其中不含类光直线。那么，Ω 中的因果曲线是 $(\Omega\ \delta_\Omega)$的$(2,\ 0)$-拟测地线。

证明。令 $\gamma : [a,b] \to \Omega$ 为 Ω 中的一条因果曲线。我们断言 γ 是 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 中的一条可求长曲线。事实上， γ 是 $(\mathrm{R}^{1,n}, d_h)$ 中的一条可求长曲线，因为它是一条局部 Lipschitz 曲线。现在 d_h 和 δ_Ω 在局部意义下等价 [Cha25, Thm. A], ，因此 γ 是 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 中的一条可求长曲线。对于所有 $k \geq 0$，令 $x_k = (-2^k, 0)$ 和 $y_k = -x_k$，并令 $\Omega_k = \Omega \cap I(x_k, y_k)$。由于 $\mathrm{R}^{1,n}$ 的菱形区域是凸的、因果凸的且有界，因此对于所有 $k \geq 0$，Ω_k 都是凸的、因果凸的且有界。根据构造，序列 (Ω_k) 在豪斯多夫拓扑下收敛到 Ω。由引理 7.1 可得 $L_{\delta_{\Omega_k}}(\gamma) \to L_{\delta_\Omega}(\gamma)$，因为 $k \to \infty$。由引理 7.4 可得

$$\frac{1}{2}L_{\delta_{\Omega_k}}(\gamma) \leq \delta_{\Omega_k}(\gamma(a),\gamma(b)) \leq 2L_{\delta_{\Omega_k}}(\gamma),$$

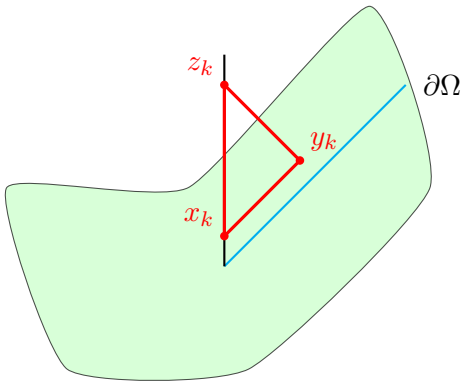


图3. 在未来完备域 Ω 内，一族非薄的 (Ω δ_Ω) 因果测地三角形，其边界包含一条类光半直线（蓝色）。

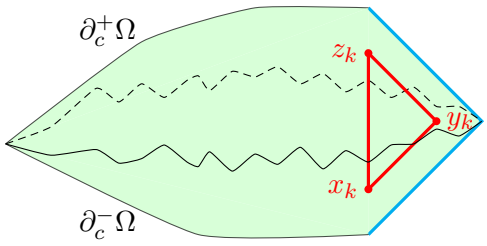


图4. 在有界因果凸域 Ω 内，一族非薄的 (Ω δ_Ω) 因果测地三角形，其中 $\partial\Omega$ 包含一段折线状类光线段（蓝色）。

对于所有充分大的 $k \geq 0$ 都成立。令 $k \to \infty$ 在前一个方程中取极限，可推出

$$\frac{1}{2}L_{\delta_\Omega}(\gamma) \leq \delta_\Omega(\gamma(a),\gamma(b)) \leq 2L_{\delta_\Omega}(\gamma),$$

因此 γ 是一条 (2,0)-拟测地线。 ♦

定理 7.3 的证明。 首先假设 Ω 是未来完备的。反设 $\partial\Omega$ 不是非因果的。那么存在一条半直线 Δ，位于 $\partial\Omega$ 中。令 $p \in \Delta$，并令 $x_k = p + 2^{-k}\partial_t$，对所有 $k \geq 0$ 均成立。设 (y_k) 为点列，使得 y_k 属于与 Δ 平行且包含 Ω 的未来类光半直线，并且 $d_h(x_k, y_k) \to \infty$ 当 $k \to \infty$ 时成立。最后，对所有 $k \geq 0$，令 z_k 为属于 $C(y_k) \cap (p+\mathbf{R}\partial_t)$ 且异于 x_k 的唯一点。则三角形 $x_k y_k z_k$ 是一个因果三角形，因此根据引理 7.4，它是 (Ω δ_Ω) 的一个 (2,0)-拟测地三角形。根据构造，线段 $[x_k, y_k]$ 和 $[y_k, z_k]$ 离开 Ω 的每个紧子集，而 $[x_k, z_k]$ 不会。根据命题 5.6，(Ω δ_Ω) 不是格罗莫夫双曲的。

现在假设 Ω 是因果凸的，并且 $\partial\Omega$ 包含一条因果折线类光线段。于是可以类似地构造一个因果三角形 $x_k y_k z_k$ 序列，使得$[x_k, y_k]$和 $[y_k, z_k]$最终都与 Ω 的每个紧子集不相交，但 $[x_k, z_k]$并非如此，见图4。这些三角形是 (2，0)-拟测地三角形（Ω δ_Ω），根据推论 7.5，因此（Ω δ_Ω）不是格罗莫夫双曲的。♦

7.3. 利用相似变换放大。 一个相似变换 $\mathbf{RR}^{1,n}$ 是 $\mathbf{RR}^{1,n}$的一个同时也是保角的仿射变换。任意相似变换 g 都可以分解为 $g(x) = \lambda Ax + t$，其中 $\lambda > 0$是畸变，$A \in \mathrm{O}(1, n)$ 是等距线性部分，而 $t \in \mathbf{R}^{1,n}$ 是 g 的平移部分。

引理 7.6. 设Ω 是$\mathbf{R}^1$中的^n 一个凸未来完备域，其中不含类光直线。若 $\partial\Omega$ 不是稳定非因果的，则存在(g_k) 这样一个$\mathbf{R}^1$的相似变换序列，^{n} 并存在一个不含类光直线的凸未来完备域Ω′，使得 g_k (Ω) $\to$ Ω′，且 $\partial\Omega'$ 不是非因果的。

证明。 为简单起见，我们始终可以假设 Ω 与超平面 $(t = 0)$ 不相交。假设 $\partial\Omega$ 不是稳定非因果的。那么存在一个序列 (x_k)，其元素属于 $\partial\Omega$；还存在一个类空仿射超平面序列(H_k)，使得 H_k 是Ω的支撑超平面

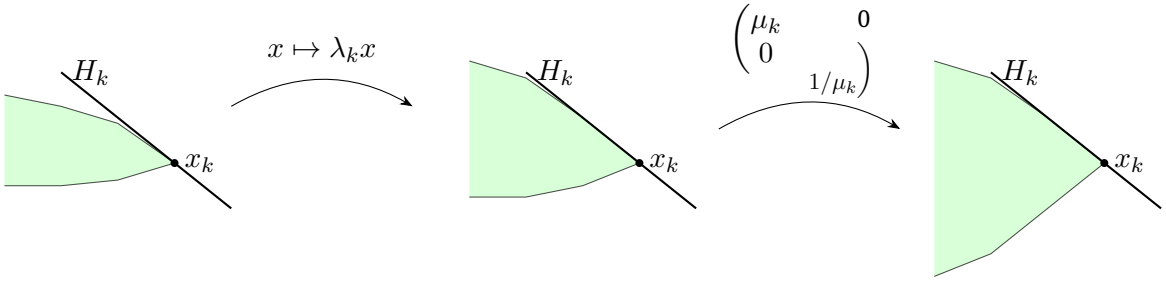


图5. 引理7.7证明中的“放大”步骤。图中展示了相似变换 h_k 的伸缩和等距变换部分对 Ω 的作用。

，对所有 $k \geq 0$，均在 x_k 处；并且序列 $(H_k^{\perp}) \in \mathrm{H}^n$ 收敛到类光方向$\Delta \in \partial \mathrm{H}^n$。对于 $k \geq 0$，记作 $x_k = (t_k, p_k)$，并令 g_k 表示向量 $v_k = (0, -p_k)$ 的平移与畸变为 $\lambda_k = 1/\max\{1, t_k\}$ 的伸缩的复合。令 $k \geq 0$，并令 $\Omega_k = g_k(\Omega)$。于是，按照构造，域 Ω_k 是凸的、未来完备的，与超平面 $(t = 0)$ 不相交，且其边界与类光直线 $(p = 0)$ 相交于一点$y_k = g_k(x_k)$，该点的 t 坐标属于 $[0, 1]$。此外，Ω_k 在 y_k 处有一个方向为 $g_k(\vec{H}_k) = \vec{H}_k$ 的支撑超平面。由命题 3.2，Ω_k 可以写成 1-利普希茨函数 $f_k : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 的上图，对所有 $k \geq 0$均成立。由前述内容可知，对所有$k \geq 0$，都有 $f_k(0) \in [0, 1]$ 。根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，取一个子列后，我们始终可以假设 (f_k) 在紧子集上一致收敛到函数 f。极限 f 仍是 1-利普希茨、凸且正的。因此，其上图 Ω' 是未来完备的、凸的，且与超平面 $(t = 0)$ 不相交；并且 (Ω_k) 收敛到 Ω'。令 $y = \lim_k y_k$，并令 H 为 $g_k(H_k)$ 的一个聚点。那么， H 是 Ω' 在 y处的支撑超平面，且 $H^{\perp} = \Delta$，因此 H 是类光的。由于 Ω' 是未来完备的，从 y 出发且平行于 Δ 的类光直线包含在$\partial\Omega'$中。因此 $\partial\Omega'$ 不是非因果的。♦

引理7.7. 设Ω是$\mathbf{R}^{1,n}$中的有界凸因果凸域。若 $\partial_c^+\Omega$ 或$\partial_c^-\Omega$ 不是稳定非因果的，则存在(g_k)这一列$\mathbf{R}^{1,n}$ 的相似变换，以及一个不含类光直线的因果凸域Ω'，使得 $g_k(\Omega) \to \Omega'$，且 $\partial\Omega'$ 包含一条因果折线类光线段。

证明. 由于 Ω 是因果凸的，根据命题 3.2，我们可以将 Ω 写为 $= \{(t, p) \in \mathbf{R} \times U | f_-(p) < t < f_+(p)\}$,。不失一般性，假设 $\partial_c^+\Omega$ 不是稳定非因果的。设 (p_k) 是 U 中的点列，且 (H_k) 是一列超平面，使得对所有 $k \geq 0$， H_k都是 $x_k = (f_+(p_k)\ p_k)$ 处的接触超平面，并且 (H_k) 收敛到一个类光超平面。固定 $v_k \in \vec{H}_k$ 使得 (v_k) 收敛到一个过去向类光向量 v，并令u_k 为 v_k 在$\mathbf{R}^n$上的正交投影，对所有 $k \geq 0$均如此。我们总可以用 $p_k + \mathbf{R}_{>0}v_k$ 与 ∂U 的交点替换 p_k，并假设对所有 $k \geq 0$，$p_k \in \partial U$ 。

设 $k \geq 0$，令 (q_m) 为一个沿方向 u_k径向收敛到 p_k 的 U 序列，并令 F_m 为 Ω 在 $z_m = (q_m,\ f_-(q_m))$ 处的支撑超平面序列。取一个子列后，不妨设 F_m 收敛到 x_k 处的支撑超平面 H'_k。于是，直线$\Delta_k = H'_k \cap P_k$渐近于 Ω 在 ~~x_k~~处的 $\partial_c^- \cap P_k$。此外，序列 (Δ_k) 不可能收敛到一条由 v 定向的直线，因为这将意味着 $H'_k \to H$，从而 Ω 将包含于$I^+(H) \cap I^-(H) = \emptyset$，这就产生了矛盾。

我们如下定义相似变换序列 (g_k)。对于每个 $k \geq 0$，相似变换 g_k 以 x_k 为中心，膨胀因子为 $\lambda_k > 1$，其等距变换部分在 $P_k^{\perp}$ 上的作用是平凡的，并且通过矩阵

作用

$$\begin{pmatrix} \mu_k & 0 \\ 0 & 1/\mu_k \end{pmatrix}$$

在 P_k 上，其中前一个矩阵是在由 P_k 的类光向量构成的基底 $(e_k,\ f_k)$ 下写出的，使得 $\lim_k f_k = v$。选择量 λ_k 和 μ_k，使得 $g_k(H_k) \to H$，并且使得 $g_k(\Delta_k)$ 收敛到一个与 e 横截的类光方向。通过适当选择序列 (λ_k) 和 (μ_k)，使得 $\lambda_k,\ \mu_k \to \infty$ 和 $\mu_k \ll \lambda_k$，即可做到这一点，因为 $\lim_k \vec{\Delta}_k \neq \mathbf{R}v$，见图5。经过抽取子列后，我们可以假设 $g_k(H'_k)$ 收敛到超平面 H'，根据构造，该超平面是退化的。

经过抽取后，我们可以假设序列 $\Omega_k = g_k(\Omega)$ 收敛到一个凸且因果凸的域 Ω'。由于 Ω' 与 H 和 H' 不相交，它不可能包含类光直线。如果 $P = \lim_k P_k$，那么 $P \cap \Omega'$ 是一个由因果折线类光线界定的四分之一空间，因此 $\partial\Omega'$ 包含一条因果折线类光线。♦

定理 *A* 和 *B* 的证明（必要条件）。设 Ω 是一个不含类光直线的凸未来完备域，且 $\partial\Omega$ 不稳定非因果；或者设 Ω 是一个有界、凸且因果凸的域，且 $\partial_c^+\Omega$ 或 $\partial_c^-\Omega$ 不稳定非因果。结合引理 7.6、引理7.7 和定理 7.3，存在一个由 $\mathrm{R}^{1,n}$ 的相似变换组成的序列 (g_k)，并且存在一个不含类光直线的凸因果凸域 Ω'，使得 $g_k(\Omega) \to \Omega'$，且 $(\Omega', \delta_{\Omega'})$ 不是格罗莫夫双曲的。若 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 对某个 $r > 0$ 是 r-格罗莫夫双曲的，那么根据命题 2.2，对所有 $k \geq 0$，$g_k(\Omega)$ 都是 r-格罗莫夫双曲的。这与推论 7.2 所述的 $(\Omega', \delta_{\Omega'})$ 不是格罗莫夫双曲的事实矛盾。因此，$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 不是格罗莫夫双曲的。♦

8. 极大域不是格罗莫夫双曲的

本节专门讨论定理D。定理D的证明在本节末给出。我们回顾 C-极大时空的概念，该概念在 [Sal15]中引入。共形映射f： $M \to N$ 在两个全局双曲时空之间是柯西嵌入，若它将 M 的柯西超曲面映到 N的柯西超曲面。

定义 8.1 (C-极大性)。整体双曲共形时空（$M,\ [g]$）是 C-极大的，如果每个柯西嵌入 $f : M \to N$ 都是满射。

回顾$\mathbf{R}^{1,\ n}$ 中的因果凸域是整体双曲的，见事实 3.1。$\mathbf{R}^{1,\ n}$ 中此外还是极大的因果凸域已得到充分理解。

事实 *8.2*（见 [*CG25*，命题 *6.3*] 以及 [*Cha25*，定理 *C*]）。设 Ω 是 $R^{1,\ n}$中的一个域。则 Ω 是因果凸且 C-极大的，当且仅当 Ω 在 [*Zim*18], 的意义下是对偶凸的，即对每个点 $x \in \partial\Omega$, 存在一个光锥 C 或一个类光超平面 H，它包含 x且与 Ω 不相交。在此情形下，只要 Ω 不含类光直线，度量空间（$\Omega\ \delta_\Omega$）就是完备的。♦

引理 8.3。设 $D = I(a, b)$ 是 $\mathbf{R}^{1,1}$, 中的一个菱形，且 e_1、e_2 是 a 的光锥与 b的交点。那么，对于任意不因果相关的 x、$y \in D$，有

$$\delta_D(x, y) = |\ln\left(\frac{\mathbf{b}(x - e_1, x - e_1)\mathbf{b}(y - e_2, y - e_2)}{\mathbf{b}(y - e_1, y - e_1)\mathbf{b}(x - e_2, x - e_2)}\right)|.$$

此外，D 中的因果曲线和非时曲线都是 (D, δ_D)的测地线。

证明。这由方程 6.4 通过交换 $\mathbf{R}^{1,1}$ 中空间与时间的角色而得出。♦

引理 8.4。 设 $D = I(x, y)$ 为 $\mathbf{R}^{1,1}$ 中的一个菱形。设 a、$b \in D$ 使得 $a \ll b$。则 $\delta_{I(x,y)}$ 与 $\delta_{I(a,y)}$ 在 $I(b, y)$ 上的限制是等价的。

证明。 由于 $I(a, y) \subset I(x, y)$，根据命题 2.2，我们已经知道 $\delta_{I(x,y)} \leq \delta_{I(a,y)}$ on$I(a, y)$。令 $z \in I(b, y)$。那么，如果 $\alpha = \ln(\mathcal{T}(x, y))/\ln(\mathcal{T}(a, y))$，则有

$$\mathcal{T}(x, z)^\alpha \leq \mathcal{T}(x, y)^\alpha = \mathcal{T}(a, b) \leq \mathcal{T}(a, z).$$

令 $z_1, z_2 \in I(b, y)$。若 $z_1 \leq z_2$，则由方程 6.4 可推出

$$\delta_{I(a,y)}(z_1, z_2) = 2\ln\left(\frac{\mathcal{T}(z_1, y)\mathcal{T}(a, z_2)}{\mathcal{T}(z_2, y)\mathcal{T}(a, z_1)}\right) \leq 2\ln\left(\frac{\mathcal{T}(z_1, y)\mathcal{T}(x, z_2)}{\mathcal{T}(z_2, y)\mathcal{T}(x, z_1)^\alpha}\right) \leq \alpha\delta_{I(x,y)}(z_1, z_2).$$

若 z_1 和 z_2 任意，令 $z_3 \in I(b, y)$ 满足： $z_1 z_3 z_2$ 是一条非时性折线状类光线段。于是，应用两次引理 8.3，可得

$$\begin{aligned}\delta_{I(a,y)}(z_1, z_2) &= \delta_{I(a,y)}(z_1, z_3) + \delta_{I(a,y)}(z_3, z_2) \\ &\leq \alpha\delta_{I(x,y)}(z_1, z_3) + \alpha\delta_{I(x,y)}(z_3, z_2) = \alpha\delta_{I(x,y)}(z_1, z_2).\end{aligned}$$

因此 $\delta_{I(x,y)} \leq \delta_{I(a,y)} \leq \alpha\delta_{I(x,y)}$ on $I(b, y)$。 ♦

定义 8.5。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中一个有界的因果凸域。若存在 Ω 的一个连通分支 Ω_Σ，使得 Ω_Σ 的未来因果边界是一条折线状类光线段，则称洛伦兹平面 Σ 为 Ω 的未来极大二维截面。见图 6。

引理 8.6. 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的有界、因果凸极大域。那么Ω 存在一个未来极大二维截面。

证明. 设 $x \in \Omega$ 且 $U = I^+(x) \cap \Omega$。那么 U 与 $\mathrm{R}^{1,n}$中的凸、过去完备正则域 V 共形等价，见 [Sma25]。设 $f : U \to V$ 是这样的共形等价，并设 $s_+ \in \partial_c^+\Omega$，使得 $f(s_+)$是 V中某点的终端奇点。由 [Bon05，命题 4.12], 可知，存在两条经过 $f(s_+)$、位于 ∂V中的类光半直线。特别地，存在两条经过 s_+ 且包含于 $\partial_c^+\Omega$ 的类光线段 c_1 和 c_2 。在 $\partial_c^+\Omega$ 中将这两条线段分别延伸至极大，并设 e_1, e_2 为它们各自的端点。设 Σ 为包含 e_1, e_2和 s_+的平面，并设 Ω_Σ为 $\Omega \cap \Sigma$中在其边界上包含 s_+的连通分支。设 y 为 c_1内部的一点。由事实 8.2，存在 C，它要么是光锥，要么是类光超平面，使得 C 包含 y 且与 Ω 不相交。先假设 C 是以某点 $z \in \mathrm{R}^{1,n}$为中心的光锥。若 $z \notin \Sigma$，则 $C \cap \Sigma$ 将是一条使 Ω_Σ不连通的类空曲线，这就产生了矛盾。因此 $z \in \Sigma$，且 $C \cap \Sigma$ 是两条类光直线的并，其中一条包含 c_1。现在假设 C 是退化超平面。类似地推理可得，交集 $C \cap \Sigma$ 是一条平行于 c_1的类光直线。由这两种情形可知，Ω_Σ 与由 c_1生成的直线不相交。同理，Ω_Σ 与由 c_2生成的直线不相交。因此，Ω_Σ 包含于 s_+的过去。由 c_1 和 c_2的极大性可知， $\partial_c^+\Omega_\Sigma = c_1 \cup c_2$。 ♦

引理 8.7。 设Ω 是$\mathbf{R}^{1,n}$中的一个有界因果凸域，且 Σ 是Ω的一个未来极大二维截面。设Ω_Σ是$\Omega \cap \Sigma$ 的一个连通分支，其未来因果边界为一条折线状类光线段。那么，对每个 $a \in \Omega_\Sigma$, 都存在 $A > 0$，使得$\Omega_\Sigma \cap I^+(a)$ 中的每条无因果曲线都是$(\Omega\ \delta_\Omega)$中的一条$(A,0)$拟测地线。

证明。 设 e_1 与 e_2 为 $\partial_c^+\Omega_\Sigma$ 的端点。注意 Ω 不能与 $I^\pm(e_1)$ 和$I^\pm(e_2)$ 相交。事实上，例如假设 $x \in \Omega \cap I^-(e_1)$。菱形 $I(x, e_1)$ 包含于 Ω，因为 Ω 是因果凸的。于是 $I(x, e_1) \cap \Sigma$非空且包含于 $\Omega \cap \Sigma \cap I^-(e_1)$。这与 $e_1 \notin \partial_c^+\Omega_\Sigma$ 这一事实矛盾。设 U 为 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中不

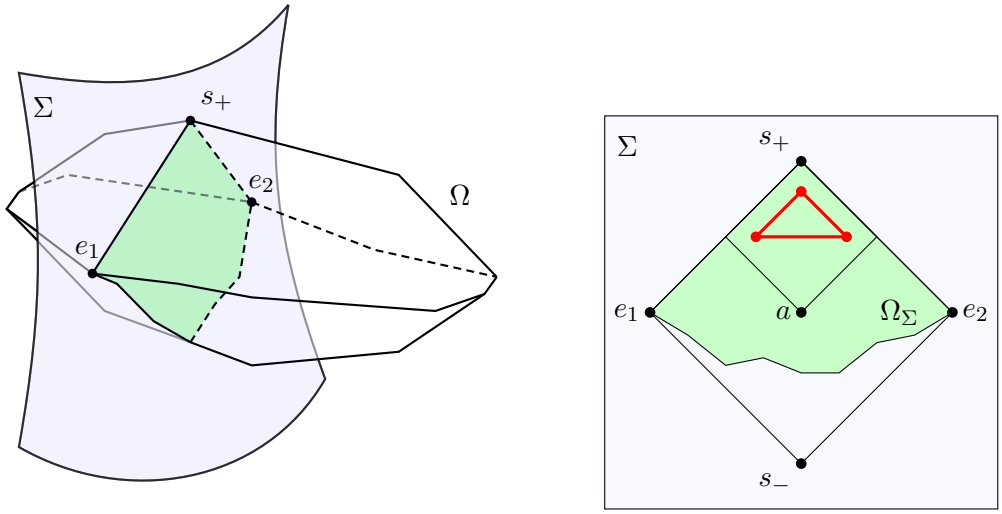


图 6。左侧：因果凸极大域 Ω 的未来极大二维截面 Σ。右侧红色部分：Ω_Σ 中的非类时拟测地三角形。

因果相关于 e_1 或 e_2。设 $f\colon U \to \mathbf{R}_{>0}$ 为由 $f(x) = \mathbf{b}(x-e_1,x-e_1)\,\mathbf{b}(x-e_2,x-e_2)$ 定义的映射。则 f 是射影的，因此由命题 2.7，有

$$|\ln(f(x)/f(y))| \leq \delta_U(x,y),$$

对每个 $x,\ y \in U$。我们将 Σ 与 e_1 和 e_2 的过去光锥的交点记为 s_-。我们记 $D = I(s_-,\ s_+) \cap \Sigma$。固定一点 $b \in \Omega \cap I^-(a)$，并记 $S = \Sigma \cap I(b,\ s_+)$。设 $x,\ y \in \Omega_\Sigma \cap I^+(a)$ 是两个不因果相关的点。包含关系 $S \subset \Omega \subset U$ 根据命题 2.2 可推出

$$\delta_U(x,y) \leq \delta_\Omega(x,y) \leq \delta_S(x,y).$$

根据引理 8.4，我们可以找到一个常数 $A \geq 1$，使得 $\delta_S \leq A\delta_D$ 在 $\Omega_\Sigma \cap I^+(a)$ 上成立。现在，由于 x 和 y 不因果相关，引理 8.3 蕴含

$$\delta_D(x,y) = |\ln(f(x)/f(y))|.$$

结合前面的不等式，我们得到

$$\delta_D(x,y) \leq \delta_\Omega(x,y) \leq A\delta_D(x,y).$$

根据引理 8.3，D 中的非时曲线对于 δ_D 是测地线，因此 $\Omega_\Sigma \cap I^+(a)$ 中的任意非时曲线都是 (A, 0)-拟测地线（Ω δ_Ω）。♦

定理*D*的证明。设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,\ n}$ 中一个有界、因果凸的极大域，设 Σ 是 Ω 的一个未来极大二维截面，设 Ω_Σ 是 $\Omega \cap \Sigma$ 的一个连通分支，其未来因果边界是一条折线状类光线段，设 $a \in \Omega_\Sigma$，并设 $A > 0$ 是引理 8.7 给出的常数。设 $(x_k y_k z_k)$ 是 $\Omega_\Sigma \cap I^+(a)$ 内的一个非类时三角形序列，使得对于所有 $k \geq 0$，$[x_k, y_k]$ 和 $[y_k, z_k]$ 都是类光线段。可以选取 $(x_k y_k z_k)$，使得 $[x_k, y_k]$ 和 $[y_k, z_k]$ 收敛到 Ω_Σ 的未来因果边界中的类光线段，并且使 $[x_k, z_k]$ 收敛到一条类空线段，见图 6。特别地，边$[x_k, y_k]$ 和 $[y_k, z_k]$ 离开 Ω 的每个紧子集，而 $[x_k, z_k]$ 与 Ω 的某个固定紧子集相交。由引理 8.7，对于所有

$k \geq 0$，根据事实 8.2，度量空间 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是完备的。由命题 5.6 可推得，$(\Omega\ \delta_\Omega)$ 不是格罗莫夫双曲的。♦

9. 例子

9.1. 齐性 Bonsante 域。齐性 Bonsante 域是一个域Ω_ℓ，可表示为某个 ℓ维黎曼子集 $F \subset \mathbf{R}^{1,}$^{n}的未来 $I^+(F)$。具体而言，可以写成

$$\Omega_\ell = \left\{(t,p) \in \mathbf{R}^{1,n} \,|\, t > \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_{n-\ell}^2}\right\},$$

在适当的基底下。这些域是凸的且未来完备，因此满足定理 B 的假设。作者在 [Cha25，命题 11。2]。

命题 9.1。存在一个从$(\Omega_\ell, \delta_{\Omega_\ell})$ 到$\mathbf{H}^{n-\ell} \times \mathbf{H}^{\ell+1}$的双 *Lipschitz* 映射。♦

由命题 9.1 可知，$(\Omega_\ell,\ \delta_{\Omega_\ell})$ 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 $\ell = n$。这与定理 B 一致，因为当 $\ell < n$时，$\partial\Omega_\ell$ 不是非因果的；而当 $\ell = n$时，对于每个 $\varepsilon > 0$，$\partial\Omega_\ell$ 都是 ε-稳定非因果的。注意，当 $\ell = n$时，拟双曲度量 $\mathfrak{h}_{\Omega_\ell} = t^{-2}h$就是上半空间的双曲度量，并且在这种情况下$F_{\Omega_\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{h}_{\Omega_\ell}$。由推论 4.4 可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{k}_{\Omega_n} \leq \delta_{\Omega_n} \leq \mathrm{k}_{\Omega_n}.$$

另请比较 [Mar82，定理 5]。

9.2. 类空薄层。设 $\Omega = \{(t,\ p) \in \mathbf{R}^{1,\ n} \,||t| < 1\}$ 为一个类空薄层。则 Ω 是因果凸的，且 $\partial_c^+\Omega$ 和 $\partial_c^-\Omega$ 是稳定非因果的。根据定理 5.17，我们知道 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是因果稀薄的。然而，度量空间 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 并非格罗莫夫双曲。为此，只需根据定理 4.1 证明 $(\Omega,\ \mathrm{k}_\Omega)$ 不是格罗莫夫双曲的。现在，超平面 $(t = 0)$ 是 $(\Omega,\ \mathrm{k}_\Omega)$ 中一个全测地的 $\mathbf{R}^n$ 副本。因此，$(\Omega,\ \mathrm{k}_\Omega)$ 包含欧几里得三角形，且 $(\Omega,\ \mathrm{k}_\Omega)$ 不是格罗莫夫双曲的。另请注意，根据引理 6.5，δ_Ω 与时间函数 $\tau(t,\ x) = \ln((1+t)/(1-t))$ 的零距离重合，因为 $(t,\ x) \to t$是一个射影柯西时间函数。

10. 与希尔伯特度量的比较

设 Ω 是 $\mathbf{R}^1 \Subset^n$ 不含任何完整仿射直线的凸域，并令 H_Ω 表示 Ω 上的希尔伯特度量。回忆一下，希尔伯特度量是通过对以下芬斯勒度量进行积分得到的

$$G_\Omega(v) = \frac{|v|}{d_h(x, x_v^-)} + \frac{|v|}{d_h(x, x_v^+)},$$

沿 Ω 中的分段光滑曲线进行，其中 $x_v^\pm$ 是由 $v \in T_x$在 Ω 中生成的测地线段的端点。由命题 2.8 可知 $H_\Omega \leq \delta_\Omega$ 在 Ω上成立，但一般而言，这两个距离是否等价并不明确，也就是说，是否存在常数$\alpha \geq 1$ 使得 $\delta_\Omega \leq \alpha H_\Omega$，例如参见 [Cha25，例 7，8] 其中讨论了圆盘的情形。

推论 10.1（定理 A 的推论）。存在无穷多个有界凸域Ω，位于$\mathbf{R}^{1,n}$，使得 δ_Ω 与 H_Ω 不拟等距等价。

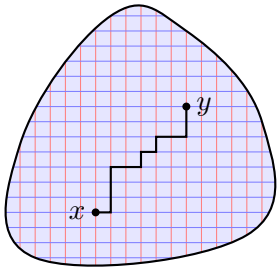


图 7. 凸子集 $\mathbf{R}^{1,\ 1} = (\mathbf{R}^2,\ [dxdy])$ 上的 Markowitz度量可以看作一种“曼哈顿-希尔伯特度量”。它是在凸城市中得到的度量：街道网格呈曼哈顿式，但距离是按希尔伯特度量而非欧几里得度量来测量的。

证明。 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的一个有界、凸且因果凸域，其边界稳定非因果。由定理 A，度量空间 $(\Omega\ \delta_\Omega)$ 是格罗莫夫双曲的。现在，Ω 的边界在 C^1 的点处不 $\partial(\partial_c^+\Omega)$。因此，$(\Omega\ H_\Omega)$ 不是格罗莫夫双曲的，参见[KN02, Ben03]。特别地， H_Ω 与 δ_Ω 根据命题 5.4 不拟等距等价。 ♦

在维数为 $n+1=2$ 时，除相似变换外，恰有四个区域满足 Markowitz度量与希尔伯特度量等价。

定理 10.2. 设 Ω 是$\mathbf{R}^{1,1}$，中的一个不含任何完整直线的凸域。那么以下命题等价：

(1) δ_Ω 与 H_Ω 等价；*(2)* δ_Ω 与 H_Ω 拟等距等价；*(3)* Ω与一个菱形莫比乌斯等价；*(4)* Ω是一个菱形、一个类空分支、一个未来、一个过去，或一个半光状薄片。

在前述表述中，类空分支 指的是对于某个 $x \in \mathbf{R}^{1,1}$，$\mathbf{R}^{1,1} \setminus J^{\pm}(x)$ 的一个连通分支。半光状薄片 对应于一个光状薄片与某个点的未来或过去的交集。莫比乌斯变换 是相似变换与洛伦兹反演 $i(x) = {}^{x}\mathfrak{b}_{(x,x)}$的复合。

证明。 我们首先证明 (2) ⇒ (4)。假设存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 使得$\delta_\Omega \leq \alpha H_\Omega + \beta$。令 $x \in \partial\Omega$，使得 $\partial\Omega$ 在 x 处可微。令 Δ 为 Ω 在 x 处的切线，并令 U 为由 Δ 界定且包含 Ω 的半空间。我们断言Δ 是类光的。反之，假设 Δ是非退化的。不妨设 Δ 是黎曼的。对于 $k \geq 0$，令 h_k 为在 x 处、畸变为 2^k 的伸缩，并令 $\Omega_k = h_k(\Omega)$。于是，(Ω_k) 在豪斯多夫拓扑中收敛到 U。令 $a, b \in U$，并令 k 足够大，使得 $a, b \in \Omega_k$。然后

$$\delta_U(a,b) \leq \delta_{\Omega_k}(a,b) \leq \alpha H_{\Omega_k}(a,b) + \beta.$$

选择 a 和 b，使得 $[a,b]$ 与 Δ 共线。于是，当 $k \to \infty$ 时， $H_{\Omega_k}(a,\ b) \to 0$，从而 $\delta_U(a,\ b) \leq \beta$。这与 $\delta_U(a,\ b)$ 可以任意大这一事实相矛盾。因此， Δ 是类光的。由此可知，Ω 的边界是类光线段或半直线的并集，而 Ω 是菱形、类空分支、未来、过去或半光状薄片。

现在我们证明 (4) ⇒ (1)。我们区分三种情形。

(1) Ω 是未来、过去或类空分支。那么存在 $\alpha > 0$使得 $\delta_\Omega \leq \alpha H_\Omega$在Ω中某个点的邻域上成立。由于群 O(1,1) 通过Ω的相似变换作用，其作用关于两种度量都是等距的： δ_Ω 和 H_Ω。由于该作用是传递的，并且 δ_Ω 与 H_Ω 都是长度度量，我们由此推得 $\delta_\Omega \leq \alpha H_\Omega$ 在Ω上成立，参见例如 [Cha25，推论 4。9]。注意，常数 $\alpha > 0$ 与Ω无关。

(2) Ω是一个半光状薄片。经过相似变换后，我们不妨假设

$$\Omega = \{(t,p) \in \mathbf{R}^{1,1} \,|\, t + p > 0 \text{ and } |t - p| < 1\}.$$

设 $\Delta = \{t = p\}$，并令 $U = \Omega \cap J^-(\Delta)$ 和 $V = \Omega \cap J^+(\Delta)$ 为 Ω 中由 Δ 围成的两个子域。令 $I = I^+((-1/2, 1/2))$。设 $x \in U$ 和 $v \in T_x U$ 为类光的。若 v 与 (1, 1) 共线，则 $F_\Omega(v) = F_U(v)$。否则，

$$F_\Omega(v) = \frac{|v|}{d(x, x_v^+)} + \frac{|v|}{d(x, x_v^-)} \leq 2\frac{|v|}{d(x, x_v^-)} = 2F_I(v).$$

由前一种情形可推得

$$\delta_\Omega \leq 2\delta_I \leq 2\alpha H_I \leq 2\alpha H_\Omega, \text{ on } U.$$

类似地，在 V 上有 $\delta_\Omega \leq 2\alpha H_\Omega$。由于 δ_Ω 和 H_Ω 是 Ω 上的长度度量，因此可得 Ω 上的 $\delta_\Omega \leq 2\alpha H_\Omega$。

(3) Ω是一个菱形。经过相似变换后，我们不妨假设

$$\Omega = \{(t,p) \in \mathbf{R}^{1,1} \,|\, |t \pm p| < 1\}.$$

设 $D_1, \ldots, D_4$ 为 Ω 中由原点的光锥围成的四个菱形区域。那么，与前一种情况一样，对每个 $i = 1, \ldots, 4$，都有 $\delta_\Omega \leq 2\alpha H_\Omega$ on D_i。由此可得， $\delta_\Omega \leq 2\alpha H_\Omega$ on Ω。

在所有情况下，我们都有 $\delta_\Omega \leq 2\alpha H_\Omega$，因此 δ_Ω 和 H_Ω 等价。推论 (1) ⇒ (2) 显而易见。等价关系(4) ⇔ (3)是标准结果，且适用于任意维数，参见例如[Cha24，第 1.4 节。5]。 ♦

声明。 本研究部分由卢森堡国家研究基金（FNR）资助，资助编号为 O24/18936913/RiGA。为实现开放获取并履行资助协议所规定的义务，作者已将本次投稿所产生的任何作者接受稿版本置于知识共享署名 4.0 国际许可协议（CC BY 4.0）之下。

参考文献

[AB22] Brian Allen 和 Annegret Burtscher，《零距离的性质与时空收敛》，Int. Math. Res. Not. IMRN (2022 10, 7729 7808 4418719)，第 – 期。MR AGH Lars Andersson、Gregory J. [98] Galloway 和 Ralph Howard，《宇宙学时间函数》，Classical Quantum Gravity **15** 1998 2, 309 322 1606594 ( )，第 – 期。MR Bar Thierry Barbot，《整体双曲平坦时空》，[05] J. Geom. Phys. 53 (2005)，第 2 期，123–165。MR2110829[BB00] Zoltán M. Balogh 和 Mario Bonk，《严格伪凸域上的格罗莫夫双曲性与 Kobayashi 度量》，Comment. Math. Helv. **75** 2000 3, 504 533 1793800 ( )，第 – 期。MR BB Zoltán M. [03] Balogh 和 Stephen M. Buckley，《格罗莫夫双曲性的几何刻画》，Invent. Math. **153** 2003 2, 261 301 1992014 ( )，第 – 期。MR Ben Yves Benoist，《双曲凸集与拟对称函数》，[03] Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003 97, 181 237 2010741)，第 – 期。MR Ben《可除凸集。I》，[04]《代数群与算术》，Tata Inst. Fund. Res.，孟买，2004，第 339–374 页。MR2094116

[BGH24] Annegret Burtscher 和 Leonardo García-Heveling，《从零距离的视角看全局双曲性》，Comm. Math. Phys. **405** 2024 4, 90, 35 4719972 ( )，第 Paper No. 期。[99] MR BH Martin R. Bridson 和 André Haefliger，《非正曲率度量空间》，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [基础数学科学原理], 第 319 卷，Springer-Verlag，柏林，1999。MR1744486[BHK01] Mario Bonk、Juha Heinonen 和 Pekka Koskela，《Gromov双曲空间的统化》，Astérisque，第 270, 2001 1829896 期，Société mathématique de France, [05]（英文）。MR Bon Francesco Bonsante，《具有紧双曲柯西曲面的平坦时空》，J. Differential Geom. 69 (2005)，第 3 期，441–521。MR2170277[BSS23] Francesco Bonsante、Andrea Seppi 和 Peter Smillie，《Minkowski（$n+1$）空间中的完备 CMC超曲面》，Comm. Anal. Geom. 31 (2023)，第 4 期，799–845。MR4775035[CG25] Adam Chalumeau 和 Blandine Galiay，《爱因斯坦宇宙中的正则近齐性域》，Int. Math. Res. Not. IMRN (2025)，第 14 期，论文编号 rnaf205，共 24 页。MR4934667[Cha24] Adam Chalumeau，《伪黎曼几何中的共形不变度量》，博士学位论文，斯特拉斯堡大学，2024年12月。[Cha25] ，《共形流形上的 Markowitz伪距离》，2025，arXiv:2509.15745。[Fia22] Matteo Fiacchi，《C 中伪凸有限型域的格罗莫夫双曲性》，^{2}, Math. Ann. 382 (2022 1 2, 37 68 4377298)，第 - – 期。MR Fia《极小度量的格罗莫夫双曲性》，Math. Z. 308 [24] ，(2024)，第 2 期，论文编号 24，共 20 页。MR4788313[FK24] Franc Forstnerič 和 David Kalaj，《在一点处保角的调和映射的 Schwarz-Pick 引理》，Anal. PDE 17 (2024)，第 3 期，981–1003。MR4736523[Gal25] Blandine Galiay，《旗流形中正则域的几何》，博士学位论文，巴黎-萨克雷大学，2025年6月。[70] **11** 1970 437 449 270697 Ger [72] Robert Geroch，《依赖域》，J. Mathematical Phys. ( )，–。MR GKP Robert Geroch、Erwin Kronheimer 和 Roger Penrose，《时空中的理想点》，Proc. Roy. Soc. London Ser. A **327** 1972 545 567 316035 ( )，–。MR Gro Mikhael Gromov，《双曲群》，《群论 [87] 论文集》，Math. Sci. Res. Inst. Publ.，第 8 卷，Springer，纽约，1987, 75 263 919829 第 – 页。MR GS Hervé Gaussier 和 Harish Seshadri, [18] 《关于 C 中凸域的格罗莫夫双曲性》，^{n}Comput. Methods Funct. Theory **18** 2018 4, 617 641 3874885 ( )，第 – 期。MR KN Anders Karlsson 和 [02] Guennadi A. Noskov，《希尔伯特度量与格罗莫夫双曲性》，Enseign. Math. (2) 48 (2002)，第 1–2 期，73–89。MR1923418[Kob84] Shoshichi Kobayashi，《仿射与射影结构的射影不变距离》，《微分几何》（华沙，1979），Banach Center Publ.，第 12 卷，PWN，华沙，1984，第 127–152 页。MR961077[KS22] Michael Kunzinger 和 Roland Steinbauer，《洛伦兹长度空间中的零距离与收敛》，Ann. Henri Poincaré **23** 2022 12, 4319 4342 4512238 ( )，第 – 期。MR Mar Michael J. [81] Markowitz，《内在共形洛伦兹伪距离》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **89** 1981 2, 359 371 600250 ( )，第 – 期。MR Mar《洛伦兹翘曲积的共形双曲性》，Gen. [82] ，Relativity Gravitation 14 (1982)，第 12 期，1095–1105。MR683679[MS08] Ettore Minguzzi 和 Miguel Sánchez，《时空的因果层次》，《伪黎曼几何新进展》，ESI Lect. Math. Phys.，Eur. Math. Soc.，苏黎世，2008，第 299–358 页。MR2436235[Sal15] Clara Rossi Salvemini，《共形平坦整体双曲时空的极大延拓》，Geom. Dedicata 174 (2015)，235–260。MR3303051[Sma22] Rym Smaï，《具有完备光子的极大整体双曲共形平坦时空》，博士学位论文，阿维尼翁大学，2022年11月。[Sma23] ，《整体双曲共形平坦时空的包络空间》，2023，arXiv:2311.17802。[Sma24] ，《整体双曲共形平坦时空的因果完备化》，J. Math. Phys. 65 (2024)，第 10 期，论文编号 102501，共 19 页。MR4812182[Sma25] ，《整体双曲极大共形平坦时空中点的未来集的极大性》，2025，arXiv:2501.05856。[SV16] Christina Sormani 和 Carlos Vega，《时空上的零距离》，Classical Quantum Gravity 33 (2016)，第 8 期，085001，共 29 页。MR3476515

[*VLZ*19] *Wouter Van Limbeek* 和 *Andrew Zimmer*，《旗流形中凸可除域的刚性》，*Geom. Topol.* **23** 2019 1, 171 240 3921319 *( ), no. – . MR Vä Jussi Väisälä*，《相对一致域与内[98]一致域》，*Conform. Geom. Dyn. 2 (1998), 56–88. MR1637079*[*WZ*24] *Tianqi Wang* 和 *Andrew M. Zimmer*，《由等周不等式得出的内禀度量的格罗莫夫双曲性》，*2024*，*arXiv:2411.06579*。[*Zim*15] *Andrew M. Zimmer*，《真几何结构的刚性与凸性》，*2015*，*arXiv:1507.06921*。[*Zim*16] ，《有限型凸域上的格罗莫夫双曲性与 *Kobayashi* 度量》，*Math. Ann.* **365** 2016 3 4, 1425 1498 3521096 *( ), no. - – . MR Zim*《格罗莫夫双曲性、———— [17] ，*Kobayashi* 度量与 *C*-凸集》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **369** 2017 12, 8437 8456 3710631 *( ),* ———— [18] ；*no. – . MR Zim*《旗流形中的真拟齐性域与几何结构》，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* ——— **68** 2018 6, 2635 2662 3897977 *( ), no. – . MR Zim*《由格罗莫夫双曲性得出的[22] ，次椭圆估计》，*Adv. Math. 402 108334, 94 2022 4397690 ( ), Paper No. . MR*