arXiv:2602.02205v1 [math.AP] 2 Feb 2026

气体动力学欧拉系统的统计解

Eduard Feireisl *

捷克科学院数学研究所 ˇZitn´a 25, CZ-115 67 布拉格 1, 捷克共和国
feireisl@math.cas.cz

摘要

我们研究描述可压缩理想流体运动的（完整）欧拉系统，并提出一种适用于构造统计解的框架。我们的方法主要包含以下要素：

- 欧拉系统耗散型（测度值）解的概念。
- 一种基于最小化给定解与最大熵平衡态之间布雷格曼散度的单步选择程序。
- 通过推前测度构造马尔可夫半群。

关键词： 气体动力学欧拉系统、耗散解、半群选择、统计解、马尔可夫半群

1 引言

气体动力学欧拉系统是非线性双曲守恒律系统的典型例子之一。受限于（有界）容器 $\Omega \subset R^d$，$d = 1$，2，3 中的可压缩理想流体（气体）的运动，可通过三个场方程加以描述，这些方程表达了其所依据的基本物理原理，即

质量守恒

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x \mathbf{m} = 0; \tag{1.1}$$

*E.F.的工作部分得到了捷克科学基金会（GA ˇCR）24–11034S号资助协议的支持。捷克科学院数学研究所获得RVO:67985840资助。E.F.是Ne ˇcas数学建模中心的成员。

动量守恒

$$\partial_t \mathbf{m} + \mathrm{div}_x \left(\frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\varrho} + p\mathbb{I} \right) = 0; \tag{1.2}$$

能量守恒

$$\partial_t E + \mathrm{div}_x \left((E+p) \frac{\mathbf{m}}{\varrho} \right) = 0. \tag{1.3}$$

我们保留质量密度 $\varrho = \varrho(t, x)$ 和动量 $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t, x)$ 作为状态变量，而压力 p 以及能量 E 则通过本构关系给出。具体而言，我们将能量写成以下形式

$$E = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\varrho} + \varrho e, \tag{1.4}$$

其中内能 e与压力之间满足多方状态方程

$$p = (\gamma - 1)\varrho e, \ \gamma > 1. \tag{1.5}$$

最后，我们引入熵 s，它与内能和压力通过吉布斯方程相互关联

$$\vartheta Ds = De + pD\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{1.6}$$

其中，新变量 ϑ 是绝对温度。为简单起见，且实际上不失一般性，我们可以假设

$$p = \varrho\vartheta, \ e = c_v\vartheta, \ c_v = \frac{1}{\gamma - 1}, \ s = c_v \log(\vartheta) - \log(\varrho), \tag{1.7}$$

其中， c_v 为定容比热。请注意，多方状态方程（1.5）并不完备（参见 Benzoni–Gavage 和 Serre 的专著 [7] ），其具体形式（1.7）由对绝对温度 ϑ的适当选取所确定。

通过加入总熵$S(t, x) = \varrho(t, x)s(\varrho(t, x), \vartheta(t, x))$，可以方便地补全相变量族 $\varrho, \mathbf{m}$。通过施加**不可渗透边界条件**，问题便形式上闭合

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}; \tag{1.8}$$

and

初始条件

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_0, \ \mathbf{m}(0, \cdot) = \mathbf{m}_0, \ S = \varrho s(0, \cdot) = S_0. \tag{1.9}$$

众所周知，欧拉系统在一类足够正则的解中局部适定；然而，无论初始数据多么光滑、多么小，有限时间内都可能出现奇异性，通常表现为激波（例如参见 Dafermos 的专著 [15]）。弱解（分布解）能够容纳奇异性，但一般并不唯一（参见 Smoller [36]）。

为恢复唯一性，人们提出了熵可容许性准则，即**熵不等式**

$$\partial_t(\varrho s) + \mathrm{div}_x(s\mathbf{m}) \geq 0. \tag{1.10}$$

不等式 (1.10) 可被视为热力学第二定律的数学表述，见 Dafermos [16]。

人们普遍认为，可容许性条件 (1.10) 可能在弱解类中恢复唯一性。这在一维空间中部分成立 $d = 1$。除了可在 [15], 中找到的经典结果外，Vasseur 等人还取得了一些相当近期的成果 [12], [32]。然而，De Lellis 和 Sz´ekelyhidi [17], [18] 的开创性工作所发起的凸积分方法的最新发展，揭示了关于欧拉系统在空间维数 $d = 2$,3 的可容许弱解类中适定性的一些相当令人不安的事实:

- 存在一大类初始数据，对于这些数据，欧拉系统具有无穷多个可容许弱解，见 [21]。特别地，经典黎曼问题的多维推广是不适定的，至少对于某些初始数据而言如此，见 [1], [33], 。

- 能够产生无穷多个熵可容许弱解的“野”初始数据集合，在相空间 [13] 的 L^p-拓扑下稠密。

- 该问题的不适定性在随机扰动下依然存在，见 [14]。

我们在统计解的框架下研究欧拉系统。Foias [27], 以及 Vishik 和 Fursikov [37] 最初在不可压缩纳维–斯托克斯方程组的背景下引入了统计解。随后，$Roger\ Temam$ 及其合作者通过一系列工作 [28], [29], [30]进一步发展了原有理论。简而言之，统计解是一种受给定问题的解集支撑的随机过程。初始数据被视为取值于相应相空间中的随机变量。

在 [19], 中，有人提出了一种直接构造统计解的方法，即将初始数据的分布通过推前得到一个测度。由此便在概率测度空间上得到一个马尔可夫半群，用以刻画解在任意正时间$t > 0$的分布。显然，这种方法要求该问题存在一个博雷尔可测的解半群。

Krylov [35] 的方法及 Cardona 和 Kapitanski [11] 对其所作的改进，曾被用于[19] 为可压缩纳维–斯托克斯方程组选取解半群（另见 Basari´c [6]）。受 [20], [24], 启发，我们将欧拉系统的可容许（弱）解扩展为 [9], [10]中引入的耗散测度值解。与 [19], 中需要无穷多个代价泛函来选取唯一解不同，我们提出一种由热力学第二定律约束的单步选择准则。具体而言，我们详细阐述克劳修斯的经典表述（鲁道夫·克劳修斯，Poggendorff《物理学年鉴》1865 年（125），400），该表述被认为是热力学第二定律最鲜明的表述:

能量　　世界（封闭系统）的 gy 是恒定的；其熵趋于最大值　　.

因此，我们提出一种选择准则：尽量缩短与熵最大化的平衡态之间的距离。选定恰当的解映射后，构造相应的马尔可夫半群便是常规步骤。

本文的组织如下。第2节回顾欧拉系统的耗散（测度值）解的定义及其基本性质。在第3节中，我们提出一种单步选择准则，该准则基于最小化与最大熵平衡态之间的距离。特别地，我们证明，对于 $t \to \infty$，所选解的能量缺陷消失，这是一个具有独立意义的结果。适当统计解存在性的主要结果在第4节中陈述。统计解基本性质的证明见第5节。本文最后在第6节中进行简短讨论。

2 耗散解

尽管存在大量（野）初始数据，使得欧拉系统具有无穷多个可容许的弱解，但对于一般初始数据，弱解的存在性仍然是一个悬而未决的重要开放问题。继 [9] 之后，我们扩展了解的类别，将其一致近似的所有可能极限纳入其中，参见 [23, 第二部分，第 5] 章。我们指出，与 Fjordholm 等人 [25], [26],、Gwiazda 等人 [31], 、Klingenberg 等人 [34], 所提出的“纯”测度值方法不同，耗散解由函数而非参数化的（Young）测度表示。

首先，我们引入动能

$$\frac{1}{2}\frac{|\mathbf{m}|^2}{\varrho} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{m}|^2}{\varrho} \text{ if } \varrho > 0, \\ 0 \text{ if } \varrho = 0, \mathbf{m} = 0, \\ \infty \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

类似地，内能和压力定义为

$$p(\varrho, S) = (\gamma - 1)\varrho e(\varrho, S) = \begin{cases} \varrho^\gamma \exp\left(\frac{S}{c_v \varrho}\right) \text{ if } \varrho > 0, \\ 0 \text{ if } \varrho = 0, \ S \leq 0, \\ \infty \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{2.2}$$

最后，总能量表示为

$$E(\varrho, \mathbf{m}, S) = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{m}|^2}{\varrho} + \varrho e(\varrho, S), \tag{2.3}$$

其中我们采用了 (2.1)、(2.2)。根据 (2.1)、(2.2)，总能量 $E(\varrho, \mathbf{m}\ S)$ 是 $(\varrho, \mathbf{m}\ S)$ 的凸下半连续函数 $\in R^{d+2}$，且在其定义域上严格凸。

下面引入的耗散解将属于相空间

$$\mathcal{P} = \left\{ (\varrho, \mathbf{m}, S, \mathcal{E}_0) \ \Big| \ \int_\Omega E(\varrho, \mathbf{m}, S) \ \mathrm{d}x \leq \mathcal{E}_0, \ S \geq \underline{s}\varrho, \ \int_\Omega \varrho \ \mathrm{d}x \geq m_0 > 0 \right\},$$

其中 $s \leq R$， $m_0 > 0$ 是给定的常数。容易验证集合 $\mathcal{P}$ 是凸的 .

定义 2.1 (耗散解)。我们称 $(\varrho,\ \mathbf{m}\ S,\ \mathcal{E}_0)$ 是满足边界条件 (1.8) 和初始数据的欧拉系统 (1.1)–(1.3)、(1.10) 的耗散解

$$(\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0) \in \mathcal{P}$$

在时空柱 $(0,\infty)\ \times \Omega$ 中，若存在一个参数化测度

$$\mathcal{V}_{t,x},\ t\in(0,\infty),\ x\in\Omega,\ (t,x)\mapsto \mathcal{V}_{t,x}\in L^\infty_{\mathrm{weak}-*}((0,\infty)\times\Omega;\mathfrak{P}(R^{d+2}))\ \text{for a.a}\ t\in(0,\infty),\ x\in\Omega, \tag{2.4}$$

以及一个矩阵值测度

$$\mathfrak{C}\in L^\infty_{\mathrm{weak}-*}(0,\infty;\mathcal{M}^+(\overline{\Omega};R^{d+2})) \tag{2.5}$$

使得以下条件成立：

1. 三元组 $(\varrho,\mathbf{m}\ S)(t,x)$ 与参数化测度 $\mathcal{V}_{t,x}$ 的期望值一致，

$$(\varrho,\mathbf{m},S)(t,x)=\int_{R^{d+2}}(\widetilde{\varrho},\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{S})\ \mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\ \text{for a.a.}\ t\in(0,\infty),\ x\in\Omega;$$

$$\int_\Omega E\Big((\varrho,\mathbf{m},S)(t\pm,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x\le\mathcal{E}_0,\ S(t\pm,\cdot)\ge\underline{s}\varrho(t,\cdot),\ \int_\Omega\varrho(t,\cdot)\ \mathrm{d}x\ge m_0\ \text{for any}\ t>0,$$
$$\int_\Omega E\Big((\varrho,\mathbf{m},S)(0+,\cdot)\ \mathrm{d}x\le\mathcal{E}_0,\ S(0+,\cdot)\ge\underline{s}\varrho_0.$$

2. 连续性方程 (1.1) 在分布意义下成立，

$$\int_0^\infty\int_\Omega\Big[\varrho\partial_t\varphi+\mathbf{m}\cdot\nabla_x\varphi\Big]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_\Omega\varrho_0\varphi(0,\cdot)\ \mathrm{d}x \tag{2.6}$$

对于任意 $\varphi\in C_c^1([0,\infty)\ \times\overline{\Omega})$。

3. 动量方程 1.2 被积分恒等式取代

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_\Omega\left[\mathbf{m}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}+\int_{R^{d+2}}\mathbb{1}_{\widetilde{\varrho}>0}\left(\frac{\widetilde{\mathbf{m}}\otimes\widetilde{\mathbf{m}}}{\widetilde{\varrho}}+p(\widetilde{\varrho},\widetilde{S})\right)\mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\cdot\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ =-\int_0^\infty\left(\int_{\overline{\Omega}}\mathrm{d}\mathfrak{C}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right)\mathrm{d}t-\int_\Omega\mathbf{m}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(0,\cdot)\ \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.7}$$

对于任意 $\boldsymbol{\varphi}\in C_c^1([0,\infty)\ \times\overline{\Omega};\ R^d),\ \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0.$

4. 熵平衡 (1.10) 以积分不等式的形式成立

$$\int_0^\infty\int_\Omega\left[S\partial_t\varphi+\int_{R^{d+2}}\left(\mathbb{1}_{\widetilde{\varrho}>0}\widetilde{S}\frac{\widetilde{\mathbf{m}}}{\widetilde{\varrho}}\right)\mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\cdot\nabla_x\varphi\right]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le-\int_\Omega S_0\varphi(0,\cdot)\ \mathrm{d}x \tag{2.8}$$

对任意 $\varphi\in C_c^1([0,\infty)\ \times\overline{\Omega}),\quad\varphi\ge0$。

5. 能量守恒（1.3）由总能量平衡代替

$$\int_\Omega \int_{R^{d+2}} E(\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S}) \mathrm{d}\mathcal{V}_{\tau,x} \ \mathrm{d}x + c(d,\gamma) \int_{\overline{\Omega}} \mathrm{dtrace}[\mathfrak{C}(\tau,\cdot)] \leq \mathcal{E}_0, \ c(d,\gamma) = \min \tag{2.9}$$

对几乎所有 $\tau \geq 0$。

关于流体力学中各种问题的耗散解概念及其在数值分析中的应用的详细讨论，请读者参阅 [23, 第 5] 章。耗散解已被证明是所谓一致近似的极限。参数族 $(\mathcal{V}_{t,\ x})_{t\in(0,\infty),\ x\in\Omega}$与刻画近似序列振荡的 Young测度相同，而$\mathfrak{C}$ 则表示振荡缺陷测度。

我们记录耗散解的以下性质:

- **整体存在性**。 对于任意初始数据 $(\varrho_0,\ \mathbf{m}_0,\ S_0,\ \mathcal{E}_0) \in \mathcal{P}$，欧拉系统均存在全时间耗散解，见 [8, 命题 3.8]。
- **弱连续性**。 函数 ϱ、$\mathbf{m}$属于以下类

$$\varrho, \ \mathbf{m} \in BC_{\mathrm{weak}}([0,\infty); L^\gamma(\Omega)); \tag{2.10}$$

总熵存在单侧极限

$$\lim_{t\to\tau\pm} \int_\Omega S(t,\cdot)\phi \ \mathrm{d}x, \ \lim_{t\to 0+} \int_\Omega S(t,\cdot)\phi \ \mathrm{d}x \text{ for any } \phi \in L^{\gamma'}(\Omega). \tag{2.11}$$

特别地， $S(t\pm)$ 可与 $L^\gamma(\Omega)$ 中的一个函数等同，其中我们令 $S(0-) = S_0$。有

$$S(t-) \leq S(t+) \text{ for any } t \geq 0, \ \|S(t\pm)\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq \overline{S} \text{ for all } t \geq 0, \tag{2.12}$$

参见 [23, 第5章，第5节。2]。

- **相容性**。 如果 $(\varrho, \mathbf{m}\ S) \in C^1([T_1,T_2]\times\Omega;\ R^d)$, 则 $\inf_{[T_1,T_2]\times\Omega} \varrho > 0$，并且

$$\int_\Omega E(\varrho,\mathbf{m},S)(t,\cdot) \ \mathrm{d}x = \mathcal{E}_0 \text{ for a.a. } t \in (T_1,T_2),$$

那么 $(\varrho, \mathbf{m}\ S)$ 是 $[T_1,T_2]$ 中欧拉系统的经典解，参见 [23, 第5章，定理 5.7]。

- **弱–强唯一性**。 只要欧拉系统的强 $W^{1,\infty}$ 解存在，耗散解就与该解一致，参见第 6 章定理 6.2]。

3 选择准则

与相应的弱解类似，对于范围广泛的物理上可容许的初始数据，耗散解并不唯一。受 Krylov [35] 和 Cardona、Kapitanski [11] 的启发，人们提出了一种选择程序，以确定唯一的、具有物理意义的解。该过程通过依次最小化一族可数的"代价泛函"来实现，这些泛函能够区分相空间 $\mathcal{P}$中的各个点。然而，对这些泛函及其选择顺序作出适当选择仍带有任意性，任何"物理"层面的依据也尚不明确。 [22],取得了重大进展：其中，选择过程被简化为仅两个步骤，甚至还提出了单步选择方案。沿着 [22], 的思路，我们考虑一种单步选择过程，通过最小化解到使熵最大的常值平衡态的 Bregman距离来进行选择。

3.1 稳定平衡态

由连续性方程 (2.6) 可直接得出，总质量

$$\int_\Omega \varrho(t,\cdot)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho_0\ \mathrm{d}x = M_0 > 0 \tag{3.1}$$

守恒。给定总能量 $\mathcal{E}_0$，稳定平衡密度-温度由常状态 $(\overline{\varrho},\ \overline{\vartheta})$ 给出，

$$\overline{\varrho} = \fint_\Omega \varrho_0\,\mathrm{d}x,\ \mathcal{E}_0 = c_v \int_\Omega \overline{\varrho}\overline{\vartheta}\ \mathrm{d}x\ \Rightarrow\ \overline{\vartheta} = \frac{\mathcal{E}_0}{c_v M_0}.$$

接下来，我们引 入与凸能量 E 相关的 Bregman距离（散度），

$$\begin{aligned} &E\left(\varrho,\mathbf{m},S\middle|\widetilde{\varrho},\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{S}\right)\\ &\quad= E(\varrho,\mathbf{m},S) - \frac{\partial E(\widetilde{\varrho},\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{S})}{\partial\varrho}(\varrho-\widetilde{\varrho}) - \frac{\partial E(\widetilde{\varrho},\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{S})}{\partial\mathbf{m}}\cdot(\mathbf{m}-\widetilde{\mathbf{m}}) - \frac{\partial E(\widetilde{\varrho},\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{S})}{\partial S}(S-\widetilde{S})\\ &\qquad- E(\widetilde{\varrho},\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{S}). \end{aligned}$$

关于与总能量 E相关的布雷格曼散度这一概念的详细讨论，请参见 [23, 第 5] 章。

计算耗散解（ϱ，$\mathbf{m}$ S）到平衡解（$\overline{\varrho}$，0，$\overline{\varrho}s$（$\overline{\varrho}$，$\overline{\vartheta}$））的Bregman距离，并在Ω上积分，得到

$$\int_\Omega E\left(\varrho,\mathbf{m},S\middle|\overline{\varrho},0,\overline{\varrho}s(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})\right)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \Big[E(\varrho,\mathbf{m},S) - \overline{\vartheta}S\Big]\ \mathrm{d}x + \overline{\vartheta}M_0 s(\overline{\varrho},\overline{\vartheta}) - \mathcal{E}_0, \tag{3.2}$$

参见 [23, 第 5]章。这促使我们选择代价泛函

$$\mathcal{F}(\varrho,\mathbf{m},S) = \int_\Omega \Big[E(\varrho,\mathbf{m},S) - \overline{\vartheta}S\Big]\ \mathrm{d}x, \overline{\vartheta} = \frac{\mathcal{E}_0}{c_v M_0} \tag{3.3}$$

已在 [22] 中考虑过。

3.2 单步选取

Let

$$\mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0] = \Big\{ (\varrho, \mathbf{m}, S) \ \Big|\ (\varrho, \mathbf{m}, S) \text{ is a dissipative solution in } (0,\infty)\times\Omega \\ \text{emanating from the data } (\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0; \mathcal{E}_0) \Big\}$$

为与初始数据 $(\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0; \mathcal{E}_0)$ 相关联的所有耗散解的集合。我们引入加权时间测度

$$\omega \,\mathrm{d}t = \exp(-t)\,\mathrm{d}t,$$

以及相应的加权空间

$$L^q_\omega(0,\infty; L^r(\Omega; R^{d+2})),\ L^q_\omega(0,\infty; W^{-\ell,2}(\Omega; R^{d+2})),\ \ell > d.$$

关于解集 $\mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0]$的以下性质的证明，请参见 [23, 第 5 章，定理 5.2]

1. 当 $(\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0) \in \mathcal{P}$时，集合 $\mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0]$ 非空且为凸集。
2. 集合 $\mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0]$ 在巴拿赫空间中是闭且有界的

$$L^q_\omega(0,\infty; L^r(\Omega; R^{d+2})),\ 1 \le q < \infty,\ 1 \le r \le \frac{2\gamma}{\gamma+1}.$$

3. 集合 $\mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0]$ 在巴拿赫空间中是紧的

$$L^q_\omega(0,\infty; W^{-\ell,2}(\Omega; R^{d+2})),\ \ell > d.$$

现在我们准备介绍在单步中选取的欧拉系统的可容许耗散解概念。

定义 3.1 （可容许耗散解）。我们称 $(\varrho,\ \mathbf{m}\ S,\ \mathcal{E}_0)$ 是带有初始数据的欧拉系统的可容许耗散解，其中

$$(\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0) \in \mathcal{P}$$

if

$$(\varrho, \mathbf{m}, S) = \mathrm{argmin}_{\mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0]} \int_0^\infty \exp(-t) \Big(\mathcal{F}(\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S})(t,\cdot) \Big)\,\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

即 $(\varrho,\ \mathbf{m}\ S) \in \mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0,\ S_0,\ \mathcal{E}_0]$ 并且

$$\int_0^\infty \exp(-t) \left(\int_\Omega \Big[E(\varrho, \mathbf{m}, S) - \overline{\vartheta} S \Big]\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \le \int_0^\infty \ \exp(-t) \left(\int_\Omega \Big[E(\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S}) - \overline{\vartheta} \widetilde{S} \Big]\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \tag{3.5}$$

~对所有 $(\widetilde{\varrho},\ \widetilde{\mathbf{m}}\ S) \in \mathcal{U}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0]$。

如 [22], 可容许耗散解所示，具有以下性质：

1. **存在性与唯一性**。 对于任意初始数据（ϱ_0，$\mathbf{m}_0$， S_0， $\mathcal{E}_0$），欧拉系统存在唯一的可容许耗散解。

2. **半群性质**。 解映射

$$\mathcal{S} : (\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0) \mapsto (\varrho(t,\cdot), \mathbf{m}(t,\cdot), S(t-,\cdot), \mathcal{E}_0))$$

具有半群性质：

$$\mathcal{S}[\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0](t+s,\cdot) = \mathcal{S}\Big[\mathcal{S}[\varrho(t,\cdot, \mathbf{m}(t,\cdot), S(t-,\cdot), \mathcal{E}\Big](s,\cdot),\ t,s \geq 0. \tag{3.6}$$

3. **博雷尔可测性**。该映射

$$(\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0) \in \mathcal{P} \mapsto (\varrho(t,\cdot), \mathbf{m}(t,\cdot), S(t-,\cdot), \mathcal{E}_0) \in \mathcal{P}$$

是博雷尔可测 的，相对于 $W^{-\ell,\ 2}(\Omega;\ R^{d+2})\ \times R$ 希尔伯特拓扑，对任意 $t \geq 0$.

3.3 当 $t \to \infty$ 时能量缺陷消失

除了 [22], 中证明的容许耗散解的性质外，我们还证明，任意此类解对于 $t \to \infty$ 都是“近似弱解”。为此，我们首先引入能量缺陷

$$d_E(t) = \mathcal{E}_0 - \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

注意，根据 (2.9),

$$\begin{aligned} d_E(t) &= \mathcal{E}_0 - \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega \int_{R^{d+2}} E(\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S})\mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\ \mathrm{d}x - \int_\Omega E\left(\int_{R^{d+2}} (\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S})\mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\right)\ \mathrm{d}x \\ &+ c(d,\gamma)\int_{\overline{\Omega}} \mathrm{dtrace}[\mathfrak{C}(t,\cdot)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

对于几乎处处的 $t > 0$。由詹森不等式，第一项

$$\int_\Omega \int_{R^{d+2}} E(\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S})\mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\ \mathrm{d}x - \int_\Omega E\left(\int_{R^{d+2}} (\widetilde{\varrho}, \widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{S})\mathrm{d}\mathcal{V}_{t,x}\right)\ \mathrm{d}x$$

~始终非负，且仅当 $\mathcal{V}_{t,\ x}$ 是以 $(\widetilde{\varrho},\ \widetilde{}\mathbf{m}\ S)(t,\ x)$ 为中心的狄拉克质量时才为零，对几乎处处的 $x \in \Omega$ 均如此。因此，若 $d_E = 0$，则可容许耗散解是一个弱解，并以下述意义满足欧拉系统：

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x \mathbf{m} = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{m} + \mathrm{div}_x \left(\frac{\widetilde{\mathbf{m}} \otimes \widetilde{\mathbf{m}}}{\widetilde{\varrho}} + p(\varrho, S)\mathbb{I} \right) = 0,$$

$$\partial_t S + \mathrm{div}_x \left(S \frac{\mathbf{m}}{\varrho} \right) \geq 0,$$

$$\int_\Omega E(\varrho, \mathbf{m}, S)(t, \cdot) \ \mathrm{d}x = \mathcal{E}_0 \text{ for a.a. } t > 0, \tag{3.9}$$

这里的导数按分布意义理解。注意，能量缺陷 d_E 与确定性湍流理论中所谓雷诺应力的大小有关，参见 Bardos 等人 [2]。

我们的目标是证明以下这一具有独立意义的结果。

命题 3.2 (能量缺陷消失)。设$(\varrho,\mathbf{m} \ S, \mathcal{E}_0)$ 是在$(0, T) \times \Omega$中欧拉系统的一个可容许耗散解。

Then

$$d_E(t) \equiv \mathcal{E}_0 - \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+, \cdot) \Big) \ \mathrm{d}x \to 0 \ \textit{as} \ t \to \infty.$$

命题 3.2 的结论可以这样理解：任何可容许耗散解在长时间演化后都会趋近于欧拉系统的一个弱解。本节余下部分将用于证明命题 3.2。证明分为几个步骤。

3.3.1 预备知识

我们回顾一下，耗散解总是满足

$$\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t\pm, \cdot) \Big) \ \mathrm{d}x \leq \mathcal{E}_0, \ (\varrho, \mathbf{m}, S)(0-, \cdot) \equiv (\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0), \tag{3.10}$$

$$S(t\pm, \cdot) \geq \underline{s}\varrho. \tag{3.11}$$

此外，由 (3.10) 和 (3.11) 可得

$$\begin{aligned} \varrho(t,x) = 0 \ &\Rightarrow \ \mathbf{m}(t,x) = 0 \text{ for a.a. } x \in \Omega, \\ \varrho(t,x) = 0 \ &\Rightarrow \ S(t\pm, x) = 0 \text{ for a.a. } x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3.2 代价泛函的正能量缺陷与跳跃 $\mathcal{F}$

假设

$$d_E(\tau) > 0 \text{ for some } \tau > 0. \tag{3.13}$$

我们的目标是证明，解 $(\varrho, \mathbf{m} \ S, \mathcal{E}_0)$ 可以延拓到时间 τ之后，使得在 τ 处求值的代价泛函 $\mathcal{F}$ 发生与 $d_E(\tau)$ 成正比的负跳跃。

首先，利用 (3.12)，我们由关系式计算温度 $\vartheta(\tau+,\cdot)$

$$S(\tau+,\cdot)=\mathbb{1}_{\varrho(\tau,\cdot)>0}\varrho(\tau,\cdot)\Big(c_v\log(\vartheta(\tau+,\cdot))-\log(\varrho(\tau,\cdot))\Big).$$

接下来，我们引入

$$\widetilde{\vartheta}(\tau,\cdot)=(1+\varepsilon)\vartheta(\tau+,\cdot)\text{ whenever }\varrho(\tau,\cdot)>0$$

令 $\varepsilon>0$ 为下文确定的量。记内能

$$E_{\rm int}(\tau+,\cdot)=c_v\varrho(\tau,\cdot)\vartheta(\tau+,\cdot),$$

我们得到

$$\widetilde{E}_{\rm int}(\tau,\cdot)\equiv c_v\varrho(\tau,\cdot)\widetilde{\vartheta}(\tau,\cdot)=E_{\rm int}(\tau+,\cdot)+\varepsilon c_v\varrho(\tau,\cdot)\vartheta(\tau+,\cdot),\tag{3.14}$$

and

$$\widetilde{S}(\tau,\cdot)\equiv c_v\varrho(\tau,\cdot)\log(\widetilde{\vartheta}(\tau,\cdot))-\varrho(\tau,\cdot)\log(\varrho(\tau,\cdot))=S(\tau+,\cdot)+c_v\varrho(\tau,\cdot)\log(1+\varepsilon)\tag{3.15}$$

现在，我们调整 $\varepsilon>0$，使得

$$\widetilde{d}_E(\tau)=\mathcal{E}_0-\int_\Omega E\Big((\varrho,\mathbf{m},\widetilde{S})(\tau,\cdot)\Big)\ {\rm d}x=0,\tag{3.16}$$

这意味着

$$\varepsilon c_v\int_\Omega\varrho(\tau,\cdot)\vartheta(\tau+,\cdot)\ {\rm d}x=d_E(\tau)\ \Rightarrow\ \varepsilon=\frac{d_E(\tau)}{\int_\Omega E_{\rm int}(\tau+,\cdot)\ {\rm d}x}.\tag{3.17}$$

关系式 (3.16)、(3.17) 表明，我们可以通过在时刻 τ 将原始解 (ϱ，$\mathbf{m}$ S，$\mathcal{E}_0$) 与一个从数据出发的解 ($\widetilde{\varrho}$，$\widetilde{\ }\mathbf{m}$ S，$\mathcal{E}$) 拼接起来，从而借助 $\widetilde{\ }$ 延续原始解。

$$(\varrho(\tau,\cdot),\mathbf{m}(\tau,\cdot),\widetilde{S}(\tau,\cdot),\mathcal{E}_0)\text{ for }t\geq\tau,$$

$\widetilde{\ }$能量缺陷为 $d_E(\tau)=0$。

接下来，我们计算拼接解在时间 τ 处的代价泛函：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big((\varrho,\mathbf{m},\widetilde{S})(\tau,\cdot)\Big)&=\mathcal{F}\Big((\varrho,\mathbf{m},S)(\tau+,\cdot)\Big)\\&\quad+\varepsilon\int_\Omega E_{\rm int}(\tau+,\cdot)\ {\rm d}x-\overline{\vartheta}c_v\int_\Omega\varrho(\tau,\cdot)\log(1+\varepsilon)\ {\rm d}x\end{aligned}\tag{3.18}$$

此外，利用 (3.3)、(3.17)，我们得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_\Omega E_{\rm int}(\tau+,\cdot)\ {\rm d}x-\overline{\vartheta}c_v\int_\Omega\varrho(\tau,\cdot)\log(1+\varepsilon)\ {\rm d}x\\&\qquad=d_E(\tau)-\mathcal{E}_0\log\left(1+\frac{d_E(\tau)}{\int_\Omega E_{\rm int}(\tau+,\cdot)\ {\rm d}x}\right).\end{aligned}\tag{3.19}$$

最后，我们注意到

$$\int_\Omega E_{\rm int}(\tau+,\cdot)\ \mathrm{d}x \le \int_\Omega E\Big(\varrho,\mathbf{m},S)(\tau+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x = \mathcal{E}_0 - d_E(\tau);$$

由此

$$d_E(\tau) - \mathcal{E}_0 \log\left(1+\frac{d(\tau)}{\int_\Omega E_{\rm int}(\tau+,\cdot)\ \mathrm{d}x}\right) \le d_E(\tau) - \mathcal{E}_0\log\left(1+\frac{d(\tau)}{\mathcal{E}_0-d(\tau)}\right). \tag{3.20}$$

引入函数

$$G: y \mapsto \mathcal{E}_0\log\left(1+\frac{y}{\mathcal{E}_0-y}\right) - y = \mathcal{E}_0\log\left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0-y}\right) - y = \mathcal{E}_0\log(\mathcal{E}_0) - \mathcal{E}_0\log(\mathcal{E}_0-y) - y \tag{3.21}$$

满足

$$G(0)=0,\ G'(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0-y} - 1 > 0 \text{ as long as } y>0. \tag{3.22}$$

因此我们可以推断

$$\widetilde{d}_E(\tau)=0,\ \mathcal{F}\Big((\varrho,\mathbf{m},\widetilde{S})(\tau,\cdot)\Big) \le \mathcal{F}\Big((\varrho,\mathbf{m},S)(\tau+,\cdot)\Big) - G(d_e(\tau)) \tag{3.23}$$

对于拼接解，其中 G 在 (3.21) 中定义。

3.3.3 当 $t\to\infty$ 时所选解的缺陷消失

准备好预备材料后，我们可以证明命题 3.2。

假设 $(\varrho,\ \mathbf{m}\ S,\ \mathcal{E}_0)$ 是一个可容许耗散解，即代价泛函的全局极小值

$$\int_0^\infty \exp(-t)\left(\int_\Omega \mathcal{F}\Big(\varrho,\mathbf{m},S)(t,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \tag{3.24}$$

在集合 $\mathcal{U}(\varrho_0,\ \mathbf{m}_0,\ S_0,\ \mathcal{E}_0)$ 上。我们的目标是证明，相关缺陷在长时间极限下消失，

$$d_E(t)\to 0 \text{ as } t\to\infty. \tag{3.25}$$

我们通过反证法证明 (3.25)。如果 (3.25) 不成立，那么存在 $d>0$ ，使得

$$\limsup_{t\to\infty} d_E(t) = \overline{d} > 0, \tag{3.26}$$

$$d_E(\tau_n)\to\overline{d} \text{ for a certain sequence } \tau_n\to\infty. \tag{3.27}$$

1. 由于

$$d_E(\tau_n) = \mathcal{E}_0 - \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(\tau_n+)\Big)\ \mathrm{d}x,$$

我们可以将 (3.26)、(3.27) 改写为

$$\liminf_{t\to\infty} \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x \geq \mathcal{E}_0 - \overline{d}, \tag{3.28}$$

$$\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(\tau_n+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x \to \mathcal{E}_0 - \overline{d} \text{ for a certain sequence } \tau_n \to \infty. \tag{3.29}$$

这　　由 (3.28)、(3.29) 可知，对任意 $\omega > 0$，存在 $n = n(\omega)$，使得

$$\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x \geq \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(\tau_n+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x - \omega \text{ for any } t \geq \tau_n,\ n \geq n(\omega). \tag{3.30}$$

2. 由于总熵在 $t \to \infty$ 时存在极限，

$$\int_\Omega S(t\pm)\ \mathrm{d}x \nearrow \mathcal{S}_\infty < \infty \text{ as } t \to \infty,$$

我们可以类似于 (3.30) 得出结论，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x - \overline{\vartheta} \int_\Omega S(t+,\cdot)\ \mathrm{d}x \\
&\geq \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(\tau_n+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x - \overline{\vartheta} \int_\Omega S(\tau_n+,\cdot)\ \mathrm{d}x - \omega \text{ for all } t \geq \tau_n,\ n \geq n(\omega).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

3. 现在，我们采用第 3.3.2 节的构造方法，即增大 τ_n+ 处的熵值，并按照 (3.23) 拼接解。该过程得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, \widetilde{S})(\tau_n+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x - \overline{\vartheta} \int_\Omega \widetilde{S}(\tau_n+,\cdot)\ \mathrm{d}x \\
&= \mathcal{E}_0 - \overline{\vartheta} \int_\Omega \widetilde{S}(\tau_n+,\cdot)\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(\tau_n+,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x - \overline{\vartheta} \int_\Omega S(\tau_n+,\cdot)\ \mathrm{d}x - G(d(\tau_n)),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

参见（3.23）。此外，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, \widetilde{S})(t\pm,\cdot)\Big)\ \mathrm{d}x - \overline{\vartheta} \int_\Omega \widetilde{S}(t\pm,\cdot)\ \mathrm{d}x &\leq \mathcal{E}_0 - \overline{\vartheta} \int_\Omega \widetilde{S}(t\pm,\cdot)\ \mathrm{d}x \\
&\leq \mathcal{E}_0 - \overline{\vartheta} \int_\Omega \widetilde{S}(\tau_n+,\cdot)\ \mathrm{d}x \text{ for all } t > \tau_n.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

最后，我们在（3.31）中选择 ω ，使得

$$G(d_E(\tau_n)) > 2\omega \text{ whenever } n \geq n(\omega). \tag{3.34}$$

结合 (3.31)–(3.34)，我们得出

$$\mathcal{F}(\varrho, \mathbf{m}, \widetilde{S}) < \mathcal{F}(\varrho, \mathbf{m}, S) \text{ for a.a. } t > \tau_n,\ n = n(\omega)$$

这与假设 (ϱ，$\mathbf{m}$ S) 是 (3.24) 的全局极小值相矛盾。

我们已证明 (3.25)，从而完成了命题 3.2 的证明。

4 统计解——主要结果

在前一部分中，我们构造了一个博雷尔可测半群

$$\mathcal{S} : \Big[t, (\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0)\Big] \in [0, \infty) \times \mathcal{P} \mapsto \Big(\varrho(t, \cdot), \mathbf{m}(t, \cdot), S(t-, \cdot), \mathcal{E}_0\Big) \in \mathcal{P} \tag{4.1}$$

由欧拉系统的可容许耗散解组成。

假设给定一个完备的博雷尔概率测度 $\sigma \in \mathfrak{P}\Big[W^{-\ell,2}(\Omega;\ R^d)\ \times R\Big]$,

$$\sigma[\mathcal{P}] = 1. \tag{4.2}$$

接下来，我们将 σ 与其关于半群 $\mathcal{S}$的推前测度 σ_t 相关联,

$$\int_{W^{-\ell,2}(\Omega;R^{d+2})\times R} \mathcal{G}(\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0)\ \mathrm{d}\sigma_t = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{G}\left(\mathcal{S}\Big[t, (\varrho_0, \mathbf{m}_0, S_0, \mathcal{E}_0)\Big]\right) \mathrm{d}\sigma \text{ for any } t \geq 0, \tag{4.3}$$

以及任意的 $\mathcal{G} \in BC(W^{-\ell,2}(\Omega;\ R^d)\ \times R)$。

定义4.1(统计解)。马尔可夫算子族

$$\mathcal{M}_t : \sigma \in \mathfrak{P}[\mathcal{P}] \to \sigma_t \in \mathfrak{P}[\mathcal{P}],\ t \geq 0, \tag{4.4}$$

由(4.3)定义，称为欧拉系统的统计解。

让我们总结统计解的基本性质:

1. **马尔可夫半群**。映射

$$\mathcal{M}_t : \mathfrak{P}[\mathcal{P}] \to \mathfrak{P}[\mathcal{P}]$$

是一个半群，这意味着

$$\mathcal{M}_0 = \mathbb{I},\ \mathcal{M}_{t+s} = \mathcal{M}_t \circ \mathcal{M}_s,\ s, t \geq 0. \tag{4.5}$$

此外,

$$\mathcal{M}_t\left[\delta_{(\varrho_0,\mathbf{m}_0,S_0,\mathcal{E}_0)}\right] = \delta_{\mathcal{S}[t,(\varrho_0,\mathbf{m}_0,S_0,\mathcal{E}_0)]},\ t \geq 0; \tag{4.6}$$

$$\mathcal{M}_t\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sigma_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{M}_t[\sigma_i] \text{ whenever } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0; \tag{4.7}$$

$$t \in [0,\infty) \mapsto \mathcal{M}_t[\sigma] \text{ is càglàd in the narrow topology on } \mathcal{P}. \tag{4.8}$$

2. **正则性**。半群 $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ 是正则的，其对应的对偶算子

$$\mathcal{M}_t^*[\mathcal{G}] = \mathcal{G}\circ\mathcal{S}[t,\cdot] \tag{4.9}$$

对于任意 $\mathcal{G} \in BC(\mathcal{P})$，其中 $\mathcal{G}\circ\mathcal{S}[t,\cdot]$ 是 $\mathcal{P}$上的有界博雷尔函数 .

3. **能量缺陷消失**。

我们将能量缺陷定义为 $\mathcal{P}$上的凹上半连续函数,

$$d_E = \mathcal{E}_0 - \int_\Omega E(\varrho,\mathbf{m},S)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

有

$$\int_{\mathcal{P}} d_E\ \mathrm{d}\mathcal{M}_t[\sigma] \to 0 \text{ as } t\to\infty \tag{4.10}$$

对于任意 $\sigma \in \mathfrak{P}[\mathcal{P}]$。

5 统计解性质的证明

我们的最终任务是验证上一节列出的统计解的基本性质。

1. 半群性质 (4.5) 以及 (4.6)、(4.7) 直接由可容许耗散解的半群性质得出。

(4.8) 中所述的 c`agl`ad 连续性，源自解半群的类似性质，更确切地说，源自其熵分量,

$$\mathcal{S}\left[t,(\varrho_0,\mathbf{m}_0,S_0,\mathcal{E}_0)\right] = (\varrho(t,\cdot),\mathbf{m}(t,\cdot),S(t-,\cdot),\mathcal{E}_0),\ t\geq 0.$$

2. e 伴随半群 (4.9) 的存在性可直接由公式 (4. 3).

3. 对于 (4.10) 中所声称的能量缺陷消失，我们首先改写

$$\int_{\mathcal{P}} d_E \, \mathrm{d}\mathcal{M}_t(\sigma) = \int_{\mathcal{P}} \left[\mathcal{E}_0 - \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+, \cdot) \Big) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\sigma.$$

根据命题 3.2,

$$\left[\mathcal{E}_0 - \int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t+, \cdot) \Big) \, \mathrm{d}x \right] \to 0 \text{ as } t \to \infty \ \sigma - \text{a.s.},$$

所需结论由勒贝格控制收敛定理得出。

6 结论

我们提出了一种构造气体动力学欧拉系统统计解的方法，该方法在耗散解类中应用单步选择准则。此选择准则基于在指数加权时间积分范数中，最小化与最大熵平衡解之间的布雷格曼散度。我们证明了这一准则具有物理相关性，因为能量缺陷会随着时间推移而衰减至零。这一观察似乎与由初始数据在流场中引发的湍流现象的衰减相一致。事实上，能量缺陷的幅值与确定性湍流模型中产生的雷诺应力幅值直接相关，参见 Bardos 等人。 [2], [3], [4], [5],

一个有趣且尚未充分解决的问题是，所选解是否确实是欧拉系统的弱解，或者至少是式 (3.9) 中定义的变体。基于对选择泛函的修改，可以有条件地给出部分回答

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda t) \mathcal{F}(\varrho, \mathbf{m}, S)(t, \cdot) \, \mathrm{d}t, \ \lambda > 0$$

遵循 [20]的思路。结合第3.3.2节的论证与 [20, 第 5]节的论证，可以证明以下结果:

假设

$$\operatorname{argmin} \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \mathcal{F}(\varrho, \mathbf{m}, S)(t, \cdot) \, \mathrm{d}t$$

对于所有 $\lambda \geq \lambda_0$，都独立于 λ 。那么该极小化子是欧拉系统的一个弱解，其意义见（3.9）。

这条结论的证明留给感兴趣的读者。所得解应与 [20] 中在正压欧拉方程组背景下引入的绝对能量极小化子 进行比较。

最后，我们将本文的结果与 [22] 中提出的两步选择程序进行比较，该程序基于对熵泛函的连续最大化

$$\int_0^\infty \exp(-t) \left(\int_\Omega S(t,\cdot) \ \mathrm{d}x \right),$$

以及随后对总能量的最小化

$$\int_0^\infty \exp(-t) \left(\int_\Omega E\Big((\varrho, \mathbf{m}, S)(t,\cdot) \Big) \ \mathrm{d}x \right).$$

由于弱解的特征是能量缺陷 d_E 消失，我们很容易得出以下结论。

假设定义 *3.1* 中引入的可容许耗散解是满足 (3.9) 意义下的欧拉系统弱解。那么，它会在 *[22]* 的程序第一步中被选出。

参考文献

[1] H. Al Baba、C. Klingenberg、O. Kreml、V. M´acha 和 S. Markfelder。二维完整欧拉系统黎曼问题的可容许弱解非唯一性。*SIAM* 数学分析杂志，**52(2)**：1729–1760，2020年。[2] C. Bardos、J.-M. Ghidaglia 和 S. Kamvissis。湍流扩散中的弱收敛与确定性方法。载于非线性波动方程（罗得岛州普罗维登斯，*1998*年），**当代数学**第 **263** 卷，页 1–15。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。[3] C. Bardos 和 T. T. Nguyen。关于可压缩流无黏极限的评述。载于偏微分方程与应用的最新进展，**当代数学**第**666**卷，页 55–67。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016。[4] C. W. Bardos 和 E. S. Titi。数学与湍流：我们目前处于何种阶段? 湍流杂志，**14(3)**：42–76，2013。[5] K. Bardos 和 E. S. Titi。理想不可压缩流体的欧拉方程。数学科学进展，**62(3(375))**：5–46，2007。[6] D. Basari´c。可压缩纳维–斯托克斯系统的半流选择。演化方程杂志，**21(1)**：277–295，2021。[7] S. Benzoni-Gavage 和 D. Serre。多维双曲偏微分方程、一阶系统及其应用。牛津数学专著。牛津大学出版社克拉伦登出版社，牛津，2007年。

[8] D. Breit、E. Feireisl 和 M. Hofmanov´a。完整欧拉系统的耗散解与半流选择。《数学物理通讯》，376(2)：1471–1497，2020年。[9] J. Bˇrezina 和 E. Feireisl。完整欧拉系统的测度值解。《日本数学会杂志》，70(4)：1227–1245，2018年。[10] J. Bˇrezina 和 E. Feireisl。再论完整欧拉系统的测度值解。《应用数学与物理杂志》，69(3)：69:57，2018年。[11] J. E. Cardona 和 L. Kapitanski。半流选择与马尔可夫选择定理。《拓扑方法与非线性分析》，56(1)：197–227，2020年。[12] G. Chen 和 A. F. Vasseur。 L^2 非等熵欧拉方程的稳定性与弱BV唯一性。《数学分析与应用通讯》，3(3)：450–482，2024年。[13] E. Chiodaroli 和 E. Feireisl。格利姆方法与气体动力学欧拉系统野数据的稠密性。Nonlinearity，37(3)：论文编号035005，12页，2024年。[14] E. Chiodaroli、E. Feireisl 和 F. Flandoli。乘性白噪声驱动的完整欧拉系统的适定性问题。《印第安纳大学数学杂志》，70(4)：1267–1282，2021年。[15]C. M. Dafermos。连续介质物理学中的双曲守恒律，数学科学基础第325卷， /数学科学基本原理/。施普林格出版社，柏林，第四版，2016。[16] C.M. Dafermos。热力学第二定律与稳定性。《理性力学与分析文献》，70：167–179，1979年。[17] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi，Jr。欧拉方程作为微分包含。《数学年刊》（2），170(3)：1417–1436，2009年。[18] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi，Jr。关于欧拉方程弱解的可容许性判据。《理性力学与分析文献》，195(1)：225–260，2010年。[19] F. Fanelli 和 E. Feireisl。正压纳维–斯托克斯系统的统计解。《统计物理学杂志》，181(1)：212–245，2020年。[20] E. Feireisl、A. J¨ungel 和 M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a。气体动力学欧拉系统的最大耗散与适定性。预印本档案系列，2025。arXiv预印本编号2501.05134。[21] E. Feireisl、C. Klingenberg、O. Kreml 和 S. Markfelder。关于完整欧拉系统的振荡解。《微分方程杂志》，269(2)：1521–1543，2020年。[22] E. Feireisl 和 M. Luk´aˇcov´a-Medviˇdov´a。气体动力学欧拉系统的适定性。Arxive预印本系列，arXiv预印本编号251218267，2017年。

ˇ[23] E. Feireisl、M. Luk´aˇcov´a-Medvidov´a、H. Mizerov´a 和 B. She。《可压缩流体流动的数值分析》。施普林格出版社，Cham，2022。[24] E. Feireisl、M. Luk´aˇcov´a-Medviˇdov´a 和 C. Yu。《气体动力学欧拉系统的振荡近似与最大熵原理》。Arxive预印本系列，arXiv预印本第 2505.02070 号，2025。[25] U. K. Fjordholm、R. K¨appeli、S. Mishra 和 E. Tadmor。《双曲守恒律系统近似熵测度值解的构造》。Foundations Comp. Math.，第 1–65 页，2015。[26] U. S. Fjordholm、S. Mishra 和 E. Tadmor。《论测度值解的计算》。Acta Numer.，25:567–679，2016。[27] C. Foias。《纳维–斯托克斯方程的统计研究》I、II。Rend. Sem. Mat. Univ. Padova，48:219–348（1973）；同刊 49（1973），9–123，1972。[28] C. Foias、O. Manley、R. Rosa 和 R. Temam。《纳维–斯托克斯方程与湍流》，《数学及其应用百科全书》第 83 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2001。[29] C. Foias、R. M. S. Rosa 和 R. Temam。《三维纳维–斯托克斯方程时变统计解的性质》。Ann. Inst. Fourier (Grenoble)，63(6):2515–2573，2013。[30] C. Foias、R. M. S. Rosa 和 R. M. Temam。《三维纳维–斯托克斯方程定常统计解的性质》。J. Dynam. Differential Equations，31(3):1689–1741，2019。[31] P. Gwiazda、A. ´Swierczewska-Gwiazda 和 E. Wiedemann。《某些可压缩流体模型测度值解的弱解–强解唯一性》。Nonlinearity，28(11):3873–3890，2015。[32] M.-J. Kang、A. F. Vasseur 和 Y. Wang。《可压缩纳维–斯托克斯–傅里叶方程一般黎曼解的时间渐近稳定性》。Arch. Ration. Mech. Anal.，249(4):论文第 42 号，共 80 页，2025。[33] C. Klingenberg、O. Kreml、V. M´acha 和 S. Markfelder。《激波使多维空间中的完整欧拉系统黎曼问题成为适定性不良问题》。Nonlinearity，33(12):6517–6540，2020。[34] C. Klingenberg、S. Markfelder 和 E. Wiedemann。《最大湍流作为测度值解的选择准则》。Arxive预印本系列，arXiv预印本第 2503.20343.v1 号，2025。

[35] N. V. Krylov。《从马尔可夫过程系统中选取马尔可夫过程，并构造拟扩散过程》。苏联科学院数学系列通讯，**37**:691–708，1973。

[36] J. Smoller。《激波与反应扩散方程》。施普林格出版社，纽约，1967年。

[37] M. J. Vishik 和 A. V. Fursikov。《统计流体力学问题》，数学及其应用（苏联系列）第9卷。克吕维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1988年。由 D. A. Leites 从1980年的俄文原著翻译而来［MR0591678］。