arXiv:2602.02209v1 [math.RT] 2 Feb 2026

pro-p Iwahori 赫克代数与对偶 Vinberg 幺半群

Tobias SCHMIDT

2026年2月3日

摘要

设$\mathbf{G}$ 是整数环上的分裂约化群， F 是一个 p-进局部域，其剩余域为$\mathbb{F}_q$ ，且 $G = \mathbf{G}(F)$。我们将 G 在 $\mathbb{F}_q$ 上的 pro-p-Iwahori Hecke 代数 H 与对偶群 $\widehat{\mathbf{G}}$ 的 Vinberg 幺半群联系起来，并研究这种联系。作为应用，在 GL_n情形下且当 $F/\mathbb{Q}_p$ 非分歧时，我们导出 Spec Z 的参数化：它由绝对伽罗瓦群 Gal(F/F)的半单 n维表示给出，从而推广了 $n = 2$的 [PS25]情形。这里， Z 表示 H的中心。

目录

1 引言 **2**

2 对偶 Vinberg 幺半群 **4**

2.1 定义.4 2.2 环面子幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ .6 2.3 Vinberg截面.7 2.4 Weyl 群的作用.9 2.5 半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 的几何性质.10 2.6 有限域上的增广半群 $V_{(1)}\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}0,\ \mathbb{F}_q$ .12

3 驯顺伽罗瓦表示 **13**

3.1 驯顺惯性型概述.14 3.2 取值于 Levi 子群中的型.14 3.3 驯顺伽罗瓦表示.15 3.4 取值于 Levi 子群中的表示.16

4 Vinberg 分层的伽罗瓦参数化 17

4.1 对偶 Deligne-Lusztig 对.17 4.2 扬岑参数化.18 4.3 GL_n 的有限对偶环面上的点作用.20 4.4 GL_n 的 Vinberg 分层的伽罗瓦参数化.23 4.5 GL_2 的情形.25

5 应用于 pro-p-Iwahori-Hecke 代数 30

5.1 pro-p-Iwahori 赫克代数.30 5.2 伯恩斯坦基.30 5.3 Iwahori 赫克代数.31 5.4 Generic Bernstein 同构.32 5.5 在 $\mathbf{q} = 0$ 处的伯恩斯坦同构.33 5.6 在 $\mathbf{q} = q = 0 \in \mathbb{F}_q$ 处的增广伯恩斯坦同构.33 5.7 GL_n 的中心海克代数分层的伽罗瓦参数化.33

6 附录：标准概形 **34**

1 引言

设 $\mathbf{G}$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的分裂连通约化群，其分裂极大环面为 $\mathbf{T}$。设 $F/\mathbb{Q}_p$ 为剩余域为 $\mathbb{F}_q$ 的有限扩张，且 $G = \mathbf{G}(F)$。约化 p-进群 G 的 pro-p-Iwahori 赫克代数 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$，其系数取在 $\mathbb{F}_q$ 中，由 Vign´eras[V16] 引入并研究，是 $\mathbb{F}_q$ 上关于 G 相对于 G 中某个 pro-p-Iwahori 子群选取的双陪集集合的卷积代数。代数 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$（及其导出版本）有望在范畴模 p 朗兰兹纲领中有重要应用，例如 [H16、EGH22]。设 $Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})$ 为 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$ 的中心。设 ζ 为 G 的中心特征，ω 为 p-进域 F 的绝对伽罗瓦群 Gal(F/F) 的模 p 分圆特征。当 $\mathbf{G} = GL_2$ 时，[PS25]中证明，中心的 ζ-部分容许一个 $\mathbb{F}_q$-概形的商态射

$$\mathscr{L}_\zeta : \operatorname{Spec} Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})_\zeta \longrightarrow X(q)_{\mathbb{F}_q,\zeta}$$

到某条射影代数曲线 $X(q)_{\mathbb{F}_q,\ \zeta}$，它参数化行列式为 $\omega\zeta$ 的 Gal(F/F) 上的半单二维模 p 表示。结合球表示 [PS23]，的理论，态射 $\mathscr{L}_\zeta$ 恢复了 Grosse-Kl¨onne 在维数 2 情形下关于超奇异模 p 海克模与不可约伽罗瓦表示 [GK18] 之间的双射。在 $F = \mathbb{Q}_p$ 的情形下，它恢复了 Breuil 关于群 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 的半单模 p 局部 Langlands 对应 [Br03] 。自然的问题是，这一情形如何从 GL_2 推广到更一般的群 $\mathbf{G}$。

本文将态射 $\mathscr{L}_\zeta$ 的一个适当的分层版本推广到 $\mathbf{G} = GL_n$ 且 $F/\mathbb{Q}_p$ 非分歧的情形。为说明其运作方式，我们回到 $n = 2$ 的情形。在此情形下，$\operatorname{Spec} Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})$ 和曲线 $X(q)_{\mathbb{F}_q,\zeta}$ 都具有由局部闭子簇构成的典范分层。事实上，这些分层都只有两个分层：在 $X(q)_{\mathbb{F}_q,\zeta}$ 上，它们分别由不可约二维伽罗瓦表示构成的闭子空间及其开补集给出。态射 $\mathscr{L}_\zeta$ 保持这些分层，并且在开分层上由除去 Weyl 群的一个适当点作用得到。现在设 $\mathbf{G} = GL_n$。我们构造 $\Xi := \operatorname{Spec} Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})$ 的一个典范分层，使其由局部闭子簇 $\Xi_{\mathbf{L}}$ 构成，并以标准 Levi 子群 $\mathbf{L} \subset \mathbf{G}$ 为指标。每个分层 $\Xi_{\mathbf{L}}$ 都具有 Weyl 群 $W(\mathbf{L}) := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$ 的一个适当点作用。存在一个 $W(\mathbf{L})$-稳定子集 $\Xi_{\mathbf{L},\mathrm{gen}}$，由 $\Xi_{\mathbf{L}}$ 的“一般的”（在精确定义的意义下）连通分支组成。随着 p 趋于无穷，一般分支所占比例趋于 1。另一方面，绝对伽罗瓦群 Gal(F/F) 的半单 n 维模 p 表示$\widehat{\ }$ 按对偶群 $\mathbf{G}$ 中的标准 Levi 子群 $\mathbf{L}$ 分层（对偶性 $\mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{G}$ 交换 $\mathbf{L}$ 与 $\underline{\mathbf{L}}$）：存在一个仿射 $\mathbb{F}_q$-概形 $X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$，其正则分支（在精确定义的意义下）参数化 Gal(F/F) 的半单 n 维模 $\widehat{p}$ 表示，“其取值于 $\mathbf{L}$”。以下是本文的主要结果（定理 4.4.10 及第 4.5 节）。

定理。 设$\mathbf{G} = GL_n$ 且 $F/\mathbb{Q}_p$ 非分歧。

(i) 对每个 *Levi* 子群$\mathbf{L} \subset \mathbf{G}$，存在一个仿射 $\mathbb{F}_q$-概形之间的态射

$$\Xi_{\mathbf{L},\mathrm{gen}} \to X_{[\widehat{\mathbf{L}}]},$$

它在 $W(\mathbf{L})$-轨道上为常值。

(ii) 设$\mathbf{G} = GL_2$。 *(i)* 中的态射可延拓至 $\Xi_{\mathbf{L}}$，并诱导一个同构

$$\Xi_{\mathbf{L}}/W(\mathbf{L}) \simeq X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$$

对每个 *Levi* 子群$\mathbf{L} \subset \mathbf{G}$均成立。先与投影 $\Xi_{\mathbf{L}} \to \Xi_{\mathbf{L}}/W(\mathbf{L})$ 复合，再限制到 ζ-部分，即可恢复态射 $\mathscr{L}_\zeta\ |_{\Xi_{\mathbf{L}}}$。

下面我们解释第 (i) 部分中的态射是如何构造的。与 [PS25], 一样，从 G的 Hecke 代数过渡到取值于对偶群 $\widehat{\mathbf{G}}$ 的伽罗瓦表示时，主要工具是对偶 Vinberg 幺半群，或者更确切地说，是某个可称为对偶

Vinberg-Zhu 幺半群 [Z20]中的适当环面子簇。更具体地说，设 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 为与对偶约化群 G 相关联的 Vinberg 幺半群 [Vin95] associated$\widehat{\ }$。令 ρ_{ad} 表示群 $\widehat{\ }$G $\mathbb{A}^1$的伴随群的基本余权之和，以及它到 V-的唯一延拓。Vinberg-Zhu 幺半群是平坦幺半群 $_{\rho_{\mathrm{ad}}} \to \mathbb{A}^1$G $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$，它是沿着 ρ_{ad}对 $\widehat{\ }$的拉回。其 1-纤维恢复出群 $\widehat{\ }$G。令 $\subset$ $\widehat{\ }$T $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$G 表示对偶环面。它产生了 $_{\rho_{\mathrm{ad}}} \to \mathbb{A}^1$G 的一个“环面”子簇 $V\curvearrowright,\widehat{\ }$。它具有自然的 W-作用。其 1-纤维恢复出 T，而其 0-纤维 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 是一个在 $\widehat{\ }$T 作用下稳定的某个半群。 $\mathbb{A}^1$-幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}$ 是对偶环面的正确版本，适用于经典（即远离 $\mathbf{q}=0$）Bernstein-Lusztig 同构[L83, L89]的 q-版本。为使这一点更加精确，取 $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$，其中 q 是某个不定元，并令 $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$ 表示 Vign´eras 的一般 pro-p-Iwahori 赫克代数 [V16], ，这是一个由生成元与关系定义的适当 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数，并通过 $\mathbf{q} \mapsto q = 0 \in \mathbb{F}_q$ 特化为上述 $\mathbb{F}_q$-代数 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$。代数 $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$ 带有一个极大交换子环 $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{q}) \subset \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$（取决于定向的选择），后者自身具有规范的 W-作用。类似地，在通常的 Iwahori 赫克代数层面上，也有这一情形的一个版本 $\mathcal{A}(\mathbf{q}) \subset \mathcal{H}(\mathbf{q})$。我们的一个主要次要$\widehat{\ }$结果（定理 5.4.2）表明，恒等式 $X_*(\mathbf{T}) = X^*(\mathbf{T})$ 延拓为 W-等变的 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数同构

$$\mathscr{B}(\mathbf{q}) : \mathcal{A}(\mathbf{q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}]$$

其函数环定义在 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}$ 上。这个适用于一般情形的 $\mathbf{q}$-Bernstein-Lusztig 同构将 GL_2-情形推广到了 [PS23] 中出现的情形。取零纤维后，我们得到以下半群（定义在 $\mathbb{F}_q$ 上）

$$V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q} := \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \times_{\mathbb{Z}} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0},$$

$\widehat{\ }$由有限环面 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$“增广”而成。它带有对角 W-作用。上述态射 $\mathscr{B}(\mathbf{q})$ 诱导出一个 W-等变的 $\mathbb{F}_q$-代数同构，将 $\mathcal{A}^{(1)}(0)_{\mathbb{F}_q}$ 与定义在 $V_{(1)}\widehat{\ }_{\mathbf{T}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}$ 上的函数环对应起来。在这种情况下，Vign´eras 的工作表明， W-不变量 $\mathcal{A}^{(1)}(0)^W_{\mathbb{F}_q}$ 等于中心 $Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})$，由此得到一个同构

$$\operatorname{Spec} Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}) \xrightarrow{\sim} V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q}/W.$$

正是这个同构使我们能够从 G 的 Hecke 代数转向对偶群 $\widehat{\ }$G 及其取值于该群的伽罗瓦表示这一侧。我们倾向于这样理解： $V(1)\widehat{\ }_{\mathbf{T}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}$ 是对偶环面 T 的替代物，而不是完整的对偶群 G，这解释了为什么上文主定理中的态射取值于半单伽罗瓦表示，而不是更一般的伽罗瓦表示。概形 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}/W$ 是概形[1] $S := V(1)\widehat{\ }_{\mathbf{T}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}/W$ 的一个在 $\widehat{\ }$T 作用下稳定的连通分支，其 $\widehat{\ }$T-轨道由对偶群 G 的对偶 Levi 子群 $\mathbf{L} \subset$ 自然标记。这给出了由局部闭子簇 $S_{\widehat{\mathbf{L}}} \subset S.$ 构成的 S 分层。按定义， $S_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 在 Spec $Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})$ 中的逆像就是我们的 $\Xi_{\mathbf{L}}$。我们证明，概形 $S_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 是有限个环面 $\widehat{\ }\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}$ 的副本的不交并，这些副本由相应抛物子群 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ （属于 W）下 $\widehat{\ }\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的轨道标记。Jantzen 对偶 Deligne-Lusztig 对 [J81] 的参数化，限制在 Coxeter 类上并调整为适用于有限环面的权后，给出一个映射：从 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的一般轨道子集（在适当的精确定义下）映至 G 中弗罗贝尼乌斯稳定的半单共轭类，也就是说，映至 Gal(F/F) 的模 p 驯顺惯性型（这里我们假设 $F/\mathbb{Q}_p$ 是非分歧的）。加入环面 $\widehat{\ }\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}$ 相当于加入“弗罗贝尼乌斯行列式”，并在 $S_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的一般分支子集 $S_{\widehat{\mathbf{L}},\mathrm{gen}}$ 上给出映射 $S_{\widehat{\mathbf{L}},\mathrm{gen}} \to X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$。将此映射拉回到 $\Xi_{\mathbf{L}}$，便得到上文主定理中的映射。更多细节请参见论文正文。

在该定理的情形下，任意一个相干层 $\mathcal{A}$ on Ξ，若其纤维上带有 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$ -作用，则会将有限多个不可约 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$ -模（纤维 $\mathcal{A}$ 的 Jordan-H¨older

[1]“Satake 方案” $V(1)\widehat{\ }_{\text{极大环面}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}/W$ 在 [PS25]中记作 $S(q)$。

因子） $\mathcal{A}_z$对应到相应的伽罗瓦表示中 $X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$. 在 GL_2 情形下，取 $\mathcal{A}$ 球表示 [PS23]，便可实现引言开头提到的与 [GK18] 和 [Br03] 的兼容性。目前尚无关于 GL_n 的球表示理论，我们希望在未来的工作中再探讨这一问题。

在引言的其余部分，我们简要介绍各节的内容。在第 2 节中，我们回顾 Vinberg 幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 的构造、Zhu 将其限制到对角线 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$ ρ_{ad} 的情形，以及环面子簇 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$。我们建立其特殊纤维 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 的一些几何性质。第 3 节讨论 Gal(F/F) 的模 p 驯性表示$\widehat{}$的一些性质，以及取值于 $\mathbf{G}$. 的模 p 驯顺惯性型。这包括在 GL_n 的情形下，按照弗罗贝尼乌斯和单值化对不可约表示进行分类。在第 4 节第 4 小节中，我们讨论 Deligne-Lusztig 对，并说明如何将 Jantzen 对这类对的参数化应用于 Coxeter 类，从而得到一个从代数权到模 p 驯顺惯性型的映射。我们讨论 GL_n 情形下有限环面上的点作用，这使我们能够将 Jantzen 映射应用于有限环面的权。此映射事先依赖于若干选择，我们将在 4.3 中加以说明。最后，在 4.4 中，我们通过将其归约为连通分支之间的适当映射并应用 Jantzen 映射，建立映射 $S_{\widehat{\mathbf{L}},\mathrm{gen}} \to X_{[\widehat{\mathbf{L}}],}$。在最后一个小节 4.5 中，我们讨论特殊情形 GL_2。在最后一节第 5 节中，我们建立上述 q-Bernstein-Lusztig 同构 $\mathscr{B}(\mathbf{q})$，并推导其在 pro-p-Iwahori 赫克代数及其中心中的应用。我们在附录中汇集了关于环面、根和权的一些材料。

致谢：作者感谢 Elmar Grosse-Kl¨onne、C´edric P´epin、Peter Schneider 和 Marie-France Vign´eras 多年来就这项工作进行的有益讨论。作者尤其感谢 C´edric P´epin 与他进行的多次交流；本文呈现的许多想法都源于双方的多次讨论。

2 对偶 Vinberg 幺半群

我们遵循 Zhu 在 [Z20] 中的论述，回顾通过典范滤过构造 Vinberg 幺半群的代数方法，以及若干相关构造。这也使我们能够确立记号。$\widehat{}$ $\widehat{}$设 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{Z}$上的分裂连通约化群概形，其极大环面 $\mathbf{T}$ 包含于一个$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$Borel 子群概形 $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$中。设 W 为这对 ($\mathbf{G}$,$\mathbf{T}$) 的 Weyl 群。

2.1 定义

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$2.1.1. 令 $Z_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 为 G 的中心，并令 T_{ad}:=T$/Z\widehat{}$G。令 $Z\widehat{}$G$\subset$G $\times$T 为对角嵌入。于是， $Z_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 在 $\widehat{}$G $\times$ $\widehat{}$T 上通过 $z.(g,t)$:=(zg, zt) 作用。令 $\widehat{}$G $\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}$ $\widehat{}$T :=($\widehat{}$G $\times$ $\widehat{}$T)$/Z\widehat{}$G。它是一个仿射 $\mathbb{Z}$-群概形，并配有一个忠实平坦群同态

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{G}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}} & & \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \\ \widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}. & & \end{array}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$群 X^*($\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$) 由 ($\mathbf{G}$,$\mathbf{T}$) 的单根集合自由生成，而这些单根进而在概形 $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ 上定义了一组可逆坐标。 $\mathbb{Z}$-点 1 := (1,...,1) 是群 $\widehat{}$$\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ 的单位元。纤维 pr_2^{-1}(1) 与嵌入到 $\widehat{}$$\mathbf{G}$ $\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}$ $\widehat{}$$\mathbf{T}$ 中的 $\widehat{}$$\mathbf{G}$ 相对应，其嵌入为 $\widehat{}$$\mathbf{G}$ $\times$ $\{1_{\widehat{\mathbf{T}}}\}$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$**2.1.2.** 典范投影 $\mathbf{T}$ $\to$ $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ 诱导出一个单射 X^*($\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$) $\to$ X^*($\mathbf{T}$)，将$\wedge$ $\widehat{}$ $\wedge X^*$($\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$) 识别为由集合（$\mathbf{G}$,$\mathbf{T}$）的根生成的 X^*($\mathbf{T}$)的子群。若一个特征$\wedge$ $\widehat{}$ $\wedge e^{\nu} \in X^*$($\mathbf{T}$)经过商 $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ of $\mathbf{T}$分解，我们将 $\bar{e}^{\nu}$ 记作相应的$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$$\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$的特征。令 X^*($\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$) $_{\mathrm{pos}} \subset X^*$($\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$) 表示由相对于$\mathbf{B}$的正根子集生成的子幺半群。于是

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})]) \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}])$$

是一个开浸入，并且 $\widehat{\mathrm{T}}^{+}$ ad 是一个对角化仿射 $\mathbb{Z}$-幺半群概形，其可逆$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$元素构成的群为环面 T_{ad}。幺半群 $X^*(\mathrm{T}_{\mathrm{ad}})^{\mathrm{pos}}$ 由单根集合自由生成，这些单根在 $\widehat{\mathrm{T}}^{+}$ ad 上定义了一组坐标，并将 $\widehat{\mathrm{T}}_{\mathrm{ad}}$ 上的坐标延拓至此。特别地，$1=(1,\dots,1)$ 是幺半群 $\widehat{\mathrm{T}}^{+}$ ad 的单位元。$\mathbb{Z}$-点 $0:=(0,\dots,0)$ 是一个吸收元。在 $X^*(\widehat{\mathrm{T}})$ 上有通常的偏序，由 $\lambda_1\le\lambda_2$ 给出；若 $\lambda_1-\lambda_2\in X^*(\widehat{\mathrm{T}}_{\mathrm{ad}})^{\mathrm{pos}}$，我们令 $X^*(\widehat{\mathrm{T}}_{\mathrm{ad}})^{+}_{\mathrm{pos}}$ 表示由 $X^*(\widehat{\mathrm{T}}_{\mathrm{ad}})^{\mathrm{pos}}$ 以及相对于 $\widehat{\mathrm{B}}$ 的支配权 $X^*(\widehat{\mathrm{T}})^{+}$生成的 $X^*(\widehat{\mathrm{T}})$ 的子幺半群。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$**2.1.3.** 函数环 $\mathbb{Z}[\mathbf{G}]$ 在函数的左平移与右平移作用下是一个$\mathbf{G}\times\mathbf{G}$-模。它带有一个滤过 $\mathrm{fil}_\bullet\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{G}}]$，由 $\widehat{\mathbf{G}}\times\widehat{\mathbf{G}}$-子模构成，并由 $X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})^{+}_{\mathrm{pos}}$ 索引，其中

$$\mathrm{fil}_\lambda\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{G}}]$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$是$\mathbf{G}\times\mathbf{G}$-子模中$\mathbf{G}]$ 的最大子模，使得对于$\mathbf{T}\times\mathbf{T}$的任意权$\sim_\nu$，$V(\nu)$蕴含 $\nu\le(\lambda^*,\lambda)$。这里 $\lambda^*=-w_o(\lambda)$，其中 w_o 是 W 的最长元，且 $\le$ 作用于两个分量。令

$$R_{X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})^{+}_{\mathrm{pos}}}\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{G}}]:=\oplus_\lambda\mathrm{fil}_\lambda\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{G}}]e^\lambda$$

这是与上述滤过相关联的通常 Rees 环（形式符号为 e^λ）。自然包含 $X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}\subset X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})^{+}_{\mathrm{pos}}$ 诱导出一个环同态

$$\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}]\longrightarrow R_{X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})^{+}_{\mathrm{pos}}}\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{G}}],e^\lambda\mapsto e^\lambda,$$

它是忠实平坦的。源和靶都是余代数，而且该同态实际上是余代数同态。其谱

$$V_{\widehat{\mathbf{G}}}:=\mathrm{Spec}\,R_{X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})^{+}_{\mathrm{pos}}}\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{G}}].$$

因此成为一个仿射 $\mathbb{Z}$-幺半群概形，并配备一个忠实平坦的幺半群同态

$$\begin{array}{c}V_{\widehat{\mathbf{G}}}\\ \big\downarrow d\\ \widehat{\mathbf{T}}^{+}_{\mathrm{ad}}\end{array}$$

可以验证，逆像 $d^{-1}(\widehat{\textbf{极大环面}}_{\mathrm{ad}})$ 与 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 的可逆元群重合，并且后一个群作为 $\widehat{\textbf{极大环面}}_{\mathrm{ad}}$ 上的群概形，同构于 $\widehat{\mathbf{G}}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\textbf{极大环面}}$（带有第二个$\widehat{\quad}$投影）。幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 称为 G 的 **Vinberg 幺半群**。

根据 Rees 环的一般性质，特殊纤维 $d^{-1}(0)$ 可识别为 $\mathbf{G}$ 的所谓$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$渐近锥$\widehat{\mathfrak{G}}$ As，其定义为 $\mathrm{Spec}\,\mathrm{gr}_\bullet\mathbb{Z}[\mathbf{G}],$，其中 $\mathrm{gr}_\bullet$ 表示滤过环的伴随分次环。特别地，存在笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccccccc}\widehat{\mathbf{G}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{G}}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\mathbf{T}} & \longrightarrow & V_{\widehat{\mathbf{G}}} & \longrightarrow & \mathrm{As}_{\widehat{\mathbf{G}}}\\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow d & & \big\downarrow\\ \text{谱}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{1} & \widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}} & \xrightarrow{\text{极大环面}_{\mathrm{ad}}} & & \xleftarrow{0} & \text{谱}(\mathbb{Z}),\end{array}$$

其中两侧的映射为闭浸入，中间的映射为开浸入。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$**2.1.4.** 设 $\rho_{\mathrm{ad}}:\mathbb{G}_m\to$ **极大环面**$_{\mathrm{ad}}$ 为 $\mathbf{G}$ 的伴随群的基本余权之和。$\widehat{\quad}$它是环面 **极大环面**$_{\mathrm{ad}}$ 的一个余特征，并且是支配的。因此，它唯一地延拓为一个幺半群同态

$$\rho^{+}_{\mathrm{ad}}:\mathbb{A}^1\longrightarrow\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{\mathrm{ad}}.$$

在 $\mathbb{A}^1$ 上选取变量$\mathbf{q}$，它由环同态给出

$$\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{\mathrm{ad}}]\longrightarrow\mathbb{Z}[\mathbf{q}],\bar{e}^\mu\mapsto\mathbf{q}^{\langle\mu,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}$$

对于 $\mu\in X^*(\widehat{\textbf{极大环面}}^{+}{}_{\mathrm{ad}})=X^*(\widehat{\textbf{极大环面}}_{\mathrm{ad}})^{\mathrm{pos}}$。

2.1.5. 定义。 我们称纤维积 $V_{\widehat{\mathbf{G}}\,\rho_{\mathrm{ad}}} := V_{\widehat{\mathbf{G}}} \times_{d,\widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}},\rho_{\mathrm{ad}}} \mathbb{A}^1$ 为 Vinberg-Zhu 幺半群。它配备了幺半群同态 $d\rho_{\mathrm{ad}} : V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}} \to \mathbb{A}^1$，该同态等于到第二个因子的投影：

$$\begin{array}{ccc} V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}} & \longrightarrow & V_{\widehat{\mathbf{G}}} \\ {\scriptstyle d\rho_{\mathrm{ad}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\rho^+_{\mathrm{ad}}} & \widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}}. \end{array}$$

2.2 环面子幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$

$\widehat{\mathbf{T}}$ $\widehat{\mathbf{T}}$ $\widehat{\mathbf{G}}$ $\widehat{\mathbf{G}}$对角嵌入 $Z_{\widehat{\mathbf{G}}} \subset \mathbf{G} \times \mathbf{T}$ 经由 $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$分解，且

$$\widehat{\mathbf{T}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}} := (\widehat{\mathbf{T}} \times \widehat{\mathbf{T}})/Z_{\widehat{\mathbf{G}}}$$

是 $\widehat{\mathbf{G}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}}$的闭子群。

2.2.1. 定义。 仿射 $\mathbb{Z}$-幺半群概形 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$是 $\widehat{\mathbf{T}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}}$在 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$中的闭包 .

幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$是 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}$的子幺半群，其可逆元群是开子群

$$\widehat{\mathbf{T}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}} = V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}} \cap d^{-1}(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}) \subset V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}.$$

此外，由于 $\widehat{\mathbf{T}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}}$ 是 $\widehat{\mathbf{T}} \times \widehat{\mathbf{T}}$的商，我们有以下包含关系

$$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}] \subset \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}} \times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}} \widehat{\mathbf{T}}] \subset \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}} \times \widehat{\mathbf{T}}] = \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}] \otimes \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}].$$

那么， $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}]$ 是如下子环，参见 [Z20，第 1.3] 节：

$$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}] = \bigoplus_{\substack{(\nu_1,\nu_2)\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^2 \\ \nu_2+(\nu_1)_-\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}}} \mathbb{Z}(e_1^{\nu_1} \otimes e_2^{\nu_2}),$$

$\widehat{\mathbf{T}}$ $\widehat{\mathbf{G}}$其中， $\nu_- \in X^*(\mathbf{T})$ 表示 $\nu \in X^*(\mathbf{T})$ 的唯一一个 W-共轭，且它是反支配的。特别地，对直和进行指标化的集合是 $X^*(\widehat{\mathbf{T}})^2$，的一个子幺半群，而 $\mathbb{Z}$-幺半群概形$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ 可对角化，其特征幺半群为

$$X^*(V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}) = \{(\nu_1,\nu_2) \in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^2 \mid \nu_2 + (\nu_1)_- \in X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}\}.$$

2.2.2. 幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$配备了同态 $d\colon V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}} \to \widehat{\mathbf{T}}^+{}_{\mathrm{ad}}$，该同态等于 $d\colon V_{\widehat{\mathbf{G}}} \to \widehat{\mathbf{T}}^+{}_{\mathrm{ad}}$ 的限制。它对应于环同态

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X_*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}] \\ \bar{e}^{\nu} & \longmapsto & 1 \otimes e_2^{\nu} \end{array}$$

特别地，它是忠实平坦的。构造笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}} & \longrightarrow & V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}} \\ {\scriptstyle d\rho_{\mathrm{ad}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\rho^+_{\mathrm{ad}}} & \widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}}, \end{array}$$

我们得到一个可对角化子幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}\,\rho_{\mathrm{ad}}} \subset V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}\circ}$

作为最后一项记号，后文中我们将函数 $e_1^{\nu_1} \otimes e_2^{\nu_2}$在 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$上的限制记为 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}\,\rho_{\mathrm{ad}}}$，写作 $(e_1^{\nu_1} \otimes e_2^{\nu_2})|_{\rho_{\mathrm{ad}}\circ}$

2.3 Vinberg截面

2.3.1. 设 $\mathfrak{s}:\ \widehat{\ }\mathbf{T}^{+}{}_{\mathrm{ad}} \to V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ 是仿射概形之间对应于以下环态射的态射

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}]\\ e_1^{\nu_1}\otimes e_2^{\nu_2} & \longmapsto & \bar{e}^{\nu_1+\nu_2}\end{array}$$

$\widehat{\ }$请注意，确实有 $\nu_1+\nu_2\in X^*(\mathbf{T}_{\mathrm{ad}})^{\mathrm{pos}}$，因为 $\nu_1+\nu_2\geq\nu_2+(\nu_1)_{-}$。态射 $\mathfrak{s}$ 是幺半群概形之间的同态，并且是 $d:\ V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}\to\ \widehat{\ }\mathbf{T}^{+}{}_{\mathrm{ad}}$的一个截面。其限制$\mathfrak{s}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}:\ \widehat{\ }\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}\to V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}=\widehat{\ }\mathbf{T}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\ }\mathbf{T}$是对角嵌入 t模 $Z_{\widehat{\ }\mathbf{G}}\mapsto[t,t]$.

$\widehat{\ }$令 $i_1:\mathbf{T}\to V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ 为 $d=1$处 $\mathbf{T}$ 的闭浸入。由于 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ 是交换的，幺半群概形之间的态射 $\widehat{\ }\mathbf{T}^{+}{}_{\mathrm{ad}}$-概形

$$i_1\cdot\mathfrak{s}:\widehat{\mathbf{T}}\times\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{\mathrm{ad}}\longrightarrow V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$$

$\widehat{\ }$是一个幺半群同态。其在$\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ 上的限制是群同构

$$i_1\cdot(\mathfrak{s}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}):\widehat{\mathbf{T}}\times\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}\xrightarrow{\sim}V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}=\widehat{\mathbf{T}}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\mathbf{T}}.$$

2.3.2. 定义。 Vinberg截面 是 $\mathfrak{s}:\ \widehat{\ }\mathbf{T}^{+}{}_{\mathrm{ad}}\to V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ 与典范包含$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}}\subset V_{\widehat{\mathbf{G}}}$的复合；它是 d: $V_{\widehat{\ }\mathbf{G}}\to\ \widehat{\ }\mathbf{T}^{+}{}_{\mathrm{ad}}$的一个截面，仍记为 $\mathfrak{s}$:

$$\begin{array}{ccc} & & V_{\widehat{\mathbf{G}}}\\ & \overset{\mathfrak{s}}{\nearrow} & \big\downarrow d\\ \widehat{\mathbf{T}}^{+}_{\mathrm{ad}}. & & \end{array}$$

2.3.3. 限制 $\mathfrak{s}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}:\ \widehat{\ }\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}\to V_{\widehat{\mathbf{G}}}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}=\widehat{\ }\mathbf{G}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\ }\mathbf{T}$ 分裂群概形正合列

$$1\longrightarrow\widehat{\mathbf{G}}\longrightarrow\widehat{\mathbf{G}}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\mathbf{T}}\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}\longrightarrow 1.$$

$\widehat{\ }\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$在 $\widehat{\ }\mathbf{G}=\widehat{\ }\mathbf{G}\times\{1_{\widehat{\mathbf{T}}}\}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\ }\mathbf{T}$上的诱导作用（等于 $\mathfrak{s}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}$随后施加共轭作用）与忠实伴随作用 $\mathrm{Ad}:\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}\to\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$一致。因此

$$\widehat{\mathbf{G}}\times^{Z_{\widehat{\mathbf{G}}}}\widehat{\mathbf{T}}=\widehat{\mathbf{G}}\rtimes_{\mathfrak{s}}\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}=\widehat{\mathbf{G}}\rtimes_{\mathrm{Ad}}\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}=:\widehat{\mathbf{G}}\rtimes\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}.$$

$\widehat{\ }$沿 ρ_{ad} 拉回: $\mathbb{G}_m\to\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$，我们得到（参见 2.1.4–2.1.5）：

$$V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}|_{\mathbb{G}_m}=\widehat{\mathbf{G}}\rtimes_{\mathfrak{s}\rho_{\mathrm{ad}}}\mathbb{G}_m=\widehat{\mathbf{G}}\rtimes_{\mathrm{Ad}\,\rho_{\mathrm{ad}}}\mathbb{G}_m=:\widehat{\mathbf{G}}\rtimes\mathbb{G}_m=:{}^{C}\mathbf{G},$$

也就是说，Zhu 幺半群在 $\mathbb{G}_m\subset\mathbb{A}^1$ 上的限制就是所谓的 C-群。于是，图 2.1.3 特化为

$$\begin{array}{ccccccc}\widehat{\mathbf{G}} & \longrightarrow & {}^{C}\mathbf{G} & \longrightarrow & V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}} & \longrightarrow & \mathrm{As}_{\widehat{\mathbf{G}}}\\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d\rho_{\mathrm{ad}}} & & \big\downarrow\\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{1} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{0} & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}).\end{array}$$

2.3.4. 限制到可对角化子幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}\ \rho_{\mathrm{ad}}}\subset V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}$ 2.2.2 上，我们得到

$$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}|_{\mathbb{G}_m}=\widehat{\mathbf{T}}\rtimes_{\mathfrak{s}\rho_{\mathrm{ad}}}\mathbb{G}_m=\widehat{\mathbf{T}}\rtimes_{\mathrm{Ad}\,\rho_{\mathrm{ad}}}\mathbb{G}_m=:\widehat{\mathbf{T}}\rtimes\mathbb{G}_m.$$

$\widehat{\ }$注意，作用 $\mathrm{Ad}:\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}\to\mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ 是平凡的，因此半直积 $\mathbf{T}\rtimes\mathbb{G}_m$ 实际上是直积；它是$\widehat{\ }\mathbf{T}\times\mathbb{G}_m$ 在 $\mathbb{A}^1$-概形范畴中的幺半群同态下的同构像

$$i_1\cdot\mathfrak{s}\rho^{+}_{\mathrm{ad}}:\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{A}_1\longrightarrow V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}.$$

我们固定一个定义在 $\mathbb{A}^1$ 上的变量 $\mathbf{q}$，即 $\mathbb{A}^1=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mathbf{q}])$。

2.3.5. 引理。 由 $i_1\cdot\mathfrak{s}\rho^+{}_{\mathrm{ad}}$ 诱导的函数拉回是一个 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数嵌入

$$\begin{aligned}(i_1\cdot\mathfrak{s}\rho^+_{\mathrm{ad}})^*:\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{A}^1]\\ (e_1^{\nu_1}\otimes e_2^{\nu_2})|_{\rho_{\mathrm{ad}}} &\mapsto e^{\nu_1}\otimes\mathbf{q}^{\langle\nu_1+\nu_2,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}.\end{aligned}$$

其像是子环

$$\bigoplus_{\nu\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})} e^{\nu}\otimes\mathbf{q}^{\langle\nu-\nu_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}\mathbb{Z}[\mathbf{q}].$$

证明。 根据定义，由 $i_1\cdot\mathfrak{s}$ 给出的函数的拉回是 $\mathbb{Z}[\widehat{\ }$**极大环面**$^+{}_{\mathrm{ad}}]$-代数嵌入

$$\begin{aligned}(i_1\cdot\mathfrak{s})^*:\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}] &\hookrightarrow \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}]\otimes\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}}]\\ e_1^{\nu_1}\otimes e_2^{\nu_2} &\mapsto e^{\nu_1}\otimes\bar{e}^{\nu_1+\nu_2}.\end{aligned}$$

沿.....作基变换

$$\begin{aligned}(\rho^+_{\mathrm{ad}})^*:\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}}] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbf{q}]\\ \bar{e}^{\mu} &\longmapsto \mathbf{q}^{\langle\mu,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle},\end{aligned}$$

我们便得到$(i_1\cdot\mathfrak{s}\rho^+{}_{\mathrm{ad}})^*$的公式。由上述，$(i_1\cdot\mathfrak{s})^*$ 的像等于子环

$$\bigoplus_{\substack{(\nu_1,\mu)\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})\times X^*(\widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}})\\ \mu=\nu_1+\nu_2,\nu_i\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}),\nu_2+(\nu_1)_-\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}}} \mathbb{Z}(e^{\nu_1}\otimes\bar{e}^{\mu}),$$

它可改写为

$$\bigoplus_{\substack{(\nu_1,\mu)\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})\times X^*(\widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}})\\ \mu-\nu_1+(\nu_1)_-\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}}} \mathbb{Z}(e^{\nu_1}\otimes\bar{e}^{\mu}).$$

由张量积的右正合性，它沿$(\rho^+{}_{\mathrm{ad}})^*$ 的基变换等于$(i_1\cdot\mathfrak{s}\rho^+{}_{\mathrm{ad}})^*$的像。因此$(i_1\cdot\mathfrak{s}\rho^+{}_{\mathrm{ad}})^*$ 将 $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}]$ 等同于子环

$$\bigoplus_{\substack{(\nu_1,\mu)\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})\times X^*(\widehat{\mathbf{T}}^+_{\mathrm{ad}})\\ \mu-\nu_1+(\nu_1)_-\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}}}} \mathbb{Z}(e^{\nu_1}\otimes\mathbf{q}^{\langle\mu,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$注意，对于固定的 ν_1， μ 遍历 $\nu_1-(\nu_1)_-+X^*$**(极大环面**$_{\mathrm{ad}}$**)**$_{\mathrm{pos}}$ 中的子集 X^***(极大环面**$_{\mathrm{ad}}$**)**$_{\mathrm{pos}}$（因为 $\nu_1\geq(\nu_1)_-$），特别是 $\langle\mu,\ \rho_{\mathrm{ad}}\rangle\in\mathbb{N}$。因此，后一个子环可识别为

$$\bigoplus_{(\nu_1,n)}\mathbb{Z}(e^{\nu_1}\otimes\mathbf{q}^n)$$

$\widehat{\ }$其中求和遍历满足 n 属于.....的像的 $(\nu_1,\ n)\in X^*$**(极大环面)** $\times\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\nu_1-(\nu_1)_-+X^*(\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{pos}} &\longrightarrow \mathbb{N}\\ \mu &\longmapsto \langle\mu,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle.\end{aligned}$$

后者恰好是 $\langle\nu_1-(\nu_1)_-,\ \rho_{\mathrm{ad}}\rangle+\mathbb{N}$。 □

根据前面的引理 2.3.5，我们有 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数的同构

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}] &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\nu\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})} e^{\nu}\otimes\mathbf{q}^{\langle\nu-\nu_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}\mathbb{Z}[\mathbf{q}]\subset\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}]\otimes\mathbb{Z}[\mathbf{q}]\\ (e_1^{\nu}\otimes e_2^{-\nu_-})|_{\rho_{\mathrm{ad}}} &\longmapsto e^{\nu}\otimes\mathbf{q}^{\langle\nu-\nu_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}.\end{aligned}$$

2.3.6. 引理。有

$$(e^{\nu}\otimes \mathbf{q}^{\langle \nu-\nu_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle})(e^{\nu'}\otimes \mathbf{q}^{\langle \nu'-(\nu')_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}) = \mathbf{q}^{\frac{\ell(\nu)+\ell(\nu')-\ell(\nu+\nu')}{2}}(e^{\nu+\nu'}\otimes \mathbf{q}^{\langle \nu+\nu'-(\nu+\nu')_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}).$$

证明。有

$$\ell(\nu)+\ell(\nu')-\ell(\nu+\nu') = -\langle \nu_-, 2\rho\rangle - \langle (\nu')_-, 2\rho\rangle + \langle (\nu+\nu')_-, 2\rho\rangle,$$

因此

$$\begin{aligned} & \ell(\nu)+\ell(\nu')-\ell(\nu+\nu')+2\langle \nu+\nu'-(\nu+\nu')_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle \\ = \ & -\langle \nu_- + (\nu')_- - (\nu+\nu')_- - \nu - \nu' + (\nu+\nu')_-, 2\rho\rangle \\ = \ & -\langle \nu_- + (\nu')_- - \nu - \nu', 2\rho\rangle \\ = \ & 2\langle \nu-\nu_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle + 2\langle \nu'-(\nu')_-,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle \end{aligned}$$

如所述。 □

前面的引理 2.3.6 有如下推论。置

$$E(\nu) := (e_1^{\nu}\otimes e_2^{-\nu_-})|_{\rho_{\mathrm{ad}}}.$$

2.3.7. 推论。元素 $E(\nu)$ 构成 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-基，其中 $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}]$，即

$$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}] = \bigoplus_{\nu\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]E(\nu).$$

此外，

$$E(\nu)E(\nu') = \mathbf{q}_{\nu,\nu'}E(\nu+\nu'),$$

当 $\nu,\nu'\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})$ 时，$\mathbf{q}_{\nu,\nu'} = \mathbf{q}^{\frac{\ell(\nu)+\ell(\nu')-\ell(\nu+\nu')}{2}}$。

2.4 Weyl群的作用

2.4.1. 利用 V-$\widehat{\mathrm{G}}$ 上的乘法律，群 $\widehat{\mathrm{G}} = V_{\widehat{\mathbf{G}},1}$ 通过共轭作用作用于 V-$\widehat{\mathrm{G}}$，而幺半群同态 $d: V_{\widehat{\mathbf{G}}}\to \widehat{\mathrm{T}}^+\,\mathrm{ad}$ 是等变的，其中底空间上的 $\widehat{\mathrm{G}}$-作用是平凡的。在 $\widehat{\mathrm{T}}_{\mathrm{ad}}\subset \widehat{\mathrm{T}}^+\,\mathrm{ad}$ 上，它是通过共轭作用于 $V_{\widehat{\mathbf{G}}}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}} = \widehat{\mathrm{G}}\times^{Z_{\widehat{\mathrm{G}}}}\widehat{\mathrm{T}}$ 的第一因子。特别地，$\widehat{\mathrm{T}}$ 的正规化子稳定 $\widehat{\mathrm{T}}\times^{Z_{\widehat{\mathrm{G}}}}\widehat{\mathrm{T}} = V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}|_{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathrm{ad}}}$，因而也稳定 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$，且其作用通过 W 分解。沿 $\rho^+\,\mathrm{ad}$ 进行基变换后，我们得到 W 对 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}$ 的作用，其中 $d\rho_{\mathrm{ad}}: V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathrm{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}\to\mathbb{A}^1$ 是等变的，且底空间上的 W- 作用是平凡的。

2.4. 2. 定义。W 在 $\mathbf{T}\times\mathbb{G}_m$ 上的作用，使得 $\mathbb{G}_m$-概形的群同构 *es*

$$i_1\cdot \mathfrak{s}\rho_{\mathrm{ad}}: \widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}|_{\mathbb{G}_m}$$

是 W-等变的，称为 $W\bullet$-作用。

2.4.3. 引理。在环 $\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{G}_m] = \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}]\otimes\mathbb{Z}[\mathbf{q}^{\pm1}]$上，$W\bullet$-作用为：

$$\forall w\in W,\qquad w\bullet e^{\nu}\mathbf{q}^i = e^{w(\nu)}\mathbf{q}^{i+\langle w(\nu)-\nu,\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}.$$

不变量子环为：

$$\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{G}_m]^{W\bullet} = \bigoplus_{\lambda\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^+}\mathbb{Z}[\mathbf{q}^{\pm1}]\,\mathrm{sym}_{\lambda}(\mathbf{q}),$$

其中

$$\forall\lambda\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^+,\quad \mathrm{sym}_{\lambda}(\mathbf{q}) := \sum_{\mu\in W(\lambda)}\mathbf{q}^{\langle\rho_{\mathrm{ad}},\mu-w_0(\lambda)\rangle}e^{\mu}\quad\in\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}]\otimes\mathbb{Z}[\mathbf{q}] = \mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{A}^1].$$

特别是，

$$\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{G}_m]^{W\bullet}\cap\mathbb{Z}[\widehat{\mathbf{T}}\times\mathbb{A}^1] = \bigoplus_{\lambda\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^+}\mathbb{Z}[\mathbf{q}]\,\mathrm{sym}_{\lambda}(\mathbf{q}) =: \mathrm{Sym}(\mathbf{q}).$$

证明。设 $w \in W$。由 2.3.5 可得

$$w \bullet (e^{\nu_1} \otimes \mathbf{q}^{\langle \nu_1+\nu_2, \rho_{\mathrm{ad}} \rangle}) = e^{w(\nu_1)} \otimes \mathbf{q}^{\langle w(\nu_1)+\nu_2, \rho_{\mathrm{ad}} \rangle},$$

因此

$$w \bullet e^{\nu_1} = e^{w(\nu_1)} \otimes \mathbf{q}^{\langle w(\nu_1)-\nu_1, \rho_{\mathrm{ad}} \rangle}.$$

引理的其余部分随即得到（特别地，注意到 $\mathrm{sym}^{\lambda}(\mathbf{q})$ 中 $\lambda)\ e^{w_0(}$ 的系数为 1）。 □

2.4.4. 为后续用途起见，我们指出，W 在 $V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, \rho_{\mathrm{ad}}}$ 上的作用产生了 $\mathbb{A}^1$-概 e

$$V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, \rho_{\mathrm{ad}}} / W.$$

2.5 半群 $V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}$ 的几何

在本小节中，我们描述零纤维 $V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}} 0}$。由于纤维化 $d\colon\ V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}} \to \widehat{\mathbf{T}}^{+}{}_{\mathrm{ad}}$ 是幺半群同态，零纤维 $V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的半群概形，其余乘法是对角化 $\mathbb{Z}$- 幺半群概形 $V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}}$ 的余乘法在 0 处的特化。

2.5.1. 对于任意 Weyl房 $\mathfrak{C}$ 属于 X^***(极大环面)** $\otimes \mathbb{R}$，记

$$X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathfrak{C}} := X^*(\widehat{\mathbf{T}}) \cap \overline{\mathfrak{C}} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{U}^{\mathfrak{C}}_{\widehat{\mathbf{G}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathfrak{C}}]).$$

仿射簇 $\mathbf{U}^{\mathfrak{C}}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 是正规簇，并包含一个 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 的副本，该副本由环同态$\mathbb{Z}[X^*($**极大环面)**$^{\mathfrak{C}}]) \to \mathbb{Z}$, $e^{\nu} \mapsto 0$给出。

回顾 2.3.7 中的 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-基 $E(\nu)$，它属于 $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}}]$，以及乘积公式 $E(\nu)E(\nu') = \mathbf{q}_{\nu,\ \nu'} E(\nu + \nu')$，其中 $\mathbf{q}_{\nu,\ \nu'} = \mathbf{q}^{\frac{\ell(\nu)+\ell(\nu')-\ell(\nu+\nu')}{2}}$。如果存在一个 Weyl房 $\mathfrak{C}$，使得 ν 和 ν' 属于闭包 $\mathfrak{C}$，则后一个量等于 1；否则它可被 $\mathbf{q}$ 整除。

为简便起见，我们对 $E(\nu)$ 在商环$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}]$中的像使用相同的记号，即令

$$\forall \nu \in X^*(\widehat{\mathbf{T}}), \quad E(\nu) := (e_1^{\nu} \otimes e_2^{-\nu_-})|_0 \in \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}].$$

于是，下面的命题显然成立。

2.5.2. 命题。元素 $E(\nu)$ 构成 $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}]$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，即

$$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}] = \bigoplus_{\nu \in X^*(\widehat{\mathbf{T}})} \mathbb{Z} E(\nu),$$

乘积公式为

$$\forall \nu, \nu' \in X^*(\widehat{\mathbf{T}}), \quad E(\nu)E(\nu') = \begin{cases} E(\nu+\nu') & \text{if } \exists \mathfrak{C} : \nu, \nu' \in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathfrak{C}} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2.5.3. 引理。加性映射

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\mathfrak{C}} : \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}, 0}] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{U}^{\mathfrak{C}}_{\widehat{\mathbf{G}}}] \\ E(\nu) &\longmapsto \begin{cases} e^{\nu} & \text{if } \nu \in X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathfrak{C}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

是一个 环的满同态。因此，它定义了一个闭浸入 $i_{\mathfrak{C}}\colon\ \mathbb{U}^{\mathfrak{C}}_{\widehat{\mathbf{G}}} \longrightarrow V_{\widehat{\mathbf{T}} \subset \widehat{\mathbf{G}}}$ s 0·

证明。由$E(\nu)$的乘积公式可知，这与环乘法的相容性显然成立。满射性显然。

□

2.5.4. 命题。

1. 仿射簇 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\,0}$ 是既约的。*2.* $\cap_{\mathfrak{C}}\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}}=$ 谱 $\mathbb{Z}$*3.* $\cup_{\mathfrak{C}}$ $\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}}=V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\,0}$。*4.* $\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}}$ 是 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\,0}$的不可约分支。

证明。1. 所有环 $\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathfrak{C}}]$ 都是整环。由初等事实 $\cup\mathfrak{C}=X^*(\widehat{\mathbf{T}})$ 可知，乘积映射 $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]\to\prod_{\mathfrak{C}}\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathfrak{C}}]$ 是单射。因此源是既约的。2. 由事实 $\cap\mathfrak{C}=\{0\}$ 得出。对于 3.，设 $\mathfrak{m}\subseteq V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 是一个极大理想。我们需要证明，对于某个 $\mathfrak{C}$，有 $\ker\mathrm{pr}_{\mathfrak{C}}\subseteq\mathfrak{m}$，或者等价地，$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]\setminus\mathfrak{m}\subseteq\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]\setminus\ker\mathrm{pr}_{\mathfrak{C}}$。我们声称，只需证明集合 $S:=\{\nu:\ E(\nu)_\notin\mathfrak{m}\}$ 包含于某个 $\mathfrak{C}$ 中。假设这一点成立，并设 $E\in\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]\setminus\mathfrak{m}$。将 $E=\sum_\nu a_\nu E(\nu)$ 写成系数为 $a_\nu\in\mathbb{Z}$ 的形式。那么，对于某个 $\nu\in S$，有 $a_\nu\neq0$，因此 $\mathrm{pr}_{\mathfrak{C}}(E)\neq0$。为验证这一论断，只需证明对于 (G, T) 的任意余根 $\prec\ \prec\alpha$，要么有 $\langle S,\alpha\rangle\leq0$，要么有 $\langle S,\alpha\rangle\geq0$。给定 $\nu,\nu'\in S$，有 $E(\nu)E(\nu')\notin\mathfrak{m}$。这意味着 $E(\nu)E(\nu')\neq0$，因此 ν,ν' 必须位于某个共同 Weyl房的闭包中。特别地，对于任意 α，两个值 $\langle\nu,\alpha\rangle$ 和 $\langle\nu',\alpha\rangle$ 均非负或均非正。现在固定 α，并假设 $\langle S,\alpha\rangle\neq\{0\}$。选取 $\nu\in S$，使得 $\langle\nu,\alpha\rangle<0$ 或 $\langle\nu,\alpha\rangle>0$。对于任意其他的 $\nu'\in S$，前面的讨论表明，在第一种情况下 $\langle\nu',\alpha\rangle\leq0$，在第二种情况下 $\langle\nu',\alpha\rangle\geq0$。因此，第一种情况下 $\langle S,\alpha\rangle\leq0$，第二种情况下 $\langle S,\alpha\rangle\geq0$。4. 由 3. 以及 [B-CA], II 得出。4.1 命题 6。 □

由该命题可知， W在$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\,0}$上的作用以单可迁的方式置换其不可约分支。

2.5.5. 引理。 设 $\mathfrak{C}$ 是一个 *Weyl*房。对于任意 $x\in X^*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\mathfrak{C}}$，令

$$Z(x):=\sum_{x'\in W_{\mathrm{f}}.x}E(x').$$

$Z(x)$ 构成$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]^W$的一组 $\mathbb{Z}$-基。

证明。 根据上述命题，$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\,0}=\cup_{\mathfrak{C}}\mathbf{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}}$ 是其不可约分支的分解，其中 $\mathbf{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}}=$Spec $\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\mathfrak{C}}]$。现在，$X^*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\mathfrak{C}}$是$\widehat{\ }$在 X^***(极大环面)**上的作用的基本域，因此 $Z(x)$是线性无关的元素。它们显然是 W-不变的。反过来，设 $y\in\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]^W$，例如$y=\sum_\nu a_\nu E(\nu)$。给定 $w\in W$，则 $y=w(y)=\sum_\nu a_\nu E(w\nu)$，这意味着对所有 ν都有 $a_\nu=a_{w\nu}$。由此可知， y 属于 $Z(x)$的张成空间。

□

2.5.6. 推论。 设 $\mathfrak{C}$ 为一个 *Weyl*房。复合的 $\mathbb{Z}$-概形态射

$$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}}\hookrightarrow V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}\twoheadrightarrow V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}/W$$

是一个同构。

证明。 对应的代数同态将 $Z(x)$ 映到 $E(x)$，因此是双射。 □

2.5.7. 回顾 Vinberg截面

$$\mathfrak{s}\rho_{\mathrm{ad}}^{+}:\mathbb{A}_1\to V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}.$$

点 $\mathfrak{s}\rho^+{}_{\mathrm{ad}}(0)$ 位于 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 的某个不可约分支上，因此我们将其视为一个“标记”分支。为精确说明这一点，考虑反支配房 $\mathfrak{C}^-$，并简记

$$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}:=\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\mathfrak{C}^-}=\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-].$$

2.5.8. 命题。 幺半群$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 的单位元经由 $i_{\mathfrak{C}^-}$ 映射到 $\mathfrak{s}\rho^+{}_{\mathrm{ad}}(0)$。

证明。幺半群 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 的单位元由环同态 $\mathbb{Z}[\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}] \to \mathbb{Z}, e^{\nu} \mapsto 1$给出。反过来，$\mathfrak{s}\rho^{+}{}_{\mathrm{ad}}(0)$ 由同态 $\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}] \to \mathbb{Z}[\mathbf{q}], E(\nu) \mapsto \mathbf{q}^{\langle \nu-\nu_{-},\rho_{\mathrm{ad}}\rangle}$与$\mathbf{q}=0$的复合给出。因此，只需证明后一个复合映射将 $E(\nu)$ 映为 $1\widehat{}$，只要 $\nu \in X^{*}$**(极大环面)**$^{-}$。显然，在这种情况下 $\nu = \nu_{-}$。

□

2.5.9. 有关概形 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$的一些基本信息和记号，请参阅附录。尤其是，它是定义在 $\mathbb{Z}$ 上、对应环面 $\mathbf{T}$ 的托里克概形。它按 $\mathbf{T}$-轨道 $\mathrm{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的分层由标准 Levi 子群 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ （属于 $\mathbf{G}$）自然标记。每个轨道 $\mathrm{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 都是一个环面，并包含一个特 distinguished 点 $e_{\widehat{\mathbf{L}}}$，即该环面的乘法单位元。由此得到的映射 $\mathbf{T} \to \mathrm{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}, x \mapsto x.e_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 属于以下短正合列

$$1 \longrightarrow \prod_{I} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\prod_I \alpha} \widehat{\mathbf{T}} \longrightarrow \mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{L}}} \to 1.$$

这里，$\mathbf{L} = \mathbf{L}(I)$，其对应的余根集为 $\alpha \in I \subset X_{*}(\mathbf{T})$。沿映射 $\widehat{\mathbf{T}} \to \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$ 限制环面 $\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{L}}/\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{der}}$ 的特征，可得到环面之间的典范同构 $\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathrm{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}$。下文中我们将此作为一种识别，特别地，我们记作

$$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}} = \bigcup_{\widehat{\mathbf{L}}\in\widehat{\mathcal{L}}} \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}.$$

2.5.10. 回顾，W 在 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 的不可约分支集合上单可迁地作用。我们通过如下设定，将“标记”分支 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 上的轨道分层赋予所有其他分支

$$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}} := \bigcup_{w\in W} w\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}.$$

由此得到一个由局部闭子簇构成的分层

$$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0} = \bigcup_{\widehat{\mathbf{L}}\in\widehat{\mathcal{L}}} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}}.$$

由构造可知，每个分层 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}}$ 都是 W-稳定的。

设 $W_{\widehat{\mathbf{L}}} \subset W$ 为 W 中与 $\mathbf{L}$ 相关联的抛物子群。设 $w \in W$。则

$$w\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} \quad \text{if and only if} \quad w \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}.$$

事实上，若 $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I})$，则 $w\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$ 当且仅当 w 稳定由子集 $I \subset \Delta$ 所定义的 W 的 Coxeter 复形$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$的单形。

2.6 有限域上的增广半群 $V_{(1)\widehat{\ }\text{极大环面}\subset\widehat{\ }\mathbf{G}0,\ \mathbb{F}_q}$

令 q 为素数 p的幂。用 $\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域。

2.6.1. 用 $\mathrm{T}_{\mathbb{F}_q}$ 表示 T 到 $\mathbb{F}_q$ 的基变换。令 F_q 为 $\mathrm{T}_{\mathbb{F}_q}$ 上的 q-弗罗贝尼乌斯 $x \mapsto x^q$，并令 $(\widehat{\mathrm{T}}_{\mathbb{F}_q})^{F_q}$为其不动点。作为集合，$(\widehat{\mathrm{T}}_{\mathbb{F}_q})^{F_q} = \widehat{\ }$等于 $\mathrm{T}(\mathbb{F}_q)$，即 $\widehat{\mathrm{T}}$ 的 $\mathbb{F}_q$-值点集，此后我们将沿用这一记号。注意，$\mathrm{T}(\mathbb{F}_q)$ 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的有限可对角化群概形$\widehat{\ }$，其特征标群为 $(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^r$，其中 r 是 T 的秩。由于 $q-1 \in \mathbb{F}_q^{\times}$，该$\widehat{\ }$群概形是 ´étale 的，甚至是常值的。由于 W 与 F_q交换，$\mathrm{T}(\mathbb{F}_q)$ 在W作用下保持不变。

2.6.2. 我们记

$$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q} := V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0} \otimes_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$$

$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}$ 到 $\mathbb{F}_q$的基变换。考虑 $\mathbb{F}_q$上的增广半群

$$V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q} := \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \times_{\mathbb{F}_q} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \times_{\mathbb{Z}} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}.$$

它具有其对角 W-作用。相应的商

$$S := V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q}/W$$

将来自 [PS25, Def. 5.2] 的 GL_2 情形中的 Satake 方案 $S(q)$ 推广。

2.6.3. 设 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ 是 $\mathbf{G}$ 中的标准 Levi 子群。令

$$V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}} := \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \times_{\mathbb{Z}} V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}}.$$

这给出了一个 W-不变的分层，定义在 $\mathbb{F}_q$-概形 $V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q}$

$$V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q} = \bigcup_{\widehat{\mathbf{L}}\in\widehat{\mathcal{L}}} V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}}.$$

2.6.4. 设 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ 是 $\mathbf{G}$ 中的标准 Levi 子群，其 Weyl 群为 $W_{\widehat{\mathbf{L}}} \subset W$。定义商概形

$$S_{\widehat{\mathbf{L}}} := V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}}/W.$$

因此，

$$S = \bigcup_{\widehat{\mathbf{L}}\in\widehat{\mathcal{L}}} S_{\widehat{\mathbf{L}}}.$$

概形 $S_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 是若干个副本的不交并 $\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$，这些副本由集合 $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-轨道索引，其中$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)$。事实上，有

$$V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\widehat{\mathbf{L}}} = W.\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$$

其中 $\mathrm{Stab}_W(\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}) = W_{\widehat{\mathbf{L}}}$，参见 2.5.10，由此

$$S_{\widehat{\mathbf{L}}} = (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \times W.\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})/W = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}.$$

3 温和伽罗瓦表示

设 p 为一个素数。固定 $\mathbb{Q}_p$ 的一个代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$，并用 $\mathbb{F}_p$ 表示其剩余域。对于所有 n，记 $\mathbb{Q}_{p^n} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ 为 $\overline{\mathbb{Q}}_p$的唯一非分歧扩张，且次数为 n。记 $\mathbb{F}_{p^n} \subset \overline{\mathbb{F}}_p$为基数为 p^n的唯一子域。

令 I_p 为 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的惯性子群。令 $P_p \subset I_p$ 为野分歧群。令q 为 p的某个固定幂。记 $\mathcal{G}_q := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_q)$，其惯性子群为 I_p。设 $\mathcal{G}_q^t := \mathcal{G}_q/P_p$ 且 $I_p^t := I_p/P_p$。算术 Frobenius 元 $\varphi \in \mathcal{G}_q$ 指 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q)$ 中提升弗罗贝尼乌斯 $x \mapsto x^q$ 的一个元素。

为简化记号，下文中我们将用$\mathbf{G}$，$\mathbf{T}$ 等表示这些$\mathbb{Z}$-概形到代数闭包 $\overline{\mathbb{F}}_p$上的基变换。为使记号更简洁，我们将这些后者代数群与其几何点群$\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_p)$，$\mathbf{T}(\overline{\mathbb{F}}_p)$等混为一谈，并将后者视为离散拓扑群。对于两个拓扑群 H_1，H_2，记号 $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$表示连续的群同态集合。

对于任意 $w \in W$，我们选取一个提升 $\dot{w} \in \mathbf{G}$。为简化记号，我们仍用 w 表示这个提升t.

以下凡是特化到$\mathbf{G} = GL_n$ 的情形，我们都默认$\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$分别是由对角矩阵构成的标准环面和由上三角矩阵构成的博雷尔子群。

3.1 驯顺惯性型的一般性质

3.1.1. 定义。一个取值于$\mathbf{G}$的模 p 温和惯性类型是一个连续同态

$$\tau : I_p \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}$$

即在 P_p 上平凡并延拓到群 $\mathcal{G}_q$。我们将模 p 驯顺型的集合记为 $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{G}}}$。$\widehat{\ }$在集合 $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 上存在显然的 $\mathbf{G}$ 共轭作用。

3.1.2. 存在一个同构

$$I_p^t \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathbb{F}_{p^i}^\times,$$

根据域 $\mathbb{F}_p$ 作为 $\mathbb{Q}_p$ 的剩余域及其有限子域的定义，该同构是典范的。因此，下文中我们将这两个群视为相同。特别地，任取 $\varprojlim_i \mathbb{F}_{p^i}^\times$ 的拓扑生成元 $(\zeta_{p^i-1})_{i=1}^\infty$，便确定群 I_p^t 的一个拓扑生成元 M。

3.1.3. 设 τ 是一个模 p 驯顺惯性型。τ 的共轭类由元素 $\tau(M)$ 的共轭类确定。由于 τ 延拓到 $\mathcal{G}_q$，该共轭类在弗罗贝尼乌斯F_q：$x \mapsto x^q$ 作用下保持不变。此外，任意给定元素 $g \in \mathbf{G}$ 的阶与 p 互素，当且仅当它是半单的。因此，$\tau \mapsto \tau(M)$ 诱导出一个依赖于 M 的双射，

$$\{\text{mod } p \text{ tame inertial types}\}/\widehat{\mathbf{G}} \quad \simeq \quad \{F_q\text{-stable semisimple conjugacy classes in } \widehat{\mathbf{G}}\}$$

众所周知，右侧的集合是有限集。

3.1.4. 由于 F_q 与 W交换，因此在集合 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W$上有一个 F_q-作用。包含映射$\widehat{\ }$ $\widehat{\mathbf{T}} \subset \mathbf{G}$ 诱导出一个典范映射

$$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q} \xrightarrow{\sim} \{\text{mod } p \text{ tame inertial types}\}/\widehat{\mathbf{G}}.$$

上一段表明这是一个双射。从现在起，我们将通过这个双射识别这两个集合。

3.1.5. 设 $\tau \in \mathrm{Hom}(I_p, \widehat{\mathbf{T}})$，其中 $\tau^q = w\tau w^{-1}$对某个 $w \in W$成立。设 $\sigma \in W$。那么

$$(\sigma\tau\sigma^{-1})^q = \sigma\tau^q\sigma^{-1} = w'(\sigma\tau\sigma^{-1})w'^{-1}$$

其中 $w' = \sigma w \sigma^{-1}$。因此，如果 F_q 通过考克斯特元素作用于$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q}$ 中某个给定的 F_q-稳定类的某个代表元，那么 F_q 也通过考克斯特元素作用于该类的任意代表元。记 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{cox}}$ 为这样一个类的子集：其中 F_q通过 W 的考克斯特元素作用于该类某个（等价地，任意一个）代表元。在这个子集中，记 $(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{reg}}$ 为正则类的子集，即其基数达到最大值 $|\ W\ |$。因此

$$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{reg}} \subset \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{cox}} \subset (\mathrm{Hom}^{cts}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q}.$$

3.2 取值于 Levi 子群的类型

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设$\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ 是$\mathbf{G}$的一个标准 Levi 子群。

3.2.1. 上述前一小节的讨论同样适用于约化 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$群$\mathbf{L}$，而非$\mathbf{G}$。因此，我们得到一个取值于 $\widehat{\mathbf{L}}$ 的模 p 温和惯性类型的概念

$$\tau : I_p \longrightarrow \widehat{\mathbf{L}}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们用 $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{L}}}$表示此类类型的集合，并带有其自然的$\mathbf{L}$-作用。商 $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{L}}}/\mathbf{L}$与$\mathbf{L}$中 F_q-稳定的半单共轭类的集合之间存在双射$\widehat{\ }$，如前所述。

3.2.2. 用$\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\text{极大环面}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{cox}}$ 表示如下类的子集：在每个代表元上，F_q 都通过$W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的一个考克斯特元素作用。在这后一子集中，用$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\text{极大环面}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{reg}}$ 表示具有最大基数 $|W_{\widehat{\mathbf{L}}}|$的类的子集。如前所述，

$$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{reg}} \subset \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{cox}} \subset (\mathrm{Hom}^{cts}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q}.$$

3.2.3. 有限群 $W(\mathbf{L}) := N_{\widehat{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$ 自然作用于集合 $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{L}}}/\mathbf{L}$。映射

$$\mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{L}}}/\widehat{\mathbf{L}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\widehat{\mathbf{G}}}/\widehat{\mathbf{G}},$$

来自包含 $\mathbf{L} \subset \mathbf{G}$，它是 $W(\mathbf{L})$-不变的，即在 $W(\mathbf{L})$-轨道上为常值。

3.3 温和伽罗瓦表示

3.3.1. 给定 $g \in \widehat{\mathbf{G}}$，存在求值同态 $\mathrm{ev}_g \in \mathrm{Hom}(X^*(\widehat{\mathbf{G}})\ \mathbb{F}_p^\times)$，它将 a character $\chi \in X^*(\mathbf{G})$ 送至 $\chi(g)$。映射 $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ 是乘法的。由此得到一个典范映射

$$\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_p^t, \mathrm{Hom}(X^*(\widehat{\mathbf{G}}), \overline{\mathbb{F}}_p^\times))$$

映射 ρ 至 $\sigma \mapsto \mathrm{ev}_{\rho(\sigma)}$。给定 $w \in W$，有

$$\mathrm{ev}_{w\rho(\sigma)w^{-1}}(\chi) = \chi(w\rho(\sigma)w^{-1}) = \chi(w)\chi(\rho(\sigma))\chi(w)^{-1} = \chi(\rho(\sigma)) = \mathrm{ev}_{\rho(\sigma)}(\chi)$$

对于任意 $\chi \in \mathrm{Hom}(X^*(\widehat{\mathbf{G}})\ \overline{\mathbb{F}}_p^\times)$，因为 $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ 是交换的。因此，上述映射在 W-轨道上为常值。

我们通过典范同构，将群 $\mathrm{Hom}(X^*(\widehat{\mathbf{G}})\ \mathbb{F}_p^\times)$ 视为环面 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}$ 的点群

$$\mathrm{Hom}(X^*(\widehat{\mathbf{G}}), \overline{\mathbb{F}}_p^\times) \simeq \mathrm{Hom}(X^*(\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}), \overline{\mathbb{F}}_p^\times) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathcal{O}(\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}), \overline{\mathbb{F}}_p) = \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}(\overline{\mathbb{F}}_p).$$

总而言之，存在一个典范映射

$$\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})$$

其在 W-轨道上为常值。因此它给出一个映射 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W \to \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})$，并且通过限制到弗罗贝尼乌斯稳定类，得到一个映射

$$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q} \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}).$$

利用包含 $I_p^t \subset \mathcal{G}_q^t$，我们可以构造纤维积

$$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}).$$

3.3.2. 根据 3.1.4，存在一个典范映射

$$f_{\widehat{\mathbf{G}}} : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}} \longrightarrow (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}).$$

注意，右侧纤维积中的任意一对 (ψ_1, ψ_2) 都具有如下性质：ψ_1 在 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})$ 中的像是 F_q-不变的，即是一个从 I_p^t 到 $\mathbb{F}_q$-有理点群 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}(\mathbb{F}_q)$ 的同态。

3.3.3. 命题。设 $\widehat{\mathbf{G}} = GL_n$，并用 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})^{\mathrm{irr}}$ 表示 $\mathcal{G}_q$ 的不可约 n-维表示集合。上述典范映射诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})^{\mathrm{irr}}/\widehat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{reg}} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}).$$

证明。这是 [B15，第 2.1 条定理7]。请注意，loc. cit. 通过行列式使用 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{G}_m$。 □

3.3.4. 命题。设 $\widehat{\mathbf{G}} = GL_n$。选取一个拓扑生成元 $M \in I_p^t$ 和一个算术 *Frobenius* $\varphi \in \mathcal{G}_q$。存在一个映射 $h^{M,\widehat{\ }\varphi_{\mathbf{G}}}$，其取决于这一对 (M, φ)

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}} \longleftarrow (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{cox}} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}),$$

它是典范映射 $f_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 的一个截面，其含义是 $f_{\widehat{\mathbf{G}}} \circ h^{M,\widehat{\ }\varphi_{\mathbf{G}}} = \mathrm{id}$。

证明。这是 [B15, 定理 2.1.7] 中证明的一个推论。我们通过行列式来识别 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{G}_m$。设 $(W\psi_1, \psi_2)$ 是纤维积中的一个点，并选定一个代表元 ψ_1. 因此 $\psi_1(M) = \mathrm{diag}(y_1, ..., y_n) \in \mathbf{T}$。重新编号 y_i 后，即选取轨道的另一个代表元，我们有 $y_{i+1} = y_i^q$，其中 $1 \le i \le n$， $y_{n+1} := y_1$。因此，得到一个形如 $u = \mathrm{diag}(y, y^q, ..., y^{q^n})$ 的元素，其中 $y := y_1 \in \mathbb{F}_{q^n}$。若 $z := \det \psi_2(\varphi)$，则定义一个元素 $s \in \mathbf{G}$ 如下

$$s := \begin{pmatrix} & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ (-1)^n z & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $sus^{-1} = u^q$。发送 $M \mapsto u, \varphi \mapsto s$ 定义了一个 ρ 的驯性表示。我们将 $h^{M,\widehat{\ }\varphi_{\mathbf{G}}}(W\psi_1, \psi_2)$ 定义为 ρ 的 $\widehat{\mathbf{G}}$-共轭类。选取不同的代表元 ψ_1 会将 y 变换为一个 q 次幂 $y' = y^{q^i}$。于是 y 和 y' 在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ 下共轭。根据 [B15, 命题 2.1.6 (ii)], , 数对 (u, s) 和 (u', s) 是 $\widehat{\mathbf{G}}$- 共轭的。因此，映射 $h^{M,\widehat{\ }\varphi_{\mathbf{G}}}$ 定义良好。根据构造，它是 $f_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 的一个截面。

□

3.3.5. 注。采用前述证明中的记号：轨道 $W\psi_1$ 属于较小的集合 $(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W)^{F_q,\mathrm{reg}}$，当且仅当所有 y_i 两两不同；也就是说，当且仅当 $y = y_1$ 不属于 $\mathbb{F}_{q^n}$ 的任何真子域。

3.4 取值于 Levi 子群的表示

设 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ 为 $\mathbf{G}$ 的标准 Levi 子群。

3.4.1. 前一小节的讨论更一般地适用于 $\mathbf{L}$ 而非 $\mathbf{G}$。特别地，存在一个典范映射

$$f_{\widehat{\mathbf{L}}} : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}})/\widehat{\mathbf{G}} \longrightarrow (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}).$$

固定一个拓扑生成元 M（属于 I_p^t）以及一个弗罗贝尼乌斯 φ（属于 $\mathcal{G}_q$）。这定义了一个分裂 $\mathcal{G}_q^t \simeq I_p^t \rtimes \mathbb{Z}$.由于 $\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$ 是阿贝尔的，该分裂定义了一个双射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}) \simeq \{(u, s) \in \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} : u = u^q\} = \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}(\mathbb{F}_q) \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}.$$

这意味着作为 $f_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的目标出现的纤维积可以写成

$$(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}},$$

即具有定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的代数环面的有限不交并结构（即 $\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$ 的有限多个拷贝）。特别地，映射 $f_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 可以写成

$$f_{\widehat{\mathbf{L}}} : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}})/\widehat{\mathbf{L}} \longrightarrow (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}.$$

3.4.2. 定义。令

$$X_{\widehat{\mathbf{L}}} := (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{cox}} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})$$

and

$$X_{\widehat{\mathbf{L}}}^{\mathrm{reg}} := (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{reg}} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}).$$

如上所见，这些集合具有有限个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的代数环面之并的结构。特别地，它们是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射概形。

正如我们将在下文 4.3.1 中回顾的，有限群 $W(\mathbf{L}) := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$ 可识别为 W 的一个子群，它与 $W_{\mathbf{L}}$ 和 F_q 的作用交换。因此，它作用于 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \mathbf{T})/W_{\mathbf{L}})^{F_q}$，以及对应于 Coxeter 类和正则类的子集。此外，群 $W(\mathbf{L})$ 自然地作用于 $\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}$ 和 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L})/\mathbf{L}$。特别地，它作用于仿射概形 $Y_{\mathbf{L}}$ 和 $Y^{\mathrm{reg}}\mathbf{L}$

3.4.3. 定义。令 $X_{[\mathbf{L}]} := X_{\mathbf{L}}/W(\mathbf{L})$ 和 $X^{\mathrm{reg}}_{[\mathbf{L}]} := X^{\mathrm{reg}}\mathbf{L}/W(\mathbf{L})$。

由于 $W(\mathbf{L})$ 是有限的，这些自然是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射概形。

3.4.4. 命题. 设 $\mathbf{G} = GL_n$，并用 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L})^{\mathrm{irr}}$ 表示 $\mathcal{G}_q$ 的取值于 $\mathbf{L}$ 的不可约表示的集合。典范映射 $f_{\mathbf{L}}$ 诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L})^{\mathrm{irr}}/\mathbf{L} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}(I_p^t, \mathbf{T})/W_{\mathbf{L}})^{F_q,\mathrm{reg}} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \mathbf{L}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L}^{\mathrm{ab}}).$$

证明. 这可由将 $\mathbf{L} = \prod_i GL_{n_i}$ 写成若干 GL_n 的乘积，并对每个因子应用 3.3.3 而得出。

□

3.4.5. 命题. 设 $\mathbf{G} = GL_n$。固定 I_p^t 的一个拓扑生成元 M，以及 $\mathcal{G}_q$ 中的一个弗罗贝尼乌斯 φ。存在一个依赖于对 (M, φ) 的映射 $h^{M,\varphi}\mathbf{L}$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L})/\mathbf{L} \longleftarrow (\mathrm{Hom}(I_p^t, \mathbf{T})/W_{\mathbf{L}})^{F_q,\mathrm{cox}} \times_{\mathrm{Hom}(I_p^t, \mathbf{L}^{\mathrm{ab}})} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L}^{\mathrm{ab}}),$$

它是 $f_{\mathbf{L}}$ 的一个截面，其意义在于 $f_{\mathbf{L}} \circ h^{M,\varphi}\mathbf{L} = \mathrm{id}$。

证明。这是通过将 $\mathbf{L} = \prod_i GL_{n_i}$ 写成若干个 GL_n 的乘积，并对每个因子应用 3.3.4 得出的。

□

3.4.6. 设 $\mathbf{G} = GL_n$。上一个命题中的单射 $h^{M,\varphi}\mathbf{L}$ 可以写成

$$h^{M,\varphi}_{\mathbf{L}} : X_{\mathbf{L}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L})/\mathbf{L}.$$

如下面 4.3.1 中将要回顾的，群 $W(\mathbf{L})$ 是 Levi 子群 $\mathbf{L}$ 的块集合上的全置换群的一个子群。因此，映射 $h^{M,\varphi}\mathbf{L}$ 按照其逐块定义，是 $W(\mathbf{L})$-等变的。另一方面，映射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{L})/\mathbf{L} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{G})/\mathbf{G},$$

由 $\mathbf{L} \subset \mathbf{G}$ 导出，在 $W(\mathbf{L})$-轨道上为常值，并且在商集上变为单射。将 $h^{M,\varphi}\mathbf{L}$ 与后一个映射复合，得到一个单射

$$h^{M,\varphi}_{[\mathbf{L}]} : X_{[\mathbf{L}]} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \mathbf{G})/\mathbf{G}.$$

4 Vinberg 分层的伽罗瓦参数化

我们沿用上一节中引入的所有记号和约定。

4.1 对偶 Deligne-Lusztig 对

我们回顾李型有限群表示论中的一些基本概念，参见 [C85]和 [DM91]。

4.1.1. 对任意 $w \in W$，取 $\dot{g}_w \in \widehat{\mathbf{G}}$，使得 $\dot{g}_w^{-1} F_q(\dot{g}_w)$ 是 $\widehat{\mathbf{G}}$ 中 w 的一个提升（朗定理）。令 $\widehat{\mathbf{T}}_w := \dot{g}_w \widehat{\mathbf{T}} \dot{g}_w^{-1}$。于是 $\widehat{\mathbf{T}}_w$ 是 F_q-稳定的极大环面，且位于 $\widehat{\mathbf{G}}$ 中。由此，W 的共轭类与 $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ 中 F_q-稳定极大环面的共轭类一一对应。

一个对偶（*Deligne-Lusztig*）对$(\mathbf{T}', s)$由一个 F_q-稳定的极大环面$\mathbf{T}'$ 以及$\mathbf{G}$ 中的一个元 $s \in \mathbf{T}'(\mathbb{F}_q)$组成。由于 s 包含于某个环面中，因此它是一个半单元。对偶对的集合带有有限群$\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$的自然作用。存在一个良定义的满射

$$\begin{array}{ccc} \{\text{dual pairs } (\widehat{\mathbf{T}}', s)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q) & \longrightarrow & \{\text{semisimple elements in } \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q) \\ (\widehat{\mathbf{T}}', s) & \longmapsto & s. \end{array}$$

注：代数环面与有限环面的对偶性将对偶对与经典 Deligne-Lusztig 对联系起来，例如见 [DM91，命题 13.13]。我们不需要这一联系，因此在此不对其作精确说明。

4.1.2. 假设 $(\mathbf{T}', s)$ 是一个对偶对。由于 $s \in \mathbf{G}$ 是一个半单元，其中心化子$Z_{\widehat{\mathbf{G}}}(s)$ 是一个约化群。若导出群 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{der}}$ 是单连通的，则 $Z_{\widehat{\mathbf{G}}}(s)$ 是连通的。

如果存在一个包含极大环面 $\mathbf{T}'$的 F_q-稳定博雷尔子群 $\widehat{\mathbf{B}}$，且该子群包含于$Z_{\widehat{\mathbf{G}}}(s)$中，我们称 $\mathbf{T}'$ (或对偶对 $(\mathbf{T}', s)$) 为极大分裂。所有极大分裂环面在 $\mathbf{G}$ 中关于 $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ 共轭，并且在 $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$-共轭意义下，连通中心化子 $Z_{\widehat{\mathbf{G}}}(s)^\circ$中存在唯一的极大分裂环面。因此，对 $(\mathbf{T}', s)$ 的自然映射 $\mapsto s$ 在限制于极大分裂对后变为单射。于是得到一个双射

$$\{\text{maximally split dual pairs } (\widehat{\mathbf{T}}', s)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q) \simeq \{\text{semisimple elements in } \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q)$$

4.1.3. 如果导出群 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{der}}$ 是单连通的，那么众所周知，包含映射 $\widehat{\mathbf{T}} \to \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q) \to \mathbf{G}$ 诱导一个双射

$$\{\text{semisimple elements in } \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q) \simeq \{F_q\text{-stable semisimple conjugacy classes in } \widehat{\mathbf{G}}\}.$$

逆映射由 $c \mapsto c \cap \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ 给出，例如参见 [C85, 命题 3.7.3] 的证明。

4.2 扬岑参数化

固定一个拓扑生成元 $(\zeta_{p^i-1})_{i=1}^\infty$，使其生成群 $\varprojlim_i \mathbb{F}_{p^i}^\times$。我们用对偶对的语言，简要回顾 [J81, 3.1]，中的 Deligne-Lusztig 对的 Jantzen 参数化。

4.2.1. 群 W 按通常方式作用于 X_***(极大环面)**，因此我们可以构造半直积 X_***(极大环面)** $\rtimes W$。群 X_***(极大环面)** $\rtimes W$ 按如下方式作用于集合 $W \times X_*$**(极大环面)**：

$$^{(\nu,\sigma)}(w, \mu) := (\sigma w \sigma^{-1}, \sigma\mu + (q - \sigma w \sigma^{-1})\nu).$$

存在一个良定义映射（取决于 $(\zeta_{p^i-1})_{i=1}^\infty$ 的选择）

$$W \times X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \{\text{dual pairs } (\widehat{\mathbf{T}}', s)\}$$

定义如下。给定 $(w, \mu) \in W \times X_*(\widehat{\mathbf{T}})$，令 $\widehat{\mathbf{T}}' := \widehat{\mathbf{T}}_{w^{-1}}$[2]。设 t 满足 $w^t = 1$。那么环面 $\mathbf{T}'$ 在 $\mathbb{F}_{q^t}$ 上分裂。(w, μ) 的像由以下对偶对给出

$$(\widehat{\mathbf{T}}_{w^{-1}}, \hat{g}_{w^{-1}} N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}(\mu)(\zeta_{q^t-1})(\hat{g}_{w^{-1}})^{-1}).$$

这里，$F_q w^{-1}$ 是 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})$ 的端同态，由 $F_q w^{-1}(\eta) = F_q \circ w^{-1} \circ \eta$ 给出；对于任意的 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})$ 的端同态 A，记作 $N_{A^t/A} := \prod_{i=0}^{t-1} A^i$。特别地，给定 $\mu \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})$，余特征 $N_{A^t/A}(\mu)$ 将元素 $x \in \mathbb{G}_m$ 映为元素 $\prod_{i=0}^{t-1}(A^i(\mu)(x))$，其中乘积在$\mathbf{T}$中取。上述映射诱导出一个良定义双射

$$\{X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \rtimes W\text{-orbits in } W \times X_*(\widehat{\mathbf{T}})\} \xrightarrow{\sim} \{\text{dual pairs } (\widehat{\mathbf{T}}', s)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q).$$

[2]向 w^{-1} 的过渡着眼于下文的引理4.2.2。

4.2.2. 引理。 在前述讨论的记号下，对于该元素我们有

$$s_{w,\mu} := N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}(\mu)(\zeta_{q^t-1}) \in \widehat{\mathbf{T}}$$

that

$$F_q.s_{w,\mu} = w.s_{w,\mu}.$$

证明。 由构造可知，$s_{w,\ \mu}$ 在 $F_q w^{-1}$下是不变的。事实上，只需看到$(F_q w^{-1})^t$ 固定$\mu(\zeta_{q^t-1})$。但

$$F_q^t(\mu(\zeta_{q^t-1})) = \mu((\zeta_{q^t-1})^{q^t}) = \mu(\zeta_{q^t-1}),$$

且 F_q 与 w^{-1} 交换。因此，由 $w^{-t} = 1$这一事实可得该结论。 □

4.2.3. 引理。设 $k \geq 1$。则

$$N_{(F_q w^{-1})^{kt} / F_q w^{-1}}(\mu)(\zeta_{q^{kt}-1}) = N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}(\mu)(\zeta_{q^t-1}).$$

证明: 设 $A :=F_q w^{-1}$，并对 $i = 0,\ .....,\ t-1$令 $A_i :=A^i$，对 $j = 0,\ .....,\ k-1$令 $A_j :=A^{jt}$。则

$$\prod_j A_j = N_{(F_q^t w^{-t})^k / (F_q^t w^{-t})} = N_{(F_q^t)^k / (F_q)^t} = 1 + q^t + q^{2t} + \ldots + q^{(k-1)t} = \mathrm{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{kt}} / \mathbb{F}_{q^t}}.$$

但范数$\mathbb{F}_{q^{kt}} / \mathbb{F}_{q^t}(\zeta_{q^{kt}-1}) =\zeta_{q^t-1}$，这是根据$(\zeta_{p^i-1})_{i=1}^{\infty}$ 的定义，因此

$$N_{(F_q w^{-1})^{kt} / F_q w^{-1}}(\mu)(\zeta_{q^{kt}-1}) = \prod_{i,j} A_i \circ A_j(\mu)(\zeta_{q^{kt}-1}) = \prod_i A_i(\prod_j A_j(\mu)(\zeta_{q^{kt}-1})) = (\prod_i A_i)(\mu)(\zeta_{q^t-1})$$

而这就是$N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}(\mu)(\zeta_{q^t-1})$。 □

4.2.4. 注。 设 $\mathbf{G} = GL_n$。令 $(w,\mu) \in W \times X_*(\mathbf{T})$，其中 $\mu =(\mu_1,\ ...,\mu_n)$。对于任意 $1 \leq i \leq n$，令 n_i 为满足 $w^{n_i}(i) = i$ 的最小正整数。根据 Herzig[H09，定义 6.19], ，若对所有 i，则称这对 (w,μ) 良好

$$\sum_{k \bmod n_i} \mu_{w^k(i)} q^k \not\equiv 0 \mod \frac{q^{n_i}-1}{q^d-1}$$

对所有 $d \mid n_i, d \neq n_i$均成立。良好 这一性质仅取决于这对 (w,μ) 的 $X_*(\mathbf{T}) \rtimes W$-轨道，而将上述双射限制在良好轨道上，可得一个双射 [H09，命题 6.19]

$$\{\text{good } X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \rtimes W\text{-orbits in } W \times X_*(\widehat{\mathbf{T}})\} \xrightarrow{\sim} \{\text{maximally split dual pairs } (\widehat{\mathbf{T}}', s)\}/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_q).$$

4.2.5. 例。 设 $\mathbf{G} = GL_n$，并假设 $\mathbf{L} = GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$。我们将 $W = S_n$ 的抛物子群 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 与对称群的乘积 $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_r}$ 等同。定义

$$\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}} := (1,...,n_1) \cdots (1,...,n_r) \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}.$$

对于任意 $\mu \in X_*(\mathbf{T})$，引理 4.2.2 意味着

$$s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu} \in \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{cox}}.$$

记 μ_i 为 μ到 i块的投影，记 cox_i 为 $\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的 i个循环，则在 i块中

$$(s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu})_i = N_{(F_q\, \mathrm{cox}_i^{-1})^t / F_q\, \mathrm{cox}_i^{-1}}(\mu_i)(\zeta_{q^t-1}) = N_{(F_q\, \mathrm{cox}_i^{-1})^{n_i} / F_q\, \mathrm{cox}_i^{-1}}(\mu_i)(\zeta_{q^{n_i}-1}),$$

其中我们用到了 4.2.3，以及 t可以取为 n_i的最小公倍数这一事实。注意，对角矩阵 $(s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu})_i \in (\mathbb{G}_m)^{n_i} \subseteq GL_{n_i}$ 的顶部元素具有以下形式

$\zeta_{q^{n_i}-1}^{\sum_{k=1}^{n_i}\mu_{ik}q^k}$。现在根据 3.3.5，当且仅当对每个固定的 i，$(s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu})_i$ 中的所有元素两两不同时，元素 $s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu}$ 才属于 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\text{正则}}$，即 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{cox}}$ 的子集。令 μ_{ik} 表示 k坐标（$k=1,\ldots,\ n_i$），即 μ_i的第 k个坐标，这意味着对于每个 i，元素 $\zeta_{q^{n_i}-1}^{\sum_{k=1}^{n_i}\mu_{ik}q^k}$ 都不属于 $\mathbb{F}_{q^{n_i}}$的任何真子域，也就是说

$$\sum_{k=1}^{n_i}\mu_{ik}q^k \neq 0 \mod \frac{q^{n_i}-1}{q^d-1}$$

对所有 $d \mid n_i,\ d \neq n_i$。综上，我们看到 $s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\ \mu} \in \mathrm{Hom}(I_p^t,\ \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\ \mathrm{reg}}$ 当且仅当对 $(\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\ \mu)$ 是良好的，这采用 4.2.4 中的语言表述。

最后我们注意到

$$\det s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu} = \det \mu(\zeta_{q-1})$$

作为 $\mathbb{G}_m$ 中的元素。特别地，对于 $\rho=(n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0)$

$$\det s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\rho} = \zeta_{q-1}^{1+2+\ldots+n-1}.$$

事实上，在 i块中取行列式，并将 $\mu_i(\zeta_{q^{n_i}-1})$ 的第 k 个坐标记为 $\mu_{ik}(\zeta_{q^{n_i}-1}) \in(\mathbb{G}_m)^{n_i} \subseteq GL_{n_i}$，可得

$$\det(s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu})_i = \prod_{k=1}^{n_i}\mu_{ik}(\zeta_{q^{n_i}-1})^{1+q+\ldots+q^{n_i-1}} = \prod_{k=1}^{n_i}\mu_{ik}(\zeta_{q^{n_i}-1}^{1+q+\ldots+q^{n_i-1}}) = \prod_{k=1}^{n_i}\mu_{ik}(\zeta_{q-1}) = \det\mu_i(\zeta_{q-1}),$$

其中根据 $(\zeta_{p^i-1})_{i=1}^{\infty}$ 的定义，我们使用了 $\zeta_{q^{n_i}-1}^{1+q+\ldots+q^{n_i-1}} = \zeta_{q-1}$，。对所有块 i 取乘积，得到 $\det s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\ \mu} = \det\mu(\zeta_{q-1})$，如所述。

4.3 GL_n的有限对偶环面上的点作用

$\widehat{}$在本小节中，我们始终假设$\mathbf{G} = GL_n$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$与往常一样，令$\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ 分别为对角矩阵子群和上三角矩阵子群$\widehat{}$ $\widehat{}$。令 $\Delta \subset \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$为与此选择对应的标准单根子集。我们沿用上一节中为群 $\varprojlim_i \mathbb{F}_{p^i}^{\times}$ 选定的拓扑生成元 $(\zeta_{p^i-1})_{i=1}^{\infty}$。令$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ 为$\mathbf{G}$的一个标准 Levi 子群。

4.3.1. 回顾 Weyl 作用在标准群上的一些稳定子，参见 [BZ77, 2.6/2.8]。群 W 可识别为 $N_{\widehat{\mathbf{G}}}(\mathbf{T})$中由初等单项矩阵构成的子群。因此，它通过共轭作用在 G 的 Levi 子群集合上。子集 $W(\mathbf{L}\ \star)$由 W中将 L 映到 $\mathcal{L}$中的某个标准 Levi 子群的元素构成。令 $W_{\widehat{\mathbf{L}}} \subset W$ 为与 L 对应的 W的抛物子群。商集 $W(\mathbf{L}\ \star)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$实际上是作用在 L 的块集上的置换群$\widehat{}$。因此，它可自然地识别为 W的一个子群。由此，它在 T 或 $X_*(\mathbf{T})$上的作用可分解为在商 $\mathbf{T}/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 或 $X_*(\mathbf{T})/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$上的作用。另一方面，群 $W(\mathbf{L}) = N_{\widehat{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}$可识别为 $W(\mathbf{L}\ \star)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$的子群，由保持相同大小块的置换构成。换言之，它是群 $W(\mathbf{L}\ \star)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$中 L 的稳定子群。特别地，$W(\mathbf{L}) = 1$当且仅当 L 的所有块大小互不相同。最后，显然，$W(\mathbf{L})$在 $X_*(\mathbf{T})$上的作用与 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$的作用交换。

$\widehat{}$**4.3.2.** 我们首先说明如何为 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-$\widehat{}$轨道，在 $X_*(\mathbf{T})$ 中构造合适的代表元系。假设给定 $X_*(\mathbf{T})$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基 $\eta_1,\ldots,\eta_n$，且它在 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$下稳定。我们有满射

$$\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}} : X_*(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbb{F}_q),\ \lambda \mapsto \lambda(\zeta_{q-1}).$$

$\widehat{}$通过基 η_i，它转化为满射 $\mathbb{Z}^n \mapsto (\mathbb{Z}/(q-1))^n$。因此，$X_*(\mathbf{T})\widehat{}$中由所有满足 $0 \leq a_i \leq q-2$ 的线性组合 $\sum_i a_i\eta_i$ 构成的子集，在 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}$ 下与 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ 双射。

显然， $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 仍作用于后一个子集上，我们可以为 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-轨道选取一个代表元系$X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$。若将 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 后接商映射$\widehat{\ }\ \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \to \mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$所得的映射 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}$ 记为 $[$，则按构造有

$$[\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}} : X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}.$$

4.3.3. 注。对于 $X_*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\widehat{\mathbf{L}}}$，存在典范选择（模去我们对 $\widehat{\ }$**Borel子群** 的选择）。例如，由 $\eta_i(x) = \mathrm{diag}(1, ..., x, 1..., 1)$ 给出的余特征 $\eta_1, ..., \eta_n$，其中 x 位于第 i 个位置，构成 X_***(极大环面)** 的典范基，且该基在 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 作用下稳定。暂时通过此基将 X_***(极大环面)** 与 $\mathbb{Z}^n$ 识别。令 $I \subset \{1, ..., n-1\}$ 为索引集合，其对应于属于$\widehat{\ }\mathbf{L}$ 的单根 $\Delta(\mathbf{L})$。对所有 $i \in I$ 施加支配条件 $0 \le a_i - a_{i+1}$，得到子集

$$'X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}} := \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n : a_i \in \{0, ..., q-2\}\ \forall i \ \text{ and } \ a_{i+1} \le a_i\ \forall\, i \in I\}.$$

$\widehat{\ }$在映射 $[\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}}$.下，它与 **极大环面**$(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 一一对应

在特殊情形下$\widehat{\mathbf{L}}$为空，$\widehat{\ }$因此还有第二种规范选择。也就是说，可以取 n“基本余权” $\omega_i = \eta_1 + \cdots + \eta_i$ 作为 X_*（$\mathbf{T}$）的$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$基。在此基下，权 $\mu \in X_*$（$\mathbf{T}$）的前 $n-1$ 个坐标由$\widehat{\ }$值 $\langle \mu, \hat{\ }\alpha_i \rangle$ 给出，其中$\hat{\ }\alpha_i$ 遍历$\mathbf{T}$的 $n-1$ 单根，因此所得的代表元系是.....的子集

$$\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le a_i - a_{i+1} \le q-2\ \forall i\}.$$

4.3.4. 我们用选定的考克斯特元素 $\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 标记支配室（相对于 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$），其中$W_{\widehat{\mathbf{L}}}$，例如

$$\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}} = (1, ..., n_1) \cdots (1, ..., n_r)$$

$\widehat{\ }$其中$\mathbf{L} = GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$。注意，通过将支配室取为 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-共轭，我们本可以得到 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的任意考克斯特元素。

4.3.5. 设

$$\rho = (n-1, n-2, ..., 1, 0) \in X_*(\widehat{\mathbf{T}}).$$

$\widehat{\ }$存在 W 在 X_***(极大环面)**上的通常点作用 $w \bullet \mu := w(\mu + \rho) - \rho$。

4.3.6. 定义。我们称权 $\mu \in X_*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 在 $X_*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中是一般的，如果其点轨道 $W(\widehat{\ }\mathbf{L}) \bullet \mu$完全包含于 $X_*(\widehat{\ }$**极大环面**$)^{\widehat{\mathbf{L}}}$。

$\widehat{\ }$当然，当 $W(\mathbf{L})$平凡时，该条件为空。这种情况恰好发生在$\mathbf{L}$ 的所有块$\widehat{\ }$具有不同大小时，参见4.3.1。下面，我们给出性质“一般的”的另一种刻画。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**4.3.7. 引理**。 $W(\mathbf{L})$ 在 X_*(**极大环面**) 上的点作用与 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$的作用交换。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。设 $\mathrm{L} = GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$。令 $w \in W(\mathrm{L}\ \star)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$且 $\mu \in X_*(\mathrm{T})$。则$\frown w \bullet \mu = w(\mu) + w(\rho) - \rho$. T 的余特征 $w(\rho) - \rho$，视为 Levi 子群$w\widehat{\ }\mathrm{L}w^{-1} = GL_{n_{w(1)}} \times \cdots \times GL_{n_{w(r)}}$ 中的环面，在该 Levi 子群的每个块上都是常值（取整数值）：它在块 $GL_{n_{w(i+1)}}$ 上的值，是 ρ 在位置$\frown n_1 + \cdots + n_i + 1$ 处的坐标与 ρ 在位置 $n_1 + \cdots + n_{w(i)} + 1$处的坐标之差。现在，若 $w \in W(\mathbf{L})$，则 $w\widehat{\ }\mathrm{L}w^{-1} = \widehat{\ }\mathrm{L}$，而上述观察表明， $w(\rho) - \rho$ 在 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$作用下保持不变。因此，对于给定的 $\nu \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}$，

$$w \bullet (\nu(\mu)) = w(\nu(\mu)) + w(\rho) - \rho = w(\nu(\mu)) + \nu(w(\rho) - \rho) = \nu(w(\mu) + w(\rho) - \rho) = \nu(w \bullet \mu).$$

□

4.3.8. W 在有限环面 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$上有一个点作用，其定义为

$$w \bullet t = w(t\rho(\zeta_{q-1}))\ \rho(\zeta_{q-1})^{-1}.$$

这使映射 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}$：$X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \to \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)$ 成为点等变映射。还请注意，对于简单反射 $s = s_\alpha$，有 $s \bullet t = s(t)\alpha_s^{-1}(\zeta_{q-1})$，因为 $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha_s$。

4.3.9. 引理。 子群 $W(\mathbf{L})$ 在 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ 上诱导的点作用与 $\widehat{\ }$ 的作用交换。特别地，$W(\mathbf{L})$ 的点作用可下降到商 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$.

证明。令 $w \in W(\mathbf{L})$ 和 $\nu \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}$，并取 $t \in \mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$。将 $t = \lambda(\zeta_{q-1})$ 写成某个 $\lambda \in X_*(\mathbf{T})$。上述引理推出等式 $w(\nu \bullet \lambda) = \nu \bullet w(\lambda)$。在 ζ_{q-1} 上求值，并利用求值同时保持自然作用和点作用，得到 $w(\nu \bullet t) = \nu \bullet w(t)$。 □

利用同构

$$[\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}} : X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$$

由上文可知，$W(\mathbf{L})$ 在 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 上的点作用，通过结构迁移诱导出$W(\widehat{\mathbf{L}})$ 在 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$上的作用。我们称之为 $W(\widehat{\mathbf{L}})$ 在 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 上的模点作用，并记为 $\bullet_{\mathrm{模}}$.

4.3.10. 引理。 设 $\lambda \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$。那么，当且仅当 λ 为一般的时，$\widehat{\ }W(\mathbf{L})$ 在 λ上的模点作用与 $W(\mathbf{L})$的通常点作用一致。

证明。若这两个作用一致，则

$$W(\widehat{\mathbf{L}}) \bullet \lambda = W(\widehat{\mathbf{L}}) \bullet_{\mathrm{mod}} \lambda \subset X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}},$$

且 λ 为一般的。反过来，设 λ 为一般的，且 $w \in W(\mathbf{L})$。设 $t = [\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}}\lambda$。则 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的两个元素 $w \bullet \lambda$ 和 $w \bullet_{\mathrm{mod}} \lambda$ 在 $[\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}}$下都映射到 $w \bullet t$。由于后一个映射在 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$上是单射，因此有 $w \bullet \lambda = w \bullet_{\mathrm{mod}} \lambda$。 □

4.3.11. 为便于后文讨论，我们将双射 $X_*(\widehat{\textbf{极大环面}})^{\widehat{\mathbf{L}}} \simeq \widehat{\textbf{极大环面}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 下与一般权对应的子集称为 $\widehat{\textbf{极大环面}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的**一般轨道子集**，并记为

$$(\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})_{\mathrm{gen}}.$$

4.3.12. 推论. $(\textbf{极大环面}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{\mathrm{gen}}$ 在$\textbf{极大环面}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中，且在$\widehat{\ }W(\mathbf{L})$的点作用下保持不变。

证明： 在与 $X_*(\widehat{\textbf{极大环面}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中一般权的对应关系下，$W(\widehat{\mathbf{L}})$ 的点作用变为我们所称的模点作用。由引理 4.3.10 可知，它因此与通常点作用一致，而稳定性则由一般权的定义得出，参见 4.3.6。□

为了说明我们对一般权的定义是有意义的，我们给出一个典范代表系 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的例子，其中一般权所占的比例在 p 趋于无穷时趋于 1。

4.3.13. 我们重新考察注 4.3.3 中出现的构造。令 $\eta_1, ..., \eta_n$ 由 $\eta_i(x) = \mathrm{diag}(1, ..., x, 1..., 1)$ 给出，其中 x 位于第 i 个位置，它们构成$\widehat{\ }X_*(\mathbf{T})$ 的一个典范 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-稳定基。暂时通过此基将 $X_*(\mathbf{T})$ 与 $\mathbb{Z}^n$ 识别。令 $I \subset \{1, ..., n-1\}$ 为标记属于 $\mathbf{L}$ 的 $\Delta(\mathbf{L})$ 的单根的指标子集，并构成子集

$$'X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}} := \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in \{0, ..., q-2\}\ \forall i \quad \text{and } a_{i+1} \le a_i\ \forall\, i \in I\}.$$

它在映射 $[\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}]_{\widehat{\mathbf{L}}}$. 下与 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 一一对应。在这一特定情形下，若对所有 $i \in I$ 都有 $n-1 \le a_i \le q-2-(n-1)$，我们称 $(a_1, ..., a_n)$ 在 $'X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中是 n-深的。显然，当 p 趋于无穷时，$'X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中 n-深的权所占比例趋于 1。

4.3.14. 引理。 任意 n-深的权 $\mu \in {}'X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 都是一般的。

证明。集合 ${}'X_*(\widehat{\text{极大环面}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 在 $W(\widehat{\mathbf{L}})$ 的自然作用下保持不变，因为该作用保持 $0 \leq a_{i+1} - a_i$ 的分块支配条件 $i \in I$（并且显然保持对所有 i 的条件$a_i \in \{0, ..., q-2\}$）。该作用也稳定 n-深权的子集，因为它对所有 $i \in I$ 都保持分块条件 $n-1 \leq a_i \leq q-2-(n-1)$。因此，若 $w \in W(\mathbf{L})$，则$w(\mu) \in {}'X_*(\widehat{\text{极大环面}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 仍然是 n-深的。正如我们在上文引理 4.3.7 的证明中所见，权 $w(\rho) - \rho$ 在 L 的每个块上都是常值。因此，将它加到 $w(\mu)$ 上仍然保持对 $i \in I$ 的支配条件 $0 \leq a_{i+1} - a_i$。此外，每个块上的常值都落在实区间 $[-(n-1)\ n-1]$ 内。因此，将 $w(\rho) - \rho$ 加到 n-深权 $w(\mu)$ 上，仍得到 ${}'X_*(\widehat{\text{极大环面}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的一个权，即 $w \bullet \mu = w(\mu) + w(\rho) - \rho \in {}'X_*(\widehat{\text{极大环面}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$。因此， μ 是一般的。 □

4.4 GL_n的 Vinberg 分层的 Galois 参数化

我们沿用上一小节中的假设，特别是 $\mathbf{G} = GL_n$。

4.4.1. 引理。假设存在一个映射 $N: X_*(T) \to T(\mathbb{F}_p)$，它关于 $X_*(T)$ 和 $T(\mathbb{F}_p)$ 上的自然 $W(L)$-作用是等变的。那么，映射 $N(\mu) := N(\mu + \rho)$ 关于 $X_*(T)$ 上 $W(L)$ 的点作用以及 $T(\mathbb{F}_p)$ 上 $W(L)$ 的自然作用也是等变的。

Pro 关于： $N((\nu \bullet \mu) + \rho) = N((\nu(\mu + \rho) - \rho) + \rho) = N(\nu(\mu + \rho)) = \nu N(\mu + \rho)$ 对于 $\nu \in W(\mathbf{L})$。 □

4.4.2. 命题。令$\mathbf{L} \in \mathcal{L}$。映射

$$X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{F}}_p), \mu \mapsto s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}, \mu+\rho}$$

i s 关于 $W(\mathbf{L})$ 在 $X_*(\mathbf{T})$ 上的点作用以及 $W(\mathbf{L})$ 在$\mathbf{T}(\mathbb{F}_p$上的自然作用是等变的).

证明：映射

$$X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \to \widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{F}}_p), \mu \mapsto s_{w,\mu}.$$

关于 $W(\mathbf{L})$在 $X_*(\mathbf{T})$上的自然 W作用以及$\mathbf{T}(\mathbb{F}_p)$是等变的。事实上，令 $\nu \in W(\mathbf{L})$和$w \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}$。于是

$$s_{w,\nu\mu} = N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}(\nu\mu)(\zeta_{p^t-1}) = \nu(N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}(\mu))(\zeta_{p^t-1}) = \nu s_{w,\mu},$$

这里我们利用了 ν 与 $w^{-1} \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 和 F_q交换，因此也与$N_{(F_q w^{-1})^t / F_q w^{-1}}$交换。由此，命题可由引理 4.4.1 得出。□

4.4.3. 推论。 令$\mathbf{L} \in \mathcal{L}$。映射 $X_*(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbb{F}_p)\mu \mapsto s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}, \mu+\rho}$ 诱导出一个典范映射（即与考克斯特元素$\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 在 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$中的选取无关）

$$\tau_{\widehat{\mathbf{L}}} : X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q, \mathrm{cox}},$$

它与 $W(\mathbf{L})$ 在 $X_*(\mathbf{T})$ 上的点作用等变，并与 $W(\mathbf{L})$ 在目标上的自然作用等变。

证明。 </*style*}元素 $,_{\mu+\rho}$ 在 $(\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q}$ 中定义了一个元素。根据 Jantzen 参数化（参见 4.2.1），它仅取决于 $\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-共轭类，即与 Coxeter 元素的具体选择无关。此外，由于 F_q 通过 $\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 作用于 $s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}, \mu+\rho}$（参见 7.2.2），它实际上在 $\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q, \mathrm{cox}}$ 中定义了一个元素。 □

4.4.4. 命题。 映射 $\tau_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 因式分解经过 $\mu \mapsto \mu(\zeta_{q^t-1})$，即得到一个映射

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_{q^t}) \to (\mathrm{Hom}(I_p^t, \widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q}.$$

证明： 令 $\mu\in X_*$**(极大环面)**。可以改写为

$$s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu}=\prod_{i=0,\dots,t-1}(F_q\,\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}^{-1})^i(\mu(\zeta_{q^t-1})),$$

这表明值 $\tau_{\widehat{\mathbf{L}}}(\mu)=s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu+\rho}=s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu}s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\rho}$ 仅依赖于 $\mu(\zeta_{q^t-1})\in$ **极大环面**。 □

我们有 $W(\mathbf{L})$ 在 $X_*($**极大环面**$)$ 上的点作用，以及 $W(\mathbf{L})$ 在 $\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}$ 上的自然作用。赋予乘积 $X_*($**极大环面**$)\times\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}$ 对角作用。于是下述命题由构造得出。

4.4.5. 命题。 设 $\mathbf{L}\in\mathcal{L}$。固定一个算术 *Frobenius* $\varphi\in\mathcal{G}_q$。该映射

$$\tau_{\widehat{\mathbf{L}}}\times\mathrm{id}:X_*(\widehat{\mathbf{T}})\times\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}\longrightarrow\mathrm{Hom}(I_p^t,\widehat{\mathbf{T}})/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{F_q,\mathrm{cox}}\times\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}=X_{\widehat{\mathbf{L}}}$$

是 $W(\mathbf{L})$-等变的。诱导映射 $X_*($**极大环面**$)\times\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}\to X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$ 在 $W(\mathbf{L})$-轨道上是常值的。

4.4.6. 我们可以将命题中的映射与单射 $h^{M,[\,],\varphi}_{\mathbf{L}}$：$X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}\hookrightarrow\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t,\mathbf{G})/\mathbf{G}$（见 4.4.13）复合。

4.4.7. 推论。 设 $\mathbf{L}\in\mathcal{L}$。固定一个算术 *Frobenius* $\varphi\in\mathcal{G}_q$。映射

$$X_*(\widehat{\mathbf{T}})\times\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t,\widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}},\ (\mu,z)\mapsto\rho_{\mu,z}$$

在源中的 $W(\mathbf{L})$-轨道上为常值。n 维伽罗瓦表示 $\rho_{\mu,z}$ 是半单的，当且仅当 $\tau_{\widehat{\mathbf{L}}}(\mu)$ 的 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-轨道是正则的，即其大小达到最大值，等于 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$ 的大小。

证明。关于半单性的最后一个断言由 3.4.4 得出，其余部分显然。 □

4.4.8. 我们来梳理一下推论中映射涉及的各种定义。设 $\mathbf{L}=GL_{n_1}\times\cdots\times GL_{n_r}$ 且 $\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}}=(1,\dots,n_1)\cdots(1,\dots,n_r)$。该映射将满足 $\mu\in X_*(\mathbf{T})$ 且 $z=(z_1,\dots,z_r)\in\mathbf{L}^{\mathrm{ab}}\simeq(\mathbb{G}_m)^r$（在每个块上取行列式）的二元组 (μ,z)，对应到温和伽罗瓦表示 $\rho_{\mu,z}$ 的同构类，其中 M 通过$s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu+\rho}$ 作用，而 φ 通过由下式给出的分块矩阵 $(s_1,\dots,s_r)\in\mathbf{L}$ 作用

$$s_i=\begin{pmatrix}&&0&1&&&\\&&&0&1&&\\&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&&0&1\\(-1)^{n_i+1}z_i&&&&&&0\end{pmatrix},$$

只要 $n_i\geq 2$。注意，此时确实有 $\det s_i=(-1)^{n_i+1}((-1)^{n_i+1}z_i)=z_i$。若 $n_i=1$，则 φ 当然通过由 z_i 给出的标量自同态作用。

4.4.9. 现在固定一个代表元系 $X_*(\mathbf{T})^{\widehat{\mathbf{L}}}$，它属于 $X_*($**极大环面**$)$，并用于表示 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$-轨道在 **极大环面**$(\mathbb{F}_q)$ 中的轨道，如上一节所述。于是，$X_*(\mathbf{T})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的一般权与一般轨道 **(极大环面**$(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})^{\mathrm{gen}}$ 点等变双射，参见 4.3.11 和 4.3.12。将上述推论中上述映射的权分量限制到 $X_*(\mathbf{T})^{\widehat{\mathbf{L}}}$ 中的一般权，便得到以下第二个推论。

4.4.10. 推论。 设 $\mathbf{L}\in\mathcal{L}$，并选取一个弗罗贝尼乌斯 $\varphi\in\mathcal{G}_q$。由此诱导的映射

$$(\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})_{\mathrm{gen}}\times\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}\longrightarrow X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$$

在 $W(\mathbf{L})$-轨道上为常值。

再次，可以将前面的映射与 4.4.13 中的单射 $h^{M,[\widehat{\ }]^{\varphi}}_{\mathbf{L}}\colon X_{[\widehat{\mathbf{L}}]} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}}$复合，从而得到一个映射

$$(\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})_{\mathrm{gen}} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}}, \quad (\bar{t}, z) \mapsto \rho_{\bar{t},z},$$

它在源中的 $W(\mathbf{L})$-轨道上为常值。它以如下意义与中心特征标和行列式（相差一个圆分移位）相容。对于 $z = (z_1, ..., z_r) \in \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} \simeq (\mathbb{G}_m)^r$，记 $\det z := z_1 \cdots z_r$。

4.4.11. 命题。设 $(\bar{t}, z) \in (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})_{\mathrm{gen}} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$。那么

$$\det \rho_{\bar{t},z}(M) = (\det \bar{t}) \cdot \zeta_{q-1}^{1+2+...+n-1} \quad and \quad \det \rho_{\bar{t},z}(\varphi) = \det z.$$

证明： </style>我们可以假设 $\mathbf{L} = GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$，并且

$$\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}} = (1, ..., n_1) \cdots (1, ..., n_r) \in W_{\widehat{\mathbf{L}}}.$$

假设 $\bar{t}$ 对应于一般权 $\mu \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$，即 $\mu(\zeta_{q-1}) = t$ 模 $W_{\widehat{\mathbf{L}}}$。那么$\rho_{\bar{t},z}$将 M映射到 $s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu+\rho}$ 并将 φ 映射到分块矩阵 $(s_1, ..., s_r) \in \mathbf{L}$，如 4.4.8 中所述。根据例 4.2.5,

$$\det s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu+\rho} = \det s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\mu} \cdot \det s_{\mathrm{cox}_{\widehat{\mathbf{L}}},\rho} = \det \mu(\zeta_{q-1}) \cdot \det \rho(\zeta_{q-1}) = (\det t) \cdot \zeta_{q-1}^{1+2+...+n-1}.$$

此外，$\det(s_1, ..., s_r) = \prod_i \det s_i = \prod_i z_i = \det z$.

□

4.4.12. 注。根据构造，除了选择 M 和 φ之外，推论 4.4.10 中的映射先验上还取决于为 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$中的轨道选取代表元系 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\widehat{\mathbf{L}}}$。鉴于前面的命题，我们不禁要问，这个映射是否实际上与后一选择无关，即仅取决于集合 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}}$。目前我们尚不知道答案（但对于 GL_2, 参见 4.5.6）。

4.4.13. 回顾 2.6.3 中的分层

$$S_{\widehat{\mathbf{L}}} = (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q) \times W.\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}})/W = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$$

它对应于 Satake 方案 $S = V_{(1)}\widehat{\ }_{\mathbf{T}} \subset \widehat{\ }_{\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}/W$ 的分层中的 $\widehat{\mathbf{L}}$。它带有其对角 $\widehat{\ }W(\mathbf{L})$-作用，其中 $W(\mathbf{L})$ 通过点作用作用于第一个因子。我们记

$$S_{\widehat{\mathbf{L}},\mathrm{gen}} := (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})_{\mathrm{gen}} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}}$$

其一般的部分，即由一般轨道标记的部分。它是 $W(\mathbf{L})$-稳定的。于是，推论4.4.10中的映射可视为一个 $W(\mathbf{L})$-不变的 $\mathbb{F}_q$-概形态射

$$S_{\widehat{\mathbf{L}},\mathrm{gen}} \longrightarrow X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}.$$

考虑到包含 $X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{F}_p}))/\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_p)$，这可视为分层 $\overline{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}$一般部分的伽罗瓦参数化。

4.5 GL_2的情形

假设 $\mathbf{G} = GL_2$。本节旨在证明，4.4.10 中出现的 $W(\mathbf{L})$-不变态射$S_{\widehat{\mathbf{L}},\ \mathrm{gen}} \to X_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$ 等于 $\mathbb{F}_q$-态射 L 在类型为 $\mathbf{L}$ 的分层上的限制；该态射来自 [PS25，第 6] 节，在情形 $F := \mathbb{Q}_q$下。特别地，商上的映射给出一个同构

$$X_{\widehat{\mathbf{L}}}/W(\widehat{\mathbf{L}}) \simeq X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\mathbf{L}}]}$$

在此情形下。回顾 4.4.13 中的包含 $X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\ }]\,\mathbf{L}}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{H\bar{o}m}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\ }\mathbf{G}(\mathbb{F}_p))/\widehat{\ }\mathbf{G}(\mathbb{F}_p)$。根据 3.4.4 中的情形 $n=2$，这给出双射

$$X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\mathbf{G}}]}(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\sim} \{\text{irreducible } \mathcal{G}_q\text{-representations of dimension } 2\}/\simeq$$

and

$$X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\mathbf{T}}]}(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\sim} \{\text{reducible semisimple } \mathcal{G}_q\text{-representations of dimension } 2\}/\simeq .$$

然而，在 GL_2 情形下，情况远不止于此：如 [PS25], 所示，分层空间 $X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\ }\,\mathbf{T}]} \cup X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\ }]\,\mathbf{G}}$ 在固定行列式后具有射影曲线的结构，即由有限条射影直线构成的链，其横截交点本质上对应于 $X^{\mathrm{reg}}_{[\widehat{\ }]\,\mathbf{G}}$ 中的点。

4.5.1. 回顾典范同构 $I_p^t \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathbb{F}_{p^i}^\times$，参见 3.1.2。设对所有 i

$$\omega_i : I_p^t \longrightarrow \mathbb{F}_{p^i}^\times$$

表示上述同构中到第 i 个分量的投影。由于 $n=2$，以下我们只需要两个特征 ω_{2f}, ω_f。这里，$q=p^f$ 带有某个 $f \geq 1$。与之前一样，我们固定一个提升弗罗贝尼乌斯 $x \mapsto x^q$ 的元素 $\varphi \in \mathcal{G}_q$。我们可以假设 $\omega_f(\varphi) = 1$。

4.5.2. 回顾 [PS25, 2.5]，对于任意 $h \geq 0$，存在一个 $\mathcal{G}_q$-表示 $\mathrm{ind}(\omega_{2f}^h)$，它由以下两个条件唯一确定

$$\det \mathrm{ind}(\omega_{2f}^h) = \omega_f^h \quad \text{and} \quad \mathrm{ind}(\omega_{2f}^h)|_{I_p} = \omega_{2f}^h \oplus \omega_{2f}^{qh}.$$

记 $z \in \mathbb{F}_p^\times$ 的 $\mathrm{unr}(z)$ 为将 φ^{-1} 映至 z 的 $\mathcal{G}_q$ 的非分歧特征。

4.5.3. 我们通过典范基 η_1, η_2，将 $X_*(\widehat{\ }\textbf{极大环面}) = \mathbb{Z}^2$ 视为同一对象，参见 4.3.3。令

$$X_*(\widehat{\mathbf{T}})_{q-\mathrm{reg}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq a_1 - a_2 < q-1\}.$$

$X_*(\widehat{\ }\textbf{极大环面})^0 := \mathbb{Z}(1,1)$ 群作用于此集合，而 $X_*(\widehat{\ }\textbf{极大环面})_{q-\mathrm{reg}}$ 对 $(q-1)X_*(\widehat{\ }\textbf{极大环面})^0$ 的作用取商后，经在 ζ_{q-1} 处求值，与 $\widehat{\ }\textbf{极大环面}(\mathbb{F}_q)$ 构成双射。此后我们将这两个集合视为相同。令 $\hat{\alpha} = (1,-1)$ 和 $i = 0, ..., \frac{q-1}{2}$。那么

$$i\hat{\alpha} = (i,-i) \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})_{q-\mathrm{reg}} \text{ and } (q-1-i, i) \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})_{q-\mathrm{reg}}$$

对于 $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$。

4.5.4. 设 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$。于是我们有映射

$$(\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W_{\widehat{\mathbf{L}}})_{\mathrm{gen}} \times \widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}}$$

来自 4.4.10。根据 4.4.11，我们可以固定行列式

$$\det \bar{t} = \zeta_{q-1}^n \text{ and } \det z$$

满足 $(\zeta_{q-1}^n, \det z) \in \mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{G}_m$。只需考虑两种情况，$\mathbf{L} = \mathbf{G}$ 和 $\mathbf{L} = \widehat{\ }\mathbf{T}$。

设 $\mathbf{L} = \mathbf{G}$。那么 $W_{\widehat{\mathbf{L}}} = W$ 和 $W(\mathbf{L}) = 1$，且“一般的”条件是空的。此外 $\widehat{\ }\mathbf{L}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{G}_m$ 通过行列式，而 $\det z$ 就是 z (只有一个块)。我们将看到该映射

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)/W \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}}$$

事实上，它与 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ 中 W-轨道的代表元系的选择无关，参见注 4.4.12 中的讨论。需要考虑两种情况：n 偶数和 n 奇数。

4.5.5. 设 n 为偶数。记 w 为 W的生成元。我们有$\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$中的 W-轨道序列

$$t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s),\ \ t_i^w \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s)$$

其中，对于 $i = 0, \ldots, \frac{q-1}{2}$，有 $n = 2s$ 和 $t_i := \mathrm{diag}(\zeta^i, \zeta^{-i})$（以及 t_i^w其 w-共轭）。

回顾一下，对于 $i < \frac{q-1}{2}$，$\hat{i\alpha} \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})_{q-\mathrm{reg}}$，并且显然 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}(\hat{i\alpha}) = t_i$ 以及

$$\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}(i\hat{\alpha} + (s, s)) = t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s).$$

有

$$i\hat{\alpha} + \rho = i(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1 = 2i\eta_1 + \eta_1 - i\eta_1 - i\eta_2 = (2i+1)\eta_1 - i(\eta_1 + \eta_2).$$

Now

$$N_{(F_q w)^2/F_q w}((2i+1)\eta_1)(\zeta_{q^2-1}) = \begin{pmatrix} \zeta_{q^2-1}^{2i+1} & 0 \\ 0 & \zeta_{q^2-1}^{(2i+1)q} \end{pmatrix}$$

$$N_{(F_q w)^2/F_q w}(i(\eta_1 + \eta_2))(\zeta_{q^2-1}) = \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{i} & 0 \\ 0 & \zeta_{q-1}^{i} \end{pmatrix},$$

在第二个等式中使用了 $\zeta_{q^2-1}^{1+q} = \zeta_{q-1}$。总而言之，

$$s_{w, i\hat{\alpha}+\rho} = N_{(F_q w)^2/F_q w}(i\hat{\alpha} + \rho)(\zeta_{q^2-1}) = \begin{pmatrix} \zeta_{q^2-1}^{2i+1} & 0 \\ 0 & \zeta_{q^2-1}^{(2i+1)q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{-i} & 0 \\ 0 & \zeta_{q-1}^{-i} \end{pmatrix}.$$

更一般地，

$$s_{w, (i\hat{\alpha}+(s,s))+\rho} = \begin{pmatrix} \zeta_{q^2-1}^{2i+1} & 0 \\ 0 & \zeta_{q^2-1}^{(2i+1)q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{-(i+s)} & 0 \\ 0 & \zeta_{q-1}^{-(i+s)} \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\rho_{t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s), z^2} = \mathrm{ind}(\omega_{2f}^{2i+1}) \otimes \omega_f^{-(i+s)} \otimes \mathrm{unr}(z),$$

作为 $\mathcal{G}_q$-表示，参见 [PS25, 2.1][3]。例如，若 $z = 1$ 且 $n = s = 0$（即 [PS25, 4.5.2] 中所谓的基本偶情形），则这相当于

$$\rho_{t_i, 1} = \mathrm{ind}(\omega_{2f}^{r+1}) \otimes \omega_f^{s(r)}$$

其中 $r := 2i$ 且 $s(r) := -\frac{r}{2}\sigma$ 这是与曲线 $X_{d_0}|_{\mathrm{pr}_2=1}$ 的第 r 个不可约分支 $\mathcal{C}^r$ 的原点相对应的不可约二维伽罗瓦表示，采用 [PS25, 4.5.2] 中的记号。

4.5.6. 本段中，关于上文的注 4.4.12，我们在上述情形下具体验证，伽罗瓦表示的同构类与所选取的 $\widehat{\ }$ 代表元（来自 t_i 的 W-轨道）无关。回顾 $(q-1-i, i) \in X_*(\mathbf{T})_{q-\mathrm{reg}}$ 对于 $i > 0$，显然 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}((q-1-i, i)) = t_i^w$。有

$$(q-1-i, i) + \rho = (q-i)\eta_1 + i\eta_2 = ((q-2i)\eta_1 + i(\eta_1 + \eta_2)$$

而这等于

$$(q-2i)\eta_1 + (2i-1-(i-1))(\eta_1 + \eta_2) = (q-r)\eta_1 + r - 1 + s(r-2),$$

其中 $r := 2i$ 且 $s(r) = -\frac{r}{2}$ 如上所述。我们以与上文相同的方式由此得到，

$$\rho_{t_i^w, 1} = \mathrm{ind}(\omega_{2f}^{q-r}) \otimes \omega_f^{s(r-2)+r-1}.$$

最后需要指出，伽罗瓦表示之间确实存在一个同构

$$\mathrm{ind}(\omega_{2f}^{r+1}) \otimes \omega_f^{s(r)} \simeq \mathrm{ind}(\omega_{2f}^{q-r}) \otimes \omega_f^{s(r-2)+r-1},$$

例如 [PS25, 4.5.2]。

[3]在 [PS25],中，参数 z 称为 z_2。

4.5.7. 我们转而讨论 n 奇数的情形。我们有 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ 中的 W-轨道序列

$$t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s),\ \ t_i^w \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s)$$

其中 $n = 2s-1$ 和 $t_i := \mathrm{diag}(\zeta^{i-1+\frac{q-1}{2}}, \zeta^{-i+\frac{q-1}{2}})$（而 t_i^w 是其 w-共轭），其中 $i = 1, \ldots, \frac{q-1}{2}$。有 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}(i\hat{\alpha} - \rho + (s,\ s)) = t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s,\ \zeta^s)$，并且

$$(i\hat{\alpha} - \rho) + \rho = i(\eta_1 - \eta_2) = 2i\eta_1 - i\eta_1 - i\eta_2 = (2i)\eta_1 - i(\eta_1 + \eta_2).$$

完全类似于上述过程，我们得到作为 $\mathcal{G}_q$-表示的

$$\rho_{t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s), z^2} = \mathrm{ind}(\omega_{2f}^{2i}) \otimes \omega_f^{-(i+s)} \otimes \mathrm{unr}(z).$$

For 例如，若 $z = 1$ 和 $n = q-2$（即 [PS25, 4.5.5] 所谓的基本奇数情形），这相当于 to

$$\rho_{t_i, 1} = \mathrm{ind}(\omega_{2f}^{r+1}) \otimes \omega_f^{s(r)}$$

其中 $r := 2i-1$ 且 $s(r) := -\frac{r+1}{2}$。这是与曲线 $X_{d_{q-2}}|_{\mathrm{pr}_2=1}$ 的第 r 个不可约分支的原点相关联的不可约二维伽罗瓦表示，采用 [PS25, 4.5.5] 中的记号。同样，可以验证 $\rho_{t_i^w,\ 1}$ 同构于 $\rho_{t_i,\ 1}$。

设 $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{T}}$。那么 $W_{\widehat{\mathbf{L}}} = 1$ 和 $W(\widehat{\mathbf{L}}) = W$。此外，$\widehat{\mathbf{L}}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{T}}$。如上所述，我们将 $X_*(\widehat{\mathbf{T}})_{q-\mathrm{reg}} \bmod (q-1) X_*(\widehat{\mathbf{T}})^0$ 与 $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)$ 识别。该映射变为

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{gen}} \times \widehat{\mathbf{T}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t, \widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}}$$

并且对于源空间上的对角 W-作用（以及第一因子 $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)$ 上的点作用），它是 W-不变的。我们将看到，事实上这在整个集合 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ 上成立。同样，需要考虑两种情况：n 偶数和 n奇数。

4.5.8. 设 n 为偶数。我们有 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ 中的元素序列

$$t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s),\ \ t_i^w \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s)$$

其中 $n = 2s$ 和 $t_i := \mathrm{diag}(\zeta^i, \zeta^{-i})$（以及 t_i^w 它的 w-共轭），其中 $i = 0, \ldots, \frac{q-1}{2}$。

4.5.9. 我们首先处理特征 t_i。回顾 $i\hat{\alpha} \in X_*(\widehat{\mathbf{T}})_{q-\mathrm{reg}}$ 对于 $i < \frac{q-1}{2}$ 以及 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}(i\hat{\alpha}) = t_i$ 以及

$$\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}(i\hat{\alpha} + (s,s)) = t_i \cdot \mathrm{diag}(\zeta^s, \zeta^s).$$

我们有

$$i\hat{\alpha} + \rho = i(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1 = 2i\eta_1 + \eta_1 - i\eta_1 - i\eta_2 = (2i+1)\eta_1 - i(\eta_1 + \eta_2).$$

Now

$$N_{(F_q 1)^1/F_q 1}((2i+1)\eta_1)(\zeta_{q-1}) = \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{2i+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_{(F_q 1)^1/F_q 1}(i(\eta_1 + \eta_2))(\zeta_{q-1}) = \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{i} & 0 \\ 0 & \zeta_{q-1}^{i} \end{pmatrix}.$$

综上所述，

$$s_{1, i\hat{\alpha}+\rho} = N_{(F_q 1)^1/F_q 1}(i\hat{\alpha} + \rho)(\zeta_{q-1}) = \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{2i+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{-i} & 0 \\ 0 & \zeta_{q-1}^{-i} \end{pmatrix}.$$

更一般地，

$$s_{1, (i\hat{\alpha}+(s,s))+\rho} = \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{2i+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{q-1}^{-(i+s)} & 0 \\ 0 & \zeta_{q-1}^{-(i+s)} \end{pmatrix}.$$

由 $z=(z_1,z_2)\in$ **极大环面** 可知，作为温和的 $\mathcal{G}_q$-表示

$$\rho_{t_i\cdot\mathrm{diag}(\zeta^s,\zeta^s),z}=\begin{pmatrix}\mathrm{unr}(z_1)\omega_f^{2i+1} & 0\\ 0 & \mathrm{unr}(z_2)\end{pmatrix}\otimes\omega_f^{-(i+s)}$$

用附录或 [PS25, 2.1] 的语言来说。例如，若 $z=1$ 且 $n=s=0$ （即 [PS25, 4.5.2] 中所谓的基本偶情形），这相当于

$$\rho_{t_i,1}=\begin{pmatrix}\mathrm{unr}(x)\omega_f^{r+1} & 0\\ 0 & \mathrm{unr}(x^{-1})\end{pmatrix}\otimes\omega_f^{s(r)}$$

其中 $r:=2i$ 且 $s(r):=-\frac{r}{2}$。这是与曲线 $X_{d_0}|_{\mathrm{pr}_2=1}$ 上第 r 个不可约分支 $\mathcal{C}^r$ 上的点 $[x:1]\in\mathbb{P}^1\setminus\{0,\infty\}=\mathcal{C}^r\setminus\{0,\infty\}$ 相关联的半单可约二维伽罗瓦表示，记号沿用 [PS25, 4.5.2]。这里，x 是原点$0\in\mathcal{C}^r$ 附近的一个仿射坐标。

4.5.10. 现在我们来处理特征 t_i^w。回顾，$(q-1-i,i)\in X_*(\mathbf{T})^{q-\mathrm{reg}}$ 对于 $i>0$，且 $\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}((q-1-i,i))=t_i^w$，以及

$$\mathrm{ev}_{\zeta_{q-1}}((q-1-i,i)+(s,s))=t_i^w\cdot\mathrm{diag}(\zeta^s,\zeta^s).$$

为验证下一步中的 W-不变性，看来在此考察情形 $i+1$ 较为实际。利用 $i+1$ 进行 4.5.6 中的计算可得

$$(q-1-(i+1),i+1)+\rho=(q-r-2)\eta_1+r+1+s(r),$$

与通常一样，取 $r=2i$ 和 $s(r)=\frac{r}{2}$。例如，在基本偶情形 $z=1$ 和 $n=s=0$ 下可得

$$\rho_{t_{i+1}^w,1}=\begin{pmatrix}\mathrm{unr}(y)\omega_f^{q-r-2} & 0\\ 0 & \mathrm{unr}(y^{-1})\end{pmatrix}\otimes\omega_f^{s(r)+r+1}$$

按照 [PS25, 4.5.2] 中的记号，这是曲线 $X_{d_0}|_{\mathrm{pr}_2=1}$ 的第 r 个不可约分支 $\mathcal{C}^r$ 上一点 $[1:y]\in\mathbb{P}^1\setminus\{0,\infty\}=\mathcal{C}^r\setminus\{0,\infty\}$ 所对应的半单可约二维伽罗瓦表示。这里，y 是 $\infty\in\mathcal{C}^r$ 附近的一个仿射坐标。

4.5.11. 我们检验映射的 W-不变性

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)\times\widehat{\mathbf{T}}\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_q^t,\widehat{\mathbf{G}})/\widehat{\mathbf{G}}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$关于源空间 $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)\times\mathbf{T}$ 上 W 的对角作用。根据 4.3.8，W 在有限环面 $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_q)$ 上的模点作用由 $w\bullet t=w(t)\widehat{\ }\alpha^{-1}(\zeta)$ 给出。特别地，

$$w\bullet t_i=w\bullet\mathrm{diag}(\zeta^i,\zeta^{-i})=\mathrm{diag}(\zeta^{-i},\zeta^i)(\zeta^{-1},\zeta)=t_{i+1}^w.$$

更一般地，

$$w\bullet(t_i\cdot\mathrm{diag}(\zeta^s,\zeta^s))=t_{i+1}^w\cdot\mathrm{diag}(\zeta^s,\zeta^s).$$

$\widehat{\ }$考虑第二个因子 $\mathbf{T}$ 上的 W-作用（该作用置换 $\mathbf{T}$ 上的两个坐标$\widehat{\ }(z_1,\ z_2)$），W-不变性等价于伽罗瓦表示之间存在同构

$$\rho_{t_i\cdot\mathrm{diag}(\zeta^s,\zeta^s),z}\simeq\rho_{t_{i+1}^w\cdot\mathrm{diag}(\zeta^s,\zeta^s),z^w}.$$

根据我们上面对两边的计算，这归结为伽罗瓦表示之间存在同构

$$\begin{pmatrix}\mathrm{unr}(x)\omega_f^{r+1} & 0\\ 0 & \mathrm{unr}(x^{-1})\end{pmatrix}\otimes\omega_f^{s(r)}\simeq\begin{pmatrix}\mathrm{unr}(y)\omega_f^{q-2-r} & 0\\ 0 & \mathrm{unr}(y^{-1})\end{pmatrix}\otimes\omega_f^{s(r)+r+1}$$

相对于识别 $x=\frac{1}{y}$。但这是众所周知的，例如 [PS25, 4.5.2]。

4.5.12. 奇数 n 的情形完全类似，因此我们省略细节。

5 应用于 pro-p-Iwahori 赫克代数

我们沿用所有记号。此外，令$\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$ 分别为与$\widehat{\ }\quad\ \widehat{\ }\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$对偶的连通约化群。我们将$(\mathbf{G}, \mathbf{T})$的 Weyl 群与 W等同。关于 p-进约化群的（pro-p-）Iwahori 赫克代数，我们参考 Vign´eras 的著作 [V16]。

5.1 pro-p-Iwahori 赫克代数

设 $F/\mathbb{Q}_p$ 为剩余域为 $\mathbb{F}_q = o_F/m_F$ 的有限扩张。设 $\mathbf{N}$ 为 $\mathbf{G}$ 中 $\mathbf{T}$ 的正规化子，并令 $W_{(1)} := \mathbf{N}(F)/\mathbf{T}(1 + m_F)$ 以及 $\widetilde{W} := \mathbf{N}(F)/\mathbf{T}(o_F)$。这些群适合于如下短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow W^{(1)} \longrightarrow \widetilde{W} \longrightarrow 1$$

其中 $\mathbb{T} = \mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$。对于任意子集 $S \subset \widetilde{W}$，记 $S^{(1)}$ 为其在 $W^{(1)}$ 中的原像。设 $S_{\mathrm{aff}} \subset \widetilde{W}$ 为简单仿射根的一个子集。对于任意 $s \in S_{\mathrm{aff}}$，记 $h_s \in X_*(\mathbf{T})$ 为相应的余特征，并将 $\mathbb{T}_s := h_s(\mathbb{F}_q^\times) \subset \mathbb{T}$ 记作相应的有限环面。若 $s \in S^{(1)}{}_{\mathrm{aff}}$，则记 $\mathbb{T}_s\widetilde{\ }$ 为与 s 的像相关联的有限环面。记 ℓ 为从 W 拉回到 $W^{(1)}$ 上的长度函数。令 $\mathbf{q}$ 为一个不定元。

5.1.1. 定义。 pro-p-Iwahori 赫克代数 是 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数 $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$，由生成元定义

$$\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q}) := \bigoplus_{w \in W^{(1)}} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]T_w$$

以及关系：

- 辫关系

$$T_w T_{w'} = T_{ww'} \quad \textit{for } w, w' \in W^{(1)} \textit{ if } \ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$$

- 二次关系

$$T_s^2 = \mathbf{q}T_{s^2} + c_s T_s \quad \textit{if } s \in S^{(1)}_{\mathrm{aff}},$$

其中

$$c_s := \sum_{t \in \mathbb{T}_s} T_t.$$

$\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-基$(T_w)_{w \in W^{(1)}}$ 称为伊wahori–松本基。

5.2 伯恩斯坦基

5.2.1. 引理。 设 $w_1,\ w_2 \in W^{(1)}$。则：

$$\ell(w_1) + \ell(w_2) - \ell(w_1 w_2) \in 2\mathbb{N}$$

$$\frac{\ell(w_1) + \ell(w_2) - \ell(w_1 w_2)}{2} \leq \ell(w_1)$$

$$\frac{\ell(w_1) + \ell(w_2) - \ell(w_1 w_2)}{2} \leq \ell(w_2).$$

证明。这些事实是 [V16，第 4.4] 节的特例。也可以利用长度函数的经典性质直接证明。 □

5.2.2. 与同上一致，我们设

$$\mathbf{q}_{w_1,w_2} := \mathbf{q}^{\frac{\ell(w_1)+\ell(w_2)-\ell(w_1 w_2)}{2}} \quad \in \mathbf{q}^{\mathbb{N}}.$$

此外，我们定义

$$\mathbf{d}_{w_1,w_2} := \mathbf{q}^{\ell(w_1) - \frac{\ell(w_1)+\ell(w_2)-\ell(w_1 w_2)}{2}} \quad \in \mathbf{q}^{\mathbb{N}}$$

and

$$\mathbf{c}_{w_1,w_2} := \mathbf{q}^{\ell(w_2)-\frac{\ell(w_1)+\ell(w_2)-\ell(w_1w_2)}{2}} \quad \in \mathbf{q}^{\mathbb{N}}.$$

再定义 $\mathbf{q}_w := \mathbf{q}^{\ell(w)}$。于是，在 $\mathbf{q}^{\mathbb{N}}$ 中有以下恒等式：

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{w_1}\mathbf{q}_{w_2} &= \mathbf{q}_{w_1w_2}\mathbf{q}_{w_1,w_2}^2 \\ \mathbf{q}_{w_1} &= \mathbf{q}_{w_1,w_2}\mathbf{d}_{w_1,w_2} \\ \mathbf{q}_{w_2} &= \mathbf{q}_{w_1,w_2}\mathbf{c}_{w_1,w_2}. \end{aligned}$$

5.2.3. 定理。（Vign´eras）存在一组基$(E(w))_{w\in W^{(1)}}$，它是 $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$ $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ 上的基（与反支配定向相对应），

$$\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q}) = \bigoplus_{w\in W^{(1)}} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]E(w)$$

满足乘积公式

$$E(e^\nu)E(w) = \mathbf{q}_{\nu,w}E(e^\nu w) \quad for\ \nu \in X_*(\mathbf{T})^{(1)}\ and\ w \in W^{(1)}.$$

称其为伯恩斯坦基。

证明。这是 [V16, 5.25-5.26] 的一个特例。更确切地说，Vign´eras 将一组壁室行走基 $(E_o(w))_{w\in W^{(1)}}$ 与任意定向 o相关联，使得 $E_o(w) = T_w$ if $w \in \Omega^{(1)}$，并且满足乘积公式。 □

对于 $\nu \in X_*$**(极大环面)**$^{(1)}$，我们也简记 $E(\nu)$ 为 $E(e^\nu)$。特别地，代数 $\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$ 包含以下子代数，而且它还是交换的：

5.2.4. 定义。我们称子-$\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数

$$\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{q}) := \bigoplus_{\nu\in X_*(\mathbf{T})^{(1)}} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]E(\nu) \subset \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})$$

Vignera 子代数。

5.3 Iwahori 赫克代数

这是群 $\widetilde{W}$ 相对于 $W^{(1)}$ 的对应物。

5.3.1. 定义。*Iwahori* 赫克代数是由生成元定义的 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数 $\mathcal{H}(\mathbf{q})$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}) := \bigoplus_{w\in\widetilde{W}} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]T_w$$

以及关系：

- 辫关系

$$T_wT_{w'} = T_{ww'} \quad for\ w, w' \in \widetilde{W}\ if\ \ell(w)+\ell(w') = \ell(ww')$$

- 二次关系

$$T_s^2 = \mathbf{q} + (\mathbf{q}-1)T_s \quad if\ s \in S_{\mathrm{aff}}.$$

$\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-基$(T_w)_{w\in\widetilde{W}}$ 称为伊wahori–松本基。

以下是 5.2.3 针对 Iwahori 赫克代数的类似结果。

5.3.2. 定理。（Vign´eras） *Iwahori* 赫克代数具有一个伯恩斯坦基

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}) = \bigoplus_{w\in\widetilde{W}} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]E(w)$$

$\widetilde{\ }$具有如下性质：对于$(\nu, w) \in X_*(\mathbf{T}) \times W$，存在乘积公式

$$E(e^\nu)E(w) = \mathbf{q}_{\nu,w}E(e^\nu w)\ ;$$

特别地

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) := \bigoplus_{\nu\in X_*(\mathbf{T})} \mathbb{Z}[\mathbf{q}]E(\nu)$$

是一个交换的子-$\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数。

5.3.3. 注。 正合列

$$1 \to \mathbf{T}(\mathbb{F}_q) \to X_*^{(1)}(\mathbf{T}) \to X_*(\mathbf{T}) \to 1$$

是分裂的：格 $X_*(\mathbf{T})$与自由群$\mathbf{T}(F)/\mathbf{T}(o_F)$典范地同构，并且可以通过在 o_F中选取一个一致化子，将后者嵌入$\mathbf{T}(F)$。我们固定一个分裂，因此将 $X_*(\mathbf{T})$视为 $X_*^{(1)}(\mathbf{T})$的子群。注意，以上乘积公式蕴含$E(t\nu) = E(t)E(\nu)$，对于 $t \in \mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ $\nu \in X_*(\mathbf{T})$成立，因为在此情形下$\mathbf{q}^{t,\nu} = 1$ 。由此可得，乘法映射

$$\mathbb{Z}[\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(\mathbf{q}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{q}),\ \ E(t) \otimes E(\nu) \mapsto E(t)E(\nu)$$

是一个环同构。

5.4 一般的伯恩斯坦同构

5.4.1. 回顾 $\mathcal{H}(\mathbf{q})$的 Vign´eras 子-$\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数 $\mathcal{A}(\mathbf{q})$，参见 5.3.2。在对偶侧，回顾 Zhu 幺半群 $V_{\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}$的“环面部分”$V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}$，它通过 $d\rho_{\mathrm{ad}}$ 映射到 $\mathbb{A}_1 =$谱$(\mathbb{Z}[\mathbf{q}])$，参见 2.2.2。

$\widehat{\ }$**5.4.2. 定理。** 在恒等映射 $X_*($**极大环面**$) = X^*($**极大环面**$)$ 上，$\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-线性映射

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\mathbf{q}) : \mathcal{A}(\mathbf{q}) &\longrightarrow \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}]\\ E(\nu) &\longmapsto (e_1^\nu \otimes e_2^{-\nu_-})|_{\rho_{\mathrm{ad}}}\end{aligned}$$

是 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-代数的同构。

证明。 $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ 中的乘积公式为 $E(\nu)E(\nu') = \mathbf{q}_{\nu,\nu'}E(\nu+\nu')$，其中

$$\mathbf{q}_{\nu,\nu'} = \mathbf{q}^{\frac{\ell(\nu)+\ell(\nu')-\ell(\nu+\nu')}{2}}.$$

因此该结果直接由 2.3.7 得出。 □

$\widehat{\ }$这推广了 [PS23，定理 6.1.1]，，即情形$\mathbf{G} = GL_2$。

5.4.3. 命题 伯恩斯坦同构 $\mathscr{B}(\mathbf{q})$ 是 W-等变的。特别地，它诱导一个同构

$$\mathscr{B}(\mathbf{q})^W : \mathcal{A}(\mathbf{q})^W \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},\rho_{\mathrm{ad}}}]^W.$$

$\widehat{\ }$证明。 事实上，根据 W 在 $V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}}}$ 2.4.1 中作用的定义，并且由于 $\nu_- \in X^*($**极大环面**$)_-$ 仅取决于 $\nu \in X^*($**极大环面**$)$ 的 W-轨道，我们有

$$\forall w \in W,\quad w(e_1^\nu \otimes e_2^{-\nu_-}) = e_1^{w(\nu)} \otimes e_2^{-\nu_-} = e_1^{w(\nu)} \otimes e_2^{-w(\nu)_-}.$$

□

5.5 在 $\mathbf{q}=0$ 处的伯恩斯坦同构

在 $\mathbf{q}=0$ 处，伯恩斯坦同构 5.4.2 表示为：

5.5.1. 推论。 在恒等映射 X_*(**极大环面**) $= X^*$(**极大环面**)上， $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$-线性映射

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(0):\mathcal{A}(0) &\longrightarrow \mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]\\ E(\nu) &\longmapsto (e_1^{\nu}\otimes e_2^{-\nu_-})|_0\end{aligned}$$

是 $\mathbb{Z}$-代数的同构。它是 W-等变的。

因此，正如我们在 2.3.7 中已经做过的那样，我们令

$$\forall \nu\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}),\quad E(\nu):=(e_1^{\nu}\otimes e_2^{-\nu_-})|_0\in\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}].$$

回顾，量 $\mathbf{q}_{\nu,\nu'}=\mathbf{q}^{\frac{\ell(\nu)+\ell(\nu')}{2}-\ell(\nu+\nu')}$ 在~~存在~~ ~~Weyl~~房 $\mathfrak{C}$使得 ν 与 ν' 属于闭包 $\overline{\mathfrak{C}}$时等于 1，否则可被 $\mathbf{q}$ 整除。因此

$$\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0}]=\bigoplus_{\nu\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})}\mathbb{Z}E(\nu)$$

并带有乘积公式

$$\forall\nu,\nu'\in X^*(\widehat{\mathbf{T}}),\quad E(\nu)E(\nu')=\begin{cases}E(\nu+\nu') & \text{if } \exists\mathfrak{C}:\nu,\nu'\in X^*(\widehat{\mathbf{T}})\cap\overline{\mathfrak{C}}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

5.6 当 $\mathbf{q}=q=0\in\mathbb{F}_q$ 时的增广伯恩斯坦同构

5.6.1. 我们的固定生成元 ζ_{q-1} of $\mathbb{F}_q^\times$，给出一个同构 $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\simeq\mathbb{F}_q^\times$。这诱导出一个环同构，将$\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$上的函数环 $\mathbb{F}_q[(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^r]$ 与有限环面$\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$的群环$\mathbb{F}_q[\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)]$ 联系起来。这对应于常值概形$\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$与 $\mathbb{T}^\vee:=$ 谱 $\mathbb{F}_q[\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)]$之间的一个同构。

回顾增广半群 $V_{(1)}{}_{\mathbf{T}\subset\mathbf{G}0,\mathbb{F}_q}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上，参见 2.6。

5.6.2. 命题。 在同构 $\mathbb{F}_q[\mathbb{T}]\simeq\mathcal{O}(\mathbf{T}(\mathbb{F}_q))$下，伯恩斯坦同构$\mathscr{B}(0)^{\mathbb{F}_q}$ 诱导出一个 $\mathbb{F}_q$-代数同构

$$\mathscr{B}^{(1)}(0)_{\mathbb{F}_q}:\mathcal{A}^{(1)}(0)_{\mathbb{F}_q}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}_q[V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q}].$$

该同构是 W-等变的，并诱导出一个同构

$$\mathscr{B}^{(1)}(0)^W_{\mathbb{F}_q}:\mathcal{A}^{(1)}(0)^W_{\mathbb{F}_q}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}_q[V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q}]^W.$$

证明。 这是显然的，因为 $\mathcal{A}^{(1)}(0)_{\mathbb{F}_q}=\mathbb{F}_q[\mathbb{T}]\otimes\mathcal{A}^{(1)}(0)$且 $\mathbb{F}_q[V_{(1)}{}_{\text{极大环面}\subset\mathbf{G}0,\ \mathbb{F}_q}]=\mathcal{O}($极大环面$(\mathbb{F}_q))\otimes\mathbb{Z}[V_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\mathbf{G},0}]$作为 $\mathbb{F}_q$-代数，并且这些张量积分解尊重 W-作用。

□

5.7 GL_n的中心Hecke分层的伽罗瓦参数化

设$\mathbf{G}=GL_n$ 和 $G=\mathbf{G}(F)$。

5.7.1. </style}约化 p-进群 G 的 pro-p-Iwahori 赫克代数 $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$ （系数取自$\mathbb{F}_q$）是 G中相对于选定的 pro-p-Iwahori 子群的 G 双陪集集合上取值于 $\mathbb{F}_q$ 的卷积代数， [V16, 2.1]。它满足

$$\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}=\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{q})\otimes_{\mathbb{Z}[\mathbf{q}],\mathbf{q}\mapsto 0\in\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_q,$$

参见 [V16, 例 4.10]。此外，文献同上所发展的伯恩斯坦基理论表明，相对于反支配定向的极大交换子环 $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathbb{F}_q} \subset \mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$，以 W-等变方式同构于 $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{0})_{\mathbb{F}_q}$，参见 [V16, 推论 5.28]。由此可得，$\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}$ 的中心 $Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q})$ 等于不变量环 $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{0})^W_{\mathbb{F}_q}$。

5.7.2. 因此，伯恩斯坦同构（参见 5.6.2）诱导出一个同构

$$\Xi := \operatorname{Spec} Z(\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{F}_q}) \xrightarrow{\sim} V^{(1)}_{\widehat{\mathbf{T}}\subset\widehat{\mathbf{G}},0,\mathbb{F}_q}/W = S.$$

目标具有如下分层

$$S = \bigcup_{\widehat{\mathbf{L}}\in\widehat{\mathcal{L}}} S_{\widehat{\mathbf{L}}},$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$参见 2.6.3，该分层由对偶群 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ 的标准 Levi 子群 $\mathbf{G}$标记。它相应地诱导出 Ξ的一个分层。令 $\mathbf{L}$为 $\mathbf{G}$ 中与 $\widehat{\mathbf{L}}$[4] 相对应的标准 Levi 子群。相应的群 $W(\mathbf{L})\widehat{\ }$ 与 $W(\mathbf{L})$ 有典范同一。令 $\Xi_{\mathbf{L}}$（分别地，$\Xi_{\mathbf{L},\mathrm{gen}}$）为分层 $S_{\widehat{\mathbf{L}}}$的逆像（或其一般部分的逆像 $S_{\widehat{\mathbf{L}},\mathrm{gen}}$），参见 4.4.13。它带有诱导的 $W(\mathbf{L})$-作用（在有限环面部分上即为点作用）。将 4.4.13 中的伽罗瓦参数化拉回到 $\Xi_{\mathbf{L},\mathrm{gen}}$，可得到一个伽罗瓦参数化

$$\Xi_{\mathbf{L},\mathrm{gen}}(\overline{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^t_q, \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{F}}_p))/\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

其为 W（$\mathbf{L}$）-不变的。

5.7.3. 在 $\mathbf{G} = GL_2$ 和 $F = \mathbb{Q}_q$ 的情形下，$\mathbb{Q}_p$ 的具有剩余域 $\mathbb{F}_q$ 的非分歧扩张中，我们在 4.5 节的讨论表明，这两个映射

$$\Xi_{\mathbf{L},\mathrm{gen}}(\overline{\mathbb{F}}_p) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^t_q, \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{F}}_p))/\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于 $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ 和 $\mathbf{L} = \mathbf{T}$，是在整个 $\Xi_{\mathbf{L}}(\mathbb{F}_p)$ 上定义的，并且从 $\Xi(\mathbb{F}_p) = \overline{\Xi_{\mathbf{G}}(\mathbb{F}_p)} \coprod \overline{\Xi_{\mathbf{T}}(\mathbb{F}_p)}$ 到伽罗瓦表示空间的集合映射，是由概形态射诱导的

$$\mathscr{L} : \Xi \to X(q)_{\mathbb{F}_q}$$

Ξ 与在 [PS25] 中构造的 半单2维伽罗瓦表示曲线 $X(q)^{\mathbb{F}_q}$ 之间。特别地，这两个映射给出双射

$$\Xi_{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\sim} \{\text{irreducible } \mathcal{G}_q\text{-representations of dimension } 2\}/\simeq$$

and

$$(\Xi_{\mathbf{T}}/W)(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\sim} \{\text{reducible semisimple } \mathcal{G}_q\text{-representations of dimension } 2\}/\simeq .$$

$\widehat{\ }$注：分析在 $_{,\mathrm{gen}}$ 中随 $\mathbf{L}$ 变化的 $\Xi_{\mathbf{L}}$ 的伽罗瓦参数化的精细结构，在 $\mathbf{G} = GL_3$ 或 GL_4 的情形下，是一个问题；我们希望在未来的工作中对此进行研究。

6 附录：标准概形

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设$\mathbf{G}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$上的连通分裂群，其极大环面和博雷尔子群为$\mathbf{T} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{G}$。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设 $W = W(\mathbf{G},\mathbf{T})$是与$(\mathbf{G},\mathbf{T})$相关联的有限魏尔群。

6.1. 定义。该 $\mathbb{Z}$-概形

$$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}} := \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-])$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$称为标准概形，与$(\mathbf{G}、\mathbf{T}、\mathbf{B})$相关联。

[4] $\mathbf{G}$ 和 $\widehat{\ }\mathbf{G}$ 的标准 Levi 子群通过对偶性构成典范双射。

轨道结构

6.2. 概形 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上、以环面 $\mathbf{T}$为结构环面的托里克概形。因此，它是一个正规整概形，包含 $\mathbf{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\mathbf{T})])$ 作为开子概形，并且带有一个$\mathbf{T}$ 的作用，该作用将其自身上的乘法作用延拓而来。此外，它是仿射的，因此是一个对角化的 $\mathbb{Z}$-幺半群概形，其特征幺半群为 $X^*(\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}) = X^*(\mathbf{T})^-$，单位群为$\mathbf{T}$；而$\mathbf{T}$在 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 上的作用，是幺半群运算在 $\mathbf{T} \times \mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 上的限制。我们将精确描述$\mathbf{T}$-概形 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$的轨道结构，特别是其边界

$$\partial(\widehat{\mathbf{T}} \subset \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}) := \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}} \setminus \widehat{\mathbf{T}}$$

的**极大环面** 在部分紧化$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$。

6.3. 设**极大环面** $\subset \mathbf{G}$ 为相应的对偶约化群。博雷尔子群$\mathbf{B}$ 确定了$\mathbf{G}$中的一个博雷尔子群$\mathbf{B}$，该子群包含$\mathbf{T}$。我们记

$$\langle\ ,\ \rangle : X^*(\mathbf{T}) \times X^*(\widehat{\mathbf{T}}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

由恒等式 $X^*(\mathbf{T}) = X_*(\mathbf{T})$ 所给出的完美对偶配对。若 $\mathcal{S} \subset X^*(\mathbf{T})$ 是一个子集，我们用 $\mathcal{S}^\perp \subset X^*(\mathbf{T})$ 表示其正交子群。特别地，可以考虑子群$\Delta^\perp$，其中 $\Delta \subset X^*(\mathbf{T})$ 是由$\mathbf{B}$定义的单根基。

6.4. 定义。该 $\mathbb{Z}$-概形

$$\mathbb{Z}_{\widehat{\mathbf{G}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\Delta^\perp \cap X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-])$$

称为与$(\mathbf{G},\mathbf{T},\mathbf{B})$相关的零概形 。

6.5. 概形 $\mathrm{Z}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上、对应于环面

$$\mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{G}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\Delta^\perp]).$$

特别地，它是一个对角化幺半群概形，其特征幺半群为 $X^*(\mathrm{Z}_{\widehat{\mathbf{G}}}) = \Delta^\perp \cap X^*(\textbf{极大环面})^-$，单位元群为 $\mathrm{S}_{\widehat{\mathbf{G}}}$。

6.6. 包含**Borel子群** **Borel子群** 的$\mathbf{G}$ 抛物子群称为标准抛物子群，包含**极大环面**的标准抛物子群的 Levi 因子 称为标准 *Levi* 子群。我们用 $\mathcal{L}$ 表示$\mathbf{G}$的 个标准 Levi 子群的集合。它与由$\mathbf{B}$ $\supset$**极大环面**定义的单根集合 Δ 的幂集一一对应：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\widehat{\Delta}) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\mathcal{L}} \\ \widehat{I} & \longmapsto & \widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I}) \text{ such that } \widehat{\Delta}_{\widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I})} = \widehat{I}. \end{array}$$

对于群$\mathbf{G}$，相对于极大环面$\mathbf{T}$ 和 Borel子群$\mathbf{B}$，也有类似的对应关系：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Delta) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L} \\ I & \longmapsto & \mathbf{L}(I) \text{ such that } \Delta_{\mathbf{L}(I)} = I. \end{array}$$

这两个对应关系由典范双射 $\widehat{\Delta} \xrightarrow{\sim} \Delta, \widehat{\alpha} \mapsto \alpha$ 联系起来：后者诱导出典范双射 $\mathcal{P}(\widehat{\Delta}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\Delta), \widehat{I} \mapsto I$，因此得到典范双射 $\widehat{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}, \widehat{\mathbf{L}} \mapsto \mathbf{L}$。

6.7. </style}对于$\mathbf{L} \in \mathcal{L}$，我们有标准的$\mathbf{T}$-托里克概形

$$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{L}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{-/\widehat{\mathbf{L}}}])$$

与 **(L，Borel子群** $\cap$ **L，极大环面)** 相关，以及零 $\mathrm{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}$-托里克概形

$$\mathbb{Z}_{\widehat{\mathbf{L}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\Delta_{\mathbf{L}}^\perp \cap X^*(\widehat{\mathbf{T}})^{-/\widehat{\mathbf{L}}}])$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \ \widehat{\ }\ \widehat{\ }$与 **(L，Borel子群** $\cap$ **L，极大环面)** 相关。此外，我们有零 $\mathrm{S}\widehat{\mathbf{L}}$-托里克概形

$$\mathbb{Z}_{\widehat{\mathbf{L}}\subset\widehat{\mathbf{G}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\Delta_{\mathbf{L}}^{\perp} \cap X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-])$$

与（$\widehat{\mathbf{L}} \subset \widehat{\mathbf{G}}$ $\widehat{\textbf{Borel子群}}$ $\widehat{\textbf{极大环面}}$）相关联。我们注意到，环面 $\mathrm{S}\widehat{\mathbf{L}} =$ 谱$(\mathbb{Z}[\Delta_{\mathbf{L}}^{\perp}])$ 具有维 n

$$\dim \mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{L}}} = \mathrm{rank}\,\widehat{\mathbf{T}} - |\Delta_{\widehat{\mathbf{L}}}| = \dim \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{L}}} - |\Delta_{\widehat{\mathbf{L}}}| = \dim \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}} - |\Delta_{\widehat{\mathbf{L}}}|.$$

6.8. 命题。

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$*1.* 设 $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$。

(a) $\mathbb{Z}$-幺半群概形的同态

$$\widehat{\mathbf{T}} = \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{T}}} \longrightarrow \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{L}}} \longrightarrow \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$$

由包含 $X^*(\widehat{\textbf{极大环面}})^- \subset X^*(\widehat{\textbf{极大环面}})^{-/\widehat{\mathbf{L}}} \subset X^*(\widehat{\textbf{极大环面}})$ 所诱导，它们是开浸入。

(b) 加性映射

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\Delta_L^{\perp} \cap X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-] \\ e^{\nu} & \longmapsto & \begin{cases} e^{\nu} & \text{if } \nu \in \Delta_L^{\perp} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array}$$

是一个满射环同态，与余乘法相容，也就是说，它对应于一个 $\mathbb{Z}$-半群概形的闭浸入

$$\mathbb{Z}_{\widehat{\mathbf{L}}\subset\widehat{\mathbf{G}}} \longrightarrow \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}.$$

我们将幺半群 $\mathbb{Z}\widehat{\mathbf{L}}\subset\widehat{\mathbf{G}}$ 的单位元的像记为 $e_{\widehat{\mathbf{L}}} \in \mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$。

$\widehat{\ }$*(c)* 我们有 $\mathbb{S}\widehat{\mathbf{L}} = \mathbb{Z}\widehat{\mathbf{L}}\subset\widehat{\mathbf{G}} \cap \mathbb{U}\widehat{\mathbf{L}} = \mathbf{T}e_{\widehat{\mathbf{L}}} \subset \mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$.

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$*2.* 集合 $\{e_{\widehat{\mathbf{L}}} \mid \mathbf{L} \in \mathcal{L}\}$ 是幺半群 $\mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$ 的幂等元集合。

3. 下述映射是一个双射：

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\mathcal{L}} & \longrightarrow & \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}/\widehat{\mathbf{T}} \\ \widehat{\mathbf{L}} & \longmapsto & \widehat{\mathbf{T}}e_{\widehat{\mathbf{L}}} = \mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{L}}}. \end{array}$$

证明。 这些事实见 [CP21, 1.9 和 §8], ，也可由同上轻易推出。 □

单连通情形

$\widehat{\ }$**6.9.** 当$\mathbf{G}$ 是单连通的，即满足以下条件时，标准概形 $\mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$ 的结构尤其清晰：

$$X^*(\widehat{\mathbf{T}})^- = \bigoplus_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}} \mathbb{N}w_0(\omega_{\widehat{\alpha}})$$

其中， $\omega_{\widehat{\alpha}}$是基本权（而 w_0是 W的最长元）。于是，$(w_0(\omega_{\widehat{\alpha}}))_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}}$是 $\mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$上的一组坐标，定义了一个同构

$$(w_0(\omega_{\widehat{\alpha}}))_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}} : \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^{\widehat{\Delta}}, \times)$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$到集合 Δ 上的标准仿射空间（即在为$\widehat{\ }$单根编号后，其维数为 $|\Delta|$ ），并赋予其自然的乘法幺半群律。环面 $\mathbf{T} \subset \mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$ 对应于$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathbb{G}_m^{\Delta} \subset \mathbb{A}^{\Delta}$，对于任意几何点 $x \in \mathbb{U}\widehat{\mathbf{G}}$，记 $x_{\alpha} := w_0(\omega_{\alpha})(x)$，则有：

$$x \in \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I})} \iff \forall \widehat{\alpha} \in \widehat{\Delta} \setminus \widehat{I},\ x_{\widehat{\alpha}} \neq 0$$

$$x \in \mathbb{Z}_{\widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I})\subset\widehat{\mathbf{G}}} \iff \forall \widehat{\alpha} \in \widehat{I},\ x_{\widehat{\alpha}} = 0$$

$$x \in \mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I})} \iff \forall \widehat{\alpha} \in \widehat{\Delta},\ x_{\widehat{\alpha}} \begin{cases} \neq 0 & \text{if } \widehat{\alpha} \notin \widehat{I} \\ = 0 & \text{if } \widehat{\alpha} \in \widehat{I} \end{cases}$$

$$e_{\widehat{\mathbf{L}}(\widehat{I})} = \begin{cases} 1 & \text{if } \widehat{\alpha} \notin \widehat{I} \\ 0 & \text{if } \widehat{\alpha} \in \widehat{I}. \end{cases}$$

导出群为单连通的情形

本节中，我们假设 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{der}}$ 的导出子群 $\widehat{\mathbf{G}}$ 是单连通的。这使我们能够将 $\mathrm{U}_{\widehat{\mathbf{G}}}$ 上的典范坐标系从单连通情形 6.9 推广为一个相关的坐标系（但不再是典范的）。例如，它涵盖了$\widehat{\mathbf{G}} = GL_n$ 的情形（在这种情形下，甚至存在一个典范的选取）。记 $\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}} := \widehat{\mathbf{T}} \cap \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{der}}$.

6.10. 考虑 $\widehat{\Delta} \subset X^*(\widehat{\mathbf{T}})$ 在 $X^*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}})$ 中的规范像，该像由限制到$\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}} \subset \widehat{\mathbf{T}}$给出。这是 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{der}}$ 的根系的一组基，我们仍将其记作 $\widehat{\Delta}$。相应的简单余根集合 $\Delta \subset X_*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{sc}})$ 是格 $X_*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}})$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，而其在 $X^*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}})$ 中的对偶基是 $\mathbb{Z}$-基

$$\{\overline{\omega_{\widehat{\alpha}}},\ \widehat{\alpha} \in \widehat{\Delta}\} \subset X^*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}})$$

由与 $\widehat{\mathbf{G}}$ 相关的基本权 组成。特别地，$X^*(\widehat{\mathbf{T}})^0 := X^*(\widehat{\mathbf{T}})^- \cap X^*(\widehat{\mathbf{T}})^+$ 是该满群同态的核

$$\begin{aligned} X^*(\widehat{\mathbf{T}}) &\longrightarrow X^*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}}) \\ \lambda &\longmapsto \sum_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}} \langle \lambda|_{\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}}}, \alpha\rangle \overline{\omega_{\widehat{\alpha}}}, \end{aligned}$$

也就是说，$X^*(\text{极大环面})^0 = X^*(\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}})$，其中 $\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}$ 是环面 $\widehat{\mathbf{G}}/\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{der}}$。此外，基本权构成幺半群 $X^*(\text{极大环面}^{\mathrm{der}})^+$ 的一组基，且上述映射诱导出一个幺半群同构

$$\begin{aligned} X^*(\widehat{\mathbf{T}})^+/X^*(\widehat{\mathbf{T}})^0 &\longrightarrow X^*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}})^+ \\ \lambda &\longmapsto \sum_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}} \langle \lambda|_{\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}}}, \alpha\rangle \overline{\omega_{\widehat{\alpha}}}, \end{aligned}$$

或者等价地，一个幺半群同构

$$\begin{aligned} X^*(\widehat{\mathbf{T}})^-/X^*(\widehat{\mathbf{T}})^0 &\longrightarrow X^*(\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}})^- \\ \lambda &\longmapsto \sum_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}} \langle \lambda|_{\widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{der}}}, w_0(\alpha)\rangle w_0(\overline{\omega_{\widehat{\alpha}}}). \end{aligned}$$

特别地，在 $X^*(\text{极大环面})^-$ 中，我们有:

$$\Delta^\perp = (-\Delta)^\perp = (w_0(\Delta))^\perp = X^*(\widehat{\mathbf{T}})^0,$$

i.e.

$$\mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{G}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\Delta^\perp]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X^*(\widehat{\mathbf{T}})^0]) = \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}.$$

6.11. 我们来选择一个提升

$$\{\omega_{\widehat{\alpha}},\ \widehat{\alpha} \in \widehat{\Delta}\} \subset X^*(\widehat{\mathbf{T}})^+.$$

它给出了幺半群 $X^*(\text{极大环面})^-$ 的一个分解:

$$X^*(\widehat{\mathbf{T}})^- = \bigoplus_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}} \mathbb{N} w_0(\omega_{\widehat{\alpha}}) \bigoplus X^*(\widehat{\mathbf{T}})^0,$$

从而得到 $\mathbb{Z}$-幺半群概形之间的一个同构:

$$\mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}_{\widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{sc}}} \times \mathbb{S}_{\widehat{\mathbf{G}}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{\widehat{\Delta}} \times \widehat{\mathbf{G}}^{\mathrm{ab}}.$$

参考文献

[B15] M. Bornmann，与伽罗瓦表示相关的德利涅-卢斯蒂格特征及其模 p 约化，博士论文，明斯特大学，2015 年。[Br03] C. Breuil，关于 p-进群 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 的若干模表示。I, Compositio Math. 138 (2003)，165–188。[BZ77] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky，约化 p-进群的诱导表示，Annales sci. de l'E.N.S.，第 4 辑，第 10 卷，第 4 期，1977 年，441–472。[C85]]R. W. Carter，《李型有限群》，Pure Appl. Math. (N.Y.)，Wiley，纽约，1985。[CP21] R. Cass and C. Pépin，带 $\mathbb{F}_p$ 系数的常数项函子，预印本 Arxiv arXiv:2107.00714（2021）[DM91] F. Digne and J. Michel，《李型有限群的表示》，London Math. Soc. Stud. Texts 21，剑桥大学出版社，剑桥，1991。[EGH 22] M. Emerton and T. Gee and E. Hellmann范畴化 p-进朗兰兹纲领导论，预印本，2022，arXiv: arXiv:2210.01404。[F93] W. Fulton，《环面簇导论》，Annals of Math. Studies 131（1993），普林斯顿大学出版社。[GK18] E. Grosse-Klönne，作为伽罗瓦表示的超奇异海克模，Algebra Number Theory 14（2020），第 1 期，67–118。[H16] M. Harris，关于 p 模 p-进群表示论的推测，Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 25（6），403–418，2016。[H09] F. Herzig，温和 n 维伽罗瓦表示的塞尔型猜想中的权，Duke Math. J. 149(1)，第 37–116 页。[J81] J.C. Jantzen，德利涅与卢斯蒂格特征模 p 的约化，J. Algebra 70（1981），452–474。[L83] G. Lusztig，奇点、特征公式及权重重数的一个 q-类比，载于《奇异空间上的分析与拓扑》，II、III（Luminy，1981），208–229，Ast´erisque，101–102，法国数学会，巴黎，1983。[L89] G. Lusztig，仿射海克代数及其分次版本，《美国数学会杂志》2（3）（1989）。[PS23] C. Pépin, T. Schmidt，针对 GL_2 的一般情形与模 p 卡兹丹-卢斯蒂格理论，《表示论》27（2023），1142–1193。[PS25] C. Pépin, T. Schmidt，针对 GL_2 与海克模的半单模 p 伽罗瓦表示的卢宾-泰特模空间，《数学杂志》309（2025）。[V16] M.-F. Vigneras, 约化 p -进群的 pro-p-Iwahori 赫克代数 I，Compositio Math. 152（2016），693–753。[Vin 95] E.B. Vinberg，论约化代数半群，载于《李群与李代数：E.B. Dynkin 研讨会》，Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 169（1995），145–182。[XZ19] L. Xiao, X. Zhu，群上的向量值扭曲共轭不变函数，载于《约化群的表示》，《纯数学专题讨论会论文集》101（2019），361–426。[Z20] X. Zhu，关于整 Satake 同构的一则札记，预印本，2020，arXiv:2005.13056v1。

Tobias Schmidt，伍珀塔尔贝吉施大学，高斯街20号，42119 伍珀塔尔，德国，*E-mail address:* *toschmidt@uni-wuppertal.de*