arXiv:2602.02217v1 [math.PR] 2 Feb 2026

# 局部依赖下精细的 Berry-Esseen界

**蔡志军**[1]，**邵启满**[2] **和张卓松**[2]

[1] *Department of Statistics and Data Science, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, China,e-mail:* 122312911@mail.sustech.edu.cn

[2] *Department of Statistics and Data Science and Shenzhen International Center for Mathematics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, China*
*e-mail:* shaoqm@sustech.edu.cn; zhangzs3@sustech.edu.cn

**摘要：** 本文为局部依赖随机变量的自归一化和与非自归一化和建立了 Berry–Esseen 界。证明基于 Stein 方法与集中不等式方法。我们提出了一类新的集中不等式，它们扩展了经典结果，并在更一般的依赖结构下达到最优收敛速率。作为应用，我们运用主要结果，为图依赖、分布式 $U$统计量、约束 $U$统计量以及装饰单射同态和推导出更精确的 Berry–Esseen 界。

**MSC2020主题分类：**主要分类60F05；次要分类62E20。**关键词和短语：**Berry–Esseen 界、局部依赖、自归一化、分布式 $U$-统计量、约束 $U$-统计量、图依赖。

## 1. 引言

关于相依随机变量的中心极限定理（CLT）的研究在概率论中受到广泛关注，既有理论意义，也有实际应用价值。人们研究了多种依赖类型，包括鞅（L´evy，1935年）、混合序列（Rosenblatt，1956年；Bolthausen，1982年）以及局部依赖随机变量（Hoeffding和Rob- bins，1948；Chen和Shao，2004）。一般而言，一族局部依赖随机变量是指：某个子集内的随机变量与其邻域之外的随机变量相互独立。本文聚焦于局部依赖随机变量之和的中心极限定理，尤其是在以下局部依赖假设下建立精细的 Berry–Esseen 型界。设 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为一个指标集，并设 $\{X_i : \ i \in [n]\}$ 为一族均值为零的随机变量。我们假设

(LD1) 对任意 $i \in [n]$，存在 $A_i \subset [n]$，使得 $X_i$ 与 $\{X_j : j \notin A_i\}$ 独立。
(LD2) 对任意 $i \in [n]$ 和 $j \in A_i$，存在 $A_{ij} \supset A_i$，使得 $\{X_i, X_j\}$ 与 $\{X_k : k \notin A_{ij}\}$ 独立。

传统的正态近似方法依赖于特征函数方法。然而，在缺少独立性假设的情况下，采用这种方法往往难以获得最优界。相比之下，Stein 方法适用于依赖结构，通常能得到比传统方法更精确的界。这方面的一项重要贡献来自Chen和Shao (2004)，他们首次将 Stein 方法应用于局部依赖随机变量的正态近似。令 $S_n = \sum_{i\in[n]} X_i$，他们在上述 (LD1) 条件及以下条件下进行研究：

(LD2′) 对任意 $i \in [n]$，存在 $B_i \supset A_i$，使得 $\{X_k : k \in A_i\}$ 与 $\{X_l : l \notin B_i\}$相互独立

并为 $S_n$建立了一个精确的 Berry–Esseen 界。在此框架基础上，后续研究进一步拓展了这些结果。例如，Liu 和 Zhang (2023年) 得到了 Carm´型中等偏差结果；Zhang(2024) 在 (LD1) 和 (LD2′) 条件下，推导出了局部依赖随机变量自归一化和的 Berry–Esseen 界。最近，在 (LD1) 和 (LD2′) 以及一些附加条件下，苏、乌里扬诺夫和王(2025) 推导出了总变差距离的一个上界，其中用于近似的随机变量服从泊松混合分布，其混合分布为二项分布或负二项分布。

尽管满足（LD1）和（LD2′）的依赖结构已在若干场景中得到应用，例如 $m$-依赖，但对于某些统计学问题仍然不够适用。例如，在（LD1）和（LD2′）框架下，图依赖的 Berry–Esseen 界与相应的 Wasserstein 距离界并不一致（见备注 3.2 和3.3）。这种差异可归因于（LD2）中的集合 $B_i$ 过大。在此背景下，此前施加的条件（LD2′）可以由上文引入的、更灵活的依赖结构（LD2）取代。

巴伯、Karo´nski 和 Ruci´nski (1989) 为可分解随机变量证明了一个 Wasserstein-1 界，其条件比（LD1）和（LD2）略弱。沿着这一研究思路，Rai˘c (2004) 推导出了具有有限二阶矩的可分解随机向量的多元中心极限定理。从另一角度出发，Tem˘cinas、Nanda 和 Reinert(2024) 将可分解性的概念推广到多元情形，并通过 Stein 方法建立了一个抽象的多元中心极限定理。依赖结构（LD1）和（LD2）由方(2019) 引入。在该研究中，在（LD1）、（LD2）和（LD3）条件下推导出了 Wasserstein-2 距离界，其中（LD3）是扩展这两项假设的一项附加条件。 Liu 和 Austern (2023年) 在更强的条件下推导出了 Wasserstein-$p$ 距离界。关于 Berry–Esseen 型定理，方 (2016) 为有界可分解随机向量建立了具有已知最优速率的多元 Berry–Esseen 界，而 Eichelsbacher 和 Rednoß (2023年) 则使用 Stein–Tikhomirov 方法为可分解随机变量给出了 Berry–Esseen 界。

统计学中一个常见问题是方差 Var($S_n$) 未知，这使得统计推断无法进行。为解决这一问题，我们还研究了局部依赖随机变量的自归一化和的中心极限定理。

本文在 (LD1) 和 (LD2) 条件下，为局部依赖随机变量的自归一化和建立了一个 Berry–Esseen 界。与Zhang(2024) 相比， $A_{ij}$ 通常远小于 ZhangZhang(2024) 中使用的量。

我们的主要贡献可概括如下。首先，我们为局部依赖随机变量之和建立了两个 Berry–Esseen 界。在矩条件方面，这些界比Eichelsbacher 和 Rednoß (2023年) 的结果更精细，并在Chen 和 Shao (2004) 和 Zhang(2024) 的结果基础上进一步改进了 $\kappa$。其次，为了证明这些界，我们基于 Chen 和 Shao (2004) 以及 Chen、R¨ollin 和 Xia (2021年) 的思想，采用递归方法，在 (LD1) 和 (LD2) 条件下建立了两个广义随机化集中不等式。第三，通过应用主要结果，我们为若干有趣的应用推导出 Berry–Esseen 界，例如图依赖、分布式 $U$-统计量、约束 $U$-统计量，以及装饰单射同态和；这些界具有更快的收敛速率和更弱的条件。

我们主要结果的证明基于 Stein 方法和精细的集中不等式方法。集中不等式方法是一种强有力的技术，可用于获得最优的 Berry–Esseen 界。在不同条件下已有许多集中不等式，参见 Chen 和 Shao(2001,2004, 2007)、Shao 和 Zhou (2016)、Shao 和 Zhang (2022) 等。本文建立了一类新的集中不等式，推广了经典结果。这些不等式适用于更一般的情形，并可达到最优收敛速率。

本文中，我们使用以下记号。对于两个实数$a, b$，令 $a\wedge b=\min\{a,b\}$和 $a\vee b=\max\{a,b\}$.。对于两个随机变量， $X \perp\!\!\!\perp Y$表示 $X$和 $Y$相互独立。对于函数 $f$，我们记 $\|f\|_\infty=\sup_x|f(x)|$。对于任意随机变量 $X$ 和 $p\geq 1$，令 $\|X\|_p=(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ 表示 $X$. 的$L_p$ 范数。对于集合 $A$， $|A|$ 表示其基数。最后，除非另有说明，大写字母 $C$ 表示一个绝对常数，其取值在不同位置可能不同。

本文其余部分安排如下。第2节给出主要结果，包括局部依赖随机变量的非自标准化和自标准化和的 Berry–Esseen界。第3节介绍应用。第4 节给出一些预备引理和随机化集中不等式，而主要结果的证明推迟到第5节。

## 2. 主要结果

为便于阐述，我们首先回顾一下研究设定。设 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ 为指标集，且 $\{X_i:\ i\in[n]\}$ 为实值随机变量场，满足 $\mathbb{E}\{X_i\}=0$，对任意 $i\in[n]$ 均成立。我们考虑以下局部依赖结构。

（LD1）对于任意 $i\in[n]$，存在 $A_i\subset[n]$，使得 $X_i$ 与 $\{X_j$ 独立：$j\notin A_i\}$。

（LD2）对于任意 $i \in [n]$ 和 $j \in A_i$，存在 $A_{ij} \supset A_i$，使得 $\{X_i, X_j\}$ 与 $\{X_k$ 独立：$k \notin A_{ij}\}$。

### *2.1.* 局部依赖随机变量和的 ***Berry–Esseen*** 界

Let

$$S := S_n = \sum_{i\in[n]} X_i \quad \text{and} \quad W_1 = S/\sigma,$$

其中 $\sigma^2 := \sigma_n^2 = \mathsf{Var}(S)$。对于任意 $i \in [n]$，令

$$N_i = \{k \in [n] : i \in A_k\} \quad \text{and} \quad D_i = \{(k,l) : l \in A_k, \{i\} \cap A_{kl} \neq \varnothing\}.$$

令 $\kappa$ 和 $\tau$ 为满足以下条件的两个正常数

$$\kappa = \max\big\{ \sup_{i\in[n]} |N_i|,\ \sup_{i,j} |A_{ij}| \big\} \quad \text{and} \quad \tau = \sup_{i\in[n]} |D_i|. \tag{2.1}$$

**定理 2.1**。 在满足(LD1) 和(LD2)的条件下，有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| \le \frac{C\kappa^2}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 + \frac{C\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2} \Big( \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4 \Big)^{1/2}. \tag{2.2}$$

### *2.2.* 局部依赖随机变量的自归一化和的 ***Berry–Esseen*** 界

在本小节中，我们给出局部依赖随机变量的自归一化和的相关结果。令

$$V = \sqrt{\Big( \sum_{i\in[n]} (X_i Y_i - \bar{X}\bar{Y}) \Big)_+} \quad \text{and} \quad W_2 = S/V,$$

其中 $Y_i = \sum_{k\in A_i} X_k$，$\bar{X} = \sum_{i\in[n]} X_i/n$，$\bar{Y} = \sum_{i\in[n]} Y_i/n$ 且 $(x)_+ =$ 的最大值为$(x,\ 0)$。我们指出，$\mathbb{E}X_i = 0$ 并非必要假设，因为可以直接将 $X_i$ 替换为 $X_i - \mathbb{E}X_i$。对于 $W_2$，我们有以下定理。

**定理 2.2**。 在 (LD1) 和 (LD2)条件下，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_2 \le z) - \Phi(z)| \le C\lambda \Big( \frac{\kappa^2}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 + \frac{\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2} \big( \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4 \big)^{1/2} \Big), \tag{2.3}$$

其中 $\lambda = \kappa \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_2^2/\sigma^2$.

**注 2.3.** 我们对 $\lambda$ 作一些说明。在许多例子中，例如 $U$-统计学，我们有

$$\sigma^2 \asymp \kappa \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_2^2,$$

在此条件下， $\lambda$ 的阶为 $O(1)$。具体而言，对于独立随机变量之和， $W_2$ 就是众所周知的 t 统计量。在这种情况下， $\kappa = \lambda = 1$，那么（2.3）右侧变为

$$C\sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3/\sigma^3 + C\Big(\sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4/\sigma^4\Big)^{1/2}.$$

上述界可以达到最优收敛速率，但代价是必须存在有限的四阶矩。

## 3. 应用

### *3.1.* 图依赖

设 $\{X_i : i \in \mathcal{V}\}$ 是一组随机变量。若图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 满足以下条件，则称其为相依图：对于任意两个不相交的子集 $\Gamma_1$、$\Gamma_2 \subseteq \mathcal{V}$，如果 $\mathcal{E}$ 中没有边连接 $\Gamma_1$ 中的顶点与 $\Gamma_2$ 中的顶点，那么随机变量集合 $\{X_i : i \in \Gamma_1\}$ 和 $\{X_i : i \in \Gamma_2\}$ 相互独立。Baldi 和 Rinott（1989）提出了这一概念，并给出了 Kolmogorov 度量下首批定量中心极限定理界。设 $A_i = \{j \in \mathcal{V} : i \text{ 与 } j\}$ 之间有一条边。应用定理 2.1 和 2.2，可得以下定理。

**定理 3.1**。 对于由相依图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 的顶点索引的一组随机变量 $X_i, i \in \mathcal{V}$，其中 $\mathbb{E}\{X_i\} = 0$，令 $S = \sum_{i\in\mathcal{V}} X_i$，$\sigma^2 = Var(S)$，$Y_i = \sum_{j\in A_i} X_i$ 且 $V = \sqrt{\big(\sum_{i\in[n]}(X_iY_i - \bar{X}\bar{Y})\big)_+}$。设

$$W_1 = S/\sigma, \quad W_2 = S/V,$$

*then*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| \le Cd^2 \sum_{i\in\mathcal{V}} \|X_i\|_4^3/\sigma^3 + Cd^{3/2}\Big(\sum_{i\in\mathcal{V}} \|X_i\|_4^4/\sigma^2\Big)^{1/2} \quad (3.1)$$

*and*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_2 \le z) - \Phi(z)| \le C\lambda_1\Big(d^2 \sum_{i\in\mathcal{V}} \|X_i\|_4^3/\sigma^3 + Cd^{3/2}\Big(\sum_{i\in\mathcal{V}} \|X_i\|_4^4/\sigma^4\Big)^{1/2}\Big), \quad (3.2)$$

其中 $\lambda_1 = d\sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}|X_i|^2/\sigma^2$、 $C$ 是一个绝对常数， $d$ 是 $\mathcal{G}$ 的最大度。

**注 3.2**。 对于 Wasserstein距离，Ross （2011年，定理 3.6）证明了

$$\mathcal{W}_1(\mathcal{L}(W_1), N(0,1)) \le Cd^2 \sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}|X_i|^3 + Cd^{3/2}\big(\sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}|X_i|^4\big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

我们的界与Ross （2011年）所证明的Wasserstein距离相匹配。

**注记3.3.** 对于Berry–Esseen界，Chen和Shao （2004）证明，对任意 $p \in (2,3]$,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| \le Cd^{5(p-1)} \sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}|X_i|^p/\sigma^p. \tag{3.4}$$

最近，Janisch和Leh´ericy （2024）建立了Berry–Esseen界，其对 $d$的依赖有所改进，且在有限 $\delta$阶矩、 $\delta \in (2, \infty]$的条件下。当$\delta = \infty$时，该界本质上是最优的，即

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| \le \max\Big\{ 68.5(d+1)^2 \sum_{i\in\mathcal{V}} \frac{\mathbb{E}|X_i|^3}{\sigma^3},\ 22.88\,\frac{L(d+1)}{\sigma} \Big\}, \tag{3.5}$$

其中 $L = \max_{i\in\mathcal{V}} \|X\|_\infty$. 对于自归一化情形，Zhang （2024）证明了

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_2 \le z) - \Phi(z)| \\ &\quad \le Cd^9\big[1 + d^6 n^{1/3}\big(\sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3\big)^{2/3}\big] \cdot \big(n^{-1/2} + \sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3\big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

与（3.4）和（3.6）相比，我们的结果在 $d$方面更为尖锐，并且与（3.5）相比，我们的矩条件更弱。

### *3.2.* 分布式 $U$统计量

设 $X_1, \dots, X_N$为具有未知分布 $P$的独立随机变量，并设 $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是一个可测对称函数，使得$\mathbb{E}[h(X_1, \dots, X_m)] = \theta$. 的一个无偏估计量为

$$U_N = \binom{N}{m}^{-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le N} h(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}). \tag{3.7}$$

式（3.7）中定义的统计量是 $U$统计量，由Hoeffding (1948) 引入，其中 $h$ 是核函数，而 $m$ 是 $U$统计量的阶数。许多经典统计量都是 $U$统计量，包括样本方差、用于测量相关性的 Kendall $\tau$以及 Gini平均差。

然而，计算 $U$-统计量（3.7）所需的计算成本会随 $N^m$增长，对于较大的 $N$，成本将高得难以承受。为降低

计算成本，并受“分而治之”思想的启发，Lin 和 Xi （2010年）提出计算分布式 $U$-统计量，以替代经典的 $U$-统计量。分布式 $U$-统计量定义如下。首先，将随机样本划分为 $k$ 个子集。第 $i$ 个子集中的观测值记为 $\mathbb{S}_i$: $= \{X_{i1}, \ldots, X_{in_i}\}$，而 $U_{N,\,i}$ 表示根据该子集计算得到的 $U$-统计量。分布式 $U$-统计量定义为以下各项的加权平均值: $U_{N,\,1}$，$\cdots$，$U_{N,\,k}$:

$$U_d := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i U_{N,i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} \cdot \binom{n_i}{m}^{-1} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n_i} h(X_{ij_1}, \ldots, X_{ij_m}). \quad (3.8)$$

计算式（3.8）中的分布式 $U$-统计量的时间复杂度约为 $k(N/k)^m$。与经典 $U$-统计量的 $O(N^m)$ 复杂度相比，其计算成本显著降低。剩下的问题是，分布式 $U$-统计量在统计上是否等价于经典 $U$-统计量。对于非退化情形，即 $\sigma_1^2 = \mathbb{E}[g^2(X_1)] > 0$，其中$g(x) = \mathbb{E}[(h(X_1, \ldots, X_m) - \theta) \mid X_1 = x]$，Lin 和 Xi （2010 年）证明，若 $\mathbb{E}[h^2(X_1, \ldots, X_m)] < \infty$ 且 $k = o(N)$，则

$$W := \frac{\sqrt{N}}{m\sigma_1}(U_d - \theta) \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{as } N \to \infty.$$

Chen 和 Peng(2021年) 研究了广义分布式对称统计量。具体而言，他们考虑了如下形式的对称统计量:

$$T_N = \theta + N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \alpha(X_i) + N^{-2} \sum_{1\le i<j\le N} \beta(X_i, X_j) + R_N,$$

其中 $\theta$ 是感兴趣参数，$\alpha(x)$ 和 $\beta(x, y)$ 是已知函数，$R_N$ 是余项。根据 Hoeffding 分解，$U$-统计量是 $T_N$. 的特例。为展示分布式方法的可行性，他们在附录中研究了一些次数为 2 的分布式 $U$-统计量的性质。具体而言，假设 $\mathbb{E}|g(X_1)|^3 < \infty$，$\mathbb{E}\{h(X_1, X_2)\}^2 < \infty$，$c_1 \le \inf_{k_1,k_2} n_{k_1}/n_{k_2} \le \sup_{k_1,k_2} n_{k_1}/n_{k_2} \le c_2$ 对某个正常数 $c_1$ 以及 $c_2$，$k = O(N^a)$ 对某个正常数 $a < 1/2$，他们证明，当$N \to \infty$时，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(W \le x) - \mathbb{P}(N^{1/2}(U_N - \theta)/(2\sigma_1) \le x)\right| = o(N^{-1/2}).$$

应用定理 5.1，我们得到 $W$的 Berry–Esseen 界

**定理 3.4**。 如果 $\mathbb{E}h^4$（$X_1$、$\cdots$、$X_m$）$< \infty$、$\sigma_1 > 0$ 且 $n_i \ge m$、$1 \le i \le k$，则

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\Big(\frac{W}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}} \le z\Big) - \Phi(z)\right| \le \frac{Cm}{\sqrt{N}} \cdot \frac{\|h\|_4^3}{\sigma_1^3}, \quad (3.9)$$

其中 $\|h\|_p = \big(\mathbb{E}|h(X_1, \cdots, X_m)|^p\big)^{1/p}$。

**注 3.5**。 令 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(h(X_1, X_2, \cdots, X_m))$，根据 Chen、Goldstein 和 Shao(2011年，引理 10.1)，我们有

$$\Big|\frac{n_i}{m^2\sigma_1^2}\,\mathrm{Var}(U_{N,i}) - 1\Big| \le \frac{(m-1)^2\sigma^2}{m(n_i - m + 1)\sigma_1^2},$$

这进一步意味着

$$\big|\,\mathrm{Var}(W) - 1\big| \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \Big|\frac{n_i}{m^2\sigma_1^2}\,\mathrm{Var}(U_{N,i}) - 1\Big| \le \frac{Cm\sigma^2}{N\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n_i - m + 1}. \tag{3.10}$$

结合定理 3.4 和（3.10），我们还可以得到关于$W$的 Berry–Esseen 界：

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\big|\mathbb{P}(W \le z) - \Phi(z)\big| \le \frac{Cm}{\sqrt{N}}\cdot\frac{\|h\|_4^3}{\sigma_1^3} + \frac{Cm\sigma^2}{N\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n_i - m + 1}. \tag{3.11}$$

若 $n_i \ge 2m$ 且 $k = O(\sqrt{N})$，则（3.11）右侧的阶为 $O(1/\sqrt{N})$。 —

**注 3.6**。 与Chen 和 Peng （2021年）相比，我们的结果通过对 $W$ 进行标准化，去除了条件 $k = O(N^a)$（其中 $a < 1/2$ 为某个正常数），但代价是要求四阶矩有限。在Lin 和 Xi （2010年）和Chen 和 Peng （2021年）的证明中，每个 $\sqrt{n_i}U_{N,\,i}/(m\sigma_1)$ 都被分解为$W_i + \Delta_i$，其中 $W_i$ 渐近服从正态分布，而当 $n_i \to \infty$ 时， $\Delta_i \xrightarrow{p} 0$。因此，最终的统计量 $W$ 可以写成一个主项加上余项 $\Delta = \sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i/N}\,\Delta_i$；如果子集大小 $n_i$ 太小，余项可能并不小。直观而言，这种方法会累加各个块产生的误差，因此要求块的数量不能太多。然而，分布式$U$-统计量可以看作某些相依随机变量之和。因此，将其作为整体处理，可以避免误差累积的问题。

### *3.3.* 针对 $m$-相依随机变量的约束 $U$-统计量

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为某个固定整数 $m \ge 0$. 下的平稳 $m$-相依随机变量序列。给定约束 $\mathcal{D} = (d_1, \cdots, d_{l-1}) \in \bar{\mathbb{N}}^l$，其中$\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，约束 $U$-统计量定义为

$$U_n(f;\mathcal{D}) := \sum_{\substack{1\le i_1 < \cdots < i_l \le n \\ i_{j+1} - i_j \le d_j}} f(X_{i_1}, \cdots, X_{i_l}), \tag{3.12}$$

其中 $f: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，不一定是对称的。受约束的 $U$-统计量最早由 Janson (2023年) 研究，其动机来自随机字符串和排列中的模式匹配问题。为说明研究受约束 $U$-统计量的重要性，我们给出以下两个例子。

**例3.7**。给定一个有限字母表 $\mathcal{A}$，从 $\mathcal{A}$ 中取出的长度为 $n$ 的随机字符串可表示为 $\Xi_n = \xi_1 \cdots \xi_n$，其中 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 是取值于 $\mathcal{A}$的独立同分布随机变量。给定一个词 $\mathbf{w} = w_1 \cdots w_l (l \le n)$ 和$\mathcal{D} = (d_1, \cdots, d_{l-1}) \in \bar{\mathbb{N}}^{l-1}$，$\Xi_n$ 中满足约束 $\mathcal{D}$ 的词 $\mathbf{w}$ 的一个出现 是一个指标序列 $i_1, i_2, \cdots, i_l \in [n]$，满足

$$0 < i_{j+1} - i_j \le d_j,\ 1 \le j < l \quad \text{and} \quad \xi_{i_k} = w_k \quad \text{for each } k \in [l]. \tag{3.13}$$

令 $N_n(\mathbf{w}; \mathcal{D})$ 表示满足约束 $\mathcal{D}$ 的 $\mathbf{w}$ 在 $\Xi_n$ 中出现的次数。那么，可以验证

$$N_n(\mathbf{w}; \mathcal{D}) = U_n(f; \mathcal{D}) \tag{3.14}$$

with

$$f(x_1, \cdots, x_l) = \mathbf{1}(x_1 x_2 \cdots x_l = \mathbf{w}) = \mathbf{1}(x_i = w_i,\ \forall\, i \in [l]). \tag{3.15}$$

也就是说，$N_n(\mathbf{w}; \mathcal{D})$ 是约束 $U$-统计量的一个特例。

字符串匹配有许多应用，例如计算机安全领域的入侵检测、基因搜索等。更多详情请参见 Flajolet、Szpankowski 和 Vall´ee (2006)；Jacquet 和 Szpankowski(2015)；Nicod`eme、Salvy 和 Flajolet (2002)。另一个类似的约束 $U$-统计量示例是随机排列中的模式匹配。

**例3.8**。令 $\mathcal{G}_n$ 表示由 $[n]$. For$\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathcal{G}_n$ 和 $\tau = \tau_1 \cdots \tau_l \in \mathcal{G}_l$ 的所有排列组成的集合，其中 $l \le n$；在 $\pi$ 中满足约束 $\mathcal{D}$ 的 $\tau$ 的一次出现 是一个指标序列 $i_1, i_2, \cdots, i_l \in [n]$，满足

$$0 < i_{j+1} - i_j \le d_j \text{ for } 1 \le j < l \quad \text{and} \quad \pi_{i_k} < \pi_{i_l} \Longleftrightarrow \tau_k < \tau_l \text{ for } k \ne l \in [l]. \tag{3.16}$$

也就是说，$\pi_{i_1} \cdots \pi_{i_l}$与 $\tau_1 \cdots \tau_l$. 具有相同的序关系。令 $N_n(\tau, \mathcal{D})$表示 $\pi$中 $\tau$ 出现的次数，其中 $\pi$ 在 $\mathcal{G}_n$.中服从均匀分布。注意，随机变量 $\pi \in \mathcal{G}_n$ 可按如下方式生成：生成一列在$(0, 1)$上服从均匀分布的独立同分布随机变量 $\{X_i\}_{i=1}^n$，然后将 $X_1, \cdots, X_n$的值按递增顺序替换为$1, \cdots, n$。那么，$N_n(\tau, \mathcal{D})$是一个受约束的 $U$-统计量，其

$$f(x_1, \cdots, x_l) := \prod_{1 \le i < j \le l} \mathbf{1}\big\{(x_i - x_j)(\tau_i - \tau_j) > 0\big\}.$$

如果 $d_1 = \cdots = d_{l-1} = \infty$，我们将 $\mathcal{D}$记为 $\mathcal{D}_\infty$，B´ona (2007)证明了$N_n(\tau, \mathcal{D}_\infty)$是渐近正态的。对于粘连型 $\mathcal{D}$（即 $d_i \in \{1, \infty\}$），Hofer(2018)研究了 $N_n(\tau, \mathcal{D})$的渐近正态性。

Janson (2023年) 为受约束的 $U$-统计量（具有有界函数） $f$。对于给定的受约束 $\mathcal{D}$，定义

$$b := b(\mathcal{D}) = l - |\{k \in [l-1] : d_k < \infty\}| = 1 + |\{k \in [l-1] : d_k = \infty\}|.$$

Let

$$W_1 = \frac{U_n(f;\mathcal{D}) - \mathbb{E}\{U_n(f;\mathcal{D})\}}{\sqrt{\mathrm{Var}(U_n(f;\mathcal{D}))}}, \tag{3.17}$$

若 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(U_n(f;\mathcal{D})/n^{2b-1} = \sigma_{f,\mathcal{D}}^2 > 0$，则

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| = O(n^{-1/2}).$$

本文应用定理 2.1 和 2.2，得到了非自归一化和自归一化约束 $U$-统计量的 Berry–Esseen界。为定义自归一化约束 $U$-统计量，我们先引入一些记号。令 $\mathcal{I} \subset [n]^l$ 表示和式（$i_1, \cdots, i_l$）中所有指标的集合（3.12），则 $U_n(f;\mathcal{D}) - \mathbb{E}\{U_n(f;\mathcal{D})\}$ 可改写为

$$U_n(f;\mathcal{D}) - \mathbb{E}\{U_n(f;\mathcal{D})\} = \sum_{i\in\mathcal{I}} Z_i,$$

其中 $Z_i := Z_{(i_1,\cdots,i_l)} = f(X_{i_1}, \cdots, X_{i_l}) - \mathbb{E}\{f(X_{i_1}, \cdots, X_{i_l})\}$. 对于任意 $i = (i_1, \cdots, i_l) \in \mathcal{I}$，注意到 $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$，令 $s(i)$ 表示由向量 $i$ 每一列的元素构成的集合，即 $s(i) = \{i_1, \cdots, i_l\}$. 此外，对于 $i, j \in \mathcal{I}$，定义

$$|i - j| = \min_{p\in s(i), q\in s(j)} |p - q|.$$

此外，对于任意 $i \in \mathcal{I}$，定义

$$A_{i1} = \{k \in \mathcal{I} : s(k) \cap s(i) \neq \varnothing\}, \quad A_{i2} = \{k \in \mathcal{I} : s(k) \cap s(i) = \varnothing \text{ and } |i-k| \le m\}.$$

设 $A_i = A_{i1} \cup A_{i2}$ 和 $Y_i = \sum_{i\in A_i} Z_i$，，则自标准化约束$U$-统计量定义为

$$W_2 = \sum_{i\in\mathcal{I}} Z_i/V, \quad V = \sqrt{\Big(\sum_{i\in\mathcal{I}} Z_i Y_i - \bar{Z}\bar{Y}\Big)_+}, \tag{3.18}$$

其中 $Z = \sum_{i\in\mathcal{I}} Z_i/|\mathcal{I}|$ 且 $Y = \sum_{i\in\mathcal{I}} Y_i/|\mathcal{I}|$。我们有以下定理。

**定理3.9.** 对于固定的 $\mathcal{D} \in \bar{\mathbb{N}}^l$，令 $W_1$ 和 $W_2$ 分别由(3.17)和(3.18)定义。对于 $i = (i_1, \cdots, i_l) \in \mathcal{I}$，将 $f_i$ 记为 $f(X_{i_1}, \cdots, X_{i_l})$。假设$\mathbb{E}|f_i|^4 < \infty$且$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(U_n(f;\mathcal{D})/n^{2b-1} = \sigma_{f,\mathcal{D}}^2 > 0$，则

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| \le C_{m,l}\Big(\frac{n^{-b-1/2}}{\sigma_{f,\mathcal{D}}^3}\sum_{i\in\mathcal{I}} \|f_i\|_4^3 + \frac{n^{-b/2-1/2}}{\sigma_{f,\mathcal{D}}^2}\Big(\sum_{i\in\mathcal{I}} \|f_i\|_4^4\Big)^{1/2}\Big) \tag{3.19}$$

*and*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_2\le z)-\Phi(z)| \le C_{m,l}\Big(\frac{n^{-b-1/2}}{\sigma_{f,\mathcal{D}}^3}\sum_{i\in\mathcal{I}}\|f_i\|_4^3+\frac{n^{-b/2-1/2}}{\sigma_{f,\mathcal{D}}^2}\big(\sum_{i\in\mathcal{I}}\|f_i\|_4^4\big)^{1/2}\Big)\cdot\frac{n^{-b}}{\sigma_{f,\mathcal{D}}^2}\sum_{i\in\mathcal{I}}\|f_i\|_2^2, \tag{3.20}$$

其中$C_{m,l}$ 是依赖于 $m$, $l$, $f$ 和 $\mathcal{D}$的正常数，且$\sigma_{f,\mathcal{D}}$ 是依赖于 $f$ 和 $\mathcal{D}$.的正常数

**注 3.10**。 若 $f$ 有界，注意到 $|\mathcal{I}|=O(n^b)$，则由定理 3.9可得，对于 $k=1$ 或 2,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_k\le z)-\Phi(z)|\le C_{m,l}\max\big\{\|f\|_\infty^5/\sigma_{f,\mathcal{D}}^5,\ 1\big\}\cdot n^{-1/2},$$

其中 $\|f\|_\infty=\sup_{(x_1,\cdots,x_l)\in\mathbb{R}^l}|f(x_1,\ \cdots,\ x_l)|$.

**注 3.11**。 若对任意 $i\neq j\in\mathcal{I}$， $\mathbb{E}|f_i|^4=\mathbb{E}|f_j|^4$，由（3.19）和（3.20）可得，对于 $k=1$ 或 2,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_k\le z)-\Phi(z)|\le C_{m,l}\max\big\{\|f_i\|_4^5/\sigma_{f,\mathcal{D}}^5,\ 1\big\}\cdot n^{-1/2}. \tag{3.21}$$

**注 3.12**。 在（3.12）中将 $i_{j+1}-i_j\le d_j$ 替换为 $i_{j+1}-i_j=d_j$，若 $d_j<\infty$, 则可得到另一种类似的统计量，即Janson （2023）中的精确约束 $U$-统计量。类似地，我们可以构造非自标准化和自标准化的精确约束 $U$-统计量，分别记为 $W_3$ 和 $W_4$。应用定理 2.1和 2.2，可为 $W_3$ 和 $W_4$得到类似的 Berry–Esseen 界，其系数为 $C_{m,\ l}$，不同于 $W_1$ 和 $W_2$对应的系数。

### *3.4.* 装饰单射同态和

在本小节中，我们关注装饰随机图模型的中心极限定理，这类模型是 Erd˝os–R´enyi 随机图模型的扩展。装饰图由 Lov´asz 和 Szegedy (2010年) 引入，随后沿着多个方向得到发展，包括 Banach 空间装饰图子（Kunszenti-Kov´acs、Lov´asz 和Szegedy，2022）和概率值图子（Abraham、Delmas 和 Weibel，2025），以及多层网络中装饰图子的统计推断（Dufour 和 Olhede，2024）。然而，迄今为止，在如此一般的情形下，装饰子图统计量的中心极限定理似乎受到的关注要少得多。

令 $\mathcal{B}$ 为任意可测空间。一个 $\mathcal{B}$-装饰图 是一对 $(G,\ g)$，其中 $G$ 是一个顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G)$ 的简单（无自环）图，并且 $g:E(G)\to\mathcal{B}$。对于固定的 $n\ge1$，令 $\{X_{ij}:\ 1\le i<j\le n\}$ 为独立的 $\mathcal{B}$ 值随机变量，并令 $G_n$ 为顶点集 $[n]$ 上的完全图。我们在 $G_n$ 上定义一个对称边装饰 $g$，如下所示:

$$g(i,j)=g(j,i):=X_{ij}\quad\text{if } i\neq j.$$

对于固定的 $\mathcal{B}$-装饰图 $(F,\ f)$，与 $(F,\ f)$ 在 $(G_n,\ g)$ 中相关联的自然装饰子图计数统计量为装饰单射同态和

$$S_n = S_{n,h} := \sum_{\substack{\varphi: V(F)\to[n] \\ \varphi \text{ injective}}} \prod_{uv\in E(F)} h\big(f(uv), g(\varphi(u),\varphi(v))\big), \tag{3.22}$$

其中 $h:\ \mathcal{B}\times\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ 是一个可测函数。许多例子都可以写成（3.22）的形式。下面用两个例子加以说明；更多例子请参见 Lov´asz 和 Szegedy(2010年)。

**例 3.13** （Erd˝os–R´enyi 随机图模型）。 Erd˝os–R´enyi 随机图$G(n,p)$ 定义在顶点集 $[n]=\{1,\dots,n\}$ 上，其中每对顶点 $i$ 和 $j$ 都以概率 $p$ 独立地由一条边连接，以概率 $1-p$不连接。对于一个至少含有一条边的固定图 $F$，令$N(F,G(n,p))$ 表示 $G(n,p)$ 中与 $F$ 同构的无标号子图数量。令 $\mathcal{B}=\{0,1\}$，令 $f\equiv 1$, $h(x,y)=xy$, 并令 $\{X_{ij}:\ 1\le i<j\le n\}$ 为参数为 $p$ 的独立同分布 Bernoulli 随机变量。于是,

$$S_n = |\mathrm{Aut}(F)|\, N(F,G(n,p))\,,$$

其中，Aut$(F)$ 表示 $F$ 的自同构群。

关于 $N(F,G(n,p))$ 的中心极限定理已有大量研究。特别地，Ruci´nski（1988）获得了 $N(F,G(n,p))$ 满足中心极限定理的充要条件。此外，还有多项研究在各种度量下建立了定量正态近似界；例如，Barbour、Karo´nski 和 Ruci´nski（1989）；方（2019）；Eichelsbacher and Rednoß（2023）。关于非齐次随机图中加权三角形计数的中心极限定理，另请参见 Shao 和 Zhang（2025）。

**例 3.14** （边着色完全图）。 令 $\mathcal{B}=K$，其中 $K=\{c_1,c_2,\dots,c_d\}$ 是一个颜色集合，并取

$$h(x,y)=\mathbf{1}_{\{x=y\}}.$$

假设 $\{X_{ij}\}$ 是具有公共分布 $\mu$ 的独立同分布随机变量，该分布定义在 $K$ 上。在此情形下，$S_n(h)$ 统计 $G_n$ 中与 $f$ 所规定的边颜色相匹配的 $F$ 的单射副本数。

我们将应用定理 2.1 和2.2 ，为$S_n$在非自归一化和自归一化两种情形下建立 Berry–Esseen界。为此，我们首先将 $S_n$ 改写为局部依赖随机变量之和。引入所有单射顶点映射的指标集

$$\mathcal{I} := \big\{\varphi : V(F)\hookrightarrow[n]\big\}.$$

对于 $\varphi\in\mathcal{I}$，定义

$$\xi_\varphi := \prod_{uv\in E(F)} h\big(f(uv), g(\varphi(u),\varphi(v))\big).$$

由 $S_n$ 的定义可知

$$S_n = \sum_{\varphi \in \mathcal{I}} \xi_\varphi. \tag{3.23}$$

每个 $\varphi \in \mathcal{I}$ 给出一个像子图 $G_\varphi$，其顶点集为 $\varphi(V(F))$，边集为$\{\{\varphi(u)\ \varphi(v)\} : uv \in E(F)\}$。对于每个 $\psi \in \mathcal{I}$，令

$$A_\varphi = \{\psi \in \mathcal{J} : e\,(G_\psi \cap G_\varphi) \geq 1\} \quad \text{and} \quad Y_\varphi = \sum_{\psi \in A_\varphi} \xi_\psi - \mathbb{E}\{\xi_\psi\}.$$

定义

$$W_1 = \frac{S_n - \mathbb{E}\{S_n\}}{\mathrm{Var}(S_n)}, \quad \text{and} \quad W_2 = \frac{S_n - \mathbb{E}\{S_n\}}{V}, \tag{3.24}$$

其中 $\eta_\varphi = \xi_\varphi - \mathbb{E}\{\xi_\varphi\}$,

$$V = \sqrt{\Big(\sum_{\varphi \in \mathcal{I}} \eta_\varphi Y_\varphi - \bar{\eta}\bar{Y}\Big)_+}, \quad \bar{\eta} = \sum_{\varphi \in \mathcal{I}} \frac{\eta_\varphi}{|\mathcal{I}|} \quad \text{and} \quad \bar{Y} = \sum_{\varphi \in \mathcal{I}} \frac{Y_\varphi}{|\mathcal{I}|}.$$

定理 2.1 和 2.2导出以下定理。

**定理 3.15**。 设 $W_1$ 和 $W_2$ 分别如（*3.24*）以及 $v = v\,(F)$ 中所定义，则

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \leq z) - \Phi(z)| \leq C n^{-2v-4} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mathbb{E}|\eta_i|^3}{\sigma_n^3} + C\Big(n^{-3v-6} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mathbb{E}|\eta_i|^4}{\sigma_n^4}\Big)^{1/2} \tag{3.25}$$

*and*

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_2 \leq z) - \Phi(z)| \leq C\lambda_2 n^{-2v-4} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mathbb{E}|\eta_i|^3}{\sigma_n^3} + C\lambda_2\Big(n^{-3v-6} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mathbb{E}|\eta_i|^4}{\sigma_n^4}\Big)^{1/2}, \tag{3.26}$$

其中 $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_n)$, $\lambda_2 = n^{-v-2} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}|\eta_i|^2/\sigma_n^2$ 且 $C$ 是一个仅依赖于 $F$. 的正常数

注 3.16. 现在我们对 Var($S_n$) 作几点说明。对于随机图 $G(n,p)$ 中的子图计数，根据 Barbour、Karo´nski 和 Ruci´nski（1989）的 (3.7)，Var($S_n$) $\geq Cn^{2v-2}$ 当且仅当 $p$ 与 $n$ 独立。在这种情况下，由于 $|\mathcal{I}| = O(n^v)$，应用 (3.25) 和 (3.26) 可得，对于 $k = 1,2$,

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} \big|\mathbb{P}(W_k \leq z) - \Phi(z)\big| \leq Cn^{-1}.$$

据我们所知，这个针对 $W_2$ 的 Berry–Esseen 界是新的。

## 4. 预备引理与命题

本节首先给出一些预备引理，这些引理将用于定理2.1–2.2的证明，然后给出在（LD1）和（LD2）下的两个广义集中不等式。在本节中，对于任意子集 $A \in [n]$，记

$$N_A = \{k \in [n] : A_k \cap A \neq \varnothing\}, \quad N_A^c = [n] \backslash N_A \quad \text{and} \quad X_A = \{X_i : i \in A\}.$$

设 $\xi_A$ 是 $X_A$的任意非负可测函数。定义

$$D_A = \{(i,j) : j \in A_i, A \cap A_{ij} \neq \varnothing\}, \qquad D_{A,1} = \{(i,j) : j \in A_i, A \subset (A_i \cup A_j)^c\},$$
$$D_{A,2} = D_{A,1} \cap D_A^c, \qquad D_{A,3} = D_{A,1} \cap D_A.$$

此外，对于任意子集 $A \subset [n]$，令

$$S_{n,A} = \sum_{i \in N_A^c} X_i.$$

为简化记号，以下在不会引起混淆时，我们将省略下标 $n$，并简写为 $S_A := S_{n,A}$.

### *4.1.* 一些预备引理

以下引理给出了任意 $\mathbb{E}|\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}(X_iX_j - \mathbb{E}X_iX_j)|^2$ 和 $\mathbb{E}\{\xi_A^p\big|\sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in A_i\cap N_A^c}(X_iX_j - \mathbb{E}X_iX_j)\big|^2\}$ 的上界，其中 $p \geq 0$将在定理 2.1–2.2的证明中发挥重要作用。

**引理 4.1.** 在(LD1) 和(LD2)下，对任意 $p \geq 0$，我们有

$$\mathbb{E}\Big\{\xi_A^p\Big|\sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in A_i\cap N_A^c}(X_iX_j - \mathbb{E}X_iX_j)\Big|^2\Big\} \leq 4\|\xi_A\|_p^p \cdot (\gamma_A^2 + 4\gamma), \tag{4.1}$$

其中

$$\gamma_A = \sum_{(i,j)\in D_A}\|X_i\|_4\|X_j\|_4, \quad \gamma = \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in N_k\cup A_k}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_4\|X_l\|_4.$$

因此，

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}(X_iX_j - \mathbb{E}X_iX_j)\Big|^2 \leq 16\gamma. \tag{4.2}$$

证明。 注意到

$$\mathbb{E}\Big\{\xi_A^p\Big|\sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in A_i\cap N_A^c}(X_iX_j - \mathbb{E}X_iX_j)\Big|^2\Big\} = H_1 + H_2 + H_3, \tag{4.3}$$

其中

$$H_1 = \sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in A_i\cap N_A^c}\sum_{i'\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{j'\in N_A^c\cap A_{i'}^c\cap A_{ij}^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'}-\mathbb{E}X_{i'}X_{j'})\big\},$$

$$H_2 = \sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in A_i\cap N_A^c}\sum_{i'\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{j'\in N_A^c\cap A_{i'}\cap A_{ij}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'}-\mathbb{E}X_{i'}X_{j'})\big\},$$

$$H_3 = \sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in A_i\cap N_A^c}\sum_{i'\in N_A^c\cap A_{ij}}\sum_{j'\in N_A^c\cap A_{i'}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'}-\mathbb{E}X_{i'}X_{j'})\big\}.$$

对于 $H_1$，为方便起见，令

$$I_{i,j,k} = \mathbf{1}(i\in A_{jk}^c). \tag{4.4}$$

注意，根据 $N_A$的定义，我们有

$$i\in N_A^c \Longleftrightarrow A\cap A_i = \varnothing,$$

则 $\{(i,\ j);\ i\in N_A^c,\ \ j\in A_i\cap N_A^c\} = D_{A,\ 1}$. 利用 $D_{A,\ 1} = D_{A,\ 2}\cup D_{A,\ 3}$ 这一事实，我们有

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{(i,j)\in D_{A,1}}\sum_{(i',j')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'}-\mathbb{E}X_{i'}X_{j'})\big\}I_{i',i,j}I_{j',i,j}\\ &:= H_{11}+H_{12}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中

$$H_{11} = \sum_{(i,j)\in D_{A,2}}\sum_{(i',j')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'}-\mathbb{E}X_{i'}X_{j'})\big\}I_{i',i,j}I_{j',i,j},$$

$$H_{12} = \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{(i',j')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'}-\mathbb{E}X_{i'}X_{j'})\big\}I_{i',i,j}I_{j',i,j}.$$

对于 $H_{11}$，注意，若 $i'\in A_{ij}^c,\ \ j'\in A_{ij}^c,\ \ A\in A_{ij}^c$，则 $(X_i,\ \ X_j)$ 与 $(\xi_A,\ X_{i'},\ X_{j'})$ 独立，这进一步意味着

$$H_{11} = 0. \tag{4.6}$$

对于 $H_{12}$，我们将 $H_{12}$ 改写如下:

$$H_{12} = H_{121}+H_{122}+H_{123}+H_{124}, \tag{4.7}$$

其中 $M(i,\ j,\ i',\ j') = (X_iX_j - \mathbb{E}X_iX_j)(X_{i'}X_{j'} - \mathbb{E}X_{i'}X_{j'})$，并且

$$
\begin{aligned}
H_{121} &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \sum_{(i',j')\in D_{A,2}} \mathbb{E}\{\xi_A^p M(i,j,i',j')\} I_{i',i,j} I_{j',i,j} \cdot I_{i,i',j'} I_{j,i',j'}, \\
H_{122} &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \sum_{(i',j')\in D_{A,3}} \mathbb{E}\{\xi_A^p M(i,j,i',j')\} I_{i',i,j} I_{j',i,j} \cdot I_{i,i',j'} I_{j,i',j'}, \\
H_{123} &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \sum_{(i',j')\in D_{A,1}} \mathbb{E}\{\xi_A^p M(i,j,i',j')\} I_{i',i,j} I_{j',i,j} \cdot I_{i,i',j'} (1 - I_{j,i',j'}), \\
H_{124} &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \sum_{(i',j')\in D_{A,1}} \mathbb{E}\{\xi_A^p M(i,j,i',j')\} I_{i',i,j} I_{j',i,j} \cdot (1 - I_{i,i',j'}).
\end{aligned}
$$

对于 $H_{121}$，注意到若 $i \in A^c_{i'j'}$，$j \in A^c_{i'j'}$，$A \in A^c_{i'j'}$，则 $(X_{i'},\ X_{j'})$ 与 $(X_i,\ X_j,\ \xi_A)$ 相互独立，进而可得

$$
H_{121} = 0. \tag{4.8}
$$

对于 $H_{122}$，由于 $(i,\ j) \in D_{A,\ 3}$ 且 $(i',\ j') \in D_{A,\ 3}$，因此 $A \in (A_i \cup A_j \cup A_{i'} \cup A_{j'})^c$。由霍尔德不等式和杨氏不等式可得

$$
\begin{aligned}
|H_{122}| &\le 4 \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \sum_{(i',j')\in D_{A,3}} \|\xi_A\|_p^p \cdot \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \|X_{i'}\|_4 \|X_{j'}\|_4 \\
&\le 4\|\xi_A\|_p^p \cdot \gamma_A^2.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

对于 $H_{123}$，再次由霍尔德不等式和杨氏不等式可得

$$
\begin{aligned}
|H_{123}| &\le 4 \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in A_i} \sum_{i'\in[n]} \sum_{j'\in A_{i'}} \|\xi_A\|_p^p \cdot \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \|X_{i'}\|_4 \|X_{j'}\|_4 \mathbf{1}(j \in A_{i'j'}) \\
&\le 4\|\xi_A\|_p^p \cdot \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in A_i} \sum_{k\in A_{ij}} \sum_{l\in N_k} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \|X_k\|_4 \|X_l\|_4.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

类似地，可得

$$
|H_{124}| \le 4\|\xi_A\|_p^p \cdot \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in A_i} \sum_{k\in A_{ij}} \sum_{l\in A_k} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \|X_k\|_4 \|X_l\|_4. \tag{4.11}
$$

结合（4.5）–（4.11）可得

$$
|H_1| \le 4\|\xi_A\|_p^p \cdot (\gamma_A^2 + 2\gamma). \tag{4.12}
$$

对于 $H_2$ 和 $H_3$，采用与推导（4.10）类似的论证，可得

$$
|H_2| \le 4\gamma \quad \text{and} \quad |H_3| \le 4\gamma. \tag{4.13}
$$

于是，由（4.1）、（4.3）、（4.12）和（4.13）可得。 □

下面的引理给出了 $\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^2\}$ 的上界。

**引理 4.2.** 假设（LD1）和（LD2）成立，则对于任意 $p \geq 0$，有

$$\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^2\} \leq \|\xi_A\|_p^p \cdot \Big(\mathbb{E}\{S_A^2\} + 2 \sum_{(i,j)\in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4\Big). \tag{4.14}$$

证明。 注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^2\} &= \sum_{i\in N_A^c} \sum_{j\in N_A^c} \mathbb{E}\{\xi_A^p X_i X_j\} = \sum_{i\in N_A^c} \sum_{j\in N_A^c\cap A_i} \mathbb{E}\{\xi_A^p X_i X_j\} \\ &:= R_1 + R_2,\end{aligned}$$

其中

$$R_1 = \sum_{(i,j)\in D_{A,2}} \mathbb{E}\{\xi_A^p X_i X_j\}, \quad R_2 = \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \mathbb{E}\{\xi_A^p X_i X_j\}.$$

对于 $R_1$，由于 $(i,j) \in D_{A,2}$，因此 $(X_i, X_j)$ 与 $\xi_A$ 独立，于是

$$\begin{aligned}R_1 &= \sum_{(i,j)\in D_{A,2}} \mathbb{E}\{\xi_A^p\}\mathbb{E}\{X_i X_j\} \\ &= \mathbb{E}\{\xi_A^p\} \cdot \sum_{i\in N_A^c} \sum_{j\in N_A^c\cap A_i} \mathbb{E}\{X_i X_j\} - \mathbb{E}\{\xi_A^p\} \cdot \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \mathbb{E}\{X_i X_j\} \\ &\leq \mathbb{E}\{\xi_A^p\} \cdot \Big(\mathbb{E}\{S_A^2\} + \sum_{(i,j)\in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4\Big).\end{aligned}$$

对于 $R_2$，注意到 $A \in A_i^c$ 和 $A \in A_j^c$，于是 $\xi_A \perp\!\!\!\perp X_i$ 和 $\xi_A \perp\!\!\!\perp X_j$，这进一步意味着

$$|R_2| \leq \mathbb{E}\{\xi_A^p\} \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \|X_i\|_2 \|X_j\|_2 \leq \|\xi_A\|_p^p \sum_{(i,j)\in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4.$$

□

Let

$$\bar{V} = \psi\Big(\sum_{i\in[n]} X_i Y_i\Big) \quad \text{and} \quad \bar{W}_2 = \sum_{i\in[n]} X_i/\bar{V},$$

其中 $\psi(x) = \big((x \vee (\sigma^2/4)) \wedge (2\sigma^2)\big)^{1/2}$. 以下引理在定理 2.2 的证明中很有用。

**引理 4.3.** 假设 (LD1) 成立，且

$$\kappa^2 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3 \leq 1/500, \tag{4.15}$$

那么，对于满足 $\|f\|_\infty \leq 1$ 和 $\|f'\|_\infty \leq 1$ 的任意绝对连续函数 $f$，我们有

$$\sum_{i\in[n]} \Big|\mathbb{E}\Big\{\frac{X_i}{\bar{V}} f\Big(\bar{W}_2 - \frac{Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\}\Big| \leq \frac{27\kappa^2}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3 + \frac{11\kappa^3}{\sigma^4} \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^4, \tag{4.16}$$

其中 $Y_i = \sum_{j\in A_i} X_i$.

证明。令

$$\bar{V}^{(i)} = \psi\Big( \sum_{k\in A_i^c} \sum_{l\in A_i^c\cap A_k} X_k X_l \Big),$$

则 $X_i$ 与（$\bar{V}^{(i)}$ $S - Y_i$）独立，进而可得

$$\sum_{i\in[n]} \Big|\mathbb{E}\Big\{ \frac{X_i}{\bar{V}} f\Big(\bar{W}_2 - \frac{Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\}\Big| = \sum_{i\in[n]} \Big|\mathbb{E}\Big\{ \frac{X_i}{\bar{V}} f\Big(\frac{S-Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\} - \mathbb{E}\Big\{ \frac{X_i}{\bar{V}^{(i)}} f\Big(\frac{S-Y_i}{\bar{V}^{(i)}}\Big)\Big\}\Big|. \tag{4.17}$$

注意到 $\bar{V} \geqslant \sigma/2$ 和 $\bar{V}^{(i)} \geqslant \sigma/2$。于是可得

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{\bar{V}} - \frac{1}{\bar{V}^{(i)}}\Big| &\leq \frac{1}{\bar{V}\bar{V}^{(i)}\big(\bar{V}+\bar{V}^{(i)}\big)} \Big| \sum_{k\in A_i}\sum_{l\in A_k} X_k X_l + \sum_{k\in A_i^c}\sum_{l\in A_i\cap A_k} X_k X_l \Big| \\ &\leq \frac{4}{\sigma^3}\Big( \sum_{k\in A_i}\sum_{l\in A_k} |X_k X_l| + \sum_{k\in A_i^c}\sum_{l\in A_i\cap A_k} |X_k X_l| \Big). \end{aligned} \tag{4.18}$$

由（4.17）、（4.18）以及 $\|f\|_\infty \leq 1$， $\|f'\|_\infty \leq 1$这一事实，得到

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in[n]} \Big|\mathbb{E}\Big\{ \frac{X_i}{\bar{V}} f\Big(\bar{W}_2 - \frac{Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\}\Big| \\ &\leq \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}\Big\{ \Big(1 + \frac{2\,|S-Y_i|}{\sigma}\Big)\cdot |X_i| \cdot \Big|\frac{1}{\bar{V}} - \frac{1}{\bar{V}^{(i)}}\Big|\Big\} \\ &\leq \frac{4}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_j} \mathbb{E}\Big\{ \Big(1 + \frac{2\,|S-Y_i|}{\sigma}\Big) |X_i X_j X_k| \Big\} \\ &\quad + \frac{4}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in N_j} \mathbb{E}\Big\{ \Big(1 + \frac{2\,|S-Y_i|}{\sigma}\Big) |X_i X_j X_k| \Big\} \\ &\leq 8\kappa^2 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中

$$I_1 = \frac{16\kappa^2}{3\sigma^4} \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}\big\{ |S-Y_i| \cdot \big|X_i^3\big| \big\}, \qquad I_2 = \frac{16\kappa}{3\sigma^4} \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i} \mathbb{E}\big\{ |S-Y_i| \cdot \big|X_j^3\big| \big\},$$

$$I_3 = \frac{8\kappa}{3\sigma^4} \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_j} \mathbb{E}\big\{ |S-Y_i| \cdot \big|X_k^3\big| \big\}, \quad I_4 = \frac{8\kappa}{3\sigma^4} \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in N_j} \mathbb{E}\big\{ |S-Y_i| \cdot \big|X_k^3\big| \big\}.$$

对于 $I_1$，回忆 $|A_i| \leq \kappa$，由闵可夫斯基不等式、H¨older 不等式和（4.15），可得

$$\|S - Y_i\|_2 \leq \|S\|_2 + \|Y_i\|_2 \leq \sigma + \Big(\kappa^2 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3\Big)^{1/3} \leq 1.126\sigma. \tag{4.20}$$

由（4.20），可得

$$I_1 \le 6.01\kappa^2 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3. \tag{4.21}$$

对于 $I_2$，由 H¨older 不等式可得

$$\Big\| \sum_{A_i\cup A_j} X_k \Big\|_2 \le \Big(\mathbb{E}\Big| \sum_{A_i\cup A_j} X_k\Big|^3\Big)^{1/3} \le \Big(4\kappa^2 \sum_{k\in[n]} \mathbb{E}|X_k|^3\Big)^{1/3} \le 0.2\sigma,$$

进而可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|S-Y_i|\cdot|X_j|^3\} &= \mathbb{E}\Big\{\Big| \sum_{k\in[n]\setminus(A_i\cup A_j)} X_k\Big|\cdot|X_j|^3\Big\} + \sum_{k\in A_j\setminus A_i} \mathbb{E}|X_kX_j^3| \\ &\le 1.2\sigma\mathbb{E}|X_j|^3 + \sum_{k\in A_j} \mathbb{E}|X_kX_j^3|. \end{aligned} \tag{4.22}$$

由（4.22）可得

$$I_2 \le 6.4\kappa^2 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3 + 5.34\kappa^3 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^4/\sigma^4. \tag{4.23}$$

同样，再由（4.22）可得

$$\max\{I_3, I_4\} \le 3.2\kappa^2 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^3/\sigma^3 + 2.67\kappa^3 \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^4/\sigma^4. \tag{4.24}$$

结合（4.19）、（4.21）、（4.23）和（4.24），我们完成了对（4.16）的证明。 □

下面的引理给出了 $\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^4\}$、$\mathbb{E}\{S^4\}$ 和 $\mathbb{E}\big(\sum_{i\in[n]} Y_i\big)^4$ 的上界

**引理 4.4**。假设（LD1）和（LD2）成立，并且

$$\frac{|A|^2\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3 \le \frac{1}{500} \quad \textit{and} \quad \frac{|A|^{1/2}\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2} \le \frac{1}{500}. \tag{4.25}$$

那么，对于任意 $p \ge 0$，有

$$\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^4\} \le 13\lambda\sigma^4\mathbb{E}\{\xi_A^p\} \tag{4.26}$$

*and*

$$\mathbb{E}\{S^4\} \le 13\lambda\sigma^4, \qquad \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in[n]} Y_i\Big)^4 \le 13\kappa^4\lambda\sigma^4, \tag{4.27}$$

其中

$$S = \sum_{i\in[n]} X_i \quad \text{and} \quad \lambda = \kappa\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_2^2/\sigma^2.$$

证明。我们首先证明（4.26）。令，$_A = \sum_{l\in A_i\cap N_A^c} X_l$，注意到

$$\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^4\} = \sum_{i\in N_A^c} \mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_i\big(S_A^3 - (S_A - Y_{i,A})^3\big)\big\} = H_1 - H_2 + H_3, \qquad (4.28)$$

其中

$$H_1 = 3\sum_{i\in N_A^c} \mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_i Y_{i,A} S_A^2\big\},\ H_2 = 3\sum_{i\in N_A^c} \mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_i Y_{i,A}^2 S_A\big\},\ H_3 = \sum_{i\in N_A^c} \mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_i Y_{i,A}^3\big\}.$$

对于 $H_1$，令 $Y_{ij} = \sum_{k\in A_{ij}\cap N_A^c} X_k$。利用基本不等式 $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$，我们得到

$$|H_1| = 3\Big|\sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i} \mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_i X_j S_A^2\big\}\Big| \le H_{11} + H_{12},$$

其中

$$H_{11} = 6\sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i} \mathbb{E}|\xi_A^p X_i X_j Y_{ij}^2|, \quad H_{12} = 6\sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i} \mathbb{E}|\xi_A^p X_i X_j (S_A - Y_{ij})^2|.$$

对于 $H_{11}$，根据杨氏不等式，我们有

$$\begin{aligned}
|H_{11}| &\le 6\kappa \sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}} \mathbb{E}|\xi_A^p X_i X_j X_k^2| \\
&\le 6\kappa \sum_{i\in N_A^c}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}} \Big(\frac{\mathbb{E}\{\xi_A^p X_i^4\}}{4} + \frac{\mathbb{E}\{\xi_A^p X_j^4\}}{4} + \frac{\mathbb{E}\{\xi_A^p X_k^4\}}{2}\Big) \\
&\le 3\mathbb{E}\xi_A^p \cdot (\kappa^3 + \kappa\tau) \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}|X_i|^4 \\
&\le 0.1\sigma^4 \mathbb{E}\{\xi_A^p\}.
\end{aligned} \qquad (4.29)$$

对于 $H_{12}$，注意到 $D_{A,\ 1} = D_{A,\ 2} \cup D_{A,\ 3}$，因此我们可以进一步将 $H_{12}$ 分解如下：

$$H_{12} = 6H_{121} + 6H_{122},$$

其中

$$H_{121} = \sum_{(i,j)\in D_{A,2}} \mathbb{E}\big|\xi_A^p X_i X_j (S_A - Y_{ij})^2\big|, \qquad H_{122} = \sum_{(i,j)\in D_{A,3}} \mathbb{E}\big|\xi_A^p X_i X_j (S_A - Y_{ij})^2\big|.$$

对于 $H_{121}$，采用与证明（4.14）类似的论证，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big|\xi_A^p(S_A-Y_{ij})^2\big| \\
&\quad=\sum_{(k,l)\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_kX_l\mathbf{1}(k\in A_{ij}^c)\mathbf{1}(l\in A_{ij}^c)\big\} \\
&\quad=\sum_{(k,l)\in D_{A,2}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_kX_l\mathbf{1}(k\in A_{ij}^c)\mathbf{1}(l\in A_{ij}^c)\big\} \\
&\qquad+\sum_{(k,l)\in D_{A,3}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p X_kX_l\mathbf{1}(k\in A_{ij}^c)\mathbf{1}(l\in A_{ij}^c)\big\} \\
&\quad\le \mathbb{E}\{\xi_A^p\}\cdot\Big(\mathbb{E}\{S_A^2\}+2\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in A_k\cup N_k}\mathbb{E}|X_kX_l|+\sum_{(k,l)\in D_A}\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big).
\end{aligned}\tag{4.30}$$

注意到 $|N_A|\le A\kappa$ 且 $|D_A|\le|A|\tau$，由（4.25），可得

$$\|S-S_A\|_2\le\sum_{k\in N_A}\|X_k\|_2\le\Big(|A|^2\kappa^2\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^3\Big)^{1/3}\le 0.126\sigma \tag{4.31}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,l)\in D_A}\|X_k\|_4\|X_l\|_4&\le\frac{1}{2}\Big(\sum_{(k,l)\in D_A}(\|X_k\|_4^2+\|X_l\|_4^2)^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{(k,l)\in D_A}1\Big)^{1/2} \\
&\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(|A|\tau\sum_{k\in[n]}\sum_{l\in A_k}(\|X_k\|_4^4+\|X_l\|_4^4)\Big)^{1/2} \\
&\le|A|^{1/2}\tau^{1/2}\kappa^{1/2}\Big(\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^4\Big)^{1/2}\le 0.01\sigma^2.
\end{aligned}\tag{4.32}$$

由（4.25）、（4.30）、（4.31）和（4.32），可得

$$\begin{aligned}
H_{121}&=\sum_{(i,j)\in D_{A,2}}\mathbb{E}|X_iX_j|\cdot\mathbb{E}\big|\xi_A^p(S_A-Y_{ij})^2\big| \\
&\le 1.5\lambda\sigma^4\mathbb{E}\{\xi_A^p\}+2\mathbb{E}\xi_A^p\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in A_k\cup N_k}\mathbb{E}|X_iX_j|\mathbb{E}|X_kX_l| \\
&\le 1.6\lambda\sigma^4\mathbb{E}\{\xi_A^p\},
\end{aligned}$$

其中 $\lambda = \kappa \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_2^2/\sigma^2$，最后一个不等式由此可得

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in A_k\cup N_k}\mathbb{E}|X_iX_j|\mathbb{E}|X_kX_l| \\
&\quad\le \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in A_k\cup N_k}(\|X_i\|_4^4+\|X_j\|_4^4+\|X_k\|_4^4+\|X_l\|_4^4) \\
&\quad\le 2(\kappa^3+\kappa\tau)\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4 \le 0.1\sigma^4.
\end{aligned}$$

对于 $H_{122}$，我们将 $H_{122}$ 改写如下：

$$H_{122} = \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\big\} = R_1+R_2, \quad (4.33)$$

其中

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c\cap A_k^c}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\big\}, \\
R_2 &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c\cap A_k}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\big\}.
\end{aligned}$$

对于 $R_1$，若 $i\in A_k^c$ 且 $j\in A_k^c$，则 $X_k$ 与 $(\xi_A,\ X_i,\ X_j,\ X_l)$ 相互独立，这进一步意味着

$$R_1 = 0.$$

根据上述讨论，我们有

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c\cap A_k^c}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\cdot \mathbf{1}(i\in A_k \text{ or } j\in A_k)\big\} \\
&= R_{11}+R_{12}.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c\cap N_l^c\cap A_l^c}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\big\}\cdot\mathbf{1}(i\in A_k \text{ or } j\in A_k), \\
R_{12} &= \sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c\cap N_l^c\cap A_l}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\big\}\cdot\mathbf{1}(i\in A_k \text{ or } j\in A_k).
\end{aligned}$$

对于 $R_{11}$，如果 $i\in A_l^c$和 $j\in A_l^c$，那么 $X_l$ 独立于 $(\xi_A, X_i, X_j, X_k)$，这

意味着 $R_{11}=0$。因此

$$\begin{aligned}R_{11}&=\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{l\in N_A^c\cap A_{ij}^c}\sum_{k\in N_A^c\cap A_{ij}^c\cap N_l^c\cap A_l^c}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot X_kX_l\big\}\\&\qquad\times\mathbf{1}(i\in A_k\text{ or }j\in A_k)\cdot\mathbf{1}(i\in A_l\text{ or }j\in A_l)\\&\le\|\xi_A\|_p^p\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{l\in[n]}\sum_{k\in[n]}\|X_i\|_4\|X_j\|\|X_k\|_4\|X_l\|_4\\&\qquad\times\mathbf{1}(i\in A_k\text{ or }j\in A_k)\cdot\mathbf{1}(i\in A_l\text{ or }j\in A_l)\\&\le 4\|\xi_A\|_p^p\sum_{(i,j)\in D_A}\sum_{l\in N_i\cup N_j}\sum_{k\in N_i\cup N_j}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_4\|X_l\|_4\\&\le 0.05\sigma^4\|\xi_A\|_p^p,\end{aligned}\tag{4.34}$$

其中，最后一个不等式由（4.32）以及以下事实可得

$$\sum_{k\in N_i\cup N_j}\|X_k\|_4\le\big(4\kappa^2\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^3\big)^{1/3}\le 0.2\sigma.$$

对于 $R_{12}$，当 $l\in A_k^c$时，由（4.32）可得

$$R_{12}\le\|\xi_A\|_p^p\sum_{(i,j)\in D_A}\sum_{l\in[n]}\sum_{k\in A_l}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_2\|X_l\|_2\le 0.05\lambda\sigma^4\|\xi_A\|_p^p.\tag{4.35}$$

结合（4.34）和（4.35），可得

$$R_1\le 0.1\lambda\sigma^4\|\xi_A\|_p^p.\tag{4.36}$$

对于 $R_2$，令 $I_{i,\ j,\ k}$ 由（4.4）定义，则有

$$\begin{aligned}R_2&\le\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{(k,l)\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot|X_kX_l|\big\}I_{k,i,j}I_{l,i,j}\\&=R_{21}+R_{22}+R_{23}+R_{24},\end{aligned}\tag{4.37}$$

其中

$$\begin{aligned}R_{21}&=\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{(k,l)\in D_{A,2}}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot|X_kX_l|\big\}\cdot I_{i,k,l}I_{j,k,l}I_{k,i,j}I_{l,i,j},\\R_{22}&=\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{(k,l)\in D_{A,3}}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot|X_kX_l|\big\}I_{k,i,j}I_{l,i,j}\cdot I_{i,k,l}I_{j,k,l},\\R_{23}&=\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{(k,l)\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot|X_kX_l|\big\}I_{k,i,j}I_{l,i,j}\cdot I_{i,k,l}(1-I_{j,k,l}),\\R_{24}&=\sum_{(i,j)\in D_{A,3}}\sum_{(k,l)\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{|\xi_A^p X_iX_j|\cdot|X_kX_l|\big\}I_{k,i,j}I_{l,i,j}\cdot(1-I_{i,k,l}).\end{aligned}$$

对于 $R_{21}$，当 $A \in A_{kl}^c$、$i \in A_{kl}^c$ 和 $j \in A_{kl}^c$ 时，则有 $(X_k,\ X_l) \perp\!\!\!\perp (\xi_A,\ X_i,\ X_l)$，这进一步意味着

$$|R_{21}| \le \lambda\sigma^2 \|\xi_A\|_p^p \sum_{(i,j)\in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \le 0.05\lambda\sigma^4 \|\xi_A\|_p^p. \tag{4.38}$$

对于 $R_{22}$，利用 $D_A$ 这一事实，$_3 \subset D_A$ 以及（4.32）可得

$$|R_{21}| \le \|\xi_A\|_p^p \Big( \sum_{(i,j)\in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \Big)^2 \le 0.05\sigma^4 \|\xi_A\|_p^p. \tag{4.39}$$

对于 $R_{23}$ 和 $R_{24}$，根据 $D_A$ 的定义，若 $l \in A_k$ 且 $j \in A_{kl}$，则 $(k,\ l) \in D_j$。因此，由（4.32）可得

$$\begin{aligned} &R_{23} + R_{24} \\ &\le \|\xi_A\|_p^p \sum_{(i,j)\in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \cdot \Big( \sum_{(k,l)\in D_i} \|X_k\|_4 \|X_l\|_4 + \sum_{(k,l)\in D_j} \|X_k\|_4 \|X_l\|_4 \Big) \\ &\le 0.1\sigma^4. \end{aligned} \tag{4.40}$$

由（4.33）和（4.36），结合（4.37）–（4.40），可得

$$|H_{12}| \le 12\lambda\sigma^4 \mathbb{E}\{\xi_A^p\}. \tag{4.41}$$

结合（4.29）和（4.41）可得

$$|H_1| \le 12.1\lambda\sigma^4 \mathbb{E}\{\xi_A^p\}. \tag{4.42}$$

对于 $H_2$ 和 $H_3$，采用与推导（4.42）类似的论证，可得

$$H_2 + H_3 \le 0.9\sigma^4 \lambda \mathbb{E}\{\xi_A^p\}. \tag{4.43}$$

结合（4.28）、（4.42）和（4.43），可得（4.26）。（4.27）的第一个不等式可用上述类似论证得到。对于（4.27）的第二个不等式，注意到

$$\sum_{i\in[n]} Y_i = \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in A_i} X_i = \sum_{i\in[n]} |N_i| X_i$$

并且 $|N_i| \le \kappa$. 采用与（4.26）的证明中类似的论证，可得

$$\mathbb{E}\Big( \sum_{i\in[n]} Y_i \Big)^4 \le 13\kappa^4\lambda^2\sigma^4.$$

□

### *4.2.* 广义集中不等式

在本小节中，我们在（LD1）和（LD2）条件下提出两个改进的随机集中不等式，这些不等式在主要结果的证明中发挥重要作用。在本小节中，对于任意 $A \subset [n]$，我们记

$$S_A = S_{n,A} := \sum_{i \in N_A^c} X_i, \quad Y_{k,A} = \sum_{l \in A_k \cap N_A^c} X_l,$$

**命题 4.5.** 设 $A \subset [n]$和 $B \subset [n]$ 是两个任意的非空指标集。设 $\xi_A = h(X_A) \geqslant 0$, $\eta_B = a - c\sum_{m\in B}|X_m|/\sigma$ 和 $\zeta_B = b + c\sum_{m\in B}|X_m|/\sigma$，其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 满足 $a \leq b$ 和 $c \geqslant 1$。那么，

$$\mathbb{E}\left\{\xi_A \mathbf{1}\left(\eta_B \leq S_A/\sigma \leq \zeta_B\right)\right\} \leq 156 \left\|\xi_A\right\|_{4/3} \cdot \sum_{i=0}^{7} \delta_i,$$

其中

$$\delta_0 = \frac{b-a}{100}, \quad \delta_1 = \frac{c}{\sigma}\sum_{i\in N_A}\|X_i\|_4, \quad \delta_2 = \frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B}\|X_m\|_4,$$

$$\delta_3 = \frac{c}{\sigma^2}\sum_{m\in B}\sum_{k\in N_m}\|X_k\|_4\|X_m\|_4, \quad \delta_4 = \frac{c}{\sigma^2}\sum_{(i,j)\in D_A}\|X_i\|_4\|X_j\|_4,$$

$$\delta_5 = \frac{c}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\|X_i\|_4^3 + \frac{c}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|\|X_j\|_4^3,$$

$$\begin{aligned}\delta_6^2 = {} & \frac{c^2}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in A_k\cup N_k}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_4\|X_l\|_4 \\ & + \frac{c^2}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i\cup N_i}|A_i|^2\|X_i\|_4^3\|X_j\|_4 + \frac{c^2}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_i\cup N_j}|A_i|\|X_j\|_4^3\|X_k\|_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_7^2 = {} & \frac{c^2}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\sum_{j\in A_i\cup N_i}\sum_{k\in N_j}\|X_i\|_4^3\|X_j\|_4\|X_k\|_4 \\ & + \frac{c^2}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_i\cup N_j}\sum_{l\in N_k}|A_i|\|X_j\|_4^3\|X_k\|_4\|X_l\|_4 \\ & + \frac{c^2}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}\sum_{(j,k)\in D_i}|A_i|^2\|X_i\|_4^3\|X_j\|_4\|X_k\|_4 \\ & + \frac{c^2}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{(k,l)\in D_j}|A_i|\|X_j\|_4^3\|X_k\|_4\|X_l\|_4.\end{aligned}$$

证明。 我们按照Chen和Shao (2004)的思路，通过递归论证来证明该命题，但我们将递归应用于另一个对象。为此，

令 $K$ 定义为

$$K = \sup \frac{\mathbb{E}\{\xi_A \mathbf{1}(\eta_B \le S_A/\sigma \le \zeta_B)\}}{\|\xi_A\|_{4/3} \sum_{i=0}^{7} \delta_i},$$

其中，上确界取遍上述定义的 $A, B, a, b, c$。不失一般性，我们假设 $\max_{0\le i\le 7} \delta_i < 1/100$；否则该不等式显然成立。对于每个 $k \in N_A^c$，令

$$\begin{aligned} \widehat{M}_k(t) &= X_k\{\mathbf{1}(-Y_{k,A} \le t \le 0) - \mathbf{1}(0 \le t < -Y_{k,A})\}, \\ \widehat{M}(t) &= \sum_{k\in N_A^c} \widehat{M}_k(t), \quad M(t) = \mathbb{E}\big\{\widehat{M}(t)\big\}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

为了证明该集中不等式，我们先引入一个函数。对于任意$\eta < \zeta$ 和 $\alpha > 0$，令

$$f_{\eta,\zeta,\alpha}(w) = \begin{cases} -\frac{\zeta-\eta+\alpha}{2}, & \text{for } w \leqslant \eta-\alpha, \\ \frac{1}{2\alpha}(w-\eta+\alpha)^2 - \frac{\zeta-\eta+\alpha}{2}, & \text{for } \eta-\alpha < w \leqslant \eta, \\ w - \frac{\eta+\zeta}{2}, & \text{for } \eta < w \leqslant \zeta, \\ -\frac{1}{2\alpha}(w-\zeta-\alpha)^2 + \frac{\zeta-\eta+\alpha}{2}, & \text{for } \zeta < w \leqslant \zeta+\alpha, \\ \frac{\zeta-\eta+\alpha}{2}, & \text{for } w > \zeta+\alpha. \end{cases} \tag{4.45}$$

那么，$f_{\eta,\zeta,\alpha}((\eta+\zeta)/2) = 0$，且导数 $f'_{\eta,\zeta,\alpha}$ 连续，并可表示为

$$f'_{\eta,\zeta,\alpha}(w) = \begin{cases} 1, & \text{for } \eta \leqslant w \leqslant \zeta, \\ 0, & \text{for } w \leqslant \eta-\alpha \text{ or } w \geqslant \zeta+\alpha, \\ \text{linear}, & \text{for } \eta-\alpha \leqslant w \leqslant \eta \text{ or } \zeta \leqslant w \leqslant \zeta+\alpha. \end{cases}$$

令 $f_{\eta_B,\zeta_B,\alpha}(w)$ 按照 (4.45) 定义，其中

$$\alpha = 100(\delta_5 + \delta_6 + \delta_7).$$

为简化记号，以下省略对 $\alpha$ 的依赖，并记 $f_{\eta_B,\zeta_B}(w) := f_{\eta_B,\zeta_B,\alpha}(w)$。对于任意 $k \in N_A^c$，定义

$$S_A^{(k)} = S_A - Y_{k,A}, \quad \eta_B^{(k)} = a - \frac{c}{\sigma} \sum_{m\in B\setminus A_k} |X_m|, \quad \zeta_B^{(k)} = b + \frac{c}{\sigma} \sum_{m\in B\setminus A_k} |X_m|.$$

于是可知，若 $k \in N_A^c$，则 $X_k$ 与$(\xi_A, \eta_B^{(k)}, \zeta_B^{(k)}, S_A^{(k)})$独立，而这

进一步意味着

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\big\{\xi_A S_A f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\big\}\\
&\quad=\sum_{k\in N_A^c}\frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\big\{\xi_A X_k f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\big\}\\
&\quad=\sum_{k\in N_A^c}\frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\big\{\xi_A X_k\big(f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)-f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A^{(k)}/\sigma)\big)\big\}\\
&\qquad+\sum_{k\in N_A^c}\frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\big\{\xi_A X_k\big(f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A^{(k)}/\sigma)-f_{\eta_B^{(k)},\zeta_B^{(k)}}(S_A^{(k)}/\sigma)\big)\big\}\\
&\quad=H_1+H_2+H_3+H_4,
\end{aligned}\tag{4.46}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_1&=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\xi_A f'_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)M(t)dt\Big\},\\
H_2&=\sum_{k\in N_A^c}\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\xi_A[f'_{\eta_B,\zeta_B}((S_A+t)/\sigma)-f'_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)]\widehat{M}_k(t)dt\Big\},\\
H_3&=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\xi_A f'_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\int_{\mathbb{R}}[\widehat{M}(t)-M(t)]dt\Big\},\\
H_4&=\sum_{k\in N_A^c}\frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\big\{\xi_A X_k[f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A^{(k)}/\sigma)-f_{\eta_B^{(k)},\zeta_B^{(k)}}(S_A^{(k)}/\sigma)]\big\}.
\end{aligned}$$

接下来，我们将给出$|\mathbb{E}\{\xi_A S_A f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\}|/\sigma$，$H_2$，$H_3$和$H_4$的上界，以及$H_1$的下界。我们指出，在证明$H_2$的上界时使用了递归论证。

*(i)* $|\mathbb{E}\{\xi_A S_A f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\}/\sigma|$的上界。注意到$\|f_{\eta_B,\ \zeta_B}\|_\infty\le(\zeta_B-\eta_B+\alpha)/2\le(b-a+\alpha)/2+\sum_{m\in B}|X_m|/\sigma$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma}|\mathbb{E}\{\xi_A S_A f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\}|\\
&\quad\le 0.5(b-a+\alpha)\sigma^{-1}\mathbb{E}|\xi_A S_A|+c\sigma^{-2}\sum_{m\in B}\mathbb{E}|\xi_A S_A X_m|\\
&\quad\le 0.5(b-a+\alpha)\sigma^{-1}\mathbb{E}|\xi_A S_A|+c\sigma^{-2}\sum_{m\in B}\|\xi_A S_A\|_{4/3}\|X_m\|_4.
\end{aligned}\tag{4.47}$$

注意到$\|S-S_A\|_2\le\sum_{i\in N_A}\|X_i\|_2\le\sigma\cdot\delta_1\le 0.01\sigma$，则

$$0.99\sigma\le\|S_A\|_2\le 1.01\sigma.\tag{4.48}$$

根据（4.48）、引理4.2以及条件$\delta_4\le 0.01$，对于任意$p\ge 0$，$\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^2\}\le\mathbb{E}\{\xi_A^p\}\cdot(\|S_A\|_2^2+2\sigma^2\delta_4)\le 1.1\mathbb{E}\{\xi_A^p\}\sigma^2$，因此

$$\|\xi_A S_A\|_{4/3}\le\big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}\}\big)^{1/4}\big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}S_A^2\}\big)^{1/2}\le 1.1\sigma\|\xi_A\|_{4/3}.\tag{4.49}$$

结合（4.47）和（4.49）可得

$$\frac{1}{\sigma}\big|\mathbb{E}\{\xi_A S_A f_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)\}\big| \le 0.55(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_{4/3} + 1.1\|\xi_A\|_{4/3}\delta_2. \quad (4.50)$$

*(ii)* $H_1$ 的下界。根据 $M(t)$ 的定义可知

$$\int_{\mathbb{R}} M(t)dt = \sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\mathbb{E}\{X_kX_l\} = \mathbb{E}\{S_A^2\}. \quad (4.51)$$

注意到 $f'_{\eta_B,\ \zeta_B}(S_A/\sigma) \ge \mathbf{1}(\eta_B \le S_A/\sigma \le \zeta_B)$，结合（4.48）可得

$$H_1 \ge 0.98\mathbb{E}\{\xi_A\mathbf{1}(\eta_B \le S_A/\sigma \le \zeta_B)\}. \quad (4.52)$$

*(iii)* $|H_3|$ 的上界。对于 $H_3$，利用事实 $|f'_{\xi_B,\ \zeta_B}(S_A/\sigma)| \le 1$ 以及引理4.1，可得

$$\begin{aligned}
|H_3| &\le \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big|\int_{\mathbb{R}}[\widehat{M}(t)-M(t)]dt\Big|\Big\}\\
&= \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big|\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}(X_kX_l-\mathbb{E}\{X_kX_l\})\Big|\Big\}\\
&\le \frac{1}{\sigma^2}\big(\mathbb{E}\{\xi_A^p\}\big)^{1/2}\cdot\Big(\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big|\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}(X_kX_l-\mathbb{E}\{X_kX_l\})\Big|^2\Big\}\Big)^{1/2}\\
&\le \frac{2}{\sigma^2}\|\xi_A\|_{4/3}\sum_{(i,j)\in D_A}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\\
&\quad+\frac{4}{\sigma^2}\|\xi_A\|_{4/3}\Big(\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in N_k\cup A_k}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big)^{1/2}\\
&\le 2\|\xi_A\|_{4/3}\delta_4+4\|\xi_A\|_{4/3}\delta_6.
\end{aligned} \quad (4.53)$$

*(iv)* $H_4$. 的上界。对于 $H_4$，注意对任意 $\eta$，$\eta'$，$\zeta$，$\zeta' \in \mathbb{R}$，

$$\sup_{w\in\mathbb{R}}|f_{\eta,\zeta}(w)-f_{\eta',\zeta'}(w)| \le \frac{|\eta-\eta'|}{2}+\frac{|\zeta-\zeta'|}{2}, \quad (4.54)$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}
|H_4| &\le \frac{c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B\cap A_k}\mathbb{E}|\xi_AX_kX_m|\\
&\le \frac{c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B\cap A_k}\|\xi_AX_k\|_{4/3}\|X_m\|_4\\
&\le \frac{c}{\sigma^2}\|\xi_A\|_{4/3}\cdot\sum_{m\in B}\sum_{k\in N_m}\|X_m\|_4\|X_k\|_4\\
&\le \|\xi_A\|_{4/3}\cdot\delta_3.
\end{aligned} \quad (4.55)$$

*(v)* $H_2$的上界。现在，只需对 $H_2$ 给出上界，为此我们采用递归论证。注意，

$$
\begin{aligned}
|H_2| &\le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\xi_A|f'_{\eta_B,\zeta_B}((S_A+t)/\sigma)-f'_{\eta_B,\zeta_B}(S_A/\sigma)|\cdot|\widehat{M}_k(t)|dt\Big\}\\
&:= H_{21}+H_{22},
\end{aligned}
$$

其中

$$
H_{21}=\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\left\{\frac{\xi_A}{\alpha}\int_{\mathbb{R}}\int_{t\wedge 0}^{t\vee 0}\mathbf{1}\left(\eta_B-\alpha\le (S_A+s)/\sigma\le\eta_B\right)\cdot|\widehat{M}_k(t)|dsdt\right\},
$$

$$
H_{22}=\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\left\{\frac{\xi_A}{\alpha}\int_{\mathbb{R}}\int_{t\wedge 0}^{t\vee 0}\mathbf{1}\left(\zeta_B\le (S_A+s)/\sigma\le\zeta_B+\alpha\right)\cdot|\widehat{M}_k(t)|dsdt\right\}.
$$

对于 $H_{21}$ 中的指示函数，当 $|s|\le|t|\le|Y_{k,\ A}|\le\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}|X_l|$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}(\eta_B-\alpha\le(S_A+s)/\sigma\le\eta_B)\\
&\le\mathbf{1}\Big(a-\frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B}|X_m|-\frac{1}{\sigma}\sum_{l\in A_k}|X_l|-\alpha\le\frac{S_A}{\sigma}\le a+\frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B}|X_m|+\frac{1}{\sigma}\sum_{l\in A_k}|X_l|\Big)\\
&\le\mathbf{1}(a-\alpha-U_k\le W\le a+U_k),
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

其中

$$
U_k=\frac{c+1}{\sigma}\sum_{l\in B\cup A_k}|X_l|.
$$

由（4.56），可得

$$
\begin{aligned}
|H_{21}|&\le\frac{1}{\alpha\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\left\{\xi_A\mathbf{1}\left(a-\alpha-U_k\le S_A/\sigma\le a+U_k\right)|X_kY_{k,A}^2|\right\}\\
&\le\frac{1}{\alpha\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}|A_k|\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\mathbb{E}\left\{\xi_A|X_kX_l^2|\mathbf{1}\left(a-\alpha-U_k\le S_A/\sigma\le a+U_k\right)\right\}\\
&\le H_{211}+H_{212},
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

其中

$$
H_{211}=\frac{1}{3\alpha\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}|A_k|^2\mathbb{E}\big\{\xi_A|X_k|^3\mathbf{1}\left(a-\alpha-U_k\le S_A/\sigma\le a+U_k\right)\big\},
$$

$$
H_{212}=\frac{2}{3\alpha\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}|A_k|\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A|X_l|^3\mathbf{1}\left(a-\alpha-U_k\le S_A/\sigma\le a+U_k\right)\big\}.
$$

对于 $H_{211}$，定义

$$A_{1,k} = A \cup \{k\}, \quad S_{A_{1,k}} = S - \sum_{i \in N_{A_{1,k}}} X_i \quad \text{and} \quad B_k = B \cup A_k \cup N_k.$$

注意到 $N_A \subset N_{A_{1,k}} \subset N_A \cup N_k$，于是

$$|S_A - S_{A_{1,k}}| = \Big| \sum_{i \in N_{A_{1,k}}} X_i - \sum_{i \in N_A} X_i \Big| \leq \sum_{i \in N_k} |X_i|,$$

这进一步意味着

$$\mathbf{1}\big(a - \alpha - U_k \leq S_A/\sigma \leq a + U_k\big) \leq \mathbf{1}\big(a - \alpha - U_k' \leq S_{A_{1,k}}/\sigma \leq a + U_k'\big), \tag{4.58}$$

其中

$$U_k' = \frac{c+2}{\sigma} \sum_{l \in B_k} |X_l| \,.$$

根据 $K$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\xi_A |X_k|^3 \mathbf{1}(a - \alpha - U_k' \leq S_{A_{1,k}}/\sigma \leq a + U_k')\} \\
&\quad \leq K \|\xi_A X_k^3\|_{4/3} \cdot \Big\{ \frac{\alpha}{100} + \frac{c+2}{\sigma} \sum_{m \in N_A} \|X_m\|_4 + \frac{c+2}{\sigma} \sum_{m \in N_k} \|X_m\|_4 \\
&\qquad + \frac{c+2}{\sigma} \sum_{m \in B} \|X_m\|_4 + \frac{c+2}{\sigma} \sum_{m \in A_k} \|X_m\|_4 + \frac{c+2}{\sigma} \sum_{m \in N_k} \|X_m\|_4 \\
&\qquad + \frac{c+2}{\sigma^2} \sum_{m \in A_k} \sum_{l \in N_m} \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 + \frac{c+2}{\sigma^2} \sum_{m \in B} \sum_{l \in N_m} \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 \\
&\qquad + \frac{c+2}{\sigma^2} \sum_{m \in N_k} \sum_{l \in N_m} \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 + \frac{c+2}{\sigma^2} \sum_{(i,j) \in D_A} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \\
&\qquad + \frac{c+2}{\sigma^2} \sum_{(i,j) \in D_k} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 + \frac{c+2}{c}(\delta_5 + \delta_6 + \delta_7) \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

根据 $\delta_6$ 和 $\delta_7$的定义，我们有

$$\frac{c}{\sigma^4} \sum_{k \in [n]} |A_k|^2 \|X_k\|_4^3 \sum_{m \in A_k \cup N_k} \|X_m\|_4 \leq \delta_6^2, \tag{4.60}$$

and

$$\frac{c}{\sigma^5} \sum_{k \in [n]} |A_k|^2 \|X_k\|_4^3 \sum_{(i,j) \in D_k} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \leq \delta_7^2, \tag{4.61}$$

$$\frac{c}{\sigma^5} \sum_{k \in [n]} |A_k|^2 \|X_k\|_4^3 \sum_{m \in A_k \cup N_k} \sum_{l \in N_m} \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 \leq \delta_7^2. \tag{4.62}$$

结合（4.57）–（4.62）可得

$$|H_{211}| \leq \frac{K\|\xi_A\|_{4/3}\delta_5}{c\alpha} \cdot \Big(0.01\alpha + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7\Big) + \frac{3K\|\xi_A\|_{4/3}(\delta_6^2 + \delta_7^2)}{\alpha}.$$

回忆一下,

$$\alpha = 100(\delta_5 + \delta_6 + \delta_7) \quad \text{and} \quad c \geq 1,$$

then

$$|H_{211}| \leq 0.1\|\xi_A\|_{4/3}K(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7). \tag{4.63}$$

对于 $H_{212}$，注意到

$$\mathbf{1}\left(a - \alpha - U_k \leq S_A/\sigma \leq a + U_k\right)\Big\} \leq \mathbf{1}\left(a - \alpha - U_{k,l} \leq S_{A_{1,l}}/\sigma \leq a + U_{k,l}\right)\Big\},$$

其中

$$U_{k,l} = \frac{c+2}{\sigma} \sum_{l \in B \cup A_k \cup N_l} |X_l|.$$

采用与推导（4.63）类似的论证，可得

$$|H_{212}| \leq 0.2\|\xi_A\|_{4/3}K(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7). \tag{4.64}$$

结合（4.63）和（4.64）可得

$$|H_{21}| \leq 0.3\|\xi_A\|_{4/3}K(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7).$$

采用与之前类似的论证，我们可以得到 $H_{22}$ 的相同上界，进而有

$$|H_2| \leq 0.6\|\xi_A\|_{4/3}K(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7). \tag{4.65}$$

由（4.46）、（4.50）、（4.52）、（4.53）、（4.55）和（4.65）可得

$$\begin{aligned}
&0.98\mathbb{E}\{\xi_A \mathbf{1}(\eta_B \leq S_A/\sigma \leq \zeta_B)\} \\
&\leq 0.55(b-a)\,\|\xi_A\|_{4/3} + 55\,\|\xi_A\|_{4/3}\,(\delta_5 + \delta_6 + \delta_7) \\
&\quad + \|\xi_A\|_{4/3}(2\delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4 + 4\delta_6) \\
&\quad + 0.6\|\xi_A\|_{4/3}K(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7) \\
&\leq 59\,\|\xi_A\|_{4/3}\,\big(0.01(b-a) + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7\big) \\
&\quad + 0.6\|\xi_A\|_{4/3}K(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7).
\end{aligned}$$

根据 $K$的定义，我们有

$$0.98K \leq 59 + 0.6K,$$

从而

$$K \leq 156.$$

证明至此完成。 □

下文将给出局部依赖随机变量的自归一化和的集中不等式。

**命题 4.6.** 设 $A \subset [n]$ 和 $B \subset [n]$ 是两个任意的非空指标集。此外，设 $\xi_A = h(X_A) \geqslant 0$ 和

$$\bar{V}_A = \psi\Big(\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_k} X_k X_l\Big), \qquad S_A = \sum_{k\in N_A^c} X_k,$$

$$\eta_{A,B} = a - c\sum_{m\in B}|X_m|/\sigma - c|S_A|\cdot Q_A/\sigma, \qquad \zeta_{A,B} = b + c\sum_{m\in B}|X_m|/\sigma + c|S_A|\cdot Q_A/\sigma,$$

其中

$$\psi(x) = ((x\vee(0.25\sigma^2))\wedge(2\sigma^2))^{1/2}, \quad T_A^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in A_k}|X_kX_l| + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k}|X_kX_l|,$$

$Q_A = \min\{1, T_A\}$

且 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a \leq b$ 和 $c \geq 1$。那么，

$$\mathbb{E}\{\xi_A \mathbf{1}\big(\eta_{A,B} \leq S_A/\bar{V}_A \leq \zeta_{A,B}\big)\} \leq 8755\,\|\xi_A\|_{4/3}\Big\{\frac{(b-a)}{1500} + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4\Big\},$$

其中

$$\lambda = \kappa\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_2^2/\sigma^2, \qquad \delta_1 = \frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B}\|X_m\|_4,$$

$$\delta_2 = \frac{c\lambda\kappa^2|A|^2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n\|X_i\|_4^3,$$

$$\delta_3 = \frac{c\lambda\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})|A|^{1/2}}{\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^n\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2},$$

$$\delta_4^2 = \frac{\lambda^2c^2}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k\cup A_k}\|X_k\|_4\|X_l\|_4.$$

证明。 我们通过递归论证证明该命题。为此，令 $K$定义为

$$K = \sup\frac{\mathbb{E}\{\xi_A\mathbf{1}(\eta_{A,B}\leq S_A/\bar{V}_A\leq\zeta_{A,B})\}}{(b-a)/1500 + \delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4}$$

其中，上确界取遍所有 $A, B, a, b, c$，如命题 4.6所述。不失一般性，我们假设

$$\delta_2 \leq \frac{1}{500} \quad \text{and} \quad \delta_3 \leq \frac{1}{500}, \tag{4.66}$$

否则该不等式显然成立。令 $f_{\eta_{A,\,B},\,\zeta_{A,\,B},\,\alpha}(w)$ 按照 (4.45) 定义，其中

$$\alpha = 1500\,(\delta_2+\delta_3)\,.$$

同样，为了简化记号，下文省略对 $\alpha$的依赖，并记为 $f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(w) := f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B},\alpha}(w)$。此外，对任意 $k \in N_A^c$，定义

$$\begin{aligned}
\bar{V}_A^{(k)} &= \psi\Big(\sum_{i\in A_k^c\cap N_A^c}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i\cap A_k^c} X_iX_j\Big),\\
\eta_{A,B}^{(k)} &= a - \frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B\cap A_k^c}|X_m| - \frac{c}{\sigma}|S_A^{(k)}|\cdot Q_A^{(k)},\\
\zeta_{A,B}^{(k)} &= b + \frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B\cap A_k^c}|X_m| + \frac{c}{\sigma}|S_A^{(k)}|\cdot Q_A^{(k)},\\
T_A^{(k)2} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in N_A\cap A_k^c}\sum_{l\in A_i\cap A_k^c}|X_iX_j| + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in N_A\cap A_k^c}\sum_{j\in N_i\cap A_k^c}|X_iX_j|,\\
S_A^{(k)} &= \sum_{i\in N_A^c\cap A_k^c} X_i, \quad Q_A^{(k)} = \min\{1, T_A^{(k)}\}.
\end{aligned}$$

因此可得，$X_k$与 $(\xi_A,\ \eta_A^{(k)},_B,\ \zeta_A^{(k)},_B,\ S_A^{(k)},\ \bar{V}_{(k)A})$ 独立（若 $k \in N_A^c$.

因此，根据 $W_A = S_A/V_A$，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\xi_A W_A f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)\}\\
&= \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\cdot\Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A}\Big) f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)\Big\}\\
&= \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\cdot\Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A}\Big)\big(f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A) - f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}((S_A - Y_{k,A})/\bar{V}_A)\big)\Big\}\\
&\quad + \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big(\Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A}\Big)\cdot f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A - Y_{k,A}}{\bar{V}_A}\Big) - \Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\cdot f_{\eta_{A,B}^{(k)},\zeta_{A,B}^{(k)}}\Big(\frac{S_A - Y_{k,A}}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\Big)\Big\}\\
&= H_1 + H_2 + H_3 + H_4,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_1 &= \mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\xi_A}{\bar{V}_A^2}\cdot f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)M(t)\mathrm{d}t\Big\},\\
H_2 &= \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\xi_A}{\bar{V}_A^2}\cdot\Big(f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A+t}{\bar{V}_A}\Big) - f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A}{\bar{V}_A}\Big)\Big)\widehat{M}_k(t)\mathrm{d}t\Big\},\\
H_3 &= \mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\xi_A}{\bar{V}_A^2}\cdot f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)(\widehat{M}(t) - M(t))\mathrm{d}t\Big\},\\
H_4 &= \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big[\Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A}\Big)\cdot f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A - Y_{k,A}}{\bar{V}_A}\Big) - \Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\cdot f_{\eta_{A,B}^{(k)},\zeta_{A,B}^{(k)}}\Big(\frac{S_A - Y_{k,A}}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$和 $M(t)$ $M_k(t)$ $M(t)$的定义与（4.44）中相同。接下来，我们将给出 $|\mathbb{E}\{\xi_A W_A f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)\}|$、 $H_2$、 $H_3$ 和 $H_4$的上界，以及 $H_1$的下界。我们指出，在证明上界时使用了递归论证

为 $H_2$。现在，我们逐一证明这些界。

*(i)* $|\mathbb{E}\{\xi_A W_A f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)\}|$的上界。回顾$|\eta_{A,\ B}-\zeta_{A,\ B}|\ \le (b-a)$ $+2c\sum_{m\in B}|X_m|/\sigma+2c|S_A|\cdot Q_A/\sigma$，根据$f_{\eta_A}$的定义$_{\cdot,\ B,\ \zeta_{A,\ B}}(\cdot)$ 以及 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\big|\mathbb{E}\{\xi_A W_A f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)\}\big| \\
&\quad\le \mathbb{E}\Big|\xi_A W_A \frac{\zeta_{A,B}-\eta_{A,B}+\alpha}{2}\Big| \\
&\quad\le \frac{(b-a+\alpha)}{2}\mathbb{E}|\xi_A W_A|+\frac{c}{\sigma}\sum_{m\in B}\mathbb{E}|X_m\xi_A W_A|+\frac{c}{\sigma}\mathbb{E}|\xi_A W_A S_A Q_A| \qquad (4.67)\\
&\quad\le \frac{b-a+\alpha}{\sigma}\mathbb{E}|\xi_A S_A|+\frac{2c}{\sigma^2}\sum_{m\in B}\mathbb{E}|X_m\xi_A S_A|+\frac{2c}{\sigma^2}\mathbb{E}|\xi_A S_A^2 Q_A|.
\end{aligned}$$

由（4.31），可得

$$0.874\sigma\le\|S_A\|\le 1.126\sigma. \qquad (4.68)$$

结合（4.32）、（4.49）、（4.68）以及引理 4.2，对于（4.67）的前两项，有

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a+\alpha}{\sigma}\mathbb{E}|\xi_A S_A|+\frac{2c}{\sigma^2}\sum_{m\in B}\mathbb{E}|X_m\xi_A S_A| \\
&\quad\le 1.2(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_{4/3}+\|\xi_A\|_{4/3}\cdot\frac{3c}{\sigma}\sum_{m\in B}\|X_m\|_4 \qquad (4.69)\\
&\quad\le 1.2(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_{4/3}+3\|\xi_A\|_{4/3}\cdot\delta_1.
\end{aligned}$$

至于 $\mathbb{E}|\xi_A S_A^2 Q_A|$，回顾 $Q_A=\min\{1,T_A\}$，由 H¨older 不等式可得

$$\mathbb{E}|\xi_A S_A^2 Q_A|\le\mathbb{E}|\xi_A S_A^2 T_A|\le\|\xi_A S_A^2\|_{4/3}\cdot\|T_A\|_4. \qquad (4.70)$$

对于（4.70）的第二项，注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{T_A^4\}&\le\frac{1}{\sigma^4}\mathbb{E}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in A_k}|X_kX_l|+\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k}|X_kX_l|\Big)^2\\
&\le\frac{2}{\sigma^4}\mathbb{E}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in A_k}|X_kX_l|\Big)^2+\frac{2}{\sigma^4}\mathbb{E}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k}|X_kX_l|\Big)^2\\
&\le\frac{2}{\sigma^4}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in A_k}\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big)^2+\frac{2}{\sigma^4}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k}\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big)^2\\
&\le\frac{4}{\sigma^4}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in A_k\cup N_k}\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big)^2,
\end{aligned}$$

这意味着

$$\|T_A\|_4\le\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k\cup A_k}\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big)^{1/2}. \qquad (4.71)$$

对于 (4.70) 的第一项，由 H¨older 不等式和引理 4.4，我们有

$$\|\xi_A S_A^2\|_{4/3} \le \big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}\}\big)^{1/4} \cdot \big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3} S_A^4\}\big)^{1/2} \le \sqrt{13\lambda}\sigma^2 \|\xi_A\|_{4/3}. \tag{4.72}$$

结合（4.70）、（4.71）和（4.72），可得

$$\frac{2c}{\sigma^2}\mathbb{E}|\xi_A S_A^2 T_A| \le \frac{2c}{\sigma^2}\|\xi_A S_A^2\|_{4/3}\|T_A\|_4 \le 11\|\xi_A\|_{4/3}\delta_4. \tag{4.73}$$

结合（4.67）、（4.69）和（4.73）可得

$$\begin{aligned} &\big|\mathbb{E}\big\{\xi_A W_A f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}(W_A)\big\}\big| \\ &\quad \le 1.2(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_{4/3} + 3\|\xi_A\|_{4/3}\cdot\delta_1 + 11\|\xi_A\|_{4/3}\delta_4. \end{aligned} \tag{4.74}$$

(*ii*) 的下界由（4.51）和（4.68），可得

$$\int_{\mathbb{R}} M(t)\mathrm{d}t = \mathbb{E}\{S_A^2\} \ge 0.76.$$

注意到 $\bar{V}_A^2 \le 2\sigma^2$，并利用不等式 $f'_{\eta_{A,\ B},\ \zeta_{A,\ B}}(W_A) \ge \mathbf{1}(\eta_{A,\ B} \le W_A \le \zeta_{A,\ B})$，可得

$$H_1 \ge 0.76\mathbb{E}\Big\{\frac{\sigma^2\xi_A \mathbf{1}(\eta_{A,B} \le W_A \le \zeta_{A,B})}{\bar{V}_A^2}\Big\} \ge 0.38\mathbb{E}\{\xi_A \mathbf{1}(\eta_{A,B} \le W_A \le \zeta_{A,B})\}. \tag{4.75}$$

(*iii*) 的上界。对于 $H_3$，由 $\|f'_{\eta_{A,\ B},\ \zeta_{A,\ B}}\|_\infty \le 1$、引理4.1和（4.32），可得

$$\begin{aligned} |H_3| &\le \frac{4}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\xi_A \cdot \Big|\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_k}(X_kX_l - \mathbb{E}X_kX_l)\Big|\Big\} \\ &\le 16\sqrt{2}(\mathbb{E}\{\xi_A\})\cdot\frac{|A|^{1/2}(\kappa^{3/2}+\kappa^{1/2}\tau^{1/2})}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2} \\ &\le 22.7\|\xi_A\|_{4/3}\delta_3. \end{aligned} \tag{4.76}$$

*(iv)* $H_4$的上界。对于 $H_4$，我们有

$$\begin{aligned} H_4 &= \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A} - \frac{X_k}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\cdot f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A - Y_k}{\bar{V}_A}\Big)\Big\} \\ &\quad + \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\cdot\Big(\frac{X_k}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\cdot\Big(f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar{V}_A}\Big) - f_{\eta_{A,B}^{(k)},\zeta_{A,B}^{(k)}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar{V}_A^{(k)}}\Big)\Big)\Big\} \\ &:= H_{41} + H_{42} + H_{43}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

其中

$$H_{41}=\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\Big(\frac{X_k}{\bar V_A}-\frac{X_k}{\bar V_A^{(k)}}\Big)\cdot f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar V_A}\Big)\Big\},$$

$$H_{42}=\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\cdot\Big(\frac{X_k}{\bar V_A^{(k)}}\Big)\cdot\Big(f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar V_A}\Big)-f_{\eta_{A,B}^{(k)},\zeta_{A,B}^{(k)}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar V_A}\Big)\Big)\Big\},$$

$$H_{43}=\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A\cdot\Big(\frac{X_k}{\bar V_A^{(k)}}\Big)\cdot\Big(f_{\eta_{A,B}^{(k)},\zeta_{A,B}^{(k)}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar V_A}\Big)-f_{\eta_{A,B}^{(k)},\zeta_{A,B}^{(k)}}\Big(\frac{S_A-Y_k}{\bar V_A^{(k)}}\Big)\Big)\Big\}.$$

接下来，我们分别给出 $H_{41}$，$H_{42}$ 和 $H_{43}$ 的上界。对于 $H_{41}$，注意到 $\bar V_A\geq\sigma/2$ 和 $\bar V_A^{(k)}\geq\sigma/2$，于是

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{\bar V_A}-\frac{1}{\bar V_A^{(k)}}\Big|&\leq\frac{|\bar V_A^2-\bar V_A^{(k)2}|}{\bar V_A\bar V_A^{(k)}(\bar V_A+\bar V_A^{(k)})}\\&\leq\frac{4}{\sigma^3}\Big(\sum_{i\in N_A^c\cap A_k}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i}|X_iX_j|+\sum_{i\in N_A^c\cap A_k}\sum_{j\in N_A^c\cap N_i}|X_iX_j|\Big)\\&:=\frac{4}{\sigma^3}G_k^2.\end{aligned}\tag{4.78}$$

根据 $\|f_{\eta_{A,\ B},\ \zeta_{A,\ B}}\|_\infty\leq(\zeta_{A,\ B}-\eta_{A,\ B}+\alpha)/2$ 以及（4.78），可得

$$H_{41}\leq H_{411}+H_{412}+H_{413},\tag{4.79}$$

其中

$$H_{411}=\frac{2(b-a+\alpha)}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\{\xi_A|X_k|G_k^2\},\quad H_{412}=\frac{4c}{\sigma^4}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B}\mathbb{E}\{\xi_A|X_kX_m|G_k^2\},$$

$$H_{413}=\frac{4c}{\sigma^4}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\{\xi_A|X_kS_A|Q_AG_k^2\}.$$

对于 $H_{411}$，注意到根据 H¨older 不等式，我们有

$$\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\{\xi_A|X_k|G_k^2\}\leq\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\|\xi_A\|_1^{1/2}\|X_k\|_2\cdot\big(\mathbb{E}\{\xi_AG_k^4\}\big)^{1/2}.\tag{4.80}$$

对于任意 $p\geq0$，根据 H¨older 不等式，对于任意 $i,\ j,\ i',\ j'\in N_A^c$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\xi_A^p|X_iX_jX_{i'}X_{j'}|\}&\leq\|\xi_A^{p/4}X_i\|_4\|\xi_A^{p/4}X_j\|_4\|\xi_A^{p/4}X_{i'}\|_4\|\xi_A^{p/4}X_{j'}\|_4\\&=\mathbb{E}\{\xi_A^p\}\cdot\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_{i'}\|_4\|X_{j'}\|_4,\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\xi_A^p G_k^4\} \\
&\le 2\sum_{i\in N_A^c\cap A_k}\sum_{j\in N_A^c\cap A_i}\sum_{i'\in N_A^c\cap A_k}\sum_{j'\in N_A^c\cap A_{i'}}\mathbb{E}\{\xi_A^p|X_iX_jX_{i'}X_{j'}|\} \\
&\quad+2\sum_{i\in N_A^c\cap A_k}\sum_{j\in N_A^c\cap N_i}\sum_{i'\in N_A^c\cap A_k}\sum_{j'\in N_A^c\cap N_{i'}}\mathbb{E}\{\xi_A^p|X_iX_jX_{i'}X_{j'}|\} \\
&\le 2(\mathbb{E}\{\xi_A^p\})\cdot\Big(\Big(\sum_{i\in A_k}\sum_{j\in A_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^2+\Big(\sum_{i\in A_k}\sum_{j\in N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^2\Big) \\
&\le 4(\mathbb{E}\{\xi_A^p\})\cdot\Big(\sum_{i\in A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^2.
\end{aligned}\tag{4.81}$$

结合（4.66）、（4.80）和（4.81），可得

$$\begin{aligned}
H_{411}&\le 4(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_1\cdot\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{i\in A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_k\|_2\|X_i\|_4\|X_j\|_4 \\
&\le 8(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_1\cdot\frac{\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^3 \\
&\le 0.02(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_{4/3}.
\end{aligned}\tag{4.82}$$

对于 $H_{412}$，由（4.66）、（4.81）及 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
H_{412}&\le\frac{4c}{\sigma^4}\cdot\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B}\|\xi_AX_kG_k^2\|_{4/3}\|X_m\|_4 \\
&\le\frac{4c}{\sigma^4}\cdot\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B}\big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}X_k^4\}\big)^{1/4}\big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}G_k^4\}\big)^{1/2}\|X_m\|_4 \\
&\le\frac{8c}{\sigma^4}\|\xi_A\|_{4/3}\cdot\sum_{k\in N_A^c}\sum_{i\in A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_4\cdot\sum_{m\in B}\|X_m\|_4 \\
&\le\frac{16c}{\sigma}\|\xi_A\|_{4/3}\sum_{m\in B}\|X_m\|_4\cdot\frac{\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^3 \\
&\le\frac{0.1c}{\sigma}\|\xi_A\|_{4/3}\sum_{m\in B}\|X_m\|_4 \\
&\le 0.1\|\xi_A\|_{4/3}\delta_1.
\end{aligned}\tag{4.83}$$

对于 $H_{413}$，回想一下 $Q_A\le 1$，因此，

$$\begin{aligned}
H_{413}&\le\frac{4c}{\sigma^4}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\{\xi_A|X_kS_AG_k^2|\} \\
&\le\frac{4c}{\sigma^4}\sum_{k\in N_A^c}\big(\mathbb{E}\{\xi_AX_k^2S_A^2\}\big)^{1/2}\cdot\big(\mathbb{E}\{\xi_AG_k^4\}\big)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{4.84}$$

现在，我们给出 $\mathbb{E}\{\xi_A X_k^2 S_A^2\}$ 的一个上界。由式（4.32）、（4.66）、（4.68）以及引理4.2，可得

$$\mathbb{E}\{\xi_A^p(S_A - Y_{k,A})^2\} \le 2\mathbb{E}\{\xi_A^p S_A^2\} + 2\mathbb{E}\{\xi_A^p\} \cdot \Big(\kappa^3 \sum_{l\in[n]} \|X_l\|_4^4\Big)^{1/2} \le 3\sigma^2 \mathbb{E}\{\xi_A^p\}, \tag{4.85}$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\xi_A X_k^2 S_A^2\} &\le 2\mathbb{E}\{\xi_A X_k^2 (S_A - Y_{k,A})^2\} + 2\mathbb{E}\{\xi_A X_k^2 Y_{k,A}^2\} \\ &\le 2\mathbb{E}\{X_k^2\}\mathbb{E}\{\xi_A (S_A - Y_{k,A})^2\} + 2\kappa \sum_{l\in A_k} \mathbb{E}\{\xi_A X_k^2 X_l^2\} \\ &\le 6\sigma^2 \|\xi_A\|_1 \mathbb{E}\{X_k^2\} + \kappa^2 \|\xi_A\|_1 \|X_k\|_4^4 + \kappa \sum_{l\in A_k} \|\xi_A\|_1 \|X_l\|_4^4.\end{aligned} \tag{4.86}$$

将（4.81）和（4.86）代入（4.84）可得

$$\begin{aligned} H_{413} &\le \frac{20c\|\xi_A\|_1}{\sigma^3} \sum_{k\in N_A^c} \sum_{i\in A_k} \sum_{j\in A_i\cup N_i} \|X_k\|_2 \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \\ &\quad + \frac{8c\kappa\|\xi_A\|_1}{\sigma^4} \sum_{k\in N_A^c} \sum_{i\in A_k} \sum_{j\in A_i\cup N_i} \|X_k\|_4^2 \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \\ &\quad + \frac{8c\kappa^{1/2}\|\xi_A\|_1}{\sigma^4} \sum_{k\in N_A^c} \Big(\sum_{l\in A_k} \|X_l\|_4^4\Big)^{1/2} \sum_{i\in A_k} \sum_{j\in A_i\cup N_i} \|X_i\|_4 \|X_j\|_4 \\ &\le \frac{40c\kappa^2\|\xi_A\|_1}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 + \frac{32c\kappa^3\|\xi_A\|_1}{\sigma^4} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4 \\ &\le 40\|\xi_A\|_{4/3}\delta_2 + 0.1\|\xi_A\|_{4/3}\delta_3. \end{aligned} \tag{4.87}$$

由（4.79）、（4.82）、（4.83）和（4.87）可知

$$H_{41} \le 0.02(b-a+\alpha)\|\xi_A\|_{4/3} + 0.1\|\xi_A\|_{4/3}\delta_1 + 40\|\xi_A\|_{4/3}\delta_2 + 0.1\|\xi_A\|_{4/3}\delta_3. \tag{4.88}$$

对于 $H_{42}$，结合 $\bar{V}_A^{(k)} \ge \sigma/2$ 和（4.54），可得

$$|H_{42}| \le \frac{1}{\sigma} \sum_{k\in N_A^c} \mathbb{E}\big\{\xi_A |X_k| \cdot \big(|\eta_{A,B} - \eta_{A,B}^{(k)}| + |\zeta_{A,B} - \zeta_{A,B}^{(k)}|\big)\big\}. \tag{4.89}$$

根据 $\eta_{A,B}$, $\eta_{A,B}^{(k)}$, $\zeta_{A,B}$ 和 $\eta_{A,B}^{(k)}$, 的定义，我们有

$$\begin{aligned} &\max\big\{|\eta_{A,B} - \eta_{A,B}^{(k)}|, |\zeta_{A,B} - \zeta_{A,B}^{(k)}|\big\} \\ &\le c \sum_{m\in B\cap A_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + \frac{c}{\sigma}|S_A Q_A - S_A^{(k)} Q_A^{(k)}| \\ &\le c \sum_{m\in B\cap A_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + \frac{c|Y_{k,A}|}{\sigma} \cdot Q_A + \frac{c|S_A - Y_{k,A}|}{\sigma} |Q_A - Q_A^{(k)}|. \end{aligned} \tag{4.90}$$

对于（4.90）的最后一项，利用不等式 $|\min\{1,x\}-\min\{1,y\}| \le |x-y|$，可得

$$\begin{aligned}|Q_A - Q_A^{(k)}| &\le |T_A - T_A^{(k)}| \\ &= \frac{1}{\sigma}\Bigg|\sqrt{\sum_{i\in N_A}\sum_{j\in A_i}|X_iX_j| + \sum_{i\in N_A}\sum_{j\in N_i}|X_iX_j|} \\ &\quad - \sqrt{\sum_{i\in N_A\cap A_k^c}\sum_{j\in A_i\cap A_k^c}|X_iX_j| + \sum_{i\in N_A\cap A_k^c}\sum_{j\in N_i\cap A_k^c}|X_iX_j|}\Bigg| \\ &\le \frac{1}{\sigma}\Delta_k,\end{aligned} \tag{4.91}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_k^2 = &\sum_{i\in N_A\cap A_k}\sum_{j\in A_i}|X_iX_j| + \sum_{i\in N_A}\sum_{j\in A_i\cap A_k}|X_iX_j| \\ &+ \sum_{i\in N_A\cap A_k}\sum_{j\in N_i}|X_iX_j| + \sum_{i\in N_A}\sum_{j\in N_i\cap A_k}|X_iX_j|.\end{aligned}$$

结合（4.89）–（4.91，并利用 $Q_A \le T_A$，可得

$$\begin{aligned}|H_{42}| &\le \frac{2c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B\cap A_k}\mathbb{E}\{\xi_A|X_kX_m|\} + \frac{2c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\{\xi_A|X_kY_{k,A}|T_A\} \\ &\quad + \frac{2c}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\{\xi_AX_k|S_A - Y_{k,A}|\cdot|\Delta_k|\} \\ &\le H_{421} + H_{422} + H_{423},\end{aligned} \tag{4.92}$$

其中

$$\begin{aligned}H_{421} &= \frac{2c}{\sigma^2}\|\xi_A\|_{4/3}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{m\in B\cap A_k}\|X_k\|_{4/3}\|X_m\|_4, \\ H_{422} &= \frac{2c}{\sigma^2}\|T_A\|_4\cdot\Big\|\sum_{k\in N_A^c}\xi_A|X_kY_{k,A}|\Big\|_{4/3}, \\ H_{423} &= \frac{2c}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_{4/3}\|\xi_A(S_A - Y_{k,A})\|_{4/3}\cdot\|\Delta_k\|_4.\end{aligned}$$

对于 $H_{421}$，由（4.31）可得

$$H_{421} \le \frac{2c}{\sigma^2}\|\xi_A\|_{4/3}\sum_{m\in B}\sum_{k\in N_m}\|X_m\|_4\|X_k\|_4 \le 0.3\|\xi_A\|_{4/3}\delta_1. \tag{4.93}$$

为了界定 $H_{422}$，我们需要得到 $\Big\|\xi_A\sum_{k\in N_A^c}|X_kY_{k,\ A}|\Big\|_{4/3}$ 的上界。

注意，对于任意 $p \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\{\xi_A^p\Big(\sum_{k\in N_A^c}|X_kY_{k,A}|\Big)^2\Big\}\\
&\quad\leq \sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\sum_{k'\in N_A^c}\sum_{l'\in A_{k'}\cap N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\big\}\\
&\quad\leq \sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\sum_{k'\in A_{kl}^c\cap N_A^c}\sum_{l'\in A_{k'}\cap A_{kl}^c\cap N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\big\} \qquad (4.94)\\
&\qquad+\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\sum_{k'\in A_{kl}\cap N_A^c}\sum_{l'\in A_{k'}\cap N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\big\}\\
&\qquad+\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in A_k\cap N_A^c}\sum_{k'\in N_A^c}\sum_{l'\in A_{k'}\cap A_{kl}\cap N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\big\}\\
&\quad\leq \sum_{(k,l)\in D_{A,1}}\sum_{(k',l')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\big\}\mathbf{1}(k'\in A_{kl}^c)\mathbf{1}(l'\in A_{kl}^c)\\
&\qquad+\mathbb{E}\{\xi_A^p\}\cdot(\kappa^3+\kappa\tau)\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^4.
\end{aligned}$$

对于 (4.94) 的第一项，回顾 (4.37)–(4.40) 可知

$$\sum_{(k,l)\in D_{A,3}}\sum_{(k',l')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\mathbf{1}(k'\in A_{kl}^c)\mathbf{1}(l'\in A_{kl}^c)\big\}\leq 0.2\lambda\sigma^4\mathbb{E}\{\xi_A^p\}. \qquad (4.95)$$

此外，若 $(k,\ l)\in D_{A,\ 2}$，$k'\in A_{kl}^c$ 且 $l'\in A_{kl}^c$，则 $(X_k,\ X_l)\perp\!\!\!\perp(\xi_A,\ X_{k'},\ X_{l'})$，这意味着

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,l)\in D_{A,2}}\sum_{(k',l')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_kX_lX_{k'}X_{l'}|\mathbf{1}(k'\in A_{kl}^c)\mathbf{1}(l'\in A_{kl}^c)\big\}\\
&\quad\leq\sum_{(k,l)\in D_{A,1}}\sum_{(k',l')\in D_{A,1}}\mathbb{E}\{|X_kX_l|\}\cdot\mathbb{E}\big\{\xi_A^p|X_{k'}X_{l'}|\big\}\leq\lambda^2\sigma^4\mathbb{E}\{\xi_A^p\}.
\end{aligned} \qquad (4.96)$$

结合 (4.94)、(4.95) 和 (4.96) 得

$$\mathbb{E}\Big\{\xi_A^p\Big(\sum_{k\in N_A^c}|X_kY_k|\Big)^2\Big\}\leq 1.21\lambda^2\sigma^4\mathbb{E}\{\xi_A^p\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\Big\|\xi_A\sum_{k\in N_A^c}|X_kY_k|\Big\|_{4/3}&\leq\big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}\}\big)^{1/4}\cdot\Big(\mathbb{E}\Big\{\xi_A^{4/3}\Big(\sum_{k\in N_A^c}|X_kY_k|\Big)^2\Big\}\Big)^{1/2}\\
&\leq 1.1\|\xi_A\|_1\sigma^2\lambda.
\end{aligned} \qquad (4.97)$$

回顾一下，正如（4.71）中所示，我们已经证明

$$\|T_A\|_4 \le \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\Big(\sum_{k\in N_A}\sum_{l\in N_k\cup A_k}\|X_k\|_4\|X_l\|_4\Big)^{1/2}.$$

将其与（4.97）结合，可得

$$H_{422} \le 3.2\|\xi_A\|_{4/3}\delta_4. \tag{4.98}$$

对于 $H_{423}$，由 H¨older 不等式和（4.85），可得

$$\|\xi_A(S_A - Y_{k,A})\|_{4/3} \le \big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}\}\big)^{1/4}\big(\mathbb{E}\{\xi_A^{4/3}(S_A - Y_{k,A})^2\}\big)^{1/2} \le 1.8\sigma\|\xi_A\|_{4/3}. \tag{4.99}$$

对于 $\|\Delta_k\|_4$，采用与推导（4.71）类似的论证，可得

$$\begin{aligned}\|\Delta_k\|_4 \le{}& 1.7\Big(\sum_{i\in N_A\cap A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^{1/2}\\ &+ 1.7\Big(\sum_{i\in N_A}\sum_{j\in(A_i\cup N_i)\cap A_k}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.100}$$

由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_2\Big(\sum_{i\in N_A\cap A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^{1/2}\\ &\le \frac{c}{\sigma^2}\Big(\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_2^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{k\in N_A^c}\sum_{i\in N_A\cap A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^{1/2}\\ &\le \frac{c}{\sigma^2}\Big(\kappa\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_2^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{i\in N_A}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^{1/2}\\ &\le \delta_4.\end{aligned} \tag{4.101}$$

同理，

$$\frac{c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_2\Big(\sum_{i\in N_A}\sum_{j\in(A_i\cup N_i)\cap A_k}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\Big)^{1/2} \le \delta_4. \tag{4.102}$$

由（4.100）、（4.101）和（4.102）可得

$$\frac{c}{\sigma^2}\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_2\|\Delta_k\|_4 \le 3.4\delta_4. \tag{4.103}$$

根据（4.99）和（4.103），可得

$$H_{423} \le \frac{3.6c}{\sigma^2}\|\xi_A\|_{4/3}\sum_{k\in N_A^c}\|X_k\|_2\|\Delta_k\|_4 \le 13\|\xi_A\|_{4/3}\delta_4. \tag{4.104}$$

结合（4.92）、（4.93）、（4.98）和（4.104）可得

$$H_{42} \le 0.3\|\xi_A\|_{4/3}\delta_1 + 17\|\xi_A\|_{4/3}\delta_4. \tag{4.105}$$

对于 $H_{43}$，利用$\|f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\|_\infty \le 1$并结合（4.78），我们有

$$\begin{aligned} H_{43} &\le \frac{2}{\sigma}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A|X_k(S_A-Y_k)|\cdot\Big|\frac{1}{\bar V_A}-\frac{1}{\bar V_A^{(k)}}\Big|\Big\} \\ &\le \frac{8}{\sigma^4}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\xi_A|X_k(S_A-Y_{k,A})|G_k^2\Big\} \\ &\le \frac{8}{\sigma^4}\sum_{k\in N_A^c}\big(\mathbb{E}\{\xi_A X_k^2(S_A-Y_{k,A})^2\}\big)^{1/2}\cdot\big(\mathbb{E}\{\xi_A G_k^4\}\big)^{1/2}. \end{aligned}$$

将此与（4.81）和（4.85）相结合，可得

$$\begin{aligned} H_{43} &\le \frac{28\|\xi_A\|_1}{\sigma^3}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{i\in A_k}\sum_{j\in A_i\cup N_i}\|X_k\|_4\|X_i\|_4\|X_i\|_4 \\ &\le \frac{56\|\xi_A\|_1\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^3 \\ &\le 56\|\xi_A\|_{4/3}\delta_2. \end{aligned} \tag{4.106}$$

将（4.88）、（4.105）和（4.106）代入（4.77），可得

$$|H_4| \le \|\xi_A\|_{4/3}\big(0.02(b-a+\alpha)+0.4\delta_1+96\delta_2+0.1\delta_3+17\delta_4\big). \tag{4.107}$$

(v) $H_2$的上界。现在，只需给出 $H_2$的界，为此我们使用递归论证。根据$f_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}$的定义，我们有

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\xi_A}{\bar V_A^2}\cdot\Big(f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A+t}{\bar V_A}\Big)-f'_{\eta_{A,B},\zeta_{A,B}}\Big(\frac{S_A}{\bar V_A}\Big)\Big)\widehat{M}_k(t)\mathrm{d}t\Big\} \\ &\le H_{21}+H_{22}, \end{aligned}$$

其中

$$H_{21} = \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\left\{\frac{\xi_A}{\alpha\bar V_A^3}\int_{\mathbb{R}}\int_{t\wedge 0}^{t\vee 0}\mathbf{1}\Big(\eta_{A,B}-\alpha\le\frac{S_A+s}{\bar V_A}\le\eta_{A,B}\Big)|\widehat{M}_k(t)|dsdt\right\},$$

$$H_{22} = \sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\left\{\frac{\xi_A}{\alpha\bar V_A^3}\int_{\mathbb{R}}\int_{t\wedge 0}^{t\vee 0}\mathbf{1}\Big(\zeta_{A,B}\le\frac{S_A+s}{\bar V_A}\le\zeta_{A,B}+\alpha\Big)|\widehat{M}_k(t)|dsdt\right\}.$$

对于 $H_{21}$中的指示函数，请注意

$$|s| \le |Y_{k,A}| \le \sum_{l\in N_A^c\cap A_k}|X_l| \le \sum_{l\in A_k}|X_l| \quad\text{and}\quad \bar V_A \ge \sigma/2.$$

因此，我们有

$$\mathbf{1}\Big(\eta_{A,B}-\alpha\le\frac{S_A+s}{\bar{V}_A}\le\eta_{A,B}\Big)\le\mathbf{1}(a-\alpha-U_k'\le S_A/\bar{V}_A\le a+U_k'),\quad(4.108)$$

其中

$$U_k'=(c+2)\sum_{l\in B\cup A_k}\frac{|X_l|}{\sigma}+\frac{c|S_A|Q_A}{\sigma}.$$

由（4.108）可得

$$\begin{aligned}|H_{21}|&\le\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\left\{\frac{8\xi_A}{\alpha\sigma^3}\int_{\mathbb{R}}\int_{t\wedge0}^{t\vee0}\mathbf{1}(a-\alpha-U_k'\le S_A/\bar{V}_A\le a+U_k')|\widehat{M}_k(t)|dsdt\right\}\\&\le\frac{4}{\sigma^3\alpha}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A\mathbf{1}\left(a-\alpha-U_k'\le S_A/\bar{V}_A\le a+U_k'\right)|X_kY_{k,A}^2|\big\}\\&\le\frac{4\kappa}{\sigma^3\alpha}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_k}\mathbb{E}\big\{\xi_A|X_kX_l^2|\mathbf{1}\left(a-\alpha-U_k'\le S_A/\bar{V}_A\le a+U_k'\right)\big\}\\&\le H_{211}+H_{212},\end{aligned}$$

其中

$$H_{211}=\frac{4\kappa^2}{3\sigma^3\alpha}\sum_{k\in N_A^c}\mathbb{E}\big\{\xi_A|X_k^3|\mathbf{1}(a-\alpha-U_k'\le S_A/\bar{V}_A\le a+U_k')\big\},$$

$$H_{212}=\frac{8\kappa^2}{3\sigma^3\alpha}\sum_{k\in N_A^c}\sum_{l\in N_A^c\cap A_k}\mathbb{E}\big\{\xi_A|X_l^3|\mathbf{1}(a-\alpha-U_k'\le S_A/\bar{V}_A\le a+U_k')\big\}.$$

我们使用递归论证来界定 $H_{211}$ and $H_{212}$。对于 $H_{211}$，令 $A_{1,k}=_A\cup\{k\}$，则根据 $S_A$ 和 $V_A$的定义，可得

$$\begin{aligned}\Big|\frac{S_A}{\bar{V}_A}-\frac{S_{A_{1,k}}}{V_{A_{1,k}}}\Big|&\le\Big|\frac{S_A}{\bar{V}_A}-\frac{S_{A_{1,k}}}{\bar{V}_A}\Big|+\Big|\frac{S_{A_{1,k}}}{\bar{V}_A}-\frac{S_{A_{1,k}}}{V_{A_{1,k}}}\Big|\\&\le2\sum_{m\in N_k}\frac{|X_m|}{\sigma}+|S_{A_{1,k}}|\cdot\Big|\frac{1}{\bar{V}_A}-\frac{1}{V_{A_{1,k}}}\Big|.\end{aligned}\quad(4.109)$$

根据不等式 $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\sqrt[]{|x-y|}$，对任意 $x,y\ge0$，可得

$$|\psi(x)-\psi(y)|=\Big|\sqrt{\psi^2(x)}-\sqrt{\psi^2(y)}\Big|\le\sqrt{|\psi^2(x)-\psi^2(y)|}\le\sqrt{|x-y|}.\quad(4.110)$$

注意，根据 $N_A$ 的定义，我们有 $N_A^c\backslash N_{A_{1,k}}^c\subset N_k$。结合这一点

与 (4.110) 可得

$$
\begin{aligned}
|\bar{V}_A - V_{A_{1,k}}| &\le \sqrt{\left| \sum_{i\in N_A^c} \sum_{j\in N_A^c\cap A_i} X_iX_j - \sum_{i\in N_{A_{1,k}}^c} \sum_{j\in N_{A_{1,k}}^c\cap A_i} X_iX_j \right|} \\
&\le \sqrt{\sum_{i\in N_k} \sum_{j\in A_i} |X_iX_j| + \sum_{i\in N_k} \sum_{j\in N_i} |X_iX_j|} = \sigma T_k.
\end{aligned} \tag{4.111}
$$

由（4.111）以及 $V_A \ge \sigma/2$ 和 $V_{A_{1,\,k}} \ge \sigma/2$这一事实，可得

$$
|S_{A_{1,k}}| \cdot \left| \frac{1}{\bar{V}_A} - \frac{1}{V_{A_{1,k}}} \right| \le |S_{A_{1,k}}| \min\left\{ \frac{4}{\sigma}, \frac{4T_k}{\sigma} \right\} = \frac{4|S_{A_{1,k}}|}{\sigma} \cdot Q_k. \tag{4.112}
$$

此外，注意到 $Q_A \le 1$，于是

$$
\begin{aligned}
\frac{c|S_A|Q_A}{\sigma} &\le \left| \frac{c|S_A|Q_A}{\sigma} - \frac{c|S_{A_{1,k}}|Q_A}{\sigma} \right| + \frac{c|S_{A_{1,k}}|Q_A}{\sigma} \\
&\le c \sum_{m\in N_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + \frac{c|S_{A_{1,k}}|Q_A}{\sigma}.
\end{aligned} \tag{4.113}
$$

此外，注意到 $\{k\} \subset A_{1,\,k}$ 和 $A \subset A_{1,\,k}$，于是

$$
T_A \le T_{A_{1,k}} \quad \text{and} \quad T_k \le T_{A_{1,k}}, \tag{4.114}
$$

这进一步意味着

$$
Q_A = \min\{1, T_A\} \le \min\{1, T_{A_{1,k}}\} = Q_{A_{1,k}} \quad \text{and} \quad Q_k \le Q_{A_{1,k}}. \tag{4.115}
$$

结合（4.109）–（4.115）可得

$$
\left| \frac{S_A}{\bar{V}_A} - \frac{S_{A_{1,k}}}{V_{A_{1,k}}} \right| \le 2 \sum_{m\in N_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + 4\frac{|S_{A_{1,k}}|Q_{A_{1,k}}}{\sigma} \tag{4.116}
$$

and

$$
\frac{c|S_A|Q_A}{\sigma} \le c \sum_{m\in N_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + \frac{c|S_{A_{1,k}}|Q_{A_{1,k}}}{\sigma}. \tag{4.117}
$$

由（4.116）和（4.117）可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}(S_A/\bar{V}_A \le a + U_k') \\
&= \mathbf{1}\Big( \frac{S_A}{\bar{V}_A} \le a + (c+2) \sum_{l\in B\cup A_k} \frac{|X_l|}{\sigma} + \frac{c|S_A|Q_A}{\sigma} \Big) \\
&\le \mathbf{1}\Big( \frac{S_{A_{1,k}}}{V_{A_{1,k}}} \le a + 2\sum_{m\in N_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + (c+2) \sum_{l\in B\cup A_k} \frac{|X_l|}{\sigma} + \frac{c|S_A|Q_A}{\sigma} + \frac{4|S_{A_{1,k}}|Q_{A_{1,k}}}{\sigma} \Big) \\
&\le \mathbf{1}\Big( \frac{S_{A_{1,k}}}{V_{A_{1,k}}} \le a + (2c+4) \sum_{m\in B\cup A_k\cup N_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + \frac{(c+4)|S_{A_{1,k}}|Q_{A_{1,k}}}{\sigma} \Big) \\
&= \mathbf{1}(S_{A_{1,k}}/V_{A_{1,k}} \le a + \tilde{U}_k),
\end{aligned}
$$

其中

$$\tilde{U}_k = (2c+4) \sum_{m \in B \cup A_k \cup N_k} \frac{|X_m|}{\sigma} + \frac{(2c+4)|S_{A_{1,k}}| Q_{A_{1,k}}}{\sigma}.$$

同理,

$$\mathbf{1}(S_A/\bar{V}_A \geq a - \alpha - U_k') \geq \mathbf{1}(S_{A_{1,k}}/V_{A_{1,k}} \geq a - \alpha - \tilde{U}_k),$$

结合上述两个不等式，我们得到

$$\mathbf{1}(a - \alpha - U_k' \leq S_A/\bar{V}_A \leq a + U_k') \leq \mathbf{1}(a - \alpha - \tilde{U}_k \leq S_{A_{1,k}}/V_{A_{1,k}} \leq a + \tilde{U}_k). \tag{4.118}$$

对于 $H_{211}$，由 $K$ 的定义及（4.118）可得

$$\begin{aligned}
H_{211} &= \frac{4\kappa^2}{3\sigma^3\alpha} \sum_{k \in N_A^c} \mathbb{E}\{\xi_A |X_k^3| \mathbf{1}(a - \alpha - U_k \leq S_A/\bar{V}_A \leq a + U_k)\} \\
&\leq \frac{4\kappa^2}{3\sigma^3\alpha} \sum_{k \in N_A^c} \mathbb{E}\{\xi_A |X_k^3| \mathbf{1}(a - \alpha - \tilde{U}_k \leq S_{A_{1,k}}/V_{A_{1,k}} \leq a + \tilde{U}_k)\} \\
&\leq \frac{4\kappa^2 K}{3\sigma^3\alpha} \sum_{k \in N_A^c} \|\xi_A X_k^3\|_{4/3} \Big\{ \frac{\alpha}{1500} + (2c+4) \sum_{m \in B \cup A_k \cup N_k} \frac{\|X_m\|_4}{\sigma} \\
&\quad + \frac{\lambda(2c+4)\kappa^2(|A|+1)^2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \|X_i\|_4^3 \\
&\quad + \frac{\lambda(2c+4)\kappa^{1/2}(\kappa + \tau^{1/2})(|A|+1)^{1/2}}{\sigma^2} \Big( \sum_{i=1}^n \|X_i\|_4^4 \Big)^{1/2} \\
&\quad + \lambda(2c+4) \Big( \sum_{m \in N_A \cup N_k} \sum_{l \in A_m \cup N_m} \frac{\|X_m\|_4 \|X_l\|_4}{\sigma^2} \Big)^{1/2} \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.119}$$

由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa^2}{\sigma^4} \sum_{k \in N_A^c} \sum_{m \in A_k \cup N_k} \|X_k\|_4^3 \|X_m\|_4 &\leq \frac{\kappa^2}{\sigma^4} \sum_{k \in N_A^c} \sum_{m \in A_k \cup N_k} \Big( \frac{3}{4} \|X_k\|_4^4 + \frac{1}{4} \|X_m\|_4^4 \Big) \\
&\leq \frac{2\kappa^3}{\sigma^4} \sum_{k \in [n]} \|X_k\|_4^4.
\end{aligned} \tag{4.120}$$

此外，应用基本不等式 $ab \leq \kappa a^2/2 + b^2/(2\kappa)$，并结合

$$a = \|X_k\|_4^2 \quad \text{and} \quad b = \Big( \sum_{m \in N_k} \sum_{l \in A_m \cup N_m} \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 \Big)^{1/2}$$

可得

$$\begin{aligned}
&\kappa^2 \sum_{k\in N_A^c} \|X_k\|_4^3 \cdot \Big( \sum_{m\in N_k} \sum_{l\in A_m\cup N_m} \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 \Big)^{1/2} \\
&\le \frac{\kappa^3}{2} \sum_{k\in N_A^c} \|X_k\|_4^4 + \frac{\kappa}{2} \sum_{k\in N_A^c} \sum_{m\in N_k} \sum_{l\in A_m\cup N_m} \|X_k\|_4^2 \|X_m\|_4 \|X_l\|_4 \\
&\le \frac{\kappa^3}{2} \sum_{k\in N_A^c} \|X_k\|_4^4 + \frac{\kappa}{2} \sum_{k\in N_A^c} \sum_{m\in N_k} \sum_{l\in A_m\cup N_m} \Big( \frac{1}{2}\|X_k\|_4^4 + \frac{1}{4}\|X_m\|_4^4 + \frac{1}{4}\|X_l\|_4^4 \Big) \\
&\le 1.5\kappa^3 \sum_{k\in[n]} \|X_k\|_4^4.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

由（4.119）–（4.121）可得

$$\begin{aligned}
H_{211} \le{}& \frac{4\kappa^2 K}{3\sigma^3\alpha} \sum_{k\in N_A^c} \|\xi_A\|_{4/3} \|X_k\|_4^3 \Big\{ \frac{\alpha}{1500} + 6\delta_1 + 24\delta_2 + 9\delta_3 + 6\delta_4 \Big\} \\
&+ \frac{28\lambda\kappa^3 K}{\sigma^4\alpha} \|\xi_A\|_{4/3} \sum_{k\in[n]} \|X_k\|_4^4.
\end{aligned}$$

回顾

$$\alpha = 1500\,(\delta_2 + \delta_3) \quad \text{and} \quad c \ge 1,\ |A| \ge 1,$$

then

$$\begin{aligned}
H_{211} &\le \frac{K\|\xi_A\|_{4/3}}{1125} \cdot \big( \delta_2 + 6\delta_1 + 24\delta_2 + 9\delta_3 + 6\delta_4 \big) + \frac{7K\|\xi_A\|_{4/3}}{375}\delta_3 \\
&\le \frac{2K\|\xi_A\|_{4/3}}{75} \cdot \big( \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \big).
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$H_{212} \le \frac{4K\|\xi_A\|_{4/3}}{75} \cdot \big( \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \big),$$

因此

$$H_{21} \le \frac{2K\|\xi_A\|_{4/3}}{25} \cdot \big( \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \big). \tag{4.122}$$

采用与导出（4.122）类似的论证，我们可以对 $H_{22}$得到相同的上界。然后，

$$H_2 \le \frac{4K\|\xi_A\|_{4/3}}{25} \cdot \big( \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \big). \tag{4.123}$$

由（4.74）、（4.75）、（4.76）、（4.107）和（4.123）可得

$$\begin{aligned}
&0.38\mathbb{E}\left\{\xi_A \mathbf{1}\left(\eta_{A,B} \le V \le \zeta_{A,B}\right)\right\} \\
&\quad \le \|\xi_A\|_{4/3} \cdot \big(1.22(b-a+\alpha) + 4\delta_1 + 96\delta_2 + 23\delta_3 + 28\delta_4\big) \\
&\qquad + 0.16K\|\xi_A\|_{4/3} \cdot \big(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4\big) \\
&\quad \le 1926\|\xi_A\|_{4/3} \cdot \big((b-a)/1500 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4\big) \\
&\qquad + 0.16K\|\xi_A\|_{4/3} \cdot \big((b-a)/1500 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4\big),
\end{aligned}$$

这意味着

$$0.38K \le 0.16K + 1926.$$

通过求解上述不等式，我们得到

$$K \le 8755.$$

证明至此完成。 □

## 5. 主要结果的证明

本节给出主要结果的证明。

### *5.1.* 定理 2.1

在本小节中，我们给出定理2.1的证明。我们首先为 $W_1$. 建立一个一般的 Berry–Esseen 界

**定理 5.1.** 在(LD1) 和(LD2)下，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_1 \le z) - \Phi(z)| \le C(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \tag{5.1}$$

其中

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\,\|X_i\|_4^3 + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|\,\|X_j\|_4^3,$$

$$\begin{aligned}\beta_2^2 = {}& \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_{ij}}\sum_{l\in A_k\cup N_k}\|X_i\|_4\|X_j\|_4\|X_k\|_4\|X_l\|_4 \\ & + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i\cup N_i}|A_i|^2\,\|X_i\|_4^3\,\|X_j\|_4 + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_i\cup N_j\cup A_j}|A_i|\,\|X_j\|_4^3\,\|X_k\|_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3^2 = {}& \frac{1}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\sum_{j\in A_i\cup N_i}\sum_{k\in N_j}\|X_i\|_4^3\,\|X_j\|_4\|X_k\|_4 \\ & + \frac{1}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_i\cup N_j}\sum_{l\in N_k}|A_i|\,\|X_j\|_4^3\,\|X_k\|_4\|X_l\|_4 \\ & + \frac{1}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}\sum_{(j,k)\in D_i}|A_i|^2\,\|X_i\|_4^3\,\|X_j\|_4\|X_k\|_4 \\ & + \frac{1}{\sigma^5}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{(k,l)\in D_j}|A_i|\|X_j\|_4^3\|X_k\|_4\|X_l\|_4.\end{aligned}$$

证明。 不失一般性，我们假设

$$\beta_2 \le 1/8, \tag{5.2}$$

否则（5.1）自然成立。对于任意 $z\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，令

$$h_{z,\varepsilon}(w) = \begin{cases}1, & \text{if } w\le z,\\ 1+\varepsilon^{-1}(z-w), & \text{if } z<w,\le z+\varepsilon\\ 0, & \text{if } w>z+\varepsilon.\end{cases} \tag{5.3}$$

注意

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_1\le z)-\Phi(z)| \le 0.4\varepsilon + \sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(W_1)-\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(Z)|, \tag{5.4}$$

我们关注 $|\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(W_1)-\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(Z)|$. 令 $f_{z,\varepsilon}$ 为以下 Stein 方程的解

$$f'(w)-wf(w) = h_{z,\varepsilon}(w)-\mathbb{E}\{h_{z,\varepsilon}(Z)\}, \tag{5.5}$$

其中 $Z\sim N(0,1)$。 可以证明（例如参见 Chen和Shao (2004)）

$$0\le f_{z,\varepsilon}(w)\le 1, \quad |f'_{z,\varepsilon}(w)|\le 1 \tag{5.6}$$

and

$$\left|f'_{z,\varepsilon}(w+t)-f'_{z,\varepsilon}(w)\right| \le (|w|+1)|t| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t\wedge 0}^{t\vee 0}\mathbf{1}[z\le w+u\le z+\varepsilon]du. \tag{5.7}$$

对于任意 $i\in[n]$，令 $Y_i=\sum_{j\in A_i}X_i$、$S^{(i)}=S-Y_i$ 以及

$$\begin{aligned}\hat{K}_i(t)&=X_i(\mathbf{1}(-Y_i\le t\le 0)-\mathbf{1}(0\le t\le -Y_i)),\\ \hat{K}_i&=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}_i(t)dt,\quad \hat{K}=\sum_{i\in[n]}\hat{K}_i.\end{aligned}\tag{5.8}$$

根据（LD1），$X_i$ 与 $S^{(i)}$独立，因此

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}W_1f_{z,\ \varepsilon}(W_1)\\ &=\frac{1}{\sigma}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\big\{X_i\big(f_{z,\varepsilon}(S/\sigma)-f_{z,\varepsilon}(S^{(i)}/\sigma)\big)\big\}\\ &=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{X_i\int_{-Y_i}^{0}f'_{z,\varepsilon}((S+t)/\sigma)dt\Big\}\\ &=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\left\{X_iY_if'_{z,\varepsilon}(W_1)\right\}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{X_i\int_{-Y_i}^{0}\left[f'_{z,\varepsilon}((S+t)/\sigma)-f'_{z,\varepsilon}(S/\sigma)\right]dt\Big\}\\ &=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\big\{\hat{K}f'_{z,\varepsilon}(W_1)\big\}+\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f'_{z,\varepsilon}((S+t)/\sigma)-f'_{z,\varepsilon}(S/\sigma)\right]\hat{K}(t)dt\Big\}.\end{aligned}$$

因此，

$$|\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(W_1)-\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(Z)|\le I_1+I_2+I_3,\tag{5.9}$$

其中

$$I_1=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}|\hat{K}-\sigma^2|,\qquad I_2=\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\{|X_iY_i^2|(1+|W_1|)\},$$

$$I_3=\frac{1}{\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t\wedge 0}^{t\vee 0}\mathbf{1}(z\le(S+u)/\sigma\le z+\varepsilon)\cdot|\hat{K}_i(t)|dudt\Big\}.$$

接下来，我们分别给出 $I_1$、$I_2$ 和 $I_3$ 的上界。对于 $I_1$，由引理4.1，可得

$$I_1=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}|\hat{K}-\sigma^2|=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big|\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}(X_iX_j-\mathbb{E}X_iX_j)\Big|\le C\beta_2.\tag{5.10}$$

对于 $I_2$，我们有

$$I_2\le\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|\sum_{j\in A_i}\mathbb{E}\{|X_iX_j^2|(1+|W_1|)\}\le I_{21}+I_{22},\tag{5.11}$$

其中

$$I_{21}=\frac{1}{3\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}\{|X_i^3|(1+|W_1|)\},\quad I_{22}=\frac{2}{3\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|\sum_{j\in A_i}\mathbb{E}\{|X_j^3|(1+|W_1|)\}.$$

对于 $I_{21}$，令 $W_1^{(i)} = S^{(i)}/\sigma$，则

$$\begin{aligned} I_{21} &\le \frac{1}{3\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}\big\{|X_i^3|(1+|W_1^{(i)}|)\big\} + \frac{1}{3\sigma^4}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}|X_i^3Y_i| \\ &\le \frac{1}{3\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}|X_i|^3\cdot(1+\mathbb{E}|W_1^{(i)}|) + \frac{1}{3\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|^2\|X_i\|_4^3\|X_j\|_4. \end{aligned}$$

注意到，由闵可夫斯基不等式可得

$$\|S^{(i)}\|_2 \le \|S\|_2 + \|S-S^{(i)}\|_2 \le \sigma + \sum_{j\in A_i}\|X_j\|_2,$$

这进一步意味着

$$I_{21} \le \frac{C}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}|X_i|^3 + \frac{C}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|^2\|X_i\|_4^3\|X_j\|_4. \tag{5.12}$$

通过类似的论证，我们可以得到 $I_{22}$ 的以下上界:

$$I_{22} \le \frac{C}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|\,\|X_j\|_4^3 + \frac{C}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in A_j}|A_i|\|X_j\|_4^3\|X_k\|_4. \tag{5.13}$$

结合（5.2）、（5.12）和（5.13）可得

$$I_2 \le C\beta_1 + C\beta_2^2 \le C\beta_1 + C\beta_2. \tag{5.14}$$

对于 $I_3$，当 $|s| \le |Y_i|$ 时，

$$\begin{aligned} I_3 &\le \frac{1}{2\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\big\{|X_iY_i^2|\mathbf{1}(z-|Y_i|/\sigma \le S/\sigma \le z+|Y_i|/\sigma+\varepsilon)\big\} \\ &\le \frac{1}{2\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|\mathbb{E}\big\{|X_iX_j^2|\mathbf{1}(z-|Y_i|/\sigma \le S/\sigma \le z+|Y_i|/\sigma+\varepsilon)\big\} \\ &\le I_{31} + I_{32}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中

$$\begin{aligned} I_{31} &= \frac{1}{6\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}\big\{|X_i|^3\mathbf{1}(z-|Y_i|/\sigma \le S/\sigma \le z+|Y_i|/\sigma+\varepsilon)\big\}, \\ I_{32} &= \frac{1}{3\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|\mathbb{E}\big\{|X_j|^3\mathbf{1}(z-|Y_i|/\sigma \le S/\sigma \le z+|Y_i|/\sigma+\varepsilon)\big\}. \end{aligned}$$

对于任意 $i\in[n]$，令

$$S_i = S - \sum_{k\in N_i}X_k.$$

对于 $I_{31}$，取

$$\varepsilon = \beta_2 + \beta_3,$$

于是由命题 4.5，可得

$$\begin{aligned}
I_{31} &\le \frac{1}{6\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\mathbb{E}\Big\{|X_i|^3\mathbf{1}\Big(z-2\sum_{m\in A_i\cup N_i}\frac{|X_m|}{\sigma}\le\frac{S_i}{\sigma}\le z+2\sum_{m\in A_i\cup N_i}\frac{|X_m|}{\sigma}+\varepsilon\Big)\Big\}\\
&\le \frac{C}{\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}|A_i|^2\|X_i\|_4^3\cdot\Big(\varepsilon+\frac{1}{\sigma}\sum_{j\in N_i}\|X_j\|_4+\frac{1}{\sigma}\sum_{m\in A_i\cup N_i}\|X_m\|_4\\
&\qquad+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{m\in A_i\cup N_i}\sum_{k\in N_m}\|X_k\|_4\|X_m\|_4+\sum_{(k,l)\in D_i}\|X_k\|_4\|X_l\|_4+\beta_1+\beta_2+\beta_3\Big)\\
&\le C\beta_1+C(\beta_2^2+\beta_3^2)/\varepsilon\\
&\le C(\beta_1+\beta_2+\beta_3).
\end{aligned}$$

类似地，对于 $I_{32}$，有

$$\begin{aligned}
I_{32} &\le \frac{1}{3\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}|A_i|\mathbb{E}\Big\{|X_j|^3\mathbf{1}\Big(z-2\sum_{m\in A_i\cup N_j}|X_m|\le\frac{S_j}{\sigma}\le z+2\sum_{m\in A_i\cup N_j}|X_m|+\varepsilon\Big)\Big\}\\
&\le C(\beta_1+\beta_2+\beta_3),
\end{aligned}$$

因此

$$I_3 \le C(\beta_1+\beta_2+\beta_3). \tag{5.16}$$

结合（5.4）、（5.9）、（5.10）、（5.15）、（5.14）和（5.16），我们完成了定理 2.1 的证明。 □

定理 *2.1* 的证明..... 注意到

$$\beta_1 \le \frac{2\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3 \quad\text{and}\quad \beta_2 \le \frac{C\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}.$$

对于 $\beta_3$，注意到对于任意 $i\in[n]$，由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in N_j}\|X_j\|_4\|X_k\|_4 &\le C\Big(\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in N_j}(\|X_j\|_4^2+\|X_j\|_4^2)^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{j\in A_i}\sum_{k\in N_j}1\Big)^{1/2}\\
&\le C\Big(\kappa^3\sum_{j\in[n]}\|X_j\|_4^4\Big)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

类似地，我们有

$$\sum_{j\in N_i}\sum_{k\in N_j}\|X_j\|_4\|X_k\|_4 \le C\Big(\kappa^3\sum_{j\in[n]}\|X_j\|_4^4\Big)^{1/2}. \tag{5.18}$$

此外，根据柯西不等式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{(k,l)\in D_i}\|X_k\|_4\|X_l\|_4 &\le \frac{1}{2}\sum_{(k,l)\in D_i}(\|X_k\|_4^2+\|X_l\|_4^2)\\ &\le \frac{1}{2}\Big(\sum_{(k,l)\in D_i}(\|X_k\|_4^2+\|X_l\|_4^2)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{(k,l)\in D_i}1\Big)^{1/2}\\ &\le C\Big(\kappa\tau\sum_{k\in[n]}\|X_k\|_4^4\Big)^{1/2}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

结合（5.17）–（5.19）可得

$$\beta_3 \le \frac{C\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3+\frac{C\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}.$$

这就证明了定理 2.1。 □

### *5.2.* 定理 2.2 的证明

在本小节中，我们将通过 Stein 方法2.2 和集中不等式方法证明定理

$$\bar{V}=\psi\Big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\Big)\quad\text{and}\quad\bar{W}_2=\sum_{i\in[n]}X_i/\bar{V},$$

其中 $\psi(x)=((x\vee(\sigma^2/4))\wedge(2\sigma^2))^{1/2}$. 我们先引入一个命题¯，它给出了 $W_2$. 的 Berry–Esseen 界

**命题 5.2.** 在 （LD1）和（LD2）条件下，有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\bar{W}_2\le z)-\Phi(z)|\le C\lambda\Big\{\frac{\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3+\frac{\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}\Big\},$$

其中

$$\lambda=\frac{\kappa}{\sigma^2}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_2^2.$$

证明。 不失一般性，假设

$$\kappa^2\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^3\le\sigma^3/500\quad\text{and}\quad\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}\le\sigma^2/500,$$

否则该不等式是平凡的。令 $f_{z,\,\varepsilon}$ 为 Stein 方程（5.5）的解，其中

$$\varepsilon=\frac{\lambda\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3+\frac{\lambda\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{\bar{W}_2 f_{z,\varepsilon}(\bar{W}_2)\}\\&\quad=\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{\frac{X_i}{\bar{V}}\Big(f_{z,\varepsilon}(\bar{W}_2)-f_{z,\varepsilon}\Big(\frac{S-Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big)\Big\}+\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{\frac{X_i}{\bar{V}}f_{z,\varepsilon}\Big(\frac{S-Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\}\\&\quad=\mathbb{E}\Big\{\frac{1}{\bar{V}^2}\int_{-\infty}^{\infty}f'_{z,\varepsilon}\Big(\frac{S+u}{\bar{V}}\Big)\hat{K}(u)du\Big\}+\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{\frac{X_i}{\bar{V}}f_{z,\varepsilon}\Big(\frac{S-Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

其中 $\hat{K}(u)$ 定义见（5.8）。采用与推导（5.9）类似的论证，我们有

$$|\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(\bar{W}_2)-\mathbb{E}h_{z,\varepsilon}(Z)|\le|R_1|+|R_2|+|R_3|+|R_4|,\tag{5.20}$$

其中

$$\begin{aligned}R_1&=\mathbb{E}\Big|1-\frac{1}{\bar{V}^2}\sum_{i\in[n]}X_iY_i\Big|,\\R_2&=\frac{8}{\sigma^3}\mathbb{E}\left\{(|\bar{W}_2|+1)\int_{-\infty}^{\infty}|t\hat{K}(t)|dt\right\},\\R_3&=\frac{8}{\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\left\{\left|X_iY_i^2\right|\mathbf{1}\left(z-|Y_i|/\bar{V}\le\bar{W}_2\le z+\varepsilon+|Y_i|/\bar{V}\right)\right\},\\R_4&=\sum_{i\in[n]}\Big|\mathbb{E}\Big\{\frac{X_i}{\bar{V}}f_{z,\varepsilon}\Big(\frac{S-Y_i}{\bar{V}}\Big)\Big\}\Big|.\end{aligned}$$

下面依次给出 $R_1$、$R_2$、$R_2$ 和 $R_4$ 的上界。对于 $R_1$，我们有

$$R_1\le R_{11}+R_{12},$$

其中

$$\begin{aligned}R_{11}&=\mathbb{E}\Big\{\Big|1-\frac{4}{\sigma^2}\sum_{i\in[n]}X_iY_i\Big|\mathbf{1}\Big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\le\sigma^2/4\Big)\Big\},\\R_{12}&=\mathbb{E}\Big\{\Big|1-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i\in[n]}X_iY_i\Big|\mathbf{1}\Big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\ge2\sigma^2\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

对于 $R_{11}$，由引理4.1 和切比雪夫不等式，我们有

$$\begin{aligned}R_{11}&\le\frac{4}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big\{\Big(\Big|\sum_{\in[n]}X_iY_i-\sigma^2\Big|+\frac{3\sigma^2}{4}\Big)\mathbf{1}\Big(\Big|\sum_{i\in[n]}X_iY_i-\sigma^2\Big|\ge3\sigma^2/4\Big)\Big\}\\&\le\frac{C}{\sigma^2}\mathbb{E}\Big|\sum_{i\in[n]}(X_iY_i-\mathbb{E}X_iY_i)\Big|\\&\le\frac{C\kappa^{1/2}(\kappa+\tau)}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

类似的论证对 $R_{12}$成立，因此

$$R_1 \le \frac{C\kappa^{1/2}(\kappa+\tau)}{\sigma^2}\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}. \tag{5.21}$$

对于 $R_2$，注意到 $V \ge \sigma/2$。结合式（5.11）、（5.12）和（5.13）可得

$$\begin{aligned} R_2 &\le \frac{8}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\left\{(|\bar{W}_2|+1)\left|X_iY_i^2\right|\right\} \\ &\le \frac{8}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\Big\{\big(\frac{2}{\sigma}|S|+1\big)\left|X_iY_i^2\right|\Big\} \\ &\le \frac{C\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^3+\frac{C\kappa^3}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^4. \end{aligned} \tag{5.22}$$

对于 $R_3$，由杨氏不等式可得

$$R_3 \le R_{31}+R_{32}, \tag{5.23}$$

其中

$$\begin{aligned} R_{31} &= \frac{8\kappa^2}{3\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}\left\{|X_i|^3\mathbf{1}\left(z-|Y_i|/\bar{V}\le\bar{W}_2\le z+\varepsilon+|Y_i|/\bar{V}\right)\right\}, \\ R_{32} &= \frac{16\kappa}{3\varepsilon\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\mathbb{E}\left\{|X_j|^3\mathbf{1}\left(z-|Y_i|/\bar{V}\le\bar{W}_2\le z+\varepsilon+|Y_i|/\bar{V}\right)\right\}. \end{aligned}$$

对于 $R_{31}$，定义

$$\bar{V}_i=\psi\Big(\sum_{k\in N_i^c}\sum_{l\in A_k\cap N_i^c}X_kX_l\Big)\quad\text{and}\quad S_i=\sum_{k\in N_i^c}X_k,$$

then

$$\Big|\frac{S}{\bar{V}}-\frac{S_i}{\bar{V}_i}\Big|\le\Big|\frac{S}{\bar{V}}-\frac{S_i}{\bar{V}}\Big|+\Big|\frac{S_i}{\bar{V}}-\frac{S_i}{\bar{V}_i}\Big|\le\frac{2}{\sigma}\sum_{m\in N_i}|X_m|+|S_i|\cdot\Big|\frac{1}{\bar{V}}-\frac{1}{\bar{V}_i}\Big|. \tag{5.24}$$

由 $V$ 的定义 $V_i$ 以及（4.110）可知

$$\begin{aligned} |\bar{V}-\bar{V}_i| &= \Big|\psi\Big(\sum_{k\in[n]}\sum_{l\in A_k}X_kX_l\Big)-\psi\Big(\sum_{k\in N_i^c}\sum_{l\in A_k\cap N_i^c}X_kX_l\Big)\Big| \\ &\le \sqrt{\Big|\sum_{k\in[n]}\sum_{l\in A_k}X_kX_l-\sum_{k\in N_i^c}\sum_{l\in A_k\cap N_i^c}X_kX_l\Big|} \\ &\le \sqrt{\sum_{k\in N_i}\sum_{l\in A_k}|X_kX_l|+\sum_{k\in N_i}\sum_{l\in N_l}|X_kX_l|}=\sigma T_i. \end{aligned} \tag{5.25}$$

此外，回忆一下，$V \geq \sigma/2$ 和 $V_i \geq \sigma/2$，则

$$|S_i| \cdot \Big|\frac{1}{\bar{V}} - \frac{1}{\bar{V}_i}\Big| \leq \frac{4|S_i|}{\sigma}. \tag{5.26}$$

结合（5.24）、（5.25）和（5.26）可得

$$\Big|\frac{S}{\bar{V}} - \frac{S_i}{\bar{V}_i}\Big| \leq \sum_{m\in N_i} \frac{2|X_m|}{\sigma} + \frac{4|S_i|}{\sigma} \cdot \min\{1, T_i\} = \sum_{m\in N_i} \frac{2|X_m|}{\sigma} + \frac{4|S_i|Q_i}{\sigma}, \tag{5.27}$$

其中 $Q_i =$ 最小值$\{1, T_i\}$. 由（5.27），可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}\left(z - |Y_i|/\bar{V} \leq \bar{W}_2 \leq z + |Y_i|/\bar{V}\right) \\
&\quad \leq \mathbf{1}\Big(z - \sum_{m\in A_i\cup N_i} \frac{4|X_m|}{\sigma} - \frac{4|S_i|Q_i}{\sigma} \leq \frac{S_i}{\bar{V}_i} \leq z + \varepsilon + \sum_{m\in A_i\cup N_i} \frac{4|X_m|}{\sigma} + \frac{4|S_i|Q_i}{\sigma}\Big).
\end{aligned}$$

结合上述不等式、命题 4.6 以及（4.120）–（4.121），得到

$$\begin{aligned}
|R_{31}| &\leq \frac{C\kappa^2}{\varepsilon\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}\Big\{|X_i|^3 \mathbf{1}\Big(z - \sum_{m\in A_i\cup N_i} \frac{4|X_m|}{\sigma} - \frac{4|S_i|Q_i}{\sigma} \leq \frac{S_i}{\bar{V}_i} \\
&\qquad\qquad \leq z + \varepsilon + \sum_{m\in A_i\cup N_i} \frac{4|X_m|}{\sigma} + \frac{4|S_i|Q_i}{\sigma}\Big)\Big\} \\
&\leq \frac{C\lambda\kappa^2}{\varepsilon\sigma^4} \sum_{i\in[n]} \sum_{m\in A_i\cup N_i} \|X_i\|_4^3 \|X_m\|_4 + \frac{C\lambda\kappa^2}{\varepsilon\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 \cdot \frac{\kappa^2}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 \\
&\quad + \frac{C\lambda\kappa^2}{\varepsilon\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 \cdot \frac{\kappa^{1/2}(\kappa + \tau^{1/2})}{\sigma^2} \Big(\sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4\Big)^{1/2} \\
&\quad + \frac{C\lambda\kappa^2}{\varepsilon\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 \cdot \Big(\sum_{k\in N_i} \sum_{l\in A_k\cup N_k} \frac{\|X_k\|_4 \|X_l\|_4}{\sigma^2}\Big)^{1/2} \\
&\quad + \frac{C\lambda\kappa^2}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 \\
&\leq \frac{C\lambda\kappa^2}{\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 + \frac{C\lambda\kappa^{1/2}(\kappa + \tau^{1/2})}{\sigma^2} \Big(\sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4\Big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{5.28}$$

其中

$$\lambda = \frac{\kappa}{\sigma^2} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_2^2.$$

对于 $R_{32}$，采用与推导出（5.28）类似的论证，可得

$$R_{32} \leq \frac{C\lambda\kappa^2}{\varepsilon\sigma^3} \sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^3 + \frac{C\lambda\kappa^{1/2}(\kappa + \tau^{1/2})}{\sigma^2} \Big(\sum_{i\in[n]} \|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}. \tag{5.29}$$

结合（5.23）、（5.28）和（5.29），可得

$$|R_3| \le C\lambda\Big\{\frac{\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3 + \frac{\kappa^{1/2}(\kappa+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\big)^{1/2}\Big\}. \tag{5.30}$$

对于 $R_4$，由引理4.3，可得

$$|R_4| \le \frac{C\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^3 + \frac{C\kappa^3}{\sigma^4}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^4. \tag{5.31}$$

由（5.20）、（5.21）、（5.22）、（5.30）和（5.31）完成命题5.2的证明。□

现在，我们可以证明定理 2.2了。

定理 *2.2* 的证明。假设

$$\frac{\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3 \le \frac{1}{500},$$

否则，2.3）显然成立。定义

$$\tilde{V} = \psi\big(\sum_{i\in[n]}(X_iY_i - \bar{X}\bar{Y})\big) \quad \text{and} \quad \tilde{W}_2 = S/\tilde{V},$$

于是，由三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_2\le z)-\Phi(z)| \\
&\quad\le \sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_2\le z)-\mathbb{P}(\tilde{W}_2\le z)| + \sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\tilde{W}_2\le z)-\mathbb{P}(\bar{W}_2\le z)| \\
&\qquad+\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\bar{W}_2\le z)-\Phi(z)|.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

对于（5.32）中的第一项，我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_2\le z)-\mathbb{P}(\tilde{W}_2\le z)| \\
&\quad\le \mathbb{P}\big(\sum_{i\in[n]}(X_iY_i-\bar{X}\bar{Y})\le\sigma^2/4\big)+\mathbb{P}\big(\sum_{i\in[n]}(X_iY_i-\bar{X}\bar{Y})\ge 2\sigma^2\big) \\
&\quad\le \mathbb{P}\big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\le n|\bar{X}\bar{Y}|+\sigma^2/4\big)+\mathbb{P}\big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\ge -n|\bar{X}\bar{Y}|+2\sigma^2\big) \\
&\quad\le \mathbb{P}\big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\le\sigma^2/2\big)+\mathbb{P}\big(\sum_{i\in[n]}X_iY_i\ge 7\sigma^2/4\big)+2\mathbb{P}(n|\bar{X}\bar{Y}|\ge\sigma^2/4).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

注意到 $\sigma^2 = \mathbb{E}S^2 = \sum_{i\in[n]} X_iY_i$，由引理 4.1可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sum_{i\in[n]} X_iY_i \le \sigma^2/2\Big) &\le \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i\in[n]}(X_iY_i - \mathbb{E}\{X_iY_i\})\Big| \ge \frac{\sigma^2}{2}\Big)\\ &\le \frac{C(\kappa^{3/2}+\kappa^{1/2}\tau^{1/2})}{\sigma^2}\cdot\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

同理,

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i\in[n]} X_iY_i \ge 7\sigma^2/4\Big) \le \frac{C(\kappa^{3/2}+\kappa^{1/2}\tau^{1/2})}{\sigma^2}\cdot\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2}. \tag{5.35}$$

对于 $\mathbb{P}(n|\bar{X}\bar{Y}| \ge \sigma^2/4)$，由引理4.4，可得

$$\mathbb{P}(n|\bar{X}\bar{Y}| \ge \sigma^2/4) \le \frac{4}{\sigma^2}\cdot\mathbb{E}|S\bar{Y}| \le \frac{4\|\bar{Y}\|_4}{\sigma} \le 8\lambda\kappa n^{-1}. \tag{5.36}$$

另一方面，注意到由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\sigma^3 = \Big(\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\mathbb{E}\{X_iX_j\}\Big)^{3/2} &\le \kappa^{1/2}n^{1/2}\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\mathbb{E}\{|X_i|^{3/2}|X_j|^{3/2}\}\\ &\le \kappa^{3/2}n^{1/2}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^3,\end{aligned}$$

这进一步意味着

$$\kappa^{1/2}n^{-1/2} \le \frac{\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\mathbb{E}|X_i|^3. \tag{5.37}$$

结合（5.33）–（5.37），可得

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W\le z) - \mathbb{P}(\tilde{W}_2\le z)|\\ &\quad\le \frac{C\kappa^{1/2}(\kappa^{1/2}+\tau^{1/2})}{\sigma^2}\cdot\Big(\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^4\Big)^{1/2} + \frac{C\lambda\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3.\end{aligned} \tag{5.38}$$

由（5.38）和命题5.2，为了证明定理2.2，只需为 sup 提供一个上界$_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\tilde{W}_2\le z) - \mathbb{P}(\bar{W}_2\le z)|$. 令 $\varepsilon_1 = \kappa^{1/2}\lambda n^{-1/2}$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{W}_2\le z) - \mathbb{P}(\bar{W}_2\le z) &\le \mathbb{E}\{h_{z,\varepsilon_1}(\tilde{W}_2)\} - \mathbb{E}\{h_{z,\varepsilon_1}(\bar{W}_2)\} + \mathbb{P}(z\le\bar{W}_2\le z+\varepsilon_1)\\ &:= Q_1 + Q_2,\end{aligned} \tag{5.39}$$

其中$h_{z,\ \varepsilon_1}$ 由（5.3）定义，且

$$Q_1 = \mathbb{E}\{h_{z,\varepsilon_1}(\tilde{W}_2)\} - \mathbb{E}\{h_{z,\varepsilon_1}(\bar{W}_2)\},\quad Q_2 = \mathbb{P}(z\le\bar{W}_2\le z+\varepsilon_1).$$

由 $V$ 和 $V$ 的定义可知

$$|Q_1| \le \|h'\|_\infty \mathbb{E}|\tilde{W}_2 - \bar{W}_2| \le \frac{1}{\varepsilon_1}\mathbb{E}\Big\{|S| \cdot \Big|\frac{1}{\tilde{V}} - \frac{1}{\bar{V}}\Big|\Big\} \le \frac{4}{\varepsilon_1 \sigma^3}\mathbb{E}|S^2\bar{Y}|. \tag{5.40}$$

由引理 4.4 及不等式 $ab \le ca^2/2 + b^2/(2c)$，结合 $a = S$，$b = S\cdot\sum_{i\in[n]} Y_i$，$c = \kappa\lambda\sigma$，可得

$$\mathbb{E}\Big|S^2\Big(\sum_{i\in[n]} Y_i\Big)\Big| \le \frac{\kappa\lambda\sigma}{2}\cdot\mathbb{E}|S|^2 + \frac{1}{2\kappa\lambda\sigma}\mathbb{E}\Big|S^2\Big(\sum_{i\in[n]} Y_i\Big)^2\Big| \le 13\kappa\lambda\sigma^3. \tag{5.41}$$

结合式（5.40）和式（5.41）可得

$$|Q_1| \le C\kappa^{1/2}\lambda n^{-1/2} \le \frac{C\lambda\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3. \tag{5.42}$$

至于 $Q_2$，注意到

$$\begin{aligned} |Q_2| &\le |\Phi(z+\varepsilon_1) - \Phi(z)| + 2\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\bar{W}_2 \le z) - \Phi(z)| \\ &\le \frac{C\lambda\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3 + 2\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\bar{W}_2 \le z) - \Phi(z)|. \end{aligned} \tag{5.43}$$

由式（5.39）、式（5.42）和式（5.43），可得 $\mathbb{P}(W_2 \le z) - \mathbb{P}(W_2 \le z)$ 的一个上界，即

$$\mathbb{P}(\tilde{W}_2 \le z) - \mathbb{P}(\bar{W}_2 \le z) \le \frac{C\lambda\kappa^2}{\sigma^3}\sum_{i\in[n]}\|X_i\|_4^3 + 2\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(\bar{W}_2 \le z) - \Phi(z)|.$$

下界可用类似的方法推导。结合命题 5.2，定理 2.2的证明

□

### *5.3.* 定理 3.1、3.4、3.9和 3.15<*style id=''*>的证明

在本小节中，我们给出定理 3.1、3.4、3.9 和 3.15的证明。

#### *5.3.1.* 定理 3.1 和 3.9的证明

定理 *3.1*的证明。设 $A_{ij} = A_i \cup A_j$，则 $A_{ij}$ 满足 (LD2)。注意到 $N_i = \{k \in \mathcal{V} : i \in A_k\} = A_i$ 且对于任意 $k \in [n]$,

$$\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\mathbf{1}(k \in A_{ij}) \le \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\mathbf{1}(k \in A_i) + \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in A_i}\mathbf{1}(k \in A_i) \le 2\kappa^2, \tag{5.44}$$

这意味着 $\kappa \le 2d$且 $\tau \le 4d^2$。分别应用定理 2.1 和 2.2，可得 (3.1) 和 (3.2)。

□

定理3.9的证明。根据假设 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(U_n(f;\mathcal{D})/n^{2b-1}=\sigma_{f,\mathcal{D}}^2>0$，存在 $N$，使得对任意 $n\geq N$，均有 $\sigma_n^2:=\mathrm{Var}(U_n(f;\mathcal{D}))\geq n^{2b-1}\sigma_{f,\mathcal{D}}^2/2$. 因此，要应用定理 2.1 和 2.2，我们只需估计 $\kappa$ 和 $\tau$. 的阶。对任意 $i,j\in\mathcal{I}$，定义

$$A_{ij1}=\{k\in\mathcal{I},s(k)\cap s(i)=\varnothing\ \&\ s(k)\cap s(j)=\varnothing\text{ and }|k-i|\leq m\},$$
$$A_{ij2}=\{k\in\mathcal{I},s(k)\cap s(i)=\varnothing\ \&\ s(k)\cap s(j)=\varnothing\text{ and }|k-j|\leq m\}.$$

现在，对于 $i\in\mathcal{I}$和 $j\in A_i$，令 $A_{ij}=A_{i1}\cup A_{j1}\cup A_{ij1}\cup A_{ij2}$. 。可以验证， $A_i$ 和 $A_{ij}$ 满足 (LD1) 和(LD2)。注意到 $A_{ij1}\subset A_{i2}$ 和 $A_{ij2}\subset A_{j2}$，要估计 $A_i$ 和 $A_{ij}$ 的阶，只需估计 $A_{i1}$和 $A_{i2}$的数量。事实上，注意到 $l$ 和 $m$ 是固定的，于是

$$\begin{aligned}|A_{i1}|&=\sum_{p=1}^{l}|\{k\in\mathcal{I},|s(k)\cap s(i)|=p\}|\\&\leq l\cdot|\{k\in\mathcal{I},|s(k)\cap s(i)|=1\}|=O(n^{b-1}).\end{aligned}\tag{5.45}$$

根据 $A_{i2}$的定义，对于任意 $j\in A_{i2}$，存在 $p\in s(i)$ 和 $q\in s(j)$，使得 $|p-q|\leq m$，这意味着

$$|A_{i2}|=O(n^{b-1}).\tag{5.46}$$

合并（5.45）和（5.46），得到

$$|A_i|\leq|A_{i1}|+|A_{i2}|=O(n^{b-1})\quad\text{and}\quad|A_{ij}|\leq|A_i|+|A_j|=O(n^{b-1}).\tag{5.47}$$

至于 $N_i$，根据 $A_i$的定义，我们有

$$\begin{aligned}N_i&=\{k\in\mathcal{I},i\in A_k\}\\&=\{k\in\mathcal{I},i\in A_{k1}\}\cup\{k\in\mathcal{I},i\in A_{k2}\}\\&=\{k\in\mathcal{I},s(k)\cap s(i)\neq\varnothing\}\cup\{k\in\mathcal{I},s(k)\cap s(i)=\varnothing\text{ and }|i-k|\leq m\}\\&=A_{i1}\cup A_{i2}=A_i.\end{aligned}\tag{5.48}$$

结合（5.47）和（5.48）可得 $\kappa=O\left(n^{b-1}\right)$ 。对于 $\tau$，注意到 $A_{ij}\subset A_i\cup A_j$，于是

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in A_i}\mathbf{1}(k\in A_{ij})\leq\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in A_i}\mathbf{1}(k\in A_i)+\mathbf{1}(k\in A_j)\leq 2\kappa^2.$$

于是 $\tau=O(n^{2b-2})$。由定理3.9 、定理2.1 和2.2可得证。 □

### *5.3.2.* 定理3.4的证明

在证明定理3.4之前，我们先应用定理5.1 ，得到一个适用于分布式统计推断的更一般的 Berry–Esseen 界。对于任意 $1\leq i\leq k$，令$\mathcal{J}_i$ 为 $\mathbb{N}_+$的子集。此外，令

$$\mathcal{I}_i=\{i\}\times\mathcal{J}_i\quad\text{and}\quad\mathcal{I}=\cup_{i=1}^{k}\mathcal{I}_i.$$

我们考虑一族局部依赖随机变量 $\{X_{ij}:(i,\ j)\in\mathcal{I}\}$。假设

(LD-D1) 对任意 $(i,\ j)\in\mathcal{I}$，存在 $A_{i,\ j}\subset\mathcal{J}_i$，使得 $X_{ij}$ 与 $\{X_{kl}\in\mathcal{I}$ 独立：$l\notin A_{i,\ j}\}$。(LD-D2) 对任意 $(i,\ j)\in\mathcal{I}$ 和 $(i,\ k)\in\{i\}\times A_{i,\ j}$，存在 $A_{i,\ j}\subset A_{i,\ jk}\subset\mathcal{J}_i$，使得 $\{X_{ij},X_{ik}\}$ 与 $\{X_{pq}\in\mathcal{I}$ 独立：$q\notin A_{i,\ jk}\}$。

假设对于任意 $(i,\ j)\in\mathcal{I}.$，$\mathbb{E}X_{ij}=0$ 成立。令 $S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}X_{ij}$，且 $\sigma^2=\mathrm{Var}(S)$。此外，对于任意 $(i,\ j)\in\mathcal{I}$，令 $N_{i,\ j}=\{(p,\ q)\in\mathcal{I}:(i,\ j)\in\{p\}\times A_{p,\ q}\}=\{(i,\ q):\ q\in\mathcal{J}_i,\ j\in A_{i,\ q}\}$。此外，对于任意 $1\le i\le k$，令 $\kappa_i$ 和 $\tau_i$ 为两个正常数，使得

$$\kappa_i=\max\Big\{\sup_{j\in\mathcal{J}_i}|N_{i,j}|,\sup_{(j,k):j\in\mathcal{J}_i,k\in A_{i,j}}|A_{i,jk}|\Big\},$$
$$\tau_i=\max_{j\in\mathcal{J}_i}\big|(p,q)\in\mathcal{J}_i\times\mathcal{J}_i;\ q\in A_{i,p},\ j\in A_{i,pq}\big|.$$

我们有如下命题。

**命题 5.3.** 若 $\mathbb{E}|X_{ij}|^4<\infty$ 对任意 $1\le i\le k,\ j\in\mathcal{J}_i$，则

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(S/\sigma\le z)-\Phi(z)|\le\frac{C}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}\kappa_i^2\|X_{ij}\|_4^3+\frac{C}{\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}(\kappa_i^3+\kappa\tau_i)\|X_{ij}\|_4^4\Big)^{1/2}.$$

证明。注意到 $\{X_{ij},(i,j)\in\mathcal{I}\}$ 可视为满足条件（LD1）和（LD2）的一族局部依赖随机变量。我们应用定理 5.1来证明命题 5.3。为此，我们只需给出$\beta_1$, $\beta_2$ 和 $\beta_3$.的上界。经过一些简单的代数计算可得

$$\beta_1\le\frac{C}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}\kappa_i^2\|X_{ij}\|_4^3\quad\text{and}\quad\beta_2^2\le\frac{C}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}(\kappa_i^3+\kappa_i\tau_i)\|X_{ij}\|_4^4.\tag{5.49}$$

对于 $\beta_3$，注意到对任意 $(i,j),(i,l)\in\mathcal{I}$，由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{p\in A_{i,j}\cup N_{i,j}\cup N_{i,l}}\sum_{q\in N_{i,p}}\|X_{ip}\|_4\|X_{iq}\|_4\\&\le C\Big(\sum_{p\in A_{i,j}\cup N_{i,j}\cup N_{i,l}}\sum_{q\in N_{i,p}}(\|X_{ip}\|_4^2+\|X_{iq}\|_4^2)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{p\in A_{i,j}\cup N_{i,j}\cup N_{i,l}}\sum_{q\in N_{i,p}}1\Big)^{1/2}\\&\le C\Big(\kappa_i^3\sum_{p\in\mathcal{J}_i}\|X_{ip}\|_4^4\Big)^{1/2}\le C\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}(\kappa_i^3+\kappa\tau_i)\|X_{ij}\|_4^4\Big)^{1/2}.\end{aligned}\tag{5.50}$$

同样地，对于任意 $(i,\ j)\in\mathcal{I}$，令

$$\begin{aligned}D_{(i,j)}&=\{(p,q_1,q_2);q_2\in A_{p,q_1},\{i,j\}\in\{p\}\times A_{p,q_1q_2}\}\\&=\{(q_1,q_2)\in\mathcal{J}_i\times\mathcal{J}_i;q_2\in A_{i,q_1},j\in A_{i,q_1q_2}\},\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
&\sum_{(p,q)\in D_{(i,j)}} \|X_{ip}\|_4\|X_{iq}\|_4 \\
&\le C\Big(\sum_{(p,q)\in D_{(i,j)}} (\|X_{ip}\|_4^2+\|X_{iq}\|_4^2)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{(p,q)\in D_{(i,j)}} 1\Big)^{1/2} \\
&\le C\Big(\tau_i \sum_{p\in\mathcal{J}_i}\sum_{q\in A_{i,p}} \big(\|X_{ip}\|_4^4+\|X_{iq}\|_4^4\big)\Big)^{1/2} \\
&\le \frac{C}{\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}(\kappa_i^3+\kappa\tau_i)\|X_{ij}\|_4^4\Big)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

结合（5.49）、（5.50）和（5.51），我们完成了命题5.3的证明。

□

现在，我们准备证明定理 3.4。

**定理 *3.4*的证明。** 我们应用命题5.3 来证明定理 3.4。对于每个$1 \le i \le k$，我们将 $\mathcal{J}_i$ 记为第 $i$个子集中所有求和指标所组成的集合，即

$$\mathcal{J}_i := \big\{j=(j_1,j_2,\cdots,j_m)\in\mathbb{R}^m,\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n_i \text{ and } X_{ij_k}\in\mathbb{S}_i, \forall k\in[m]\big\},$$

则$|\mathcal{J}_i| = \binom{n_i}{m}$. 设 $\mathcal{I}_i = \{i\}\times\mathcal{J}_i$ 与 $\mathcal{I} = \cup_{i=1}^k \mathcal{I}_i$. 此外，对任意 $j\in\mathcal{J}_i$，定义 $s(j) = \{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$. 为应用命题 5.3，我们需要定义 $A_{i,\ j}$和 $A_{i,\ jk}$，使得集族 $\{X_{ij},(i,\ j)\in\mathcal{I}\}$ 满足 (LD-D1) 和 (LD-D2)。对任意 $(i,\ j)\in\mathcal{I}$，定义

$$A_{i,j} = \{p\in\mathcal{J}_i : s(p)\cap s(j)\neq\varnothing\}.$$

对于每个 $(i,\ j)\in\mathcal{I}$ 和 $p\in A_{i,\ j}$，定义

$$A_{i,jk} = \{q\in\mathcal{J}_i : s(q)\cap(s(j)\cup s(p))\neq\varnothing\}.$$

容易验证，利用上文定义的 $A_{i,\ j}$和 $A_{i,\ jk}$，集合 $\{X_{ij},(i,\ j)\in\mathcal{I}\}$ 满足 (LD-D1) 和 (LD-D2)。现在我们推导 $\kappa_i$ 和 $\tau_i$.的上界。根据 $A_{i,\ j}$的定义，我们有

$$\begin{aligned}
|A_{i,j}| &= \binom{n_i}{m} - \binom{n_i-m}{m} = \sum_{t=1}^{m}\binom{n_i-m}{m-t}\binom{m}{t} \\
&= \sum_{u=0}^{m-1}\frac{m}{u+1}\binom{n_i-m}{m-1-u}\binom{m-1}{u} \\
&\le m\binom{n_i-1}{m-1},
\end{aligned}$$

其中，第二个等号和最后一个不等式用到了下面这个等式：

$$\binom{n}{m} = \sum_{t=0}^{m} \binom{n-m}{m-t}\binom{m}{t}, \quad \text{for all } n \geq m.$$

根据$N_{i,j}$的定义，我们可以验证$N_{i,j} = A_{i,j}$。此外，注意到$A_{i,jk} \subset A_{i,j} \cup A_{i,k}$，那么对于任意的$(i,j) \in \mathcal{I}$，有

$$\sum_{p\in\mathcal{J}_i}\sum_{q\in A_{i,p}} \mathbf{1}\big(j \in A_{i,pq}\big) \leq \sum_{p\in\mathcal{J}_i}\sum_{q\in A_{i,p}} \mathbf{1}\big(j \in A_{i,p}\big) + \sum_{p\in\mathcal{J}_i}\sum_{q\in A_{i,p}} \mathbf{1}\big(j \in A_{i,p}\big) \leq 2\kappa_i^2.$$

结合上述结果，我们得到

$$|\mathcal{J}_i| = \frac{n_i}{m}\binom{n_i-1}{m-1}, \quad \kappa_i \leq Cm\binom{n_i-1}{m-1} \quad \text{and} \quad \tau_i \leq Cm^2\binom{n_i-1}{m-1}^2. \tag{5.52}$$

下面给出 $\mathrm{Var}(U_i)$ 的一个下界。令

$$W_i = \frac{m}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} g(X_{ij}),$$

那么根据 Hoeffding 分解（见 Hoeffding (1948)），我们得到

$$\mathrm{Var}(U_{N,i}) \geq \mathrm{Var}(W_i) = \frac{m^2}{n_i}\sigma_1^2,$$

这进一步意味着

$$\mathrm{Var}(W) = \frac{1}{m^2\sigma_1^2 N}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \mathrm{Var}(U_{N,i}) \geq 1. \tag{5.53}$$

应用命题 5.3 并结合（5.52）和（5.53），我们得到定理3.4。

□

*5.3.3.* 定理的证明 3.15

对任意 $\psi \in A_\varphi$，定义

$$A_{\varphi,\psi} = \{\phi \in \mathcal{J} : e\left(G_\phi \cap (G_\varphi \cup G_\psi)\right) \geq 1\}.$$

于是$A_{\varphi,\ \psi}$ 满足 (LD2)。此外，由于$A_{\varphi,\ \psi} \subseteq A_\varphi \cup A_\psi$，由（5.44）可得 $\tau \leq 2\kappa^2$。最后，注意到 $N_\varphi = A_\varphi$ 与 $|A_\varphi| = O\left(n^{v-2}\right)$，我们得到 $\kappa = O\left(n^{v-2}\right)$。因此，定理3.15 可由定理2.1与2.2推出。

**基金资助**

邵启满的研究部分得到国家自然科学基金委员会国家自然科学基金12031005以及中国深圳杰出人才培训基金的资助，Z.-S. Zhang的研究部分得到国家自然科学基金委员会国家自然科学基金12301183以及优秀青年科学基金的资助。

**参考文献**

Abraham, R., Delmas, J.-F. 和 Weibel, J.（2025）。概率图极限：大型稠密加权图的极限。《图论创新》2 25–117。Baldi, P. 和 Rinott, Y.（1989）。基于依赖图的分布正态逼近。《概率论年刊》17 1646–1650。Barbour, A. D., Karoński, M. 和 Ruciński, A.（1989）。可分解随机变量的中心极限定理及其在随机图中的应用。《组合理论杂志B辑》47 125-145。Bolthausen, E.（1982年）。关于平稳混合随机场的中心极限定理。《概率论年刊》10 1047–1050。Bóna, M.（2007）。任意排列模式的副本均渐近正态。预印本。可于 http://arxiv.org/abs/0712.2792 获取。Chen, L. H. Y., Goldstein, L. 和 Shao, Q.-M.（2011年）。基于Stein 方法的正态逼近。《概率及其应用》。施普林格柏林海德堡。Chen, S. X. 和 Peng, L.（2021年）。海量数据的分布式统计推断。《统计学年刊》49 2851–2869。Chen, L. H. Y., Röllin, A.和 Xia, A.（2021年）。Palm理论、随机测度与Stein耦合。《应用概率年刊》31 2881–2923。Chen, L. H. Y. 和 Shao, Q.-M.（2001）。基于Stein 方法的非一致Berry–Esseen 界。《概率论及相关领域》120 236–254。Chen, L. H. Y.和 Shao, Q.-M.（2004）。局部依赖下的正态近似。《概率论年刊》32 1985–2028。Chen, L. H. Y. 和 Shao, Q.-M.（2007）。基于集中不等式方法的非线性统计量正态近似。Bernoulli 13 581–599。Dufour, C. 和 Olhede, S. C.（2024）。装饰图的推断及其在多层网络中的应用。预印本。可于 http://arxiv.org/ abs/2408.12339 获取。Eichelsbacher, P. 和 Rednoss, B.（2023年）。基于Stein–Tikhomirov 方法的可分解随机变量与子图计数的Kolmogorov界。Bernoulli 29 1821–1848。Fang, X.（2016）。有界可分解随机向量的多元中心极限定理及已知最优速率。《理论概率杂志》29 1510–1523。Fang, X.（2019）。局部依赖下正态近似中的Wasserstein-2界。《电子概率杂志》24 1–14。

Flajolet, P., Szpankowski, W. 和 Vallée, B. （2006）。隐藏词统计。《ACM期刊》53 147—183。Hoeffding, W. （1948）。一类具有渐近正态分布的统计量。《数理统计年刊》19 293–325。Hoeffding, W. 和 Robbins, H. （1948）。相依随机变量的中心极限定理。《杜克数学杂志》15 773–780。Hofer, L.（2018）。粘连型排列模式的中心极限定理。《离散数学与理论计算机科学》第19卷第2期，排列模式2016。Jacquet, P. 和 Szpankowski, W. （2015）。解析模式匹配：从DNA到Twitter。剑桥大学出版社，剑桥。Janisch, M. 和 Lehéricy, T. （2024）。具有稀疏依赖图的随机变量的Berry–Esseen 型估计。《理论概率杂志》37 3627–3653。Janson, S. （2023年）。 $m$相依与约束$U$统计量的渐近正态性及其在随机字符串与排列模式匹配中的应用。《应用概率进展》55 841–894。Kunszenti-Kovács, D., Lovász, L. 和 Szegedy, B. （2022）。多重图极限、无界核与巴拿赫空间装饰图。《泛函分析杂志》282 109284。Lévy, P. （1935年）。独立或链锁随机变量之和的渐近性质。Propri´et´es asymptotiques des sommes de variables al´eatoires ind´ependantes ou encha ̂ın´ees。《纯粹与应用数学杂志》Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees 14 347–402。可于 https://www.numdam.org/item/JMPA_1935_9_14_1-4_347_0/ 获取。Lin, N. 和 Xi, R. （2010年）。U统计量的快速替代。《计算统计与数据分析》54 16-24。Liu, T.和 Austern, M.（2023年）。局部依赖下中心极限定理中的Wasserstein-p 界。《电子概率杂志》28 1–47。Liu, S.-H. 和 Zhang, Z.-S. （2023年）。局部依赖下的Cram´er型中偏差。《应用概率年刊》33 4747–4797。Lovász, L. 和 Szegedy, B.（2010年）。紧装饰图的极限。预印本。可于 http://arxiv.org/abs/1010.5155 获取。Nicodème, P., Salvy, B. 和 Flajolet, P.（2002）。基序统计。《理论计算机科学》287 593–617。算法。Raič, M. （2004）。具有有限二阶矩的可分解随机向量的多元中心极限定理。《理论概率杂志》17 573–603。Rosenblatt, M. （1956年）。一个中心极限定理与强混合条件。《美国国家科学院院刊》42 43–47。Ross, N. （2011年）。Stein 方法基础。《概率综述》8 210–293。Rucińki, A. （1988）。随机图的小子图何时服从正态分布？《概率论及相关领域》78 1–10。Shao, Q.-M. 和 Zhang, Z.-S. （2022）。多元非线性统计量的Berry–Esseen界及其在M 估计量与随机梯度下降算法中的应用。Bernoulli 28 1548–1576。Shao, Q.-M. 和 Zhang, Z.-S. （2025）。泛函的Berry-Esseen界

独立随机变量。随机过程及其应用**184** 104574。Shao, Q.-M. 和 Zhou, W.-X. （2016）。自归一化过程的 Cramér 型中等偏差定理。*Bernoulli* **22** 2029–2079。Su, Z., Ulyanov, V. V. 和 Wang, X. （2025）。通过扰动 Stein 算子逼近局部依赖随机变量之和。概率论及其应用**70** 24–36。Temčinas, T., Nanda, V. 和 Reinert, G. （2024）。随机团复形的多元中心极限定理。应用与计算拓扑学杂志**8** 1837–1880。Zhang, Z.-S. （2024）。局部依赖随机变量的自归一化和的 Berry-Esseen界。中国科学：数学 **67** 2629–2652。