Th单纯形类型论中的 ∞-范畴的 ∞-范畴 y

DANIEL GRATZER，丹麦奥胡斯大学JONATHAN WEINBERGER，美国查普曼大学ULRIK BUCHHOLTZ，英国诺丁汉大学

单纯形类型论（STT）由 Riehl 和 Shulman 提出，旨在利用同伦类型论证明有关（∞<style id="2" >，1）-范畴的结果。单纯形类型论的早期研究侧重于高阶范畴论中的“形式化”论证；尤其是在 STT 中无法构造出任何非平凡的 ∞-范畴论实例。近年来，通过应用最初为立方类型论发展出的技术来构造空间的 ∞-范畴，这一局面发生了改变。我们通过构造 ∞-范畴的 ∞-范畴，完成了这一进程，并以纯类型论的方式重现了 ∞-范畴论的一项主要基础性结果（直化–反直化）。我们还展示了这一构造如何为结构恒等原理的有向版本——结构同态原理——带来新的实例。

arXiv:2602.02218v1 [cs.LO] 2 Feb 2026

致谢

Jonathan Weinberger 感谢查普曼大学 Fowler 工程学院对本工作的慷慨支持。他特别感谢 Fletcher Jones基金会授予他 Fletcher Jones基金会工程 faculty fellowship（’25–’28），以及由此为本工作提供的慷慨资助。他还感谢查普曼大学的 Schmid科学与技术学院，以及计算、代数与拓扑卓越中心（CECAT），感谢他们提供了出色的研究环境。

1 引言

依赖类型论的一个定义性特征是关注（小）类型的宇宙。与其他数学基础相比，这类宇宙对于证明诸如 $0 \neq 1$ [38] 这样的基本性质也至关重要。这种对宇宙的关注在 同伦类型论 (同伦类型论) [39] 中更为突出，因为其中的宇宙增添了单值性公理。这类 单值宇宙使类型论学者能够将类型视为空间（即 ∞-群胚）的合成体现，而内涵恒等类型 $a =_A b$ 则刻画类型 A 中的路径。这一观点的实用性体现在 同伦类型论内部的合成同伦论发展之中：以更简单、更具概念性的证明重建同伦论中的经典结果。

同伦类型论中长期存在的一项挑战是拓展合成同伦论的适用范围，使其涵盖同伦相干代数结构，尤其是范畴论的同伦增强：(∞，1)-范畴论。[1] 尽管人们已提出许多解决这一问题的方法 [1, 14, 17, 25–29、33、40–42] 我们将聚焦于 Riehl 和 Shulman 提出的方法 [33]。在此，作者借助了一个非标准的同伦类型论模型，其中类型由单纯形空间实现。特别是，他们证明，完全 Segal空间——一种已知的∞-范畴模型 [31]——由满足一对易于定义的性质的特定类型构成。因此，在这种设定下，并非每个类型都是 ∞-范畴，但每个 ∞-范畴都对应一个有效类型。

具体而言，单纯形类型论 通过加入一个有向区间来扩展同伦类型论，并假设它是一个全序格（𝕀，0，1，≤）。这个新类型旨在表示具有两个对象 0，1 和一个非恒等态射 $0 \to 1$ 的 ∞-范畴；STT 的模型为这种解释提供了依据

[1]在标题中以及下文中，我们都将简称“∞-范畴”，有时甚至简称“范畴”，来指代（∞，1）-范畴。若要专门讨论普通范畴，我们会明确称其为1-范畴。

作者联系方式：Daniel Gratzer，gratzer@cs.au.dk，奥胡斯大学，丹麦；Jonathan Weinberger，jweinberger@chapman.edu，查普曼大学，美国；Ulrik Buchholtz，ulrik.buchholtz@nottingham.ac.uk，诺丁汉大学，英国。

在单纯形空间中——然后我们使用 $\mathbb{I}$ 将任意类型 A 中的态射定义为普通函数 $\mathbb{I} \to A$。通过约束综合态射的端点，我们得到了类型中综合态射空间的定义：同态集$_A(a,\ b) \equiv \sum_{f:\ \mathbb{I}\to A} f\,0 = a \times f\,1 = b$。

Riehl 和 Shulman [33] 随后证明，∞-范畴的定义可以简洁地表述为类型上的一个谓词isCat，其本质要求是：每一对可复合的态射都有唯一的复合态射。此外，他们还表明，这类类型之间的普通函数构成函子，而 ∞-范畴论中的其他经典定义也都可以由此表达。后续研究进一步拓展了这一方法，发展了纤维化范畴论 [5, 43]、极限和余极限 [3], 等。

虽然在 STT 中并非每个类型都构成一个 ∞-范畴，但许多类型论运算都能保留类型为 ∞-范畴这一性质。例如，$\mathbf{0}$ 和$\mathbf{1}$ 分别是始范畴和终范畴，$A \times B$ $(A + B)$ 是（余）积范畴，而 $A \to B$ 是函子范畴。作为 HoTT 的扩展，STT 配备了一个（层级的）宇宙，因此自然会提出这样的问题：

Is $\mathcal{U}$ a recognizable category, e.g., the category of categories?

遗憾的是，答案是否定的；U 是 STT 中一个类型并非 ∞-范畴的典型例子。事实上，即使考虑宇宙的简单子类型（例如，$\sum_{A:\mathcal{U}} \mathsf{isCat}(A)$），也无法得到一个范畴，因为合成态射 $\mathbb{I} \to \sum_{A:\mathcal{U}} \mathsf{isCat}(A)$ 既不能复合，也不能忠实地表示函子。然而，人们长期以来一直猜想，范畴的范畴应当可以在 STT 中构造为宇宙的某个子类型。

我们通过肯定地证明这一猜想，并将范畴的范畴构造为子类型 Cat $\hookrightarrow$ U，进而验证其基本性质，弥补了合成类型论基础中的这一最后缺口。

1.1 有向单值性与Cat

应当采用什么标准来判断子类型 Cat $\hookrightarrow$ U 是否是范畴的范畴的一种有效定义？如果不考虑 ∞- 范畴，答案很直接：若 Cat 中的对象恰好表示满足 isCat 的小类型，合成态射恰好是这些类型之间的函数（即函子），并且复合运算和恒等运算的表现符合预期，那么 Cat 就是一个有效定义。在 ∞-范畴的情形下，事情并非到此为止；我们还必须确信所有高阶合成态射的表现也“符合预期”。然而，预期的表现究竟应当如何，却远不明朗！因此，我们采用另一种方法，提炼出嵌入 Cat $\hookrightarrow$ U 的一条特定泛性质，并论证 Cat 的所有其他性质都源自这条性质。

这里所讨论的泛性质是格罗滕迪克对应的 ∞-范畴版本，在 ∞-范畴语境中通常称为直化–反直化。经典的格罗滕迪克对应指出，对于某个 1-范畴 C，存在从伪函子 C $\to$ Cat到由一个范畴 E 和一个余笛卡尔族 E $\to$ C.[2] 组成的对象对之间的等价。直观而言，这似乎为类型 Cat 提供了一个简单的泛性质：我们应要求，对于每个 ∞-范畴 C，函数 $C \to \mathsf{Cat}$ 的类型与类型 $\sum_{E:\ \mathcal{U}} \sum_{\pi:\ E\to C} \mathsf{isCocart}(\pi)$ 之间存在等价。遗憾的是，这个定义过于直接：如果这样的 Cat 存在，我们就能证明 isCocart 对每个映射 π 都成立，而这显然不是真的。

这个问题对立方类型论学者来说并不陌生：我们本质上是在要求 Cat 成为一个泛纤维化，其中 isCocart 是我们的纤维性概念。众所周知，在立方集合的外延类型论中，无法为单值宇宙给出泛性质 [30]：朴素等价仅相对于闭元素成立，并且无法以这种方式内化到

[2] 在 1-范畴和 2-范畴文献中，这些通常称为格罗滕迪克上纤维化。我们使用“余笛卡尔”一词，因为它是 ∞-范畴论中的标准术语。

类型论中，从而也适用于任意语境下的元素。Licata等人在立方类型论中给出了这一问题的解决方案。 [18]。在那里，作者给出了面向立方集合的外延类型论中一种泛纤维化的描述，所借助的是模态类型论。他们为类型论补充了一个幂等余单子♭，使得模态类型⟨♭ | A⟩仅包含全局元素，即 A的元素。在进一步为类型论扩充一个到 $\mathbb{I} \to$ –的右伴随之后，他们不仅能够表达所需的泛性质（适当地标注以♭），而且还能利用前述右伴随将其推导出来。

这一想法最初由 Weaver 和 Licata [42]推广到单纯形类型论的变体中，随后 Gratzer 等人 [10] 也沿用这一思路，构造出一个离散 ∞-范畴（空间）的范畴。我们沿着这条研究路线——具体而言，遵循 Gratzer 等人 [10]的工作——并使用♭ 模态，为范畴的范畴陈述正确的泛性质，并构造一个满足该性质的类型。特别地：

定理 4.2. Cat 是万有余笛卡尔族的基底，也就是说，对于任意 $C :_\flat \mathcal{U}$，我们有$\langle \flat \mid C \to \mathrm{Cat}\rangle \simeq \left\langle \flat \mid \sum_{E:C\to\mathcal{U}} \mathrm{isCocart}(E)\right\rangle$。

单看这条陈述，并没有多大意义。我们不知道 Cat 本身是否是一个范畴，更不用说它的对象和态射分别对应什么。为了解决这个问题，我们依托单纯形类型论中已有的结果，详细分析某些范畴上的余笛卡尔纤维化的结构。作为这些结果的一个特例，我们得出结论：$\mathbb{I}$上的余笛卡尔纤维化由以下数据确定：(1) 一对范畴 C、 D，以及 (2) 一个函数 $C \to D$。因此，我们能够证明 Cat 的有向单价定理：

推论 5.5 （有向单价性）。 若 A, B 是 Cat 的 ♭-元素，则存在一个等价dua : 同态集$_{\mathrm{Cat}}(A, B) \simeq \langle \flat \mid A \to B\rangle$。

这里我们看到了范畴情形与先前考察的离散范畴情形之间第一个显著差异。Cat 的有向单价性只能保证 $\mathrm{hom}_{\mathrm{Cat}}(A, B)$ 等价于 $\flat \mid A \to B$，而在离散情形中则可得到与 $A \to B$的等价。这是不可避免的：没有任何 范畴能使其同态空间等价于任意范畴 $A \to B$ A, B。然而，有向单价性中模态的出现带来了显著的复杂性。

对我们的分析作进一步推论可证明 Cat 是一个范畴，并且合成态射的复合（在有向单价性下）对应于普通函数的复合。总而言之，我们表明，Cat 的泛性质足以导出范畴的范畴所应有的所有预期性质，并且还能唯一刻画 Cat 本身。

有向单价性开启了广泛的应用。例如，我们用它证明 Cat 包含若干容易识别的反射 子范畴（截断范畴、偏序、空间等）。它还使我们能够将 Cat 与现有的类型论联结词结合，从而构造新的重要范畴。作为一个简单的例子，我们证明 $\sum_{c:\mathrm{Cat}} c$ 可以用有向单价性来分析，并运用其相关的结构同态原理 （SHP）来说明$\sum_{c:\mathrm{Cat}} c$ 就是松弛 切片范畴1 // Cat。

最后，尽管定理 4.2 是格罗滕迪克对应的一种形式，但并非可能的最强形式。最强形式会断言， ∞-范畴之间存在一种等价：一边是 C 上的余笛卡尔族，另一边是函子范畴 $C \to$ Cat。我们将 Cisinski 等人概述的论证 [6] 改编到STT 中，以证明定理 4.2可提升为范畴等价，从而给出直化—反直化 定理 [19]的合成证明。

1.2 贡献与提纲

我们的主要贡献是在 STT 中首次构造了范畴的有向单价范畴，并验证了其全部本质性质。这是单纯形类型论中 ∞-范畴理论所缺失的最后一个主要原语，此外也构成

一种针对 ∞-范畴论本身中某条基础定理的全新方法。在此基础上，我们还指出，一种假定的完整有向类型论可以通过仅仅给出到 STT 适当片段的句法翻译，而被解释到 ∞-范畴中。

- 我们扩展了 Licata等人 [18] 构造万有余笛卡尔族$\mathrm{Cat}_\bullet \to \mathrm{Cat}$。
- 我们仅凭这一泛性质推导出 Cat 是一个范畴、满足有向单价性等结论。
- 我们证明了 Cat 的各种性质，并展示了它所支持的 SHP 新颖应用。
- 最后，我们给出了直化–反直化基础定理的完全综合式证明。

总而言之，我们展示了类型论（通过 STT）在证明高阶范畴论中的重要结果方面具有极高的效力。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们回顾单纯形类型论的主要思想、其三角化类型论变体，以及由此得到的模态扩展。这部分内容与第 3 节 关于余笛卡尔纤维化的讨论，旨在使本文尽可能自成一体。在第 4 节 中，我们定义Cat 并证明定理 4.2，这是本文的主要构造。在第 5 节中，我们结合关于余笛卡尔纤维化的新结果与上一节的结果，证明推论 5.5 ，并证明Cat 是一个范畴。最后，在第 6 节 和第 7 节中，我们给出若干由这些结果推得的结论，包括直化–反直化的证明（推论 6.6）。

2 单纯形类型论与三角化类型论

现在，我们来更精确地说明将要采用的单纯形类型论的特点。与 Riehl 和 Shulman [33] 研究的原始系统相比，该理论有两项重大改动。首先，我们在理论中加入了一系列模态，包括引言中讨论的$\flat$ 模态。我们借助 MTT（一种通用的模态依赖类型论） [9]来实现这一点。其次，STT 的预期模型是单纯形空间，即 ∞-范畴版本的$\mathbf{PSh}(\Delta)$。然而，为了利用 Licata等人[18] 的技术来定义 Cat，我们需要公设一个从 $\mathbb{I} \to -$ 出发的惊人右伴随。遗憾的是，在单纯形空间的预期模型中，这样的右伴随根本不存在；单形范畴没有积。

为绕过这一问题，Gratzer 等人 [10] 引入了 STT 模态变体的进一步放宽形式：三角化类型论 $\mathrm{TT}^{\triangleright}$。$\mathrm{TT}^{\triangleright}$ 的预期模型是戴德金立方 空间，而非单纯形空间。单纯形空间作为一个子拓扑斯嵌入这一预期模型，因此原有结构得以保留。具体而言，这一改变将 $\mathbb{I}$ 全序的要求放宽为仅要求它是一个有界分配格。在本节中，我们回顾与本文相关的 $\mathrm{TT}^{\triangleright}$ 细节，尤其描述构造范畴的范畴所需的模态扩展。

2.1 三角化类型论的初步

如第 1 节所述，STT 及其放宽形式 $\mathrm{TT}^{\triangleright}$扩展了同伦类型论。因此，我们首先回顾同伦类型论的基本定义和符号。更完整的介绍请参阅单值基础项目 [39]。

同伦类型论始于内涵式 Martin-Löf 类型论，其中包含宇宙层级 $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \ldots$，以及内涵恒等类型 $a =_A b$。我们用 $\prod$ 和 $\sum$ 表示该类型论中的标准依赖积类型和依赖和类型，并用 $p_!$ 表示由 $p : x = y$ 诱导的传输映射 $B(x) \to B(y)$。HoTT 的关键扩展——单值性公理——规定了其行为

宇宙的内涵恒等类型。特别是，该公理将宇宙中的等同性与等价联系起来。关于等价类型 $A \simeq B$的详细讨论，请参见前引文；这里只需指出，它是 $A \to B$ 的一个子类型，在 $A = B$时包含恒等函数。

公理 1. 将refl 映到id 的典范映射 $A =_{\mathcal{U}_i} B \to A \simeq B$ 是一个等价。

我们还将用到若干其他同伦类型论概念。首先，由于单值性使得恒等证明唯一性以相当惊人的方式失效，因此我们把该性质仍然成立的那些类型分离出来，称为（同伦）集合。我们还将用到更强的性质，即成为（同伦）命题或可缩：

$$\begin{aligned}\mathsf{isSet}(A) &= \textstyle\prod_{a,b:A} \mathsf{isProp}(a = b)\\ \mathsf{isProp}(A) &= \textstyle\prod_{a,b:A} \mathsf{isContr}(a = b)\\ \mathsf{isContr}(A) &= \textstyle\sum_{a:A} \prod_{b:A} a = b\end{aligned}$$

若 $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 取值于命题，我们将 $\mathrm{U}\phi$ 记作 $\sum_{A:\mathcal{U}} \phi(A)$。此外，我们用 HProp 作为 $\mathrm{U}^{\mathsf{isProp}}$ 的简记。

接下来，我们需要若干高阶归纳类型（高阶归纳类型）。它们是这样的归纳类型：其构造子不仅给出该类型的元素，也给出其恒等类型的元素。例如，我们将使用推出 $A +_B C$ 以及 Rijke 等人所定义的局部化 [34]。由于满足严格等式的高阶归纳类型模型颇为棘手，我们仅假定我们的高阶归纳类型满足命题计算规则，即它们是同伦初始代数。

现在我们转向三角化类型论的第一个也是最基本的公理，该公理引入了有向区间。

公理 2。 存在一个集合 $\mathbb{I}$，其上赋予有界分配格的结构 (0、1、 ∧、 ∨)，使得 $0 \neq 1$。

关键在于，与 STT 相比，我们不假设 $\prod_{i,\ j:\ \mathbb{I}} i \leq j \vee j \leq i$ 成立。然而，正如 UIP 的失败一样，我们可以将那些“相信 $i \leq j \vee j \leq i$”的类型单独提取出来，称为单纯类型。这些类型 A 满足以下条件：

$$\mathsf{isSimp}(A) = \textstyle\prod_{i,j:\mathbb{I}} \mathsf{isEquiv}(\mathsf{const} : A \to (i \leq j \vee j \leq i \to A))$$

下一个结果由 Rijke 等人 [34]得出：

命题 2.1。 存在一个左精确幂等单子 $\circledS : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$，其中 $\circledS A$ 在所有接收从 A出发的映射的单纯类型中具有泛性质。

换言之，普通单纯形类型论是 TT$\circledS$ 的“子集”，由满足$\eta_A : A \to \circledS A$ 为等价的类型构成。对于由单纯类型张成的 U 的子类型，我们记作 $\mathrm{U}^{\circledS} = \sum_{A:\ \mathcal{U}} \mathsf{isEquiv}(\eta_A)$，并注意到 $\mathrm{U}^{\circledS}$ 本身也是单纯的。因此，存在唯一的 $\hat{}\circledS : \circledS\mathrm{U} \to \mathrm{U}^{\circledS}$，使得 $\hat{}\circledS \circ \eta = \circledS$。

借助 $\mathbb{I}$，我们可以给出若干重要定义，从而筛选出那些行为确实类似范畴的类型。首先，如前所述，我们可以将类型 A 中的合成态射定义为映射 $\mathbb{I} \to A$。对这个映射的端点加以约束后，我们便得到综合同态类型的定义：

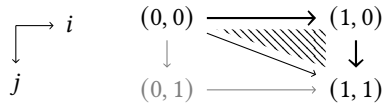
$$\hom_A(a, b) = \textstyle\sum_{f:\mathbb{I}\to A} f\,0 = a \times f\,1 = b$$

每个类型都配备了一组恒等态射：$\mathrm{id}_a = \lambda_.\, a : \text{同态集}(a, a)$。然而，范畴所需的另一种运算——复合——并非默认可用。取而代之的是一种证明相关的复合关系，它表明一对综合

态射复合为第三个态射。为了定义这些，我们从 $\mathbb{I}$推导出 2-单形 Δ^2 。为便于后续使用，我们为任意 $n \geq 0$定义 n-单形：

$$\Delta^n = \sum_{\vec{i}:\mathbb{I}^n} (i_0 \geq i_1 \geq \cdots \geq i_{n-1})$$

关键的是，如果将 $\mathbb{I}$ 看作线段，而将 $\mathbb{I}^2$ 看作正方形，那么 2-单形可以想象成一个三角形（下方阴影部分）：



我们还需要内角 $\Lambda^2_1 = \sum_{i,\ j:\ \mathbb{I}} i = 1 \vee j = 0$，它是 Δ^2 的一个子类型，刻画了上方突出显示的两条线段。

称 $\tau\colon \Delta^2 \to A$ 为一个见证，证明 $\tau(-,\ 0)\ \tau(1,\ -)\colon \mathbb{I} \to A$ 复合为 $\lambda i.\, \tau(i,\ i)$。Segal类型（有时称为预范畴）是指这样一种类型：其中每一对可复合箭头都存在唯一的复合见证。为了对此作形式化定义，我们注意到，映射 $\Lambda^2_1 \to A$ 恰好刻画了可复合箭头的数据：

定义 2.2。 若 $\mathsf{isEquiv}(A^{\Delta^2} \to A^{\Lambda^2_1})$ 成立，则类型 A 是 *Segal* 的。

记号2.3。若 $f, g\colon A^{\mathbb{I}}$且 $p\colon f(1) = g(0)$，我们将 $[f, g, p]$记作诱导映射 $A^{\Lambda^2_1}$；若 A是 Segal类型，则将 $g \circ_p f$记作复合。此外，后文还会用到外角$\Lambda^2_0 = \sum_{i,j:\mathbb{I}} i = j \vee j = 0$和 $\Lambda^2_2 = \sum_{i,j:\mathbb{I}} i = 1 \vee i = j$。最后，我们将 $\vec{\imath}$记作 Δ^{n+i}中的元素，它由 i个 1 后接 n个 0 构成，即 $(1, \ldots 1, 0, \ldots)$。

Segal类型具有唯一的复合运算，它由映射的逆给出：$A^{\Delta^2} \to A^{\Lambda^2_1}$，计算表明，上述恒等态射的定义是复合的左单位与右单位。然而，预范畴中的对象有两种不同的相同性概念：恒等类型 或综合同构。后者指一个态射 $f\colon \hom(a, b)$，并附带 $g, h\colon \hom(b, a)$ 以及复合见证，表明 $g(h)$ 是 f的左（右）逆。可以定义 $\mathbb{E} = \Delta^2 \sqcup_{\Lambda^2_2} \mathbb{I} \sqcup_{\Lambda^2_0} \Delta^2$，使得 $\mathbb{E} \to X$ 恰好对应于 X [5, §42]中的等价）。 ∞-范畴论的一个显著特点是，这两种概念（对象相等与同构）可以被统一；这是一种类似于单值性公理的性质。因此，我们也特别关注满足局部单价条件的类型：

定义 2.4。类型 A 是 *Rezk* 的，当且仅当$\mathsf{isEquiv}(\mathsf{const} : A \to A^{\mathbb{E}})$。

定义2.5。单纯的、Segal 且满足 Rezk 条件的类型称为范畴。其态射全都可逆的范畴称为群胚。

注2.6。Rijke 等人 [34] 的一般性结果表明，范畴和群胚是幂等单子的模态类型。特别地，我们用$\bigcirc_{\mathsf{grpd}}$ 表示与群胚相关联的幂等模态，即在 $\mathbb{I}$处的零化。

我们还会用到 Segal 条件和 Rezk 条件的相对版本。给定一个类型族 $A\colon X \to \mathsf{U}$，我们称 A 与映射 $I \to J$（右）正交，若以下典范映射是等价：

$$\left(\sum_{x:X} A(x)\right)^J \to X^J \times_{X^I} \left(\sum_{x:X} A(x)\right)^I$$

相对 Segal 条件要求类型族 $A\colon\ X \to \mathsf{U}$ 与 $\Lambda^2_1 \to \Delta^2$右正交，而相对 Rezk 条件则对 $\mathbb{E} \to \mathbf{1}$ 提出相同要求。Segal 族称为内，同时满足 Segal 条件和 Rezk 条件的族称为同构内。

为便于在第 4 节中使用，我们指出，可以用以下谓词来表述一个族为内的要求：

$$\begin{aligned}&\mathsf{isInner} : (\Delta^2 \to \mathcal{U}) \to \mathsf{HProp}\\&\mathsf{isInner}\, A = \mathsf{isEquiv}\big((\textstyle\prod_{t:\Delta^2} A\, t) \to (\prod_{t:\Lambda^2_1} A\, t)\big)\end{aligned}$$

族 $A : X \to \mathrm{U}$ 是内的，当且仅当 $\prod_{h:\ \Delta^2 \to X} \mathsf{isInner}(A \circ h)$ 成立。

记号 2.7。我们常常将族 $A : X \to \mathrm{U}$ 与其对应的全空间投影 $_.1$ 从 $A := \sum_{x:\ X} A\, x$ 到 X 等同起来。我们称任意类型映射 $f : X \to Y$ 为内的（例如），如果对应的映射 $Y \to \mathrm{U}$ 将 y 映至 $f^{-1}(y)$，且该映射是内的。

给定一个族 $A : X \to \mathrm{U}$ 和一个箭头 $f : \mathbb{I} \to X$，我们将 f 上的从 $a : A(f\,0)$ 到 $a' : A(f\,1)$ 的依赖箭头 定义如下：

$$\hom^A_f(a, a') := \textstyle\sum_{\alpha:(t:\mathbb{I})\to A(f\,t)} (\alpha\, 0 = a) \times (\alpha\, 1 = a')$$

在一个内 族中，存在一个由此诱导的依赖箭头复合运算 [5]。

2.2 多模态类型论

下一步是在 TT◹ 中加入模态：特殊的类型构造子，它们会违背我们通常在类型论中要求的关键性质，例如代换下的稳定性。我们利用这些模态，将预期的立方空间模型中的关键操作内化，例如离散自函子、余离散自函子、对偶函子等。为此，我们回顾类型论模态扩展的一些细节，MTT，遵循 [9]。参见 Gratzer [8]，以了解更详细的论述。由于我们的主要目标是在 MTT中编写程序，我们将重点放在语法的“非正式”版本上，并将正式规则（包括 de Bruijn 指标和代换演算）留到附录 A。

首先，MTT 由一个模态理论 $\mathcal{M}$参数化。这是一个严格 2-范畴，用于描述模态（作为 1-胞腔）及其之间的变换（作为 2-胞腔）。虽然 MTT 也允许通过考虑具有多个模态（0-胞腔）的模态理论，使不同的类型论通过模态建立联系，但我们不需要这种一般性，因此假设模态理论只有一个对象。我们还只讨论每对 1-胞腔之间至多有一个 2-胞腔的模态理论，即仅仅是偏序集富集的 2-范畴。因此，我们的模态理论就是由有序幺半群给出的。 TT◹ 所需的模态理论将在第 2.3 节中描述，但目前我们继续使用满足这些约束的任意模态理论。

MTT 的主要扩展是为每个模态 $\mu \in \mathrm{Arr}(\mathrm{M})$ 添加一种新的模态类型 $\mu \mid _$。然而，正如前面所提到的，模态类型有些特殊；为适应它们，MTT 还修改了上下文扩展。具体来说，MTT 上下文中的每个变量都带有一个模态的“形式除法” $x :_{\mu/\nu} A$作为注释。我们将 Γ/ν 写作一种操作，它会修改 Γ 中的每个注释，将 $x :_{\mu/\nu_0} A$ 变为 $x :_{\mu/\nu_0\circ\nu} A$。于是，变量规则也相应修改，以处理这些形式除法：

$$\frac{\mu \le \nu \qquad x :_{\mu/\nu} A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}$$

请注意，考虑注释 id/id 即可恢复变量的普通规则。因此，作为一种记号约定，我们通常省略除以 id 的操作；对于 id/id，也完全省略注释，改为写作 $x :_{\mu} A$ 或 $x : A$。

接下来，模态算子 $\mu \mid _$ 会对这些注释进行操作。具体而言，形成规则和引入规则会添加这些注释。而（篇幅稍长的）消去规则则在

另一方面，通过允许我们将绑定 $x :^{\nu/\mathsf{id}} \mu \mid A$ 转换为绑定 $y :_{\nu\circ\mu/\mathsf{id}} A$，掩盖了变量上的注释与模态类型之间的差异：

$$\frac{\Gamma/\mu \vdash A\,\mathsf{type}}{\Gamma \vdash \langle \mu \mid A\rangle\,\mathsf{type}} \qquad \frac{\Gamma/\mu \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{mod}_\mu(a) : \langle \mu \mid A\rangle}$$

$$\frac{\Gamma/\nu\circ\mu \vdash A\,\mathsf{type} \qquad \Gamma, y :_{\nu/\mathsf{id}} \langle \mu \mid A\rangle \vdash B(y)\,\mathsf{type} \quad \Gamma, x :_{\nu\circ\mu/\mathsf{id}} A \vdash b(x) : B[\mathsf{mod}_\mu(x)/y] \qquad \Gamma/\nu \vdash a : \langle \mu \mid A\rangle}{\Gamma \vdash \mathsf{let}_\nu\ \mathsf{mod}_\mu(x) \leftarrow a\ \mathsf{in}\ b(x) : B[a/y]}$$

$$\mathsf{let}_\nu\ \mathsf{mod}_\mu(x) \leftarrow \mathsf{mod}_\mu(a_0)\ \mathsf{in}\ b(x) = b[a_0/x]$$

除这些模态类型外，MTT 还以依赖积类型的一种扩展形式 $(a :_\mu A) \to B(a)$ 来扩展类型论。在等价意义下，这些模态依赖积与 $(a : \mu \mid A) \to \mathsf{let}\ \mathsf{mod}^\mu(a_0) \leftarrow a\ \mathsf{in}\ B(a_0)$ 相同，但提供了更轻量的记法，并支持更强的 η-规则。

$$\frac{\Gamma/\mu \vdash A\,\mathsf{type} \qquad \Gamma, a :_\mu A \vdash b(a) : B(a)}{\Gamma \vdash \lambda a.\, b(a) : (a :_\mu A) \to B(a)} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : (a :_\mu A) \to B(a) \qquad \Gamma/\mu \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B(a)}$$

当我们写“对所有 $a :_\mu A$，类型 $B(a)$ 被居留”时，这应理解为表示一个函数 $(a :_\mu A) \to B(a)$。

最后，我们需要关于 MTT 的如下技术性公理，它支配模态与恒等类型之间的相互作用：

公理 3. 若 $A :^\mu \mathcal{U}$ 且 $a, b :_\mu A$，则如下将 refl 映到 $\mathsf{mod}^\mu(\mathsf{refl})$ 的典范映射是一个等价：

$$\mathsf{mod}_\mu(a) = \mathsf{mod}_\mu(b) \to \langle \mu \mid a = b\rangle$$

我们总结模态的若干基本性质：

命题 2.8。

- 每个$\langle \mu \mid -\rangle$ 都与**1** 及拉回相交换。
- $\mu \mid \nu \mid - \simeq \mu \circ \nu \mid -$ 和$\mathsf{id} \mid - \simeq -$。
- 若 $\mu \le \nu$，则存在一个典范映射 $\langle \mu \mid -\rangle \to \langle \nu \mid -\rangle$。
- 存在一个等价 $\langle \flat \mid A \to \langle \sharp \mid B\rangle\rangle \simeq \langle \flat \mid \langle \flat \mid A\rangle \to B\rangle$，对于 $A, B : {}_\flat\mathcal{U}$。同样地，将 $\sharp$和 $\flat$ 替换为op。

从第一个点出发，我们得到 $\circledast : \mu \mid A \to B \times \mu \mid A \to \mu \mid B$。当后者形式良好时，我们通常将 $f^\dagger$ 写作 $\mathsf{mod}^\mu(f) \circledast -$。

2.3 三角化类型论中的模态

现在，我们从一般的 MTT 转向 TT◺所需的 MTT 具体实例。具体而言，我们将采用由一个 0-胞腔 m、三个生成的非恒等 1-胞腔 $\{\flat\ \sharp,\ \mathsf{op}\}$ 以及以下等式（不等式）生成的模态理论：

$$\flat = \flat\circ\flat = \flat\circ\sharp = \flat\circ\mathsf{op} \qquad \sharp = \sharp\circ\flat = \sharp\circ\sharp = \sharp\circ\mathsf{op} \qquad \flat \le \mathsf{id} = \mathsf{op}\circ\mathsf{op} \le \sharp$$

为了便于直观理解，在 TT◺ 的立方空间模型中，生成模态对应的模态运算解释如下：

- $[\![\flat \mid -]\!]$ 是离散函子——将立方空间 X 映射到常值立方空间$\Delta(X([0]))$。

- $[\![\sharp \mid -]\!]$ 是余离散函子——离散函子的右伴随——它将立方空间 X映射到这样一个立方空间：其在 $[n]$处的值由 $X([0])^{2^n}$给出。
- $[\![\mathrm{op} \mid -]\!]$ 将立方空间 X映射到 $X \circ \mathrm{op}$，其中 op 是立方范畴上的函子，它将 0 和 1 互换。

如果我们考虑一个范畴 $C :_\flat \mathcal{U}$，那么对♭ 和op 的这些解释就有非常具体的含义：$\langle \flat \mid C\rangle$ 是 C 的对象所构成的底层离散群胚，而$\langle \mathrm{op} \mid C\rangle$ 是反范畴。一般而言，$\langle \sharp \mid C\rangle$ 甚至未必是一个范畴，即使 C 是范畴也是如此——它的用途主要在于迫使♭ 成为左伴随。我们注意到，前两个模态是凝聚的一个实例 [16, 23, 36]。

然而请注意，目前这些只是来自某个特定模型的直觉。若要使这些直觉在$\mathsf{TT}_\diamondsuit$ 本身中真正发挥作用，我们需要额外的公理来规定 $\mathbb{I}$ 的行为及其与模态的相互作用。完整的公理列表见第 B 节，因此我们只讨论在本文给出的证明中直接起作用的公理。

首先，我们有一些公理来规定♭ 和 $\mathbb{I}$的行为：

公理 4. 0,1 : $\mathbb{I}$ 诱导出一个等价 $\langle \flat \mid \text{布尔}\rangle \simeq \langle \flat \mid \mathbb{I}\rangle$

公理 5. 如果 $A :_\flat \mathrm{U}$，那么 $\mathsf{isEquiv}(\flat \mid A \to A)$ 当且仅当 $\mathsf{isEquiv}(A \to A^{\mathbb{I}})$

直观地说，这一对公理中的第一条指出，$\mathbb{I}$ 只有两个全局元素：指定的端点 0 和 1。第二条公理确保 $\mathbb{I}$ 能“检测”一个类型是否具有 $\flat \mid A$ 的形式。简而言之：一个类型 A 等价于一个由对象构成的群胚，当且仅当它没有不可逆的合成态射。这些公理——尤其是最后一条——正是促使 $\flat \mid -$ 与我们先前关于取群胚核的想法相吻合的原因。

下一个公理迫使立方体 $\mathbb{I}^n$ 在所有类型中构成一个分离族 。也就是说，要判定某个特定的（♭-）映射是否可逆，只需检验与该映射作后复合是否在映射 $\flat \mid \mathbb{I} \to -$ 的群胚之间诱导出等价：

公理 6. 若 A、$B :_\flat \mathcal{U}$ 且 $f :_\flat A \to B$，则 f是一个等价，如果

$$\textstyle\prod_{n:\mathsf{Nat}} \mathsf{isEquiv}((f_*)^\dagger : \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to A\rangle \to \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to B\rangle)$$

由于 $\diamondsuit$ 具有万有的“向外映射”性质，我们可以用 $A \to B$简洁地描述 $\diamondsuit A \to B$。一般而言，$A \to \diamondsuit B$ 与 $A \to B$之间并不存在如此简单的关系，但当 $A = \Delta^n$时是一个显著的例外。直观上，$\diamondsuit B$ 确保 B 中的所有超立方体都由单形的复合唯一确定，因此尽管 $\diamondsuit B$的超立方体可能与 B中的颇为不同，B 中单形 的集合保持不变。下面记录这一关系：

公理 7. 对于每个 $A :_\flat \mathcal{U}$，以下结论成立：

$$\textstyle\prod_{n:\mathsf{Nat}} \mathsf{isEquiv}((\eta_*)^\dagger : \langle \flat \mid \Delta^n \to A\rangle \to \langle \flat \mid \Delta^n \to \diamondsuit A\rangle)$$

本节的最后一条公理记录了 $\mathbb{I} \to -$ 在 第 1 节中提到的右伴随。我们在表述时必须比 Licata 等人 [18], 更加谨慎，因为我们希望确保所公设的伴随具有完全的相干性，因此采用以下表述来记录该伴随存在且唯一：

公理 8. 对于每个 $A :_\flat \mathcal{U}$，以下结论成立：

$$\textstyle\sum_{A_{\mathbb{I}} :_\flat \mathcal{U}, \epsilon :_\flat (A_{\mathbb{I}})^{\mathbb{I}} \to A} \prod_{B :_\flat \mathcal{U}} \mathsf{isEquiv}(\langle \flat \mid B \to A_{\mathbb{I}}\rangle \to \langle \flat \mid B^{\mathbb{I}} \to A\rangle)$$

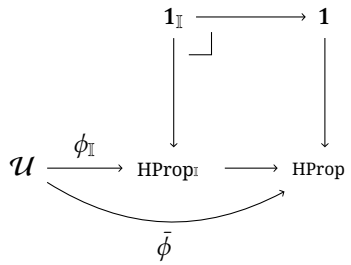
直观地说，$A_{\mathbb{I}}$是将这个“神奇的”右伴随作用于带有♭标记的类型 A所得的结果，而 ϵ则是该伴随在 A处的余单位。根据这些数据，我们可以重构一个函子$(-)_{\mathbb{I}} : \flat \mid \mathrm{U} \to \flat \mid \mathrm{U}$。关键在于，该公理仅适用于带有♭标记的 A；Licata等人 [18] 指出，若要求它

适用于任意类型，就会导致 $\mathbb{I} = \mathbf{1}$，这与 $0 \neq 1 : \mathbb{I}$矛盾。此外，如前所述，该公理并未得到STT在单纯形空间模型中的验证；只有转向立方空间后，公理 8 才成立。具体而言，即使已知 A 是单纯的， $A_{\mathbb{I}}$也往往并非如此。我们使用该公理的主要方式，是将各种带有♭标记的谓词$X^{\mathbb{I}} \to \mathsf{HProp}$ “转置”为谓词 $X \to \mathsf{HProp}$。为方便起见，我们将这一过程归纳为以下引理：

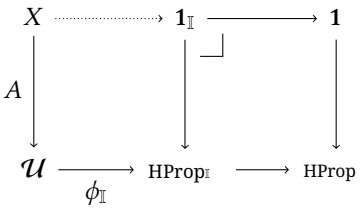
引理 2.9. 若 $\phi :_\flat \mathcal{U}^{\mathbb{I}^n} \to \mathsf{HProp}$，则存在一个 $\bar{\phi} :_\flat \mathcal{U} \to \mathsf{HProp}$，并配有一个典范等价：

$$\prod_{A :_\flat X \to \mathcal{U}} \langle \flat \mid (x : X) \to \bar{\phi}(A\,x) \rangle \simeq \langle \flat \mid (x : X^{\mathbb{I}^n}) \to \phi(A \circ x) \rangle$$

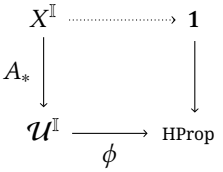
证明。固定一个谓词 $\phi :_\flat \mathsf{U}^{\mathbb{I}} \to \mathsf{HProp}$（为简单起见，我们仅处理 $n = 1$ 的情形，因为一般情形除了记号繁琐之外完全相同）。我们首先利用公理 8 得到一个映射 $\phi_{\mathbb{I}} :_\flat \mathsf{U} \to \mathsf{HProp}^{\mathbb{I}}$，其中 $\mathsf{HProp}^{\mathbb{I}}$ 是对 HProp 应用惊人右伴随后得到的唯一类型。接下来，遵循 Gratzer 等人 [10,§3.3],的做法，我们注意到，典范族 $\mathbf{1}_{\mathbb{I}} \to \mathsf{HProp}^{\mathbb{I}}$ 由一个映射 $\mathsf{HProp}^{\mathbb{I}} \to \mathsf{HProp}$ 分类（特别地，它是一个小族）；将此映射与 $\phi_{\mathbb{I}}$复合后，便得到所需的 $\phi : \mathsf{U} \to \mathsf{HProp}$。综上，我们有如下图表：



$\bar{}$为证明所需的等价成立，固定 $A :_\flat X \to \mathsf{U}$。我们希望证明 $\prod_{x:X} \phi(A\,x)$成立，当且仅当 $\prod_{x:X^{\mathbb{I}}} \phi(A \circ x)$。前者成立当且仅当存在上述图表的一个（必然唯一的）延拓：



在转置 $(-)_{\mathbb{I}}$（并舍弃右侧垂直映射，因为它对我们的目的而言是多余的）之后，我们看到该图表的左侧三角形恰好等价于以下内容：



考察该图可得所需结论。 □

最后，Gratzer 等人 [10]证明了TT♮ （MTT 在将该模态理论扩展为包含上述所有公理后）在立方空间中具有一个模型。他们进一步基于 Riehl 和 Shulman 的一项结果 [33], 证明了，TT♮ 中的范畴由 ∞-范畴 [31]的一个标准模型实现：完全Segal空间 [31]。

定理 2.10. 存在一个在立方空间中的 *TT*♮ 模型 $\mathbf{PSh}_{\mathbf{sSet}}(\square)$。在此模型中，范畴由完备 *Segal* 空间实现。

2.4 三角化类型论中的范畴论

我们需要先前在 TT♮ 和 STT [5, 10, 11, 33] 中发展的一些范畴论。为使本文更具自包含性，我们在此回顾相关结果和定义。

正如 Riehl 和 Shulman [33], 所指出的，函子 $f, g\colon C \to D$ 之间的自然变换——即同态集 $\hom(f, g)$ 的一个元素——恰好对应于一族 $\prod_{c:C}\hom(f\,c, g\,c)$。因此，逐点可逆自然变换是可逆的。我们注意到 Gratzer 等人 [11] 对这一陈述作了进一步细化，将其归结为 $\flat\ C$:[3] 的元素（即对象）。

引理 2.11。 若 $C, D :_\flat \mathcal{U}$ 是范畴，且 $f, g :_\flat C \to D$，那么自然变换$\alpha :_\flat$同态集(f, g) 可逆，当且仅当对所有 $c :_\flat C$，映射 $\alpha(c)\colon$同态集$(f\,c, g\,c)$ 都可逆。

我们同样有经典结果的综合版本：全忠实且本质满的函子是等价。

引理 2.12。 若 $C, D :_\flat \mathcal{U}_{\mathrm{isCat}}$，则 $f :_\flat C \to D$ 可逆，当且仅当 f 在 C的 $\flat$-元素上本质满且全忠实。

我们在 第 3 节和第 4 节中关于余笛卡尔纤维化的计算将依赖于 TT♮ 中的伴随理论。首先，两个函子之间的伴随 $f\colon C \to D$ 和 $g\colon D \to C$由一组等价给出：

$$\alpha : \prod_{c:C}\prod_{d:D}\hom(f\,c, d) \simeq \hom(c, g\,d)$$

请注意，我们不要求对 α施加任何额外的自然性约束；这些约束会因采用综合方法而自动满足。若存在一个（必然唯一的）(g, α)，我们就称 f为左伴随；对偶地，若存在(f, α)，则称 g为右伴随。直接构造这样的等价族往往很困难，因此我们常使用 Gratzer 等人 [11] 的以下结果：

引理 2.13. 若 $C, D :_\flat \mathcal{U}$ 是范畴，则 $f :_\flat C \to D$ 是左伴随，当且仅当对所有 $d :_\flat D$，都存在 $c :_\flat C$ 和 $\epsilon :_\flat$同态集$(f(c)\ d)$，使得对所有 $c' :_\flat C$，下式均为等价：

$$\epsilon_* \circ f : \hom(c', c) \to \hom(f(c'), d)$$

我们还将用到 Gratzer 等人 [10] 构造的各类范畴的具体例子。其中最重要的是群胚范畴 S——它是集合范畴的 ∞-范畴类比。与我们最终给出的范畴的范畴定义一样，它由一个泛性质刻画。

定义 2.14。 类型族 $A\colon X \to \mathrm{U}$ 若与包含映射 $\{0\} \to \mathbb{I}$ 右正交，则称为协变的 。

[3] Gratzer 等人 [11] 证明 引理 2.11 和 2.13 时使用了扭箭模态，但为求简洁，我们选择不将其纳入 TT♮ 。也可以只依赖 公理 6 给出更基础的证明，因此在 TT♮中使用这些引理并无问题。

更直观地说，协变族是群胚族，其基底上的综合同态可相干地提升为纤维上的函子。我们将在研究它们的推广——余笛卡尔族时，于 第 3 节间接地进一步阐述这一思想。协变族在许多性质下封闭，包括前复合、 $\sum$-类型等。现在我们将 $\mathcal{S}$定义为万有协变族的基底：

定义 2.15。 S 是宇宙的唯一子类型，使得 $\mathsf{S} \to \mathsf{U}$ 是协变的，并且对于所有 $X :_\flat \mathsf{U}$，典范映射 $\flat\ |\ X \to \mathsf{S} \to \langle \flat |\ \sum_{A:X\to\mathcal{U}} \mathsf{isCov}(A)\rangle$ 是一个等价。

因此，S 的对象类型，即 $\flat\ |\mathsf{S}$，显然等价于$\flat$-在 $\mathbf{1}$ 上的协变族。进而，这些族等价于$\flat$-群胚。Gratzer 等人 [10] 的主要结果将这一刻画推广到了合成态射：

定理 2.16。 $\mathcal{S}$ 是一个范畴，并且存在典范等价 同态集$_{\mathcal{S}}(A, B) \simeq (A \to B)$。此外，在此等价之下，合成态射的恒等和复合分别由恒等函数和通常的函数复合实现。

最后，我们记录一个虽小但有用的结果，即 $\mathbb{I}$以及由其导出的某些类型构成范畴 [10]。

引理 2.17. $\mathbb{I}$、 $\mathbb{I}^n$和 Δ^n 均构成范畴。

2.5 关于同构内纤维化的技术结果

在转入本文的主要重点之前，我们记录若干关于同构内纤维化以及 $\lozenge$ 模态的技术结果。

定义 2.18. 我们将脊^n 记为迭代推出 $\mathbb{I} \sqcup_1 \ldots \sqcup_1 \mathbb{I}$，它把 n个 $\mathbb{I}$的副本粘合在一起，将0接到1、将1接到0。

引理 2.19. 若 $f\colon X \to Y$ 是内的，则它对所有 $n \geq 2$都与脊$^n \to \Delta^n$ 正交。

证明。 $n = 2$ 情形根据定义成立，因此我们通过归纳进行证明。根据归纳假设，脊$^{n+1} \to \Delta^n \sqcup_1 \mathbb{I}$ 与所有内映射正交（左映射在推出下封闭）。只需证明 $\Delta^n \sqcup_1 \mathbb{I} \to \Delta^{n+1}$ 与所有内映射正交。展开这些条件，我们必须证明如下内容：

$$\{(v, i) \mid v(n) = 1 \vee i = 0\} \to \{(v, i) \mid v(n) \geq i\}$$

反过来，这是 $\mathbb{I}^{n-1} \times \Lambda^2_1 \to \mathbb{I}^{n-1} \times \Delta^2$ 的一个收缩。 □

如果进一步假设相关类型是单纯的，那么这个引理的逆命题也成立。这是以下结果的一个简单推论：

引理 2.20。 若 $X, Y :_\flat \mathcal{U}_\lozenge$，且 $f :_\flat X \to Y$ 与脊$^n \to \Delta^n$ $\flat$-正交，则 $f^{\mathbb{I}}$ 也如此

证明。我们必须证明脊$^n \times \mathbb{I} \to \Delta^n \times \mathbb{I}$ 与 f $\flat$-正交。为此，我们注意到以下识别：

$$\Delta^n \times \mathbb{I} = \{(v, i) : \Delta^n \times \mathbb{I} \mid \exists k \in \{0, \ldots, n+1\}.\, v(k) \geq i \geq v(k+1)\}$$

这里，按照约定，我们将 $v(0) = 1$和 $v(n+1) = v(n+2) = 0$视为如此。下文中，我们用 Φ_k表示条件 $v(k) \geq i \geq v(k+1)$。

因此，要证明所需的提升，只需证明对于 $\{(v, i) :\ \Delta^n \times \mathbb{I} \mid \Phi_{k_0} \times \cdots \times \Phi_{k_l}\}$ 存在唯一这样的提升。稍加思考便可发现，每个这样的交都是 $\Delta^n \times \mathbb{I}$ 的子单纯形。特别地，每个 $\{(v, i) \mid \Phi_k\}$ 都是 Δ^{n+1}，而每个高阶交都是更小的单纯形。此外，它与 $\mathsf{Spine}^n \times \mathbb{I}$ 的交要么恰好是这个

较小单纯形的脊（在 Φ_0 和 Φ_n 或高阶交的情形中），要么是 $\mathbb{I} \sqcup_1 \ldots \sqcup_1 \Delta^2 \sqcup_1 \ldots$。无论哪种情况，根据对 f 的假设，唯一提升都存在（后一种情况下，依据二取三性质以及左类在推出下的封闭性；观察下面的分解即可看出：$\mathsf{Spine}^{n+1} \to (\mathbb{I} \sqcup_1 \ldots \sqcup_1 \Delta^2 \sqcup_1 \ldots \sqcup_1 \mathbb{I}) \to \Delta^{n+1}$）。□

推论 2.21. 若 $X :_\flat \mathcal{U}$ 是单纯的，只需证明它与脊 $\mathsf{Spine}^n \to \Delta^n$ $\flat$-正交，即可证明它是 *Segal* 的。

引理 2.22. 若 $X :_\flat \mathcal{U}$ 是 *Segal* 的，则 $\sharp X$ 也是。

证明。为证明这一点，我们论证 $\sharp X$ 是$\flat$-正交[4] 于 脊 $\mathsf{Spine}^n \to \Delta^n$。我们注意到，这可由单纯稳定性（公理 7）以及 $\langle \flat \mid - \rangle$ 与极限可交换这一事实立即推出：

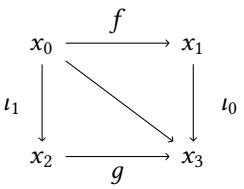
$$\begin{aligned}
&\langle \flat \mid \mathsf{Spine}^n \to \sharp X \rangle \\
&\simeq \langle \flat \mid \mathbb{I} \to \sharp X \rangle \times_{\langle \flat \mid \sharp X \rangle} \langle \flat \mid \mathbb{I} \to \sharp X \rangle \times_{\langle \flat \mid \sharp X \rangle} \cdots \\
&\simeq \langle \flat \mid \mathbb{I} \to X \rangle \times_{\langle \flat \mid X \rangle} \langle \flat \mid \mathbb{I} \to X \rangle \times_{\langle \flat \mid X \rangle} \cdots \\
&\simeq \langle \flat \mid \mathsf{Spine}^n \to X \rangle
\end{aligned}$$

因此，我们归结为对 $X \to 1$ 考察同一问题，这由 引理 2.19 得出。□

引理 2.23. 若 $X :_\flat \mathcal{U}$ 是 *Segal* 且 *Rezk* 的，则 $\sharp X$ 是 *Rezk* 的。

证明。我们必须证明 $\sharp X$ 与 $\flat$ 正交于 $\mathbb{E} \times \Delta^n \to \Delta^n$，并且由于 $\sharp X$ 是 Segal 的，我们可以立即将问题简化为 $n = 0$ 或 $n = 1$ 的情形。第一种情形可由单纯稳定性直接推出，因为 $\mathbb{E}$ 是通过推出各种单形构造而成的，因此映射 $\flat \mid \mathbb{E} \to \sharp X$ 对应于那些经由 X 分解的映射。

对于 $n = 1$ 的情形，我们必须证明，在 X 中，以下形状的图由最底部的边唯一确定



根据单纯稳定性以及前一种情形，我们可以放心地假设这些分量（包括相关的 2-胞腔和截面-收缩对）都来自 X。此外，由于 X 是 Segal 的，顶单形是冗余的。特别地，它等价于类型 $\sum_{\iota_1 :_\flat \mathbb{E} \to X} \sum_{f :_\flat \mathbb{I} \to X} \sum_{p :_\flat \iota(1) = f(0)} \iota \circ_p f = g \circ \iota_1$。根据我们已经讨论过的 $n = 0$ 情形，可以假设 $\iota_1 =$ 是恒等映射，并将 $\iota_1 :_\flat \mathbb{E} \to X$ 替换为简单的 $x :_\flat X$。经过这一替换后，整个类型就收缩为单元素类型。

最后，只需证明底部三角形等价于底部边即可。不过，我们可以用相应的内角替换这个三角形，随后再次应用 Rezk 条件 $n = 0$ 即可完成证明。□

推论 2.24. 若 $X :_\flat \mathcal{U}$ 是 *Segal* 且 *Rezk* 的，则 $\sharp X$ 是一个范畴。

[4]也就是说，当我们将注意力限制在带有$\flat$标注的映射上时，它们是正交的

3 关于余笛卡尔纤维化的回顾

我们最终刻画$\langle \flat \mid X \to \mathrm{Cat} \rangle$的目标关键依赖于余笛卡尔族 [13, 19]的理论。这些是类型族$A\colon X \to \mathcal{U}$的一个子集，其中 (1) 每个$Ax$都是一个范畴，且 (2) 每个态射$f\colon$同态集$(x, y)$在$X$中诱导一个传输函数$Ax \to Ay$。我们将要求这些传输函数具有函子性，并且强制函子性的相干性本身也是相干的，等等。为了组织所有这些数据，我们要求A满足若干命题，这些命题结合起来便产生上述 (1) 与 (2)。尽管这种方式略显间接，但它说明了否则不可能写下来的无穷相干性层级。该材料已在STT [5]中得到发展。我们在此为读者之便加以回顾。

3.1 余笛卡尔族的定义

考虑一个族$A\colon X \to \mathrm{U}$，并记ρ^A为由限制与投影$\widetilde{A}^{\Delta^2} \to \widetilde{A}^{\Lambda^2_0} \times_{X^{\Lambda^2_0}} X^{\Delta^2}$给出的典范映射。注意，到$\widetilde{A}^{\{\bar{0}\to\bar{1}\}}$的限制$\widetilde{A}^{\Delta^2}$连同相应的映射$\widetilde{A}^{\Lambda^2_0} \times_{\Lambda^2_0 \to X} X^{\Delta^2} \to \widetilde{A}^{\{\bar{0}\to\bar{1}\}}$与$\rho^A$交换，因此我们可以把$\rho^A$视为$\mathbb{I} \to \widetilde{A}$上两个类型族之间的映射。给定$x\colon \mathbb{I} \to \widetilde{A}$，我们用$\rho^A_x$表示$\rho^A$到这些族在$x$上的纤维的限制。

定义 3.1. 态射$f\colon \mathbb{I} \to \widetilde{A}$在$A$中是余笛卡尔的（记作$\mathsf{isCocartArr}_A(f)$），如果$\rho^A_f$是一个等价。

非正式地说，$f\colon \mathbb{I} \to A$是余笛卡尔的，如果每当$\Delta^{\{\bar{0}\to\bar{1}\}} \to \Delta^2 \to \widetilde{A}$为$f$时，如下形状的图表都有唯一提升：

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2_0 & \longrightarrow & \widetilde{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^2 & \longrightarrow & X \end{array}$$

定义 3.2. 族$A\colon X \to \mathrm{U}$是余笛卡尔的，如果它是同构内的，每个$A(x)$是单纯的，并且下列条件成立：

$$\prod_{u:\mathbb{I}\to X} \prod_{a:A(u\,0)} \sum_{f:\mathrm{hom}^A_u(a,\bullet)} \mathsf{isCocartArr}_A(f)$$

这一要求是一个命题 [5]，并且这样一个族的每个纤维都是一个范畴，从而满足我们的第一项要求。

例 3.3. 对每个范畴A，陪域映射$A^{\mathbb{I}} \to A$是余笛卡尔的。定义域投影是余笛卡尔的，当且仅当A具有推出。

注 3.4. 一个箭头是竖直的，如果它映到一个同构。在余笛卡尔纤维化中，每个箭头都可分解为“竖直。余笛卡尔”。

如果X是一个范畴，且A是单纯的并且是同构内的，那么余笛卡尔族便有一个简洁的刻画。

命题 3.5 (Buchholtz 和 Weinberger [5])。一个同构内族$A\colon X \to \mathcal{U}_{\mathbb{D}}$在范畴$X$上是余笛卡尔的，当且仅当映射$(\widetilde{A})^{\mathbb{I}} \to (\widetilde{A})^{\{0\}} \times_{X^{\{0\}}} X^{\mathbb{I}}$有一个左伴随右逆。[5]

这一刻画蕴含许多闭包性质，例如在复合、拉回和莱布尼茨余张量 [5]下封闭。

[5]也就是说，这是一个单位映射为同构的左伴随。

对于余笛卡尔族的第二个期望条件，我们定义余笛卡尔传输运算，从而得到所需的纤维间函子。若 $A\colon X \to \mathrm{U}$ 是余笛卡尔的，且 $u\colon$同态集$(x,\ y)$，则传输 $u_!\colon A\,x \to A\,y$ 定义为：将 $a\colon A\,x$ 映射到从 a 出发的 u 的（唯一）余笛卡尔提升的陪域。

命题 3.6. 若 $A\colon X \to \mathcal{U}$ 是余笛卡尔的，则余笛卡尔传输是函子性的，即$(vu)_! = v_! \circ u_!$ 且$(\mathrm{id})_! = \mathrm{id}$。

定义3.7. 对于 $A, B\colon X \to \mathrm{U}$ 为余笛卡尔的情形，我们称 $f\colon \prod_{x:X} A\,x \to B\,x$为余笛卡尔函子，若 f保持余笛卡尔箭头。我们用 $A \to^{\mathrm{cc}} B$ 表示余笛卡尔函子的类型。

对于我们关于 Cat 的构造，发展局部余笛卡尔纤维化的理论将是有益的。它们是族 $A\colon X \to \mathrm{U}$，在对每个 $f\colon \mathbb{I} \to X$作限制 $A \circ f$之后是余笛卡尔的。作为准备，对于族 $A\colon \mathbb{I} \to \mathrm{U}$，若以下命题成立，我们称边 $a\colon (i\colon \mathbb{I}) \to A\,i$为局部余笛卡尔：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{isLocallyCoCart} : (A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}) \to ((i : \mathbb{I}) \to A\,i) \to \mathsf{HProp}\\
&\mathsf{isLocallyCoCart}\,A\,a = \textstyle\prod_{b:(i:\mathbb{I})\to A\,i} \prod_{p:a\,0=b\,0}\\
&\quad \mathsf{isContr}\big(\textstyle\sum_{t:(i,j:\Delta^2)\to A\,i} t|_{\Lambda^2_0} = [a,b,p]\big)
\end{aligned}$$

接下来，我们定义具有局部余笛卡尔提升这一结构：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{hasLCCLifts} : (\mathbb{I} \to \mathcal{U}) \to \mathcal{U}\\
&\mathsf{hasLCCLifts}\,A = \textstyle\prod_{a_0:A\,0} \sum_{a:\hom_A(a_0,\bullet)} \mathsf{isLocallyCoCart}\,a
\end{aligned}$$

与余笛卡尔边不同，局部余笛卡尔边不一定可以复合。我们来简要说明它们何时可以复合：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{LCCLiftsCompose} : (\Delta^2 \to \mathcal{U}) \to \mathsf{HProp}\\
&\mathsf{LCCLiftsCompose}\,A = \big(a : \textstyle\prod_{s:\Delta^2} A\,s\big)\\
&\quad \to \mathsf{isLocallyCoCart}(a(-,0)) \times \mathsf{isLocallyCoCart}(a(1,-))\\
&\quad \to \mathsf{isLocallyCoCart}(\lambda i.\, a(i,i))
\end{aligned}$$

我们将前面的两个定义推广到一般的族 $A\colon X \to \mathrm{U}$：规定当对所有箭头 $f\colon \mathbb{I} \to X$（或所有方块 $h\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to X$，分别地）而言，它们对 A 成立时，也对 $A \circ f\colon \mathbb{I} \to \mathrm{U}$成立。我们沿用这些谓词的名称，例如，对于一般的族 A，也记作 $\mathsf{hasLCCLifts}(A)$。具有 hasLCCLifts 结构的族称为局部余笛卡尔族。

引理 3.8。 若 $A\colon X \to \mathcal{U}_{\boxtimes}$ 是同构内纤维化，则依赖边 $a\colon (i\colon \mathbb{I}) \to A(x\,i)$ 在$x\colon \mathbb{I} \to X$ 之上是局部余笛卡尔的，当且仅当下述映射是等价：

$$a^*\colon \big(\textstyle\sum_{f:\mathbb{I}\to A(x\,1)} f(0) = a(1)\big) \to \big(\textstyle\sum_{f:(i:\mathbb{I})\to A(x\,i)} f(0) = a(0)\big)$$

证明。这个问题再次局限于某个特定的 $x\colon \mathbb{I} \to X$，我们可以沿此映射拉回 A，从而假设 $A\colon \mathbb{I} \to \mathrm{U}_{\boxtimes}$ 且 $a\colon (i\colon \mathbb{I}) \to A\,i$。在此情形下， a 是局部余笛卡尔的，当且仅当满足以下条件（按定义）：

$$\textstyle\prod_{b:(i:\mathbb{I})\to A\,i} \prod_{p:a\,0=b\,0} \mathsf{isContr}\big(\sum_{t:(i,j:\Delta^2)\to A\,i} t|_{\Lambda^2_0} = [a,b,p]\big)$$

固定 $b\colon (i\colon \mathbb{I}) \to A\,i$和 $p\colon a\,0 = b\,0$。那么 $\sum_{t:(i,j:\Delta^2)\to A\,i} t|_{\Lambda^2_0} = [a,b,p]$等价于（由内在性） $c\colon \mathbb{I} \to A\,1$，以及 $q\colon c(0) = a(1)$、 $\theta\colon c \circ_q a = b$ 和 $\theta_0\colon \mathrm{ap}^{-(0)}(\theta) = p$。然而，这恰好是 a^* 的纤维，因此，当且仅当 a^* 的每个纤维都可缩时，一条边是局部余笛卡尔的。□

定理 3.9。 若 $A : X \to \mathcal{U}_{\lozenge}$ 是同构内的，且是局部余笛卡尔的，并且局部余笛卡尔边在复合下封闭，那么局部余笛卡尔边就是余笛卡尔边，且 A 是余笛卡尔的。

证明。我们希望证明：如果将 Λ^2_0 的 $0 \to 1$ 边映射到局部余笛卡尔边，则 $\Lambda^2_0 \to \Delta^2$ 与 $\tilde{A} \to X$ 正交。由于可以通过对 $\sum_{x:\ X} A\,x \to X$ 作拉回来检验这一性质，我们可以假设 $X = \Delta^2$，只考虑典范的 2-单形。此外，在这种情况下，$\sum_{x:\ X} A\,x$ 是一个（单纯的）范畴。

现在固定 $[f, g, p] : \Lambda^2_0 \to \sum_{x:\ X} A\,x$，它提升了 id，且 f 是局部余笛卡尔的。记 $x = f(0)$、$y = f(1)$ 和 $z = g(1)$。采用这一记号，$p : x = g(0)$。

我们希望证明 $[f, g, p]$ 可以唯一地延拓为一个 2-单形（这样的 2-单形必然会正确地落在 X 中唯一的非退化 2-单形之上，并且由于 X 是一个集合，它落在这个单形之上的方式不包含任何有意义的数据）。为此，只需证明以下映射是一个等价 [5, 命题 5.1。10]:

$$f^* : \hom(y, z) \to \hom(x, z)$$

若是如此，我们可以选取 (g, p, refl) 的（唯一）原像，从而完成证明。现在，让我们选取 $(1, -) : \mathbb{I} \to \Delta^2$ 的一个局部余笛卡尔提升，其起点为 y。这是一个态射 h'。记 w 为 h' 的目标。由于根据假设，$h' \circ f$ 是局部余笛卡尔的，由引理 3.8可知以下映射是等价:

$$(h' \circ f)^* : \hom(w, z) \to \hom(x, z) \qquad h'^* : \hom(w, z) \to \hom(y, z)$$

根据三取二，同样的结论也适用于 $f^* : \hom(y, z) \to \hom(x, z)$，如所需。 □

在这种情况下，局部余笛卡尔提升是唯一的，因为余笛卡尔提升是唯一的。这一点很快就会很重要。

引理 3.10。 若 $A : X \to \mathcal{U}_{\lozenge}$ 是同构内的，则 具有局部余笛卡尔提升(A) 和 局部余笛卡尔提升复合(A) 都是命题。

证明。注意，只需证明对于所有 $x : \mathbb{I} \to X$（分别地，$x : \mathbb{I}^2 \to X$），hasLCCLifts$(A \circ x)$（分别地，LCCLiftsCompose$(A \circ x)$）是一个命题。

这些义务中，只有第一项并非平凡，因为 isLocallyCoCart 显然取值于命题。注意，如果 a 和 a' 都是局部余笛卡尔提升，那么根据构造，存在唯一的垂直同构 $\iota : a(1) \cong a'(1)$，使得 $\iota \circ a = a'$。于是，我们可以将它们视为纤维 $\mathbb{I} \times_X \sum_{x:X} A\,x$ 中的同构箭头；根据同构内在性，该纤维是一个范畴。因此，$a = a'$ 位于纤维 $\mathbb{I} \times_X \sum_{x:X} A\,x$ 中，由此它们在 $\sum_{x:\ X} A\,x$ 中相等。因此，局部余笛卡尔提升的类型是一个命题，符合要求。□

3.2 余笛卡尔族的有向粘合

我们通过推广 有向粘合类型 来结束本节。该类型受 Weaver 和 Licata [42] 的启发，并由 Gratzer 等人 [10] 用于这一语境。粗略地说，此类型接收两个位于 X 上的余笛卡尔族以及它们之间的一个余笛卡尔函子，并将它们组合成一个位于 $X \times \mathbb{I}$ 上的余笛卡尔族。这是我们证明有向单值性的关键组成部分；最终，该证明将归结为证明 Gl 提升为一个等价。

固定余笛卡尔纤维化 F_0，$F_1 : X \to \mathrm{U}_{\lozenge}$ 以及一个余笛卡尔函子 $\alpha : \prod_{x:X} F_0\,x \to F_1\,x$。这些数据的有向粘合为

$$\mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha) : X \times \mathbb{I} \to \mathcal{U}_{\lozenge}$$
$$\mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha)(x, i) = \textstyle\sum_{f:F_1(x)} i = 0 \to \alpha(x)^{-1}(f)$$

我们注意到，$(x,\ 0)$ 和 $(x,\ 1)$ 上方的纤维分别由 $F_0(x)$ 和 $F_1(x)$ 给出。此外，对于每个 $w : F_0(x)$，存在一个位于 $\lambda i.(x,\ i)$ 上方、连接 w 与 $\alpha(x,\ w)$ 的映射。我们证明 $\mathrm{Gl}(F_0,\ F_1,\ \alpha)$

是 $\mathbb{I}\times X$ 上方的同构内，并且上述边的集合使该族成为余笛卡尔的，其传输函子为 α。

在下文中，我们假设 X、F_0、F_1 和 α 均带有 $\flat$-标注。这些证明都是正交性质的常规应用，并结合了 引理 2.13。

引理 3.11。若 X 是单纯的，则 $\mathsf{Gl}(F_0, F_1, \alpha)$ 是同构内的。

证明。首先，通过对闭包性质作初等推演可知，只需考虑 $F_1 = \lambda_.\,\mathbf{1}$ 的情形（使用同构内族所具有的三取二性质，以及分解 $\mathsf{Gl}(F_0,\ F_1,\ \alpha) \to \left(\sum_{x:X} F_1(x)\right) \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$）。

由脊 $n \to \Delta^n$ 对 $\flat$-正交于 $\mathsf{Gl}(F_0, F_1, \alpha)$，根据 推论 2.21，我们必须证明这一点。为此，固定一个映射 $b :_\flat \Delta^n \to X \times \mathbb{I}$ 以及一个部分截面：

$$s_0 :_\flat (v : \mathsf{Spine}^n) \to \mathsf{Gl}(F_0, F_1, \alpha)(b(v))$$

我们必须证明 s_0 有唯一延拓。先考察 $i = \pi_1 \circ b$，这是一个 $\flat$-标注映射 $\Delta^n \to \mathbb{I}$。根据对偶性，这样的映射对应于 $\mathbb{I}[x_0 \le \cdots \le x_n]$ 的一个 $\flat$ 元素，因此它要么是 0、1，要么是某个特定 $0 \le k \le n$ 对应的 x_k。若属于 $i = \lambda_.\,0$ 或 $i = \lambda_.\,1$ 的情形，则由 F_0 的内在性可立即得出结论。若属于 $i = \mathsf{dual}(x_k)$ 的情形，则必须采用不同的方法。注意，在这种情况下，$i(v) = 0$ 当且仅当 $v_k = 0$。这意味着 s_0 的类型为 $(v : 脊^k) \to F_0(b(v, 0\ldots))$，因此我们必须构造一个类型为 $(v : \Delta^k) \to F_0(b(v, 0, \ldots))$ 的唯一延拓 s。由 $F_0(b(_, 0\ldots))$ 的内在性可立即得到这一点，而这又是 F 的内在性的结果。

为了证明同构内在性的“同构”部分，我们注意到，这可以逐纤维地检验。不过，在每个纤维上，由于 Rezk 类型是一个指数理想，且 F_0 是同构内的，这一点显然成立。□

引理 3.12. 若 X 是一个范畴，则 $\mathsf{Gl}(F_0, F_1, \alpha)$ 是余笛卡尔的。

证明。鉴于引理 3.11，所涉及的一切都是（单纯的）范畴。因此，我们可以使用 的 LARI 条件来证明这一结果。应用 的结果后，我们可以进一步将问题归结为在对象上构造这个伴随。

固定 $i :_\flat \mathbb{I} \to \mathbb{I}$，以及 $x :_\flat \mathbb{I} \to X$、$f_0^1 :_\flat F_1(x)$ 和 $f_0^0 :_\flat i(0) = 0 \to \alpha_x^{-1}(f_0^1)$。我们先构造 (f_0^1, f_0^0) 的一个提升，然后论证它满足所需的初始性。

首先注意，由于 α 保持余笛卡尔边，若有 $g : F_0(x)$ 位于 $f : F_1(x)$ 之上，那么通过一个可缩路径选择，$x_!g_0$ 位于 $x_!f_0$ 之上，因为 $\alpha(x_!g_0)$ 是与 $x_!f_0$ 相同数据的余笛卡尔提升。因此，我们可以构造所需的提升：

$$f^1 = \lambda j : \mathbb{I}.\, x(- \wedge j)_!(f_0^1) \qquad f^0 = \lambda j : \mathbb{I}, z : i(j) = 0.\, x(- \wedge j)_!(f_0^0(_))$$

现在假设给定 $\alpha : \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 和 $\chi : \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to X$，使得 $i = \alpha(0, -)$ 和 $\chi(0, -) = x$（为便于后续将其视为自反性，我们默默地用沿这些路径的传输替换 x 和 i）。我们还假设给定部分提升：$g^1 : (j : \mathbb{I}) \to F_1(\chi(1, j))$ $g^0 : (j : \mathbb{I}) \to \alpha(1, j) = 0 \to \alpha_\chi^{-1}(1,j)\,(g^1(j))$，以及 $h_0^1 : (k : \mathbb{I}) \to F_1(\chi(k, 0))$。$h_0^0 : (k : \mathbb{I}) \to \alpha(k, 0) = 0 \to \alpha_\chi^{-1}(k,0)\,(h_0^1(k))$。我们还可以进一步假设，以上所有内容均为 $\flat$-标注，并且存在路径 $q : (g^1(0)\ g^0(0)) = (h_0^1(1)\ h_0^0(1))$ 和 $p : (f^1(0)\ f^0(0)) = (h_0^1(0)\ h_0^0(0))$

我们希望证明，存在一个唯一延拓 $(h_0^1,\ h_0^0)$ 到整个 $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$，并且该延拓在 p 和 q 上与 h_0、e 及 f 相匹配。首先，我们注意到，由于 F_1 是余笛卡尔的，我们可以将 h_0^1 唯一延拓到 h^1。因此，我们将 h_0^1、f^1 和 g^1 替换为 h^1，这样一来，我们的新目标就是在以下条件下构造 h_0^0 的延拓：

$$h_0^0 : (k : \mathbb{I}) \to \alpha(k, 0) = 0 \to \alpha^{-1}_{\chi(k,0)}(h^1(k, 0))$$

$$f^0 : (j : \mathbb{I}) \to \alpha(0, j) = 0 \to \alpha^{-1}_{\chi(0,j)}(h^1(k, 0))$$
$$g^0 : (j : \mathbb{I}) \to \alpha(1, j) = 0 \to \alpha^{-1}_{\chi(1,j)}(h^1(k, 1))$$

为了证明这一点，我们必须对 α 进行一番颇为冗长的分类讨论。由于它带有 ♭ 注释，我们知道它是 $\mathbb{I}[x_0, x_1]$ 的一个 ♭-元素，因此可以对其进行较为详尽的分析。

情形。 $\alpha(0, -) = \lambda_.1$.

在这种情形下， $\alpha = \lambda_.1$ 由单调性可知，因此任何扩张必然是平凡的。

情形。 $\alpha(0, -) = \lambda_.0$.

这里，我们需要考虑几个子情况：

情形。 $\alpha(1, -) = \lambda_.0$.

在这种情况下，条件 $\alpha(-, -) = 0$ 在所有情况下都成立，因此这恰好归结为 F_0 是余笛卡尔的这一事实。特别地，我们注意到，可以利用 f^0 是余笛卡尔的这一事实，将 h^0 延拓到 F_0 中（而非纤维中）。根据构造，这个延拓是唯一的；并且由于延拓的输入位于 h^1 之上，它（唯一地）属于正确的纤维。**情形**。 $\alpha(1, -) = \lambda j.\, j$。

在这种情况下，我们必须构造一个以下类型的提升：

$$(k, j : \mathbb{I}) \to k \wedge j = 0 \to \alpha^{-1}_{\chi(k,j)}(h^1(k, j))$$

给定 $k, j : \mathbb{I}$，由于一切都是单纯的，我们可以假设 $k \le j$ 或 $j \le k$。换言之，我们的条件等价于 $k = 0$ 或 $j = 0$；任何延拓都完全由边界条件决定。

情形。 $\alpha(1, -) = \lambda_.1$。

在这种情况下， $\alpha = \lambda(k, j).\, k$，因此我们只需取 $h_0 = h^0_0$。

情形。 $\alpha(0, -) = \lambda j.\, j$。

这里有几个子情况需要考虑：

情形。 $\alpha(1, -) = \lambda j.\, j$。在这种情况下， $\alpha(k, j) = j$，因此我们只需取 $h^0 = f^0$。**情形**。 $\alpha(1, -) = \lambda_.1$。在这种情况下， $\alpha(k, j) = k \vee j$，因此我们的条件 $\alpha(k, j) = 0$ 等价于 $k = 0 \wedge j = 0$。因此，我们可以取 $h = f^0_0$。□

推论 3.13。 从 $\mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha)(-, 0)$ 到 $\mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha)(-, 1)$ 的余笛卡尔传输由 α 给出。

证明。首先注意，给定 $f : \mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha)(c, 0) \cong F_0(c)$，存在函子性边的选取：

$$\lambda i.\, (\alpha(f), \lambda_.\, (f, \mathrm{refl})) : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha)(c, i)$$

要证明所需的识别，只需证明这条边是余笛卡尔的。根据标准结果，自然变换是等价当且仅当它逐点是等价的，因此我们将注意力限制在 $c :_\flat C$ 的情形。然而，根据上述证明，这一点显而易见——特别是，沿 C 中一条常值边的余笛卡尔传输是平凡的。□

推论 3.14。 投影映射 $\pi_0 : \mathrm{Gl}(F_0, F_1, \alpha) \to F_1 \circ \pi_0$ 是 $X \times \mathbb{I}$ 上的余笛卡尔函子。

4 超余笛卡尔类型的宇宙

现在我们转向 Cat 的构造。如引言中所述，Cat 将是 U 的一个子类型，因此必须由一个命题 $\mathrm{U} \to \mathrm{HProp}$ 进行分类。最明显的命题选择是某种类似于余笛卡尔性的性质，但稍加思考便会发现这行不通：如果我们要定义一个映射 $\mathrm{isCocartFib} : \mathrm{U} \to \mathrm{HProp}$，那么输入应当在什么对象上具有余笛卡尔性？余笛卡尔性是族的性质！

为了解决这一问题，我们遵循 Licata 等人的方法 [18]，并采用有向类型论语境中的改进形式 [10, 42]。首先，考虑纤维化的一般概念$\mathsf{isFib}_X : \mathcal{U}^X \to \mathsf{HProp}$。我们的目标是定义一个谓词，用以见证一个类型的纤维性 A，将其视为整个环境上下文上的族。从$\mathsf{isFib}_{\mathbb{I}} : \flat\, \mathcal{U}^{\mathbb{I}} \to \mathsf{HProp}$ 出发，引理 2.9 恰好给出了这样的纤维性概念。此外，可以证明，当我们将注意力限制在带有$\flat$标注的族上时，这一更强的纤维化概念与经典概念一致。现在我们将应用这一构造，并借助定理 3.9。

记 i 为典范包含映射。利用引理 2.9 和 3.10，我们现在将 $\mathsf{isInner}(- \circ i)$、$\mathsf{hasLCCLifts}$ 和 $\mathsf{LCCLiftsCompose}(- \circ i)$ 转置，从而得到 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 中的元素，即 $\mathsf{aisInner}$、$\mathsf{aHasLCCLifts}$ 和 $\mathsf{aLCCLiftsCompose}$。这里我们使用了 i，例如，$\mathsf{isInner}$ 取值于$\Delta^2 \to \mathbb{U}$，而不是 $\mathbb{I}^2 \to \mathbb{U}$。接下来我们定义 Cat：

$$\mathsf{Cat} := \sum_{A:\mathcal{U}_{\triangle}} \begin{array}{l} \mathsf{isRezk}\, A \times \mathsf{aIsInner}\, A \\ \times\, \mathsf{aHasLCCLifts}\, A \times \mathsf{aLCCLiftsCompose}\, A \end{array}$$

引理4.1。 Cat 是$\mathcal{U}_{\triangle}$的一个子类型。

定理 4.2。 Cat 是万有余笛卡尔族的基底，即对于任意 $C :\flat\, \mathcal{U}$，我们有$\langle \flat \mid C \to \mathsf{Cat} \rangle \simeq \left\langle \flat \mid \sum_{E:\, C \to \mathcal{U}} \mathsf{isCocart}(E) \right\rangle$。

证明。固定 $A :\flat\, X \to \mathbb{U}_{\triangle}$。我们的目标是证明 A 经由 Cat 分解，当且仅当 A 是余笛卡尔的。为证明这一点，我们考虑经由 Cat 分解所涉及的数据。根据定义，这等价于经由 $\mathbb{U}_{\triangle}$ 的四个不同子对象进行分解：即由 isRezk、$\mathsf{aIsInner}$、$\mathsf{aHasLCCLifts}$ 和 $\mathsf{aLCCLiftsCompose}$ 刻画出的那些子对象。对于后三种情形，我们可以利用定义它们时所用的转置来分析这些子对象。

例如，如果 A 经由 $\sum_{B:\mathcal{U}_{\triangle}} \mathsf{aIsInner}(B)$分解，则根据引理 2.9，存在以下类型的一个元素：

$$\left\langle \flat \mid \prod_{x:X^{\mathbb{I}\times\mathbb{I}}} \mathsf{isInner}(A \circ x \circ i) \right\rangle$$

这样的元素存在，当且仅当 A 是内纤维化。

这一推理也适用于 $\mathsf{aHasLCCLifts}$ 和 $\mathsf{aLCCLiftsCompose}$，因此我们可以断定 A经由 Cat 分解，当且仅当它是同构内的、局部余笛卡尔的，并且局部余笛卡尔边可复合。于是所需的双向蕴含即为定理 3.9。 □

5 范畴的范畴

在本节中，我们利用 定理 4.2 来证明 Cat 的关键性质。具体而言，我们证明Cat 满足 Segal 条件和 Rezk 条件，满足 第 1 节中所述的有向单价性，并且是单纯的。结合这些结果，我们证明 Cat 是一个范畴，尤其是范畴的范畴。

5.1 余笛卡尔纤维化的分类

证明 Cat 满足 Segal 条件和 Rezk 条件的主要依据，是对 $\Delta^n \times C$ 上的余笛卡尔纤维化的刻画，其中 C是一个范畴。为了解其中缘由，请注意，根据 定理 4.2，我们知道 $f :\flat\, X \times \Delta^n \to \mathsf{Cat}$ 由 $X \times \Delta^n$ 上的一个余笛卡尔族决定。通过精确描述此类族，我们可以得到更易处理的形式，例如限制映射 $\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \Delta^2 \to \mathsf{Cat} \rangle \to \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \Lambda^2_1 \to \mathsf{Cat} \rangle$。这一形式显然可逆，因此我们可以得出结论： Cat 满足 Segal 条件。此过程中一个关键的引理如下：

引理 5.1。 对于 $X :\flat\, \mathcal{U}$ 中的一个范畴，以及 $A, B :\flat\, X \to \mathcal{U}$ 中的余笛卡尔函子，余笛卡尔函子 $\alpha : A \xrightarrow{\sim} \prod_{x:X} A(x) \to B(x)$ 诱导一个总范畴的等价 $\widetilde{\alpha} : \int A \simeq \int B$ 当且仅当 $\prod_{x:\flat X} \mathsf{isEquiv}(\alpha(x))$成立。

~ ~证明。 由于余笛卡尔族是同构纤维化，我们知道 A 和 B 本身都是范畴。由 引理 2.12，我们验证 $\tilde{\alpha}$ 是全忠实的，并且是本质满的。

本质满射性是显然的：给定 (x, a_0, a_1)，因为 $\flat$ 在 X 的 $\flat$ 元素上可逆。要证明 $\tilde{\alpha}$ 是全忠实的，注意到传输在 $\mathbb{I} \to A$ 和 $\sum_{x:\mathbb{I}\to X} \sum_{a_0:A(x\,0)} a_1 : A(x\,1)$ 同态集$_{A(x\,1)}$ $(x_!a_0, a_1)$ 之间诱导出一个等价~。由于 α 保持余笛卡尔边，因此只需证明，对于$x :_\flat \mathbb{I} \to X$ 和 $a_\epsilon :_\flat A(x\,\epsilon)$，同态集$_{A(x_1)}$ $(x_!a_0, a_1)$ $=$同态集$_{B(x_1)}$ $(\alpha(x\,1, x_!a_0)\ \alpha(x\,1, a_1))$。这是成立的，因为 $\alpha(x\,1)$ 可逆。□

接下来我们证明，每个余笛卡尔族 $A :_\flat X \times \mathbb{I} \to \mathsf{U}$（其中 X 是一个范畴）都具有 $\mathsf{Gl}(A(-, 0)\ A(-, 1)\ \lambda x.(x, -)_!)$ 的形式。为此，我们注意到以下事实：

引理 5.2。 给定如上所述的 A，传输映射 $\alpha = \lambda x.(x, -)_!$ 是一个余笛卡尔函子 $A(-, 0) \to A(-, 1)$。

证明。展开定义后，这可由余笛卡尔箭头满足的三取二条件推出 [5,命题 5.1。8]。□

因此， $B = \mathsf{Gl}(A(-, 0)\ A(-, 1)\ \alpha)$ 是一个余笛卡尔族。此外，我们可以构造一个族映射 $A \to B$:

$$\mathrm{glue}(x, i, a) = (x, i, ((x, i \vee -)_!a, \lambda p : i = 0.\, p_!a))$$

换言之，我们利用余笛卡尔传输将 a：$A(x,\ i)$ 移至 $A(x,\ 1)$，并且如果起初有 $i = 0$，也将原始的 a 一并记录下来。

引理 5.3。 粘合： $\prod_{p:X\times\mathbb{I}} A(p) \to B(p)$ 是一个余笛卡尔函子。

证明。 按照 Buchholtz 和 Weinberger [5, 定理 5.3。19], 要验证 粘合 是余笛卡尔的，只需验证 Beck-Chevalley 自然变换可逆。根据引理 2.11，只需在$\flat$ 元素上验证，这显然成立。□

推论 5.4。 粘合 是余笛卡尔族的一个等价。

证明。 应用 引理 5.1，只需在$\flat$-带注释元素 $(x, i) :_\flat X \times \mathbb{I}$上逐纤维验证该等价。特别地，只需验证它在 $\flat$-带注释元素上的映射诱导出一个等价，而根据 $\mathbb{I}$，由 公理 4可知这些元素只有 0 和 1。然而，在0 和 1上可见，粘合 是一个等价：在 0上显然成立，而在 1 上则由如下观察得出：沿恒等箭头的余笛卡尔传输就是恒等映射。□

因此，一个余笛卡尔族 $A :_\flat X \times \mathbb{I} \to \mathcal{U}$ 完全由其在 0 和 1 上的限制以及相应的传输映射确定。将这一分类结果应用于 $X = \mathbf{1}$的情形，并结合定理 4.2，我们得到有向单价原理：

推论 5.5 (有向单价性)。 若 A, B 是Cat的 $\flat$-元素，则存在一个等价dua : 同态集$_{\mathrm{Cat}}(A, B) \simeq \langle \flat \mid A \to B \rangle$。

我们注意到，一般而言，实际上我们得到 $\flat \mid X \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cat}$ 与$\left\langle \flat \middle| \sum_{A_0,A_1:\mathrm{Cat}^X} A_0 \to^{\mathrm{cc}} A_1 \right\rangle$ 之间的等价。接下来，我们还需要对余笛卡尔族 $A :_\flat X \times \Delta^2 \to \mathsf{U}$ 作类似的刻画。其过程大致相同；我们将 B_1 定义为如下迭代粘合类型：

$$B_0 = \mathsf{Gl}(A(-, \bar{0}), A(-, \bar{1}), \lambda x.\,(x, -)_!)$$
$$B_1 = \mathsf{Gl}(B_0, A(-, \bar{2}) \circ \pi_0, \lambda x.\,(x, \bar{1} \vee - \wedge \bar{2})_! \circ \pi_0)$$

结合 推论 3.14 和 引理 5.2 以及 引理 3.12，我们得出 B_1 是一个余笛卡尔族 $X \times \mathbb{I}^2 \to \mathcal{U}$。接着，我们取 B 为 B_1 在 $X \times \Delta^2$上的限制。此前考虑的族映射 粘合很容易推广到这一 Δ^2 情形，并且我们可以证明如下结论：

引理 5.6。 映射 粘合$_2$： $\prod_{p:\ X\times\Delta^2} A\,p \to B\,p$ 是余笛卡尔的。

证明。展开定义后，这个族将 (x, i, j) 映射到以下类型，其中我们用 α 表示余笛卡尔传输 $\bar{0} \to \bar{1}$，用 β 表示余笛卡尔传输 $\bar{1} \to \bar{2}$：

$$\textstyle\sum_{a_2:A(\bar{2},x)} j = 0 \to \sum_{a_1:\beta^{-1}(a_2)} i = 0 \to \alpha^{-1}(a_1)$$

于是有一个典范赋值 glue$_2$：$A(c, i, j) \to B(c, i, j)$，其定义如下：

$$(x, i, j, a) \mapsto ((x, - \vee i, - \vee j)_!(a), \lambda_ : j = 0\,((x, - \vee i, 0)_!(a), \lambda_ : i = 0.\, a))$$

接下来，我们可以直接展开它们在 Gl 中的构造，并再次检查这在全局数据上成立，从而验证此赋值保持余笛卡尔箭头。归根结底，这相当于证明粘合保持余笛卡尔边；将其限制到全局边 $0 \le 1$、$1 \le 2$ 和 $2 \le 3$ 时，我们发现上述对 B 的刻画归结为沿若干余笛卡尔函子应用一次 Gl。□

再次应用引理 5.1 可得粘合$_2$ 是一个等价。再次结合这些步骤与定理 4.2，我们再次得出以下结论：

推论 5.7。 余笛卡尔传输诱导出一个等价
$\langle \flat \mid \mathrm{Cat}^{X\times\Delta^2} \rangle \simeq \left\langle \flat \mid \sum_{A_0,A_1,A_2:\mathrm{Cat}^X} A_0 \to^{\mathrm{cc}} A_1 \times A_1 \to^{\mathrm{cc}} A_2 \right\rangle$.

5.2 Cat 是 Segal 且 Rezk

对于所有范畴 X，我们已经刻画了在 $X \times \Delta^2$ 和 $X \times \mathbb{I}$ 上的余笛卡尔纤维化；稍加努力便可证明 Cat 既是 Segal 的，也是 Rezk 的。

引理 5.8。Cat 是 *Segal* 的。

证明。 我们希望证明$\mathrm{Cat}^{\Delta^2} \to \mathrm{Cat}^{\Lambda^2_1}$ 是一个等价。根据公理 6，只需证明对于所有 n，以下映射是一个等价：$\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \Delta^2 \to \mathrm{Cat} \rangle \to \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \Lambda^2_1 \to \mathrm{Cat} \rangle$。

注意到 $\flat \mid \mathbb{I}^n \times \Lambda^2_1 \to \mathrm{Cat}$ 等价于以下内容：

$$\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cat} \rangle \times_{\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to \mathrm{Cat} \rangle} \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cat} \rangle$$

这由以下事实得出：$\flat \mid -$ 具有一个内部右伴随（$\sharp \mid -$），并且 $\Lambda^2_1 = \mathbb{I} \sqcup_{\mathbb{1}} \mathbb{I}$。接下来，由于 $\mathbb{I}^n$ 是一个范畴，前一节的结果使我们能够将上述映射改述为以下形式：

$$\begin{aligned}&\left\langle \flat \mid \textstyle\sum_{A,B,C:\mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n}} A \to^{\mathrm{cc}} B \times B \to^{\mathrm{cc}} C \right\rangle \to \\ &\left\langle \flat \mid \textstyle\sum_{A,B:\mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n}} A \to^{\mathrm{cc}} B \right\rangle \times_{\langle \flat \mid \mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n} \rangle} \left\langle \flat \mid \textstyle\sum_{B,C:\mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n}} B \to^{\mathrm{cc}} C \right\rangle\end{aligned}$$

这是一个等价，立即由以下事实得出：$\langle \flat \mid - \rangle$ 由于公理 3而保持拉回。□

考察这一证明，我们看到，如果 $P\colon \Lambda^2_1 \to \mathrm{Cat}$，则所得的复合边 $f\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Cat}$ 是一个余笛卡尔纤维化，其中 $f(0) = P(\bar{0})$，$f(1) = P(\bar{2})$，并且从 0 到 1 的余笛卡尔传输，是先在 P 中从 $\bar{0}$ 传输到 $\bar{1}$，再从 $\bar{1}$ 传输到 $\bar{2}$ 的复合。

引理 5.9. Cat 是 *Rezk* 的。

证明。 我们希望证明，Cat 中的所有合成同构都等价于恒等映射。我们再次应用 公理 6 来证明限制映射 $\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to \mathrm{Cat}\rangle \to \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \times \mathbb{E} \to \mathrm{Cat}\rangle$是一个等价。将 $\langle \flat \mid -\rangle$ 与定义 $\mathbb{E}$ 的推出相交换后，我们再次可以改为考虑映射：

$$\begin{aligned}&\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to \mathrm{Cat}\rangle\\ &\to \langle \flat \mid \mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n \times \Delta^2}\rangle \times_{\dots} \langle \flat \mid \mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n \times \mathbb{I}}\rangle \times_{\dots} \langle \flat \mid \mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n \times \Delta^2}\rangle\end{aligned}$$

应用前一节的结果，并将 $\flat \mid -$ 移过拉回，我们可以将上面的内容改写为：

$$\begin{aligned}&\langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to \mathrm{Cat}\rangle\\ &\to \left\langle \flat \mid \textstyle\sum_{A,B:\mathrm{Cat}^{\mathbb{I}^n}} \sum_{f:A\to^{\mathrm{cc}}B} \sum_{g,h:B\to^{\mathrm{cc}}A} f \circ g = \mathrm{id} \times h \circ f = \mathrm{id} \right\rangle\end{aligned}$$

然而，由于 Cat 是 U 的子类型，它满足单值性公理。结论随即由以下观察得出：施加在 f 上的数据确保它是一个等价族。□

5.3 Cat 是单纯的

我们剩下的任务是证明 Cat 是单纯的。遗憾的是，这一点远非显而易见。毕竟，Cat 是借助于以下对象定义的：通往 $\mathbb{I} \to -$的惊人右伴随，而这正是非单纯类型的主要来源。幸运的是，在这种情况下，我们可以利用定理 4.2 来构造通往 η 的左截面：$\mathrm{Cat} \to \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$，这意味着 η 是一个等价 [34, 引理 1。20]。

首先，我们记录以下引理：

引理 5.10. $\mathrm{Cat}_\bullet = (\sum_{A:\ \mathrm{Cat}} A) \to \mathrm{Cat}$ 与 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet \to \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$之间由 η 诱导的交换方块是笛卡儿的。

证明。展开定义并比较纤维，这由每个 $A:\ \mathrm{Cat}$ 是单纯的且 $\mathbb{\Delta}$是有限极限保持的事实得出。□

接下来，我们注意到，如果 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet \to \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$ 本身表示一个余笛卡尔族，那么必定存在唯一的分类映射 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$；将相关的拉回方块拼接起来，我们得到以下复合拉回图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cat}_\bullet & \longrightarrow & \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{Cat}_\bullet \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\mathrm{Cat} & \longrightarrow & \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}
\end{array}$$

由 Cat 的单值性性质可知，这个底部复合映射必定是恒等映射。因此，分类映射 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ 就是所需的单位的左逆。因此，剩下要做的就是证明 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet \to \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$ 是一个余笛卡尔纤维化。

为证明这一点，我们将使用 公理 7 以及 引理 2.13 和 命题3.5。首先，我们必须注意到 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$ 和 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet$ 根据 推论 2.24 都是范畴。

引理 5.11。 族 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet \to \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$ 是余笛卡尔的。

证明。作为范畴之间的映射，它自动是同构内的和单纯的。因此，只需证明比较映射 $(\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet)^{\mathbb{I}} \to (\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat})^{\mathbb{I}} \times_{\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}} \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet$ 具有一个左伴随右逆。为简洁起见，我们记 $C = \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}$，并将 $\mathbb{\Delta}$ 与 $\sum$ 交换，以便在下文中用$E = \sum_{A:\ \mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}} \hat{}\mathbb{\Delta} A$ 替换 $\mathbb{\Delta}\mathrm{Cat}_\bullet$。

我们可以使用 引理 2.13，因此只需检查将此性质限制到 $\flat$-带注释元素时 $C^{\mathbb{I}} \times_C E$。因此，我们可以固定 $A:\ {}_\flat\mathbb{I} \to C$ 以及一个元素

$a_0 :_\flat A\,0$。根据 公理 7，我们可以假设 $A = \eta \circ A'$ 以及 $a_0 = \eta(a_0')$ 对于某个唯一的 $A' :_\flat \mathbb{I} \to$ Cat和 $a_0' :_\flat A$

由于 $\mathsf{Cat}_\bullet \to \mathsf{Cat}$ 是余笛卡尔的，我们将 A', a_0' 提升为余笛卡尔态射 $a' :_\flat (i :\mathbb{I}) \to A'\,i$，使得$p' : a'\,0 = a_0'$。现在我们论证，$a = \eta \circ a' : (i :\mathbb{I}) \to \widehat{\triangleright} A\,i$ 以及由此诱导的等式 $p : a\,0 = a_0$，正是位于 A, a 之上的所需泛性质提升。

对输入数据作适当整理后，只需证明：若给定 $H :_\flat \Delta^2 \to \widehat{\triangleright}\mathsf{Cat}$，以及此映射的一个提升 $h :_\flat (t : \Lambda^2_0) \to \widehat{\triangleright} H(t)$。有若干条路径将这两个$a$和 A联系起来，但经过归纳后，我们可以按定义将 (1) $H(0, –)$ 与 A (2) $h(0, –)$ 与 a 等同。我们必须证明，h 能唯一地延拓为某个 $\bar{h} : (t : \Delta^2) \to \widehat{\triangleright} H(t)$。根据公理 7，我们可以再次将 H和 h经由 Cat 分解，因此结论直接由我们将a' 构造为余笛卡尔提升得出。□

推论 5.12. Cat 是一个范畴。

6 完整的直化–反直化

在本节中，我们证明 Lurie 的直化–反直化定理，该定理指出：对于范畴 $C :_\flat \mathsf{U}$，类型 $C \to$ Cat 等价于 $\mathsf{Cat}_{/C}$ 的子范畴（即$\sum_{f:\mathsf{Cat}^{\mathbb{I}}} f(1) = C$），并加以限制，使其 0-胞腔与 1-胞腔由余笛卡尔族和余笛卡尔函子给出。因此，在本节的剩余部分，我们将 $C :_\flat \mathsf{U}$ 固定为一个范畴。

为此，我们将构造一个映射 $U : (C \to \mathsf{Cat}) \to \mathsf{Cat}_{/C}$并证明它是 (1) 一个嵌入，使得 (2) 它在 $\flat$-带注释元素 $C \to \mathsf{Cat}$上的像，以及 $\mathbb{I} \to (C \to \mathsf{Cat})$ 恰好满足上述条件。由此，我们证明 $(C \to \mathsf{Cat}) \to \mathsf{Cat}_{/C}$ 满足子范畴 $\mathsf{Cocart}(C)$ 之上的余笛卡尔族所预期的泛性质，其底范畴为 C (推论 6.6)。

备注 6.1。本节内容主要遵循 Cisinski 等人 [6] 的论述，仅做了少量调整，使其更适用于 TT$\widehat{\triangleright}$。特别是，我们正是从他们那里了解到这种构造反直化函子并刻画其像的方法。虽然预期这种改编是可行的，但这仍令人鼓舞：上述文献所给出的公理化方法旨在提供高层次的论证，这些论证可以转化为满足其公理的形式系统；而我们对 Cat 的构造确保 TT$\widehat{\triangleright}$ 满足此论证所需的所有相关公理。

备注 6.2。我们没有显式构造 $\mathsf{Cocart}(C)$，只是为了避免绕道描述非全子范畴的构造。例如，$(–)^{\mathbb{I}}$可以实现此类构造。

6.1 反直化映射

我们首先构造一个映射 U，它从 $C \to \mathsf{Cat}$ 映到 $\mathsf{Cat}_{/C}$。我们将这一过程分成几个步骤。先考虑 Cat 上的两个特定余笛卡尔族：

$$E(f) = \textstyle\sum_{c:C} f(c) \qquad B(f) = C$$

它们都是 C 上的余笛卡尔族，而典范投影也是一个余笛卡尔映射$\pi_0 :\ E \to^{\mathrm{cc}} B$ 同样如此——因此是一个余笛卡尔函子。因此，我们可以将它们粘合起来，形成一个余笛卡尔族：$\mathsf{Gl}(E,\ B,\ \pi_0) : (\mathsf{Cat}^C) \times \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}$。首先，让我们计算 $\mathsf{Gl}(E,\ B,\ \pi_0)(–,\ 1)$，并注意到它通过以下路径族典范地同一于 $\lambda_.\, C$：

$$\Phi = \lambda f.\, \mathsf{ua}(\pi_1) : \textstyle\prod_{f:C\to\mathsf{Cat}} \mathsf{Gl}(E, B, \pi_0)(f, 1) = C$$

通过转置并利用这一识别，我们得到：

$$U : (C \to \mathsf{Cat}) \to \mathsf{Cat}_{/C}$$
$$U = \lambda f.\, (\mathsf{Gl}(E, B, \pi_0)(f, –), \Phi(f))$$

6.2 非直化映射的像

我们的下一个任务是识别 U 的像，特别是证明它恰好是 C 上的余笛卡尔族以及它们之间的余笛卡尔函子所构成的范畴。因此，我们计算 $\flat \mid \mathsf{Cat}^C \to \flat \mid \mathsf{Cat}/C$ 和 $\flat \mid \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}^C \to \flat \mid \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}/C$ 的纤维。

特别地，我们将证明，$p : \flat\, \mathsf{Cat}/C$ 上的纤维恰好是这样一个命题：它断言 p 是否为余笛卡尔的；而在 $f : \flat\, \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}/C$ 上，它对应于以下三个命题的合取：要求 $f(0)$ 以及 $f(1)$ 是余笛卡尔的，并且要求 f 自身诱导一个余笛卡尔族之间的映射。鉴于 Segal 条件，这描述了任意单形上的纤维；再由公理 6以及 Cat的单纯性，可证明 U 是一个嵌入。此外，对纤维的描述表明，由此得到的 Cat/C 的子范畴，恰好就是本节开头所述的子范畴。

引理 6.3。 *U 在 $p : \flat\, \mathsf{Cat}/C$ 上的纤维是一个命题，当且仅当 p 是余笛卡尔的时，该命题有证明。*

证明。与有向单价性复合后，我们可以将 U 的纤维识别为以下映射的纤维：

$$U' : \langle \flat \mid C \to \mathsf{Cat} \rangle \to \left\langle \flat \mid \textstyle\sum_{E:\mathsf{Cat}} E \to C \right\rangle$$

考虑一个范畴 $E :\flat\, \mathsf{Cat}$和一个函数 $\pi_E :\flat\, E \to C$。我们的目标是计算纤维$\sum_{f:\langle\flat \mid C\to\mathsf{Cat}\rangle} U'(f) = \mathsf{mod}_\flat(E, \pi_E)$。

展开 U'，当且仅当存在等价$e :\flat\, E \simeq \sum_{c:C} f(c)$和一个等式 $p :\flat\, \pi_E = \pi_1 \circ e$时，元素 $f :\flat\, C \to \mathsf{Cat}$ 会被映射到 (E, π_E)。再应用一次单值性，这等价于要求 $\flat \mid \pi_E^{-1}(-) = f$，因此该纤维即为 $\sum_{f:\flat C\to\mathsf{Cat}} \flat \mid \pi_E^{-1} = f$。根据命题 2.8 和定理 4.2，这是一个命题；当且仅当 π_E 是一个余笛卡尔族时，它才有元素。□

引理 6.4. *U 在 $f :\flat\, \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}/C$ 上的纤维是一个命题，当且仅当 f 是余笛卡尔族之间的余笛卡尔函子时，该命题有见证。*

证明。重新排列等式后，我们可以将 $\flat \mid \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}/C$ 识别为 $\left\langle \flat \mid \sum_{h:\Delta^2\to\mathsf{Cat}} h(\bar{2}) = C \right\rangle$，然后通过有向单价性将其识别为 $\left\langle \flat \mid \sum_{E,F:\mathsf{Cat}} E \to F \times F \to C \right\rangle$。将这些映射作为后复合 U，我们转而考虑如下内容：

$$U' : \langle \flat \mid \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}^C \rangle \to \left\langle \flat \mid \textstyle\sum_{E,F:\mathsf{Cat}} E \to F \times F \to C \right\rangle$$

考虑范畴 $E, F :\flat\, \mathsf{Cat}$ 和函数 $\pi_F :\flat\, F \to C$以及 $\alpha :\flat\, E \to F$。我们的目标是计算 U' 在这些数据上的纤维。

展开后，元素 $h :\flat\, \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}^C$ 被映射到 E, F, π_F，当且仅当满足以下条件：

- 一个等价 $e_0 : \flat\, E \simeq \sum_{c:C} h(0, c)$,
- 一个等价 $e_1 : \flat\, F \simeq \sum_{c:C} h(1, c)$,
- 一条路径 $\phi : \flat\, e_1 \circ \alpha = \beta \circ e_0$，其中 $\beta = \lambda c.\, (-, c)_!$ 由 h 的余笛卡尔传输给出
- 一条路径 $\phi : \flat\, \pi_F = \pi_0 \circ e_1$。

再次利用单值性，我们归结为 C 上族之间的映射之间的♭标注方程（即$C \to \sum_{A,B:\mathcal{U}} B^A$）：

$$\lambda c.\, \pi_0 : \textstyle\prod_{c:C} \left(\sum_{f:\pi_F^{-1}(c)} \alpha^{-1}(f)\right) \to \pi_F^{-1}(c)$$
$$\lambda c.\, (-, c)_! : \textstyle\prod_{c:C} h(0, c) \to h(1, c)$$

由于$\langle \flat \mid \mathbb{I} \to \mathsf{Cat}^C \rangle$ 嵌入到$\left\langle \flat \mid C \to \sum_{A,B:\mathcal{U}} B^A \right\rangle$ 根据有向单价性，命题 2.8保证该纤维在 (E, F, π_F) 上是一个命题。同样的分析表明，它有居留当且仅当$\pi_F \circ \alpha$与 π_E 是余笛卡尔的，并且 α 是余笛卡尔族之间的映射。□

推论 6.5。 *映射 $U : (C \to \mathsf{Cat}) \to \mathsf{Cat}/C$ 是一个嵌入。*

证明。 为证明U是一个嵌入，我们将证明 $\Delta_U\colon\ (C \to \mathrm{Cat}) \to (C \to \mathrm{Cat})^{\times_{\mathrm{Cat}/C}(C \to \mathrm{Cat})}$ 是一个等价。根据公理 6 以及这里涉及的所有对象都是单纯的这一事实，只需证明下列映射是一个等价：

$$\langle \flat \mid \Delta^n \to \mathrm{Cat}\rangle \to \langle \flat \mid \Delta^n \to (C \to \mathrm{Cat}) \times_{\mathrm{Cat}/C} (C \to \mathrm{Cat})\rangle$$

由于两边都是范畴，我们可以将问题限制在 $n = 0,1$ 的情形。在这种情况下，只需证明：若 $f, g :_\flat \Delta^n \to (C \to \mathrm{Cat})$ 且 $p :_\flat U \circ f = U \circ g$，则存在一条路径 $(f, \mathrm{refl}) = (g, p)$。然而，这恰好等价于要求 $(U \circ -)^\dagger$ 在 $\mathrm{mod}_\flat(U \circ f)$ 上的纤维是可缩的。根据先前的结果，我们知道该纤维是一个命题，且由 (f, refl) 占据。因此，它是可缩的，正如所需。□

事实上，鉴于我们对 U 的纤维的识别，我们还可以刻画函子何时能沿其提升。这本质上就是前面提到的 $\mathrm{Cocart}(C)$ 的泛性质：

推论 6.6 (直化–反直化)。 若 $D :_\flat \mathcal{U}$ 是一个范畴，则映射 $f :_\flat D \to \mathrm{Cat}/C$可沿 U提升至Cat^C 当且仅当

(1) 对于每个 $d :_\flat D$，函子 $f(d)$ 是一个余笛卡尔族。*(2)* 对于每个 $d :_\flat \mathbb{I} \to D$，由 $f \circ d\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Cat}/C$ 诱导的函子是余笛卡尔族之间的余笛卡尔函子。

证明。我们的目标是刻画对于哪些 f，下面这个映射是等价 ：

$$D \times_{\mathrm{Cat}/C} (C \to \mathrm{Cat}) \to D$$

值得注意的是，我们已经知道这个映射是一个嵌入（它是 U 的拉回），因此我们只需刻画它何时是满射。利用 公理 6 以及两边都是范畴这一事实，只需考察以下映射何时为满射：

$$\langle \flat \mid D \times_{\mathrm{Cat}/C} (C \to \mathrm{Cat})\rangle \to \langle \flat \mid D\rangle$$
$$\langle \flat \mid \mathbb{I} \to D \times_{\mathrm{Cat}/C} (C \to \mathrm{Cat})\rangle \to \langle \flat \mid \mathbb{I} \to D\rangle$$

现在我们展开这些映射，并使用 命题 2.8。这些保证第一个映射命中$d :_\flat D$ 当且仅当 $f(d)$ 是一个余笛卡尔族。类似地，第二个映射命中 $d :_\flat \mathbb{I} \to D$ 当且仅当 $f \circ d$ 是余笛卡尔族之间的余笛卡尔函子。□

7 示例

到目前为止，我们一直专注于构造 Cat 并验证其基本性质，因此最后我们将讨论 Cat 所带来的若干新示例和范畴论。我们仅对其中几个示例作简要概述。

7.1 Cat 的子范畴

首先注意到，由于每个协变族都是余笛卡尔的，因此从万有协变族 S 的基底到万有余笛卡尔族 Cat 的基底存在唯一映射。这就是从群胚到范畴的包含映射。

引理 7.1. 映射 $i : \mathcal{S} \to \mathrm{Cat}$ 是全忠实的，并且同时具有左伴随和右伴随：$|-| \dashv i \dashv (-)^\simeq$。

证明思路。该陈述的后半部分由引理 2.13 得出。特别是，我们利用这个引理，将 $X :_\flat \mathrm{Cat} \mapsto \flat \mid X : \mathrm{S}$ 和 $X :_\flat \mathrm{Cat} \ominus_{\mathrm{grpd}} X : \mathrm{S}$ 的逐点赋值扩展为函子 $\mathrm{Cat} \to \mathrm{S}$。由公理 5 可立即得出 i 是全忠实的：若 X 是群胚，则单位 $X \to \flat \mid i(X)$ 是等价。单位可逆蕴含左伴随全忠实，这是一个标准论证。□

还有许多其他有趣的范畴，作为 Cat 的全子范畴而存在。例如，我们可以将单值1-范畴视为 Cat [10,§7] 由以下谓词给出的全子范畴：

$$\mathsf{is1Cat} : (\flat \mid \mathsf{Cat}) \to \mathsf{HProp}$$
$$\mathsf{is1Cat}(C) = \textstyle\prod_{a,b:\flat C} \mathsf{isSet}(\hom_C(a,b))$$

类似的定义立即对所有 n 给出 $(n,\ 1)$-范畴。值得注意的是，通过限制到 $n = -1$，我们得到偏序的范畴，并进一步限制到线性偏序，得到单纯形范畴 $\Delta \hookrightarrow \mathsf{Cat}$。事实上，与用于 $\mathsf{S} \hookrightarrow \mathsf{Cat}$ 的同一论证使我们能够证明如下结论：

引理7.2。 $\mathsf{Cat}_n \hookrightarrow \mathsf{Cat}$的包含映射是右伴随。

证明概要。 改写引理 7.1 以使用使下列映射零化的模态 $\Lambda^2_1 \to \Delta^2$，$\mathbb{E} \to \mathbf{1}$以及 $\partial\Delta^{n+2} \to \Delta^{n+2}$。 □

走向代数 K-理论。 作为一个小例子，说明这些要素如何结合起来，以构造高阶范畴论中有用且重要的构造，我们将注意力转向幺半范畴。我们将 $[n]$ 记作 Δ 中实现线性序 $\{0 \le \cdots \le n\}$ 的元素。利用 推论 5.5，我们定义 ρ^i_n：同态集$([1],\ [n])$ 它将 $0 \le 1$ 映到 $\{i \le i+1\} \subseteq [n]$。

定义 7.3。 幺半范畴 $C^{\otimes}$: $\mathsf{Cat}^{\langle \mathrm{op}|\Delta\rangle}$ 是一个函子，其中 $(\rho^1_n,\dots,\rho^n_n)$：$C^{\otimes}([n]) \to C^{\otimes}([1]) \times \cdots \times C^{\otimes}([1])$ 对所有 n 都是一个等价。

将上文中的 Cat 替换为 S，即得到 E_1-幺半群的定义：一个同伦相容幺半群 [10,§7]。

定义 7.4。 幺半范畴的范畴 MCat 是 $\mathsf{op} \mid \Delta \to \mathsf{Cat}$ 的满子范畴，其对象由幺半范畴构成。

我们可以轻松地将此定义推广到：(1) 作为 $\mathsf{S}^{\langle \mathrm{op}|\Delta\rangle}$ 的子范畴的 E_1-幺半群范畴 Mon；以及 (2) 作为 $\mathsf{Cat}_1^{\langle \mathrm{op}|\Delta\rangle}$ 的子范畴的幺半1-范畴范畴 MCat_1。

由于 $(-)^{\simeq}$: $\mathsf{Cat} \to \mathsf{S}$ 以及包含映射 $\mathsf{Cat}_1 \to \mathsf{Cat}$ 都是右伴随，它们保有限积，因此与这些映射作后合成分别诱导出函子 $\mathsf{MCat} \to \mathsf{Mon}$ 和 $\mathsf{MCat}_1 \to \mathsf{MCat}$。接下来注意到——将 Mon 视为 $\mathsf{S}^{\langle \mathrm{op}|\Delta\rangle}$ 的子范畴——我们可以取 $M : \mathsf{Mon}$ 的余极限，从而得到空间 $\varinjlim M$。事实上，该空间带有规范的基点：Mon 中的初始对象是函子 const**1**，且 $\varinjlim \mathsf{const}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$。最后，将环空间函子视为映射 $\Omega : \mathsf{S}_* \to \mathsf{S}_*$，我们定义 k 为以下函子链：

$$k : \mathsf{MCat}_1 \to \mathsf{MCat} \to \mathsf{Mon} \to \mathcal{S}_* \to \mathcal{S}_*$$

现在我们可以定义最简单形式的代数 K-理论：

定义 7.5（Quillen）： 幺半 1-范畴 $C^{\otimes}$ 的 i阶 K-群 是 i阶同伦群K_i（$C^{\otimes}$）$= \pi_i$（k（$C^{\otimes}$））。

值得注意的是，有了 Cat，这些定义都相当概念化，并且自动具有函子性。我们强调，这只是实现 K-理论的第一步。我们将例如证明环上的模构成一个幺半范畴留待未来工作。

7.2 结构同态原理

为了给出另一类涉及 Cat 的例子，我们转而讨论结构同态原理。这是 HoTT 的结构恒等原理的有向增强。该原理指出：

通过采用某个范畴中对象的普通类型论定义，但用 Cat 或 S 代替 U，我们便能得到符合预期、具有相应同态的合成范畴。

举一个最简单的例子来说明这种现象：

引理 7.6。类型 $\Sigma_{A:\mathit{Cat}}\, A$ 是宽松切片 $1 /\!/ \mathit{Cat}$，即其对象是带基点范畴 (C, c)；当 (C, c)、$(D, d) :\flat\, \Sigma_{A:\mathit{Cat}}\, A$ 时，态射同态集 $\mathit{hom}((C, c), (D, d))$ 由函数 $f\colon C \to D$ 以及一个态射 $\mathit{hom}(f(c)\ d)$ 组成。

证明。 由于 $\Sigma_{A:\mathrm{Cat}} A$ 是余笛卡尔族 $\mathrm{Cat} \to \mathcal{U}$ 的全空间，因此它是一个范畴。对象的刻画可直接由 命题 2.8 得出。对于态射，我们使用推论 5.5，将余笛卡尔族全空间中的一个态射分解为一个余笛卡尔映射和一个垂直映射。 □

更一般地，可以证明，对于任意 $C :\flat \mathrm{Cat}$，$\Sigma_{A:\mathrm{Cat}} A^C$ 是宽松切片范畴 $C /\!/ \mathrm{Cat}$。作为一个更复杂的例子，考虑以下使用 $i : \mathrm{S} \to \mathrm{Cat}$ 的右伴随构造的类型。

$$\mathrm{Cat}_{\mathrm{smarked}} \equiv \Sigma_{C:\mathrm{Cat}} ((\mathbb{I} \to C)^{\simeq} \to \mathrm{Bool})$$

将有向单价性应用于 S，可知此类型等价于 $\Sigma_{C:\mathrm{Cat}} \hom((\mathbb{I} \to C)^{\simeq}$,布尔)，显然这是一个范畴。$\mathrm{Cat}_{\mathrm{smarked}}$ 的对象是一对：(1) 一个范畴 $C :\flat \mathrm{Cat}$，以及 (2) 群胚 $\flat\ |\ \mathbb{I} \to C$ 上的一个（可判定）谓词 ϕ_C（回想一下，$(-)^{\simeq}$ 扩展了 $\flat\ |\ -$）。于是，$\mathrm{Cat}_{\mathrm{smarked}}$ 中的态射是底层范畴 $f\colon C \to D$ 之间满足 $\phi_C = \phi_D \circ f$ 的函子。这几乎就是带标记的范畴范畴（即带有指定态射类的范畴及保持这些态射的函子所构成的范畴），但态射不太对：我们本应只要求 ϕ_C 蕴含 $\phi_D \circ f$。

为了纠正这一点，我们应当用非离散范畴 $\mathbb{I}$ 替换布尔。正如 $\Sigma_{A:\mathrm{Cat}} A$ 的情形，这在态射中引入了所需的松弛性。然而不幸的是，在这种情况下我们不再能依赖 S 的有向单价性；我们必须使用 推论 5.5，它仅适用于$\flat$-带注释元素。这使得证明 $\Sigma_{C:\mathrm{Cat}}((\mathbb{I} \to C)^{\simeq} \to \mathbb{I})$ 是一个范畴要困难得多。要系统地处理 SHP 的这些“混合变元”应用，需要对可指数化函子 [2] 作进一步探索：我们必须证明（余）笛卡尔函子是可指数化的。我们将此留待未来的工作，转而相对于以下猜想来进行：

猜想 7.7. 若 $C :\flat \mathrm{Cat}$，则 $- \to C : \mathcal{S} \to \mathrm{Cat}$ 是笛卡儿的，其中 $f :\flat$ 同态集 $\mathcal{S}(A, B)$ 到 (B, ϕ) 的笛卡尔提升为 $(A, \phi \circ f)$。

这个猜想中困难之处在于证明 $- \to C$ 是一个同构内族，而笛卡尔提升可直接由 命题 3.5的对偶得到。为了解这如何使 SHP 得以进一步应用，请注意，选择 $C = \mathbb{I}$ 可得：

引理 7.8。 范畴 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{marked}} = \Sigma_{C:\mathrm{Cat}}((\mathbb{I} \to C)^{\simeq} \to \mathbb{I})$ 是标记范畴的范畴。

证明。我们仅讨论综合态射的刻画。首先注意，投影 $\pi_0 : (\Sigma_{C:}\mathrm{Cat}((\mathbb{I} \to C)^{\simeq} \to \mathbb{I})) \to \mathrm{Cat}$ 是猜想 7.7 中所述族的拉回，因此是笛卡儿的。于是，我们可以将任意态射 $f :\flat \hom_{\mathrm{Cat}_{\mathrm{marked}}}((C, \phi_C), (D, \phi_D))$ 唯一分解为映射 $f_0\colon C \to D$ 的一个笛卡尔提升，以及一个态射 $f_1 : \hom_{\mathbb{I}}(\phi_C, \phi_D \circ ((f_0)_*)^{\simeq})$。这恰好就是标记范畴之间的态射所包含的数据。 □

8 结论与相关工作

在这项工作中，我们构造了宇宙 $\mathrm{Cat} \hookrightarrow \mathrm{U}$ 的一个子类型，并证明它在 STT 中产生了范畴的范畴。具体而言，我们证明了它是单纯的、Segal 的和 Rezk 的，并将其对象和映射空间刻画为范畴和函子。为了给出

对 Cat 更精确的刻画，我们接着证明了 Lurie 的直化–反直化定理。最后，我们展示了如何迅速证明 ∞-范畴论中的结果（例如 S 和 Cat 之间的各种伴随），并利用类型论的独特性质（以 SHP 的形式）快速而直观地构造新的 ∞-范畴。

8.1 相关工作

关于类型论的有向方法以及一般意义上的直化—反直化，已有大量研究。我们的工作属于有向类型论这一更广泛的传统，具体而言，是 Riehl 和 Shulman 发起的单纯形类型论研究脉络 [33] 关于单纯形类型论 [2, 3, 5, 11, 32,37、43–45]。

在这一具体背景下，Cat 填补了 STT 基础中的一个重大空缺，并为高阶代数和幺半范畴论等领域带来了新的应用。对于一般的有向类型论，我们认为，这一构造应能让人们更直接地为“完全有向”的类型论提供语义 [1, 14, 17, 24–29, 40]。特别是，现在可以通过到 TT◹ 的句法翻译，构造出一个能够充分刻画 ∞- 范畴的这类类型论模型。尤其是，Cat 的存在意味着，TT◹ 所支持的特性应足以编码目前所考虑的所有这类类型论。

惊人右伴随的其他方法。 利用 $\mathbb{I} \to -$ 的右伴随来构造具有适当结构的万有族，这可以追溯到 Licata等人 [18], , 他们在立方类型论的背景下运用了这一方法。举例来说，Riley [35]提出了这一技术的一个更精细版本，对惊人右伴随给出了更具判断性的说明；而我们的方法则紧密遵循 Licata等人 [18] 的工作，尤其是 Weaver和 Licata [42]对其所作的有向类型论改编。特别是，前述工作运用这一方法，在双立方型理论中构造了一个群胚的有向单价宇宙。Gratzer 等人 [10]随后引入了 TT◹ ，以便将这一方法改编为适用于标准的 ∞-范畴，并进一步证明群胚宇宙是一个范畴。我们的工作进一步推进了这一计划：我们不仅通过万有协变族构造了群胚的范畴，还通过万有余笛卡尔族构造了范畴的范畴。这是一项重大进展——余笛卡尔族所具备的良好性质少于协变族，因此证明中的若干方面也变得更复杂，例如证明 Cat 是单纯的这一论证。

直化–反直化的现有证明。 自 Lurie 的原始证明以来 [19],, 文献中又发表了两种证明。第一种由 Hebestreit 等人给出 [12], 它比 Lurie 的证明更加有针对性且简洁，但仍采用相同的基本方法。具体而言，其主要结果是两个模型范畴之间的 Quillen 等价，而不是一种内在的 ∞-范畴论方法或综合性方法。

Cisinski 和 Nguyen 的工作与本文关系更为密切， [7] 该工作像我们一样构造了一个泛余笛卡尔族，并以此证明直化–反直化、有向单价性等。我们的方法在证明策略上与上述文献颇为相似：先直接证明泛纤维化，再通过更冗长的论证证明其基底是一个范畴。事实上，上述文献受到类型论语义学中各种标准技巧的影响。然而，我们的方法与他们的一个关键区别在于管理 ∞-范畴时所采用的整体框架。与我们的方法不同，Cisinski 和 Nguyen [7] 采用拟范畴，并结合 Joyal 模型结构和标记模型结构中的各种模型范畴工具。这与我们更具综合性的方法形成对比：我们仅通过定理 2.10间接地使用模型范畴。

尤其是鉴于最后的证明，我们认为，我们的方法是一个有趣的例子，展示了高阶范畴论如何影响类型论的发展（通过同伦类型论），而类型论反过来也能为高阶范畴论贡献新的技巧和证明。我们还希望

我们的证明不依赖于特定模型，这一特点将使其成果能够应用于诸如内在 ∞-范畴，存在于一个 ∞-拓扑斯 [21, 22]。

8.2 未来工作

尽管本文构造了范畴的范畴，但围绕以下两点仍有大量工作有待完成：（1）在综合 ∞-范畴论中使用 Cat；（2）在 Weaver 和 Licata [42]的工作基础上，为这一类型论推导出计算性描述。关于第一点，我们认为，高阶代数和歌剧集理论在这方面尤其值得研究，因为该理论现有的基础 [20] 以技术性著称，并且依赖复杂的逐单纯形论证。关于第二点，我们认为，我们论证中的工具可以适用于双立方型理论；这至少能够为我们的论证提供一个构造性模型。

参考文献

[1] Benedikt Ahrens、Paige Randall North 和 Niels van der Weide。2023。双范畴型理论：语义与语法。《计算机科学中的数学结构》 33, 10 10 2023 868 912 10 1017 0960129523000312 ( ), –。doi: . /s César Bardomiano Martínez。[2] 2025。合成-范畴之间的可指数化函子。《计算机科学中的∞数学结构》 35 2025 10 1017 0960129525100339 ( )。doi: . /S César Bardomiano Martínez。[3] 2025。合成 ∞-范畴中的极限与余极限。《计算机科学中的数学结构》35（2025）。doi:10.1017/S0960129525100248[4] Ingo Blechschmidt。2023。广义空间的一个一般零点定理。https://rawgit.com/iblech/internal- methods/master/paper-qcoh.pdf 草稿。[5] Ulrik Buchholtz 和 Jonathan Weinberger。2023。合成纤维化（∞，1）-范畴论。《高阶结构》7（2023），74–165。第1期。doi:10.21136/HS.2023.04[6] Denis-Charles Cisinski、Bastiaan Cnossen、Kim Nguyen 和 Tashi Walde。2025。合成范畴论。https: //drive.google.com/file/d/1lKaq7watGGl3xvjqw9qHjm6SDPFJ2-0o/view 正在编写的书。

[7] 2022 2210 08945 [ ]

[8] 2023 Denis-Charles Cisinski 和 Hoang Kim Nguyen。。万有余笛卡尔纤维化。arXiv: . math.CT Daniel Gratzer。。模态型理论的语法与语义。博士论文。奥胡斯大学。[9] Daniel Gratzer、G.A. Kavvos、Andreas Nuyts 和 Lars Birkedal。2020。多模态依赖类型理论。载于第35届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集（LICS '20）。ACM。doi:10.1145/3373718.3394736[10] Daniel Gratzer、Jonathan Weinberger 和 Ulrik Buchholtz。2024。单纯形同伦类型论中的有向单价性。https://arxiv.org/abs/ 2407 09146 。Daniel Gratzer、Jonathan Weinberger 和 Ulrik Buchholtz。2025。单纯形类型论中的米田嵌入。载于第40届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，LICS 2025，新加坡，2025年6月23日至26日。IEEE，127–142。doi:10.1109/LICS65433.2025.00017[12] Fabian Hebestreit、Gijs Heuts 和 J aco Ruit。2025。直化定理的一个简短证明。《美国数学会汇刊》B辑 12, 19 05 2025 697 747 10 1090 225 ( ), –。doi: . /btran/ André Joyal。[13] 2008 拟范畴论。在线。https://math.uchicago.edu/~may/PEOPLE/JOYAL/ 0newqcategories.pdf[14] G.A. Kavvos。2019。一量子方向。在线。https://seis.bristol.ac.uk/~tz20861/papers/meio.pdf

[15] 2014 1412 6660 Anders Kock。。泛代数的对偶性。https://arxiv.org/abs/ 。[16] 2007 F. William Lawvere。。公理化凝聚。《范畴论及其应用》19，3（2007），41–49。http: // www.tac.mta.ca/tac/volumes/19/3/19-03.pdf[17] Daniel R. Licata 和 Robert Harper。2011。二维有向类型理论。《理论计算机科学电子札记》 276 09 2011 263 289 10 1016 2011 09 026 ( ), –。doi: . /j.entcs. .。

[18] 2018 Daniel R. Licata、Ian Orton、Andrew M. Pitts 和 Bas Spitters。。同伦类型论模型中的内在宇宙。载于第3届计算与演绎形式结构国际会议（FSCD 2018）（《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第108卷），Hélène Kirchner（编）。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，德国达格施图尔，

22 1 22 17 10 4230 2018 22 : – : 。doi: . /LIPIcs.FSCD. 。Jacob Lurie。[19] 2009 高阶层托普斯理论。普林斯顿大学出版社。[20] Jacob Lurie。2017。高阶代数。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf 书稿。[21] Louis Martini。2022。内在于 ∞-拓扑斯中的余笛卡尔纤维化与直化。arXiv:2204.00295 [math.CT]

[22] Louis Martini 和 Sebastian Wolf。2025。内在高阶范畴论中的可呈示性与拓扑斯。arXiv:2209.05103 [math.CT]
[23] 2023 2301 13780 [ ] David Jaz Myers 和 Mitchell
[24] Riley。2025。交换凝聚。arXiv: . math.CT Jacob Neumann。。有向等式的广义代数理论。博士论文。诺丁汉大学。[25] Jacob Neumann。2025。有向类型论的判断式构造。arXiv:2510.17494 [cs.LO] https: //arxiv.org/abs/ 2510 17494。
[26] Jacob Neumann 和 Thorsten Altenkirch。2024。有向类型论的范畴解释。在线。
https://jacobneu.github.io/research/preprints/catModel-2024.pdf [27] Paige Randall North。2018。迈向有向同伦类型论。arXiv:1807.10566 [cs.LO] https://arxiv.org/abs/ 1807.10566[28] Andreas Nuyts。2015。迈向一种基于四种变异性的有向同伦类型论。硕士论文。鲁汶大学。[29] Andreas Nuyts。2020。自然类型论的愿景。
https://anuyts.github.io/files/nattt-vision.pdf [30] Ian Orton 和 Andrew M. Pitts。2018。在拓扑斯中建模立方类型论的公理。《计算机科学中的逻辑方法》 14, 4 2018 1712 04864 10 23638 14 4 23 2018 ( )。arXiv: 。
doi: . /LMCS- (:) Charles Rezk。[31] 。同伦论之同伦论的2001一个模型。《美国数学会汇刊》353，3（2001），973–1007。
doi:10.1090/S0002-9947-00-02653-2
[32] 2025 2510 15795 [ ] Emily Riehl。。空间与范畴的
[33] 综合视角。arXiv: . math.CT Emily Riehl 和 Michael Shulman。2017。一种合成-∞范畴的类型论。《高阶结构》1（2017），
147–224。第1期。doi:10.21136/HS.2017.06[34] Egbert Rijke、Michael Shulman 和 Bas Spitters。2020。同伦类型论中的模态。《计算机科学中的逻辑方法》 16, 1 2020 10 23638 16 1 2 2020 ( )。doi: . /LMCS- (:)
Mitchell Riley。。带有微小对象的类型论。arXiv: [35] 2024
2403 01939 [ ] . math.CT Michael Shulman。。实凝聚
[36] 同伦类型论中的布劳威尔2018不动点定理。《计算机科学中的数学结构》
28, 6 2018 856 941 10 1017 0960129517000147 ( )，–。doi: . /S Michael Shulman。。所
[37] 有（，）-拓扑斯都有严格2019单值∞ 1宇宙。arXiv:
1904 07004 [ ] . math.AT Jan M.
[38] Smith。。命题函数与类型族。《圣母大学形式逻辑杂志》30，3（1989年6月）。doi: 1989 10 1305 1093635159 . /
ndjfl/ 单值基础项目。2013。《同伦类型论：数学的单值基础》。高等研究院。https://homotopytypetheory.org/book[39] [40] Michael Warren。2013。有向类型论。在线。https://www.ias.edu/video/univalent/1213/0410-MichaelWarren 研讨会报告。[41] Matthew Zachary Weaver。2024。双立方有向类型论。博士论文。普林斯顿大学。http: //
arks.princeton.edu/ark:/ 88435 017 75 778 /dsp s dg Matthew Z. Weaver 和 Daniel R.
[42] Licata。。双立方集合中有2020向单值性的构造性模型。载于第35届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集（LICS ’20）。ACM。
doi:10.1145/ 3373718.3394794[43] Jonathan Weinberger。2022。（∞，1）-范畴论的综合视角：纤维化与语义方面。博士论文。达姆施塔特工业大学。doi: 10 26083 00020716 . /tuprints-
[44] Jonathan Weinberger。。合成纤维化（，）-2024范畴的内在和∞ 1。《纯粹与应用代数杂志》
228, 9 09 2024 107659 10 1016 2024 107659 ( )，。doi: . /j.jpaa. . Jonathan Weinberger。。合成（∞，1）-范畴
[45] 的双侧笛卡尔纤维化。《2024同伦及相关结构杂志》19，2（2024年6月）。doi:10.1007/s40062-024-00348-3

MTT 的形式语法

本节简要介绍 MTT 的形式语法。由于类型论的大多数联结词（∑、∏ 等）不受模态影响，我们只关注必须改变的规则。这些规则包括：（1）代换演算的某些方面；（2）模态类型的规则，即模态 ∏ 类型。我们假设模态理论 M 只有一个对象，且如本文所述，其结构是以偏序集为富化的。

首先，我们用以下新形式扩展上下文：

$$\frac{\vdash \Gamma\ \mathsf{cx} \qquad \mu : m \to m \in \mathcal{M}}{\vdash \Gamma.\{\mu\}\ \mathsf{cx}} \qquad\qquad \frac{\vdash \Gamma\ \mathsf{cx} \qquad \Gamma.\{\mu\} \vdash A\ \mathsf{type}}{\vdash \Gamma.(\mu \mid A)\ \mathsf{cx}}$$

我们先前使用的形式除法记法，实际上是这些运算的语法糖。具体而言，$x{:}_{\mu/\nu}\, A$，$y{:}_{\mathrm{id}/\nu}\, B$，$z{:}\ C$变为 $\mathbf{1}.(\mu \mid A).(\mathrm{id} \mid B).\{\nu\}.C$。值得注意的是，尽管论文中 $-/\mu$ 只是记号，但在 MTT 中它实际上是基本运算。按照系统规则用任一种记法构造的上下文都可以相互转换。

然后，我们为代换演算添加了几项新内容来处理这一问题。其中包括一种新的变量规则形式（使用 de Bruijn 指标构造），以处理 $\Gamma.\{\mu\}$。

$$\frac{\Delta \vdash \gamma : \Gamma}{\Delta.\{\mu\} \vdash \gamma.\{\mu\} : \Gamma.\{\mu\}} \qquad \frac{\vdash \Gamma\ \mathsf{cx} \qquad \mu \le \nu}{\Gamma.\{\nu\} \vdash \Gamma.\{\mu \le \nu\} : \Gamma.\{\mu\}} \qquad \frac{\Gamma.\{\mu\} \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma.(\mu \mid A) \vdash \uparrow : \Gamma}$$

$$\frac{\Gamma.\{\mu\} \vdash A\ \mathsf{type} \qquad \Delta \vdash \gamma : \Gamma \qquad \Delta \vdash M : A[\gamma.\{\mu\}]}{\Delta \vdash \gamma.M : \Gamma.(\mu \mid A)} \qquad \frac{\Gamma.\{\mu\} \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma.(\mu \mid A).\{\mu\} \vdash \mathbf{var} : A[\uparrow.\{\mu\}]}$$

我们有关于代换扩展和弱化的常规代换规则。这些规则基本上是标准的，因此我们略去不述。我们还需要若干方程，以确保 $\Gamma \mapsto \Gamma.\{\mu\}$、$\gamma \mapsto \gamma.\{\mu\}$ 和 $-.\{- \le -\}$ 构成一个从 $\mathcal{M}^{\mathrm{coop}}$ 到 **Cat** 的 2-函子，它将m 映射到上下文范畴。完整说明请参阅 Gratzer 等人 [9] 。

附加的类型和项定义如下：

$$\frac{\Gamma.\{\mu\} \vdash A\ \mathsf{type}}{\Gamma \vdash \langle \mu \mid A \rangle\ \mathsf{type}} \qquad \frac{\Gamma.\{\mu\} \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathsf{mod}_{\mu}(M) : \langle \mu \mid A \rangle}$$

$$\frac{\Gamma.(\nu \mid \mu \mid A)\ \vdash B\text{类型} \qquad \Gamma.(\nu \circ\ \mu \mid A)\ \vdash b{:}\ B[\uparrow.\text{模}_{\mu}(\textbf{变量})] \qquad \Gamma.\{\nu\}\ \vdash a{:}\ \mu \mid A}{\Gamma \vdash \mathsf{let}_{\nu}\ \mathsf{mod}_{\mu}(-) \leftarrow a\ \mathsf{in}\ b : B[\mathrm{id}.a]}$$

$$\frac{\Gamma.\{\nu \circ\ \mu\}\ \vdash A\text{类型} \qquad \Gamma.(\nu \mid \mu \mid A)\ \vdash B\text{类型} \qquad \Gamma.(\nu \circ\ \mu \mid A)\ \vdash b{:}\ B[\uparrow.\text{模}_{\mu}(\textbf{变量})] \qquad \Gamma.\{\nu \circ\ \mu\}\ \vdash a{:}\ A}{\Gamma \vdash \text{令}_{\nu}\text{模}_{\mu}(-)\ \leftarrow \text{模}_{\mu}(a)\ \text{中}\ b = b[\text{恒等}.a]{:}\ B[\text{恒等。模}_{\mu}(a)]}$$

$$\frac{\Gamma.\{\mu\}\ \vdash A\text{类型} \qquad \Gamma.(\mu \mid A)\ \vdash B\text{类型}}{\Gamma \vdash (\mu \mid A)\ \to B\text{类型}} \qquad \frac{\Gamma.\{\mu\}\ \vdash A\text{类型} \qquad \Gamma.(\mu \mid A)\ \vdash b{:}\ B}{\Gamma \vdash \lambda M{:}\ (\mu \mid A)\ \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (\mu \mid A) \to B \qquad \Gamma.\{\mu\} \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[\mathsf{id}.a]} \qquad \frac{\Gamma.\{\mu\} \vdash A\,\mathsf{type} \qquad \Gamma.(\mu \mid A) \vdash b : B \qquad \Gamma.\{\mu\} \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda b)(a) = b[\mathsf{id}.a] : B[\mathsf{id}.a]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : (\mu \mid A) \to B}{\Gamma \vdash f = \lambda f[\uparrow](\mathbf{var}) : (\mu \mid A) \to B}$$

B 公理完整列表

公理 1. 将 refl 映射到 id 的典范映射 $A =_{\mathcal{U}_i} B \to A \simeq B$ 是一个等价。

公理 2。 存在一个集合 $\mathbb{I}$，它带有有界分配格 $(0, 1, \wedge, \vee)$的结构，使得 $0 \neq 1$。

公理 3。 若 $A :^{\mu} \mathcal{U}$ 且 $a, b :_{\mu} A$，则存在如下典范映射，将 refl 映射为 $\mathsf{mod}_{\mu}(\mathsf{refl})$，它是一个等价：

$$\mathsf{mod}_{\mu}(a) = \mathsf{mod}_{\mu}(b) \to \langle \mu \mid a = b \rangle$$

公理 4。 $0,1 : \mathbb{I}$ 诱导一个等价 $\langle \flat \mid \text{布尔} \rangle \simeq \langle \flat \mid \mathbb{I} \rangle$

公理 5。 若 $A :_{\flat} \mathsf{U}$，则 $\mathsf{isEquiv}(\flat \mid A \to A)$ 当且仅当 $\mathsf{isEquiv}(A \to A^{\mathbb{I}})$

公理 6. 若 A、$B :_{\flat} \mathcal{U}$ 且 $f :_{\flat} A \to B$，则 f 为等价，如果

$$\textstyle\prod_{n:\mathsf{Nat}} \mathsf{isEquiv}((f_*)^{\dagger} : \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to A \rangle \to \langle \flat \mid \mathbb{I}^n \to B \rangle)$$

公理 7. 对每个 $A :_{\flat} \mathcal{U}$，下列成立：

$$\textstyle\prod_{n:\mathsf{Nat}} \mathsf{isEquiv}((\eta_*)^{\dagger} : \langle \flat \mid \Delta^n \to A \rangle \to \langle \flat \mid \Delta^n \to \circledcirc A \rangle)$$

公理 8. 对每个 $A :_{\flat} \mathcal{U}$，下列成立：

$$\textstyle\sum_{A_{\mathbb{I}} :_{\flat} \mathcal{U}, \epsilon :_{\flat} (A_{\mathbb{I}})^{\mathbb{I}} \to A} \prod_{B :_{\flat} \mathcal{U}} \mathsf{isEquiv}(\langle \flat \mid B \to A_{\mathbb{I}} \rangle \to \langle \flat \mid B^{\mathbb{I}} \to A \rangle)$$

公理 9. 存在一个等价 $\langle \mathsf{op} \mid \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{I}$，它将 0 与 1 互换，并将 $\wedge$ 与 $\vee$互换。

定义一个 有限表现的 $\mathbb{I}$-代数 为一个有界分配格的映射 $\mathbb{I} \to X$ 其中X等价于形如 $\mathbb{I}[x_1 \dots x_n]/(f_1 = g_1 \dots f_m = g_m)$ 的有界分配格，且$\mathbb{I} \to X$ 为典范映射。也就是说， X 在 $\mathbb{I}$ 上由有界分配格的运算、未定元 $x_1 \dots x_n$自由生成，并满足方程 $f_i = g_i$。有了这一记号，我们陈述一条对偶性公理，它最初源于 Kock [15]，并由 Blechschmidt [4]以这种形式提出。

公理 10. 若 $\mathbb{I} \to X$ 是一个有限表示的 $\mathbb{I}$-代数，则下述求值映射是底层集合之间的等价：

$$\lambda x, f.\, f(x) : X \simeq \mathbb{I}^{\mathsf{hom}_{\mathbb{I}/}(X, \mathbb{I})}$$