arXiv:2602.02242v1 [math.NT] 2 Feb 2026

广义欧拉恒等式的新极有限形式：适用于 $A_1^{(1)}$ -弦函数及类似模拟theta猜想的恒等式

STEPAN KONENKOV 和 ERIC T. MORTENSON

ABSTRACT. 在 Kac、Peterson 和 Wakimoto 之后，确定 Kac–Moody 代数的弦函数及分支系数的显式形式与模性，是一个重要问题。对于仿射 Kac–Moody 代数 $A_1^{(1)}$ 的正可容许层弦函数，目前所知甚少。本文将准周期性的概念应用于 Schilling 和 Warnaar 针对仿射 Kac–Moody 代数 $A_1^{(1)}$ 提出的广义欧拉恒等式。对于整数层弦函数，经典周期性将广义欧拉恒等式中的弦函数无限和化为带有 theta 函数系数的弦函数有限和。对于可容许级情形，我们同样将其化为类似的弦函数有限和，但还会得到一个额外的有限和，其形式为

$$\sum_i \Phi_i(q)\Psi_i(q),$$

其中， $\Phi_i(q)$ 是模的，且仅取决于自旋； $\Psi_i(q)$ 是（混合）模拟模 Hecke 型双重和，且仅取决于量子数。对于层级 $1/2$、 $1/3$ 和 $2/3$，我们还将看到， $\Psi_i(q)$ 为对称 Hecke 型双重和给出了一系列类似假 theta 猜想的恒等式。本文重点在于求出 $\Psi_i(q)$，所得表达式用到了拉马努金的二阶假 mock theta 函数 $\mu_2(q)$，以及三阶模拟 theta 函数 $f_3(q)$、 $\omega_3(q)$、 $\psi_3(q)$ 和 $\chi_3(q)$。

CONTENTS

1. 引言 2 1.1. 关于 $A_1^{(1)}$ 3的弦函数 1.2. 关于拉马努金拟 theta 函数 5 1.3. 关于可容许级弦函数和假 theta 函数 6 1.4. 关于广义欧拉恒等式 8 2. 结果：关于偶自旋的广义欧拉恒等式 8 2.1. 关于可容许级 $1/2$ 的弦函数及函数 $\mu_2(q)$ 9 2.2. 关于可容许级 $1/3$ 的弦函数及函数 $f_3(q)$ 和 $\omega_3(q)$ 10 2.3. 关于可容许级 $2/3$ 的弦函数及函数 $f_3(q)$ 和 $\omega_3(q)$ 11 3. 结果：关于奇自旋的广义欧拉恒等式 14 3.1. 关于可容许级 $1/2$ 的弦函数及函数 $\mu_2(q)$ 15 3.2. 关于可容许级 $1/3$ 的弦函数及函数 $f_3(q)$ 和 $\omega_3(q)$ 16 3.3. 关于可容许级 $2/3$ 的弦函数及函数 $\psi_3(q)$ 和 $\chi_3(q)$ 16 4. 总结与论文概述 17 5. 技术预备知识 18 6. Frye和Garvan提出的 theta 函数恒等式族 22 7. 奇自旋的准周期关系 26

Date：2026年2月2日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11F37、11F27、33D90、11B65；次要分类号：17B67、81R10、81T40。*Key words and phrases.* 弦函数、副费米子特征、可容许特征、雅可比形式的极有限分解、阿佩尔函数、假 theta 函数。

8. 修正弦函数的广义欧拉恒等式：定理 31 8.1. 可容许级偶自旋的拟周期性方法 32 8.2. 可容许级奇自旋的拟周期性方法 35 9. 修正弦函数的广义欧拉恒等式：推论 39 9.1. 可容许层级为 $1/2$、$1/3$和 $2/3$ 39的偶自旋弦函数 9.2. 可容许层级为 $1/2$、 $1/3$和 $2/3$ 42的奇自旋弦函数 10. 偶自旋双重求和系数的假 theta 函数恒等式 45 10.1. $1/2$层级弦函数：定理 2.4 45 10.2. $1/3$层级弦函数：定理 2.7 50 10.3. $1/3$层级弦函数：定理 2.8 55 10.4. $2/3$层级弦函数：定理 2.11 56 10.5. $2/3$层级弦函数：定理 2.12 66 10.6. $2/3$层级弦函数：定理 2.13 68 10.7. $2/3$层级弦函数：定理 2.14 70 11. 奇自旋双重求和系数的假 theta 函数恒等式 71 11.1. $1/2$层级弦函数：定理 3.5 72 11.2. $1/3$层级弦函数：定理 3.7 73 11.3. $2/3$层级弦函数：定理 3.10 74 致谢 76 参考文献 76

1. Introduction

继 Kac、Peterson 和 Wakimoto 之后，确定 Kac–Moody 代数的弦函数和分支系数的显式形式及其模性，仍是一项重要问题 [23, 24, 25, 26]。Kac 和 Peterson [23] 推导出了可积最高权表示的弦函数在整个模群上的模性质，并以 theta 函数的形式计算了某些情形。随后，Kac 和 Wakimoto 将这些结果加以推广，并运用模不变性与共形不变性的方法计算了某些分支函数 [24]。

Kac、Peterson 和 Wakimoto 的研究成果被物理学家和数学家从多个方向加以拓展。一方面，Ahn、Chung 和 Tye [2] 引入了广义 Fateev– Zamolodchikov 副费米子理论，并将其应用于统计物理和弦理论。另一方面，Auger、Creutzig 和 Ridout 近来进一步研究了与负可容许层级 [8] 相对应的对数副费米子顶点代数。

在最近的一项工作中，Borozenets 和 Mortenson [9, 10] 以及 Konenkov 和 Mortenson [27]确定了仿射 Kac–Moody 代数 $A_1^{(1)}$ 的某些可容许级弦函数的显式形式。对于正分数层级弦函数，Borozenets 和 Mortenson 获得了类似假 theta 猜想的恒等式；对于负分数层级弦函数，他们获得了混合假 theta 函数表达式，另见 [1, 8, 11, 12, 13]。所采用的技术包括 Hecke 型二重求和表达式 [22, 31], 、模拟模性 [38], 、准周期性 [9], 以及继 Zwegers [38] 和 Dabholkar、Murthy、Zagier [16] 之后的极点-有限分解。因此，人们自然希望探究准周期性和极点-有限分解在其他背景下的应用。

Dabholkar、Murthy 和 Zagier [16]在 Zwegers [38] 的工作基础上，提出了将亚纯 Jacobi 形式规范分解为“有限部分”和“极点部分”的方法。有限部分是以模拟模形式为系数的 theta 函数的有限线性组合，而极点部分则完全由亚纯 Jacobi 形式的极点决定。最近，Borozenets 和 Mortenson [10] 引入了拟周期关系，将 Zagier–Zwegers 的分析拓展到

可容许特征标的情形；可容许特征标是向量值亚纯雅可比形式 [24]。利用可容许特征标的极点-有限分解，他们发现了某些正可容许级别的弦函数所满足的类似模拟theta猜想的恒等式，从而拓展了他们在 [9]中的结果。

本文将运用 Kac 和 Wakimoto 关于分支函数 [26] 的研究成果，对 Schilling 和 Warnaar [33] 提出的广义欧拉恒等式应用准周期性。由此，我们将得到关于 $A_1^{(1)}$ -弦函数的广义欧拉恒等式的新极点-有限形式，并推导出新的类似假 theta 猜想的恒等式。

对于整数层弦函数，周期性将广义欧拉恒等式中弦函数的无穷和化为有限和，这是经典结果。对于可容许级，我们同样将其化为弦函数的有限和，但还会得到一个如下形式的额外有限和

$$\sum_i \Phi_i(q)\Psi_i(q),$$

其中， $\Phi_i(q)$ 是模的，且仅依赖于自旋； $\Psi_i(q)$ 则是（混合）假模的，且仅依赖于量子数。对于层级 $1/2$、 $1/3$ 和 $2/3$，我们还将看到， $\Psi_i(q)$ 为对称 Hecke 型双重和提供了一系列类似假 theta 猜想的恒等式，这与 Borozenets 和 Mortenson 的首篇论文中的一个结果 [9, 定理 2.1] 类似。我们的结果涉及拉马努金的二阶和三阶模拟 theta 函数，这些函数见于他致 G. H. Hardy 的最后一封信 [6, 第 14] 章，以及他的遗失的笔记本 [32]。

1.1. 关于 $A_1^{(1)}$ 的弦函数。我们将聚焦于仿射 Kac–Moody 代数$A_1^{(1)}$ 的情形。对于整数层级，弦函数和分支系数已得到深入研究。对于负可容许级，已有大量研究；但对于正可容许级，所知甚少。我们将继续像 [9, 10, 27], 那样聚焦于正可容许级，不过首先回顾相关记号和基本工具。

我们首先沿用 Schilling 和 Warnaar [33, 第 3] 节中的术语，并如下引入弦函数。令 $p' \geq 2$、$p \geq 1$ 为互素整数，并将可容许级定义为

$$N := \frac{p'}{p} - 2. \tag{1.1}$$

设 $q := e^{2\pi i\tau}$，其中 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$，且 z 为非零复数。对于层级为 N、自旋为 ℓ的可容许特征标，我们通过以下方式定义层级为 N、量子数为 m、自旋为 ℓ 且满足$m+\ell \equiv 0 \pmod 2$的弦函数:

$$\chi_\ell^N(z;q) = \sum_{m\in 2\mathbb{Z}+\ell} C_{m,\ell}^N(q) q^{\frac{m^2}{4N}} z^{-\frac{1}{2}m}. \tag{1.2}$$

为了 Weyl–Kac 公式，我们将 theta 函数定义为

$$\Theta_{n,m}(z;q) := \sum_{j\in\mathbb{Z}+n/2m} q^{mj^2} z^{-mj}; \tag{1.3}$$

不过，我们很快将采用另一种定义。利用 Weyl–Kac 公式，可以将可容许 $A_1^{(1)}$ 特征标表示为

$$\chi_\ell^N(z;q) = \frac{\sum_{\sigma=\pm1}\sigma\Theta_{\sigma(\ell+1),p'}(z;q^p)}{\sum_{\sigma=\pm1}\sigma\Theta_{\sigma,2}(z;q)}. \tag{1.4}$$

弦函数具有许多对称性 [33,(3.4), (3.5)], [2,(2.40)]

$$C_{m,\ell}^N(q) = C_{-m,\ell}^N(q),\ C_{m,\ell}^N(q) = C_{N-m,N-\ell}^N(q).$$

对于整数层级 N，我们有重要的周期性 [33, (3.5)]

$$C^N_{m,\ell}(q) = C^N_{m+2N,\ell}(q), \tag{1.5}$$

因此由 (1.2) 得到 θ 展开

$$\chi^N_\ell(z;q) = \sum_{\substack{0\le m<2N\\ m\in 2\mathbb{Z}+\ell}} C^N_{m,l}(q)\Theta_{m,N}(z,q). \tag{1.6}$$

在 [10], Borozenets 和 Mortenson 建立了准周期性 [10, 定理 2.1]，并将其应用于 (1.2)。他们得到了偶自旋特征的极有限展开。他们的结果 [10, 定理 2.3]与 (1.6) 类似，但多了一项，该项是 theta 函数与阿佩尔函数的二元乘积的有限和。阿佩尔函数是拉马努金拟 theta 函数 [6, 22, 32]的构建基石。

为了给出一些整数层弦函数的例子，我们先回顾 q-Pochhammer 记号

$$(x)_n = (x;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i x), \quad (x)_\infty = (x;q)_\infty := \prod_{i\ge 0}(1-q^i x),$$

以及 theta 函数

$$j(x;q) := (x)_\infty (q/x)_\infty (q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n, \tag{1.7}$$

其中最后一个等式是 Jacobi 三重积恒等式。我们将频繁使用以下记号，

$$J_{a,b} := j(q^a;q^b),\ \overline{J}_{a,b} := j(-q^a;q^b),\ \text{and}\ J_a := J_{a,3a} = \prod_{i\ge 1}(1-q^{ai}),$$

其中 a, b 均为正整数。值得注意的是，theta 函数的两种定义可通过以下恒等式等价地表示

$$\Theta_{n,m}(z;q) = z^{-\frac{n}{2}} q^{\frac{n^2}{4m}} j\big(-q^{n+m}z^{-m};q^{2m}\big).$$

Dedekind η 函数是 theta 函数的一个重要例子。Dedekind η 函数定义如下

$$\eta(q) := q^{1/24}\prod_{n\ge 1}(1-q^n).$$

在更一般的结果中，Kac 和 Peterson [23,第 220] 页证明了

$$C^1_{0,0}(q) = \eta(q)^{-1},$$
$$C^2_{1,1}(q) = \eta(q)^{-2}\eta(q^2),$$
$$C^3_{1,1}(q) = \eta(q)^{-2}q^{3/40}J_{6,15},$$
$$C^4_{2,0}(q) = \eta(q)^{-2}\eta(q^6)^{-1}\eta(q^{12})^2.$$

T为了更便于陈述后续结果，我们引入以下补充记号

$$\mathcal{C}^N_{m,\ell}(q) := q^{-s_\lambda} C^N_{m,\ell}(q) \in \mathbb{Z}[[q]], \tag{1.8}$$

其中

$$s_\lambda := -\frac{1}{8} + \frac{(\ell+1)^2}{4(N+2)} - \frac{m^2}{4N}.$$

对我们的研究而言，用 Hecke 型双重求和记法来表示弦函数至关重要。Andrews 著名地将 Hecke 型双重和与拉马努金拟 theta 函数联系起来

[4]。我们将采用以下 Hecke 型双重和的定义：设 x， y 为非零复数，则

$$f_{a,b,c}(x,y;q) := \left(\sum_{r,s\geq 0} - \sum_{r,s<0}\right)(-1)^{r+s}x^r y^s q^{a\binom{r}{2}+brs+c\binom{s}{2}}. \tag{1.9}$$

获得可容许级弦函数的 Hecke 型双重求和形式的一种方法，是使用 Jacobi theta 乘积倒数的经典部分分式展开

$$\frac{1}{j(z;q)} = \frac{1}{(q;q)_\infty^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}}}{1-q^n z}$$

以及 Weyl–Kac 公式 (1.4)，例如 [2, 第 2 节。4], [28, 命题 3], [33, (3.8)]: 对于 $p'\geq 2$、 $p\geq 1$ 互素整数， $0\leq \ell\leq p'-2$ 和 $m\in 2\mathbb{Z}+\ell$，则

$$\mathcal{C}_{m,\ell}^N(q) = \frac{1}{(q)_\infty^3}\left(f_{1,p',2pp'}(q^{1+\frac{m+\ell}{2}}, -q^{p(p'+\ell+1)};q) - f_{1,p',2pp'}(q^{\frac{m-\ell}{2}}, -q^{p(p'-(\ell+1))};q)\right). \tag{1.10}$$

在正整数级 $N>0$的情形下，我们有紧凑形式 [22, 例 1.3], [33]

$$\mathcal{C}_{m,\ell}^N(q) = \frac{1}{(q)_\infty^3} f_{1,1+N,1}(q^{1+\frac{1}{2}(m+\ell)}, q^{1-\frac{1}{2}(m-\ell)};q).$$

Hickerson 和 Mortenson [22] 以及 Mortenson 和 Zwegers [31] 得到了用阿佩尔函数和 theta 函数展开 Hecke 型双重和的公式。我们将使用 [22, 定理 1.4]中给出的 Hecke 型双重求和公式。仿照 Hickerson 和 Mortenson [22]，我们将阿佩尔函数定义为

$$m(x,z;q) := \frac{1}{j(z;q)}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^r q^{\binom{r}{2}} z^r}{1-q^{r-1}xz}. \tag{1.11}$$

阿佩尔函数是构造拉马努金拟 theta 函数的基本构件 [22,节 5]。

1.2. 关于拉马努金拟 theta 函数。 在拉马努金致 Hardy 的最后一封信中 [6, 第14], 章，他列出了十七个所谓的假 theta 函数。每个函数都定义为一个 q-级数，在 $|q|<1$时收敛。举例来说，拉马努金的二阶假 mock theta 函数 $\mu_2(q)$可以用阿佩尔函数写成 [32,第 8], [22,节 5]:

$$\mu_2(q) := \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n q^{n^2}(q;q^2)_n}{(-q^2;q^2)_n^2} = 2m(-q,-1;q^4) + 2m(-q,q;q^4), \tag{1.12}$$

假 theta 函数具有某些与普通 theta 函数相似的渐近性质，但它们并不是 theta 函数。在这封信中，可以找到四个三阶模拟 theta 函数、十个五阶函数和三个七阶函数，以及若干个描述这些假 theta 函数之间关系的恒等式。关于阶数的概念则是一团乱麻。

几十年来，假 theta 函数一直笼罩在神秘之中，其研究进展也相当缓慢，但它们仍吸引了 Watson [35],、Selberg [34], 、Dyson [17], 和 Andrews [3, 4]等杰出学者的关注。随着遗失的笔记本被发现[32], 、Hickerson 对模拟theta猜想的证明 [20, 21], 、Zwegers 在模拟模性方面的突破性工作 [37, 38], ， 以及 Bringmann 和 Ono 随后的研究 [14, 15], （另见 Zagier [36], ），假 theta 函数在数学中的地位日益重要。

乔治·安德鲁斯（George Andrews）在剑桥大学三一学院图书馆访问期间，发现了一批拉马努金的论文，这批论文如今被称为遗失的笔记本 [32]。其中包含更多假 theta 函数和假 theta 函数恒等式。具体而言，我们发现了

假 mock theta 猜想，其中包括十个恒等式，每个恒等式都将一个不同的五阶 mock theta 函数表示为一个基本构件假 mock theta 函数与一个简单的 theta 函数的商。这种特殊的基本构件就是所谓的通用假 mock theta 函数$g_3(x;q)$，其定义为

$$g_3(x;q) := x^{-1}\Big(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(x)_{n+1}(q/x)_n}\Big).$$

采用我们的记号，十个假 mock theta 猜想中的两个可写为 [7, 20]

$$f_0(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n} = \frac{J_{5,10}J_{2,5}}{J_1} - 2q^2 g_3(q^2;q^{10}),$$
$$f_1(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(-q;q)_n} = \frac{J_{5,10}J_{1,5}}{J_1} - 2q^3 g_3(q^4;q^{10}).$$

通用假 mock theta 函数 $g_3(x;q)$ 只与奇阶假 mock theta 函数有关；然而，偶阶和奇阶假 mock theta 函数都可以用阿佩尔函数表示 [22, 第 5], [38] 节。关于另一类偶阶基本构件，请参见 [19, 29]。

1.3. 关于可容许级弦函数与假 theta 函数。 在 [9, 10], Borozenets 和 Mortenson 论证了，原则上，正可容许层弦函数可以用阿佩尔函数表示。具体而言，他们利用 Hecke 型双重求和展开 [22,定理 1.4] 以及模拟模性理论 [38] 证明，在 $1/2$-层弦函数的情形下：

定理 1.1. [9, 定理 2.1] 令 $(p,p') = (2,5)$ $0 \le \ell \le 3$ 且 $m \in 2\mathbb{Z}+\ell$。我们有

$$(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{1/2}_{m,\ell}(q) = q^{\frac{1}{2}(m-\ell)} j(q^{1+\ell};q^5)\left((-1)^m q^{\binom{m}{2}}\frac{1}{2}\mu_2(q) + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k q^{mk-\binom{k+1}{2}}\right)$$
$$+ (-1)^m q^{\frac{1}{2}(m-\ell)} q^{\binom{m}{2}}\Theta_\ell(q),$$

其中

$$\Theta_\ell := \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{J_1^3}{J_2J_4}\cdot j(-q;-q^5), & \text{for } \ell\in\{0,3\},\\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{J_1^3}{J_2J_4}\cdot j(-q^3;-q^5), & \text{for } \ell\in\{1,2\},\end{cases}$$

其中 $\mu_2(q)$ 是拉马努金的二阶假 *mock theta* 函数 *(1.12)*。

作为推论，他们得到了类似假 theta 猜想的恒等式 [9, 推论 2.6]。例如，对于 $(p,p') = (2,5)$, $r\in\{0,1\}$，有

$$(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{1/2}_{0,2r}(q) = (-q)^{-r}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j(-q^{2r+1};-q^5) + q^{-r}\frac{1}{2}j(q^{1+2r};q^5)\mu_2(q). \tag{1.13}$$

看来， [9] 的方法并不容易适用于其他正可容许级别。人们可以得到一些结果，但都不像定理 1.1 那样。这促使人们寻找定理 1.1 的其他证明，由此 [10], 中作者发展了准周期性，也就是说，他们建立了式 (1.5) 的正可容许级别类比。对于偶自旋，他们发现

定理 1.2. [10, 定理 2.1] 对于 $(p,p')=(p,2p+j)$，我们有偶自旋的拟周期关系

$$\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 C_{2jt+2s,2r}^{(p,2p+j)}(q)-(q)_\infty^3 C_{2s,2r}^{(p,2p+j)}(q)\\
&=(-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+1)^2}{4(2p+j)}} q^{\binom{p}{2}-p(r-s)-\frac{p}{j}s^2}\sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-2psi}\\
&\quad\times\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\left(q^{m(ji+s-j)}-q^{-m(ji+s)}\right)\\
&\quad\times\left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+1)};q^{2p(2p+j)})-q^{m(2p+j)-m(2r+1)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+1)};q^{2p(2p+j)})\right).
\end{aligned}$$

随后，Borozenets 和 Mortenson 将定理 1.2 中的准周期性概念应用于 (1.2) 和 (1.4) 中的 Weyl–Kac 公式，在 Zwegers [38]以及 Dabholkar、Murthy 和 Zagier [16]之后，得到了极点-有限部分分解。借助这些极点-有限部分分解，他们还能够用类似假 theta 猜想的恒等式表示层级为 $1/2$、$1/3$、$2/3$ 和 $1/5$ 的特征标。为了陈述他们的一些结果，我们回顾拉马努金致 Hardy [6,的最后一封信中发现的两个三阶模拟 theta 函数 14]:

$$f_3(q):=\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(-q)_n^2},\quad \omega_3(q):=\sum_{n\geq 0}\frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}^2}.$$

对于偶自旋、$1/3$层级的弦函数，Borozenets 和 Mortenson 得到 d

定理 1.3。 [10, 定理 2.6] 对于 $(p,\ p')=(3,\ 7)$，$r\in\{0,1,2\}$ 有

$$\begin{aligned}
(q)_\infty^3\mathcal{C}_{0,2r}^{1/3}(q)&=(-q)^{-r}\frac{(q)_\infty^3}{J_2}\frac{j(-q^{1+2r};q^{14})j(q^{16+4r};q^{28})}{j(-1;q)J_{28}}\\
&\quad-q^{2-2r}\frac{j(q^{6-2r};q^{14})j(q^{26-4r};q^{28})}{J_{28}}\omega_3(-q)+\frac{q^{-r}}{2}\frac{j(q^{1+2r};q^{14})j(q^{16+4r};q^{28})}{J_{28}}f_3(q^2).
\end{aligned}$$

我们回顾下取整函数 $\lfloor\cdot\rfloor$。对于偶自旋、$2/3$层级的弦函数，他们发现

定理 1.4. [10, 定理 2.7] 对于 $(p,p')=(3,8)$，$r\in\{0,1,2,3\}$，我们有

$$\begin{aligned}
(q)_\infty^3\mathcal{C}_{0,2r}^{2/3}(q)&=(-1)^{\lfloor (r+1)/2\rfloor}\cdot\frac{q^{-r}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2J_8}j(-q^{7-2r};q^{16})j(q^{1+2r};q^8)\\
&\quad-q^{3-2r}\frac{j(q^{7-2r};q^{16})j(q^{30-4r};q^{32})}{J_{32}}\omega_3(-q^2)+q^{-r}\frac{j(q^{1+2r};q^{16})j(q^{18+4r};q^{32})}{J_{32}}\frac{1}{2}f_3(q^4).
\end{aligned}$$

定理 1.5. [10, 定理 2.8] 对于 $(p,p')=(3,8)$，$r\in\{0,1,2,3\}$，我们有

$$\begin{aligned}
(q)_\infty^3\mathcal{C}_{2,2r}^{2/3}(q)&=(-1)^{\lfloor (r+1)/2\rfloor}\cdot\frac{q^{3-2r}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2J_{32}}j(q^{2+4r};q^{32})j(q^{7-2r};q^{16})\\
&\quad-q^{3-2r}\frac{j(q^{7-2r};q^{16})j(q^{30-4r};q^{32})}{J_{32}}\left(1-\frac{1}{2}f_3(q^4)\right)\\
&\quad+q^{1-r}\frac{j(q^{1+2r};q^{16})j(q^{18+4r};q^{32})}{J_{32}}\left(1-q^2\omega_3(-q^2)\right).
\end{aligned}$$

Borozenets 和 Mortenson [10] 随后 Konenkov 和 Mortenson [27] 也发现了适用于 $1/5$层弦函数的类似假 theta 猜想的恒等式 [10, 定理 2.9]，以及适用于 $2/5$层弦函-数的恒等式 [27, 定理 2.5, 2.6] 不过这些恒等式是用拉马努金的四个十阶模拟θ函数表示的，而这些十阶函数最早见于遗失的笔记本 [32]。

在本文中，我们首先将推导奇自旋可容许级弦函数准周期性的补充公式。然后，我们将把偶自旋和奇自旋弦函数准周期性的公式应用于 Schilling 和 Warnaar[33, 命题 8.2]中发现的一个广义欧拉恒等式。我们将得到类似于定理 1.1 的公式，即 [9, 定理 2.1]，并发现新的类似假 theta 猜想的恒等式。除了此前遇到的假 theta 函数 $\mu_2(q)$、$f_3(q)$ 和 $\omega_3(q)$ 之外，我们还会在 $\psi_3(q)$ 和 $\chi_3(q)$ 中遇到拉马努金的另外两个经典假 theta 函数！

1.4. 关于一个广义欧拉恒等式。 我们定义 $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$。我们陈述 Schilling 和 Warnaar 关于修正弦函数的广义欧拉恒等式：

命题 1.6。 [33, 命题 8。2] 对于 $1 \le p < p'$, $\ell \in \mathbb{Z}_{p'-1}$, $\eta \in \mathbb{Z}_{p'}$，使得 $\ell + \eta$ 为偶数。于是

$$\sum_{L=-\infty}^{\infty} (-1)^L q^{\binom{L}{2}} \mathcal{C}^{p,p'}_{2L+\eta,\ell}(q) = \delta_{\ell,\eta}. \tag{1.14}$$

注 1.7。 Schilling 和 Warnaar 指出，这是 (p, p') =(1,3) 的经典欧拉恒等式；并且对于 $p = 1$ 和任意 p'，这是 [26], 的方程 (2.1.16) 的情形 $A_1^{(1)}$，该方程是 Kac 和 Wakimoto [26, 定理 2.1] 的推论。

对于偶自旋整数级弦函数，利用经典周期性直接可得

$$\delta_{2r,2s} = \sum_{a=0}^{N-1} (-1)^a q^{\binom{a}{2}} j\big(-(-1)^N q^{Na+\binom{N+1}{2}+2(a+s)}; q^{N(N+2)}\big) \mathcal{C}^N_{2(a+s),2r}(q). \tag{1.15}$$

对于 $N = 1$，上述结果可化为优美的

$$\delta_{2r,2s} = j\big(q^{1+2s}; q^3\big) \mathcal{C}^1_{2s,2r}(q),$$

其中 $r = 0$ 且 $s \in \{0, 1\}$。提醒读者，$j(q^n; q) = 0$，当 $n \in \mathbb{Z}$ 时。

当弦函数为正分数级时，准周期性的结果会带来截然不同的结论。我们确实得到一个可容许级弦函数的有限和，与式（1.15）中的结果类似；然而，我们还得到一个额外的如下形式的有限和

$$\sum_i \Phi_i(q) \Psi_i(q),$$

其中，$\Phi_i(q)$ 是模形式，且仅依赖于自旋；$\Psi_i(q)$ 则是（混合）假模 Hecke 型双重和，且仅依赖于量子数。对于层级 $1/2$、$1/3$ 和 $2/3$，我们还将看到，$\Psi_i(q)$ 给出了对称 Hecke 型双重和的一系列类似假 theta 猜想的恒等式。我们的表达式涉及拉马努金的二阶假 mock theta 函数 $\mu_2(q)$，以及三阶模拟 theta 函数 $f_3(q)$、$\omega_3(q)$、$\psi_3(q)$ 和 $\chi_3(q)$。本文将重点研究如何得到 $\Psi_i(q)$ 的类似假 theta 猜想的恒等式。

2. Results: On the generalized Euler identity for even-spin

我们将定理 1.2 中偶自旋的准周期性应用于广义欧拉恒等式 (1.14)，得到

定理 2.1. 对于 $2r \in \mathbb{Z}_{2p+j-1}$ 和 $2s \in \mathbb{Z}_{2p+j}$，有

$$(q)_\infty^3 \delta_{2r,2s} = (q)_\infty^3 \sum_{a=0}^{j-1} (-1)^a q^{\binom{a}{2}} j(-(-1)^j q^{j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s)}; q^{j(2p+j)}) \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2(a+s),2r}(q)$$
$$+ (-1)^p q^{\binom{p}{2}-p(r-s)} \sum_{a=0}^{j-1} (-1)^a q^{pa} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \Phi^r_m(q) \Psi^s_{a,m}(q),$$

其中

$$\Phi^r_m(q) := j(-q^{m(2p+j)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+1)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+j)}$$

and

$$\begin{aligned}\Psi^s_{a,m}(q) := {} & (-1)^j q^{\binom{a}{2}+\binom{j}{2}+j(a+p)+m(a+s)} \\ & \times f_{2p+j,2p+j,j}(-(-1)^j q^{a(2p+j)+2ps+3pj+j+3\binom{j}{2}}, -(-1)^j q^{3\binom{j}{2}+j(a+m+p+1)}; q^j) \\ & - (-1)^j q^{\binom{a}{2}+\binom{j}{2}+j(a+p)-m(a+s+j)} \\ & \times f_{2p+j,2p+j,j}(-(-1)^j q^{a(2p+j)+2ps+3pj+j+3\binom{j}{2}}, -(-1)^j q^{3\binom{j}{2}+j(a-m+p+1)}; q^j).\end{aligned}$$

请注意，在 $(p,\ p') = (p,\ 2p+j)$ 中决定层级的变量 j，不应与 theta 函数 $j(z;q)$ 的记号混淆。根据上下文即可明白。W

e firs t 陈述一个有用的推论，适用于变量 $j=1$ 且为偶自旋的情形 :

推论 2.2. 对于 $2r \in \mathbb{Z}_{2p}$ 和 $2s \in \mathbb{Z}_{2p+1}$，有

$$\begin{aligned}&(q)_\infty^3 \delta_{2r,2s} \\ &= (q)_\infty^3 j(q^{p+2ps}; q^{(2p+1)}) \mathcal{C}^{(p,2p+1)}_{2s,2r}(q) \\ &\quad + (-1)^p q^{\binom{p}{2}-p(r-s)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \\ &\quad \times \Big(j(-q^{m(2p+1)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+1)}) - q^{m(2p+1)-m(2r+1)} j(-q^{-m(2p+1)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+1)}) \Big) \\ &\quad \times \Big(- q^{p+ms} f_{2p+1,2p+1,1}(q^{2ps+3p+1}, q^{m+p+1}; q) \\ &\qquad + q^{p-m(s+1)} f_{2p+1,2p+1,1}(q^{2ps+3p+1}, q^{-m+p+1}; q) \Big).\end{aligned}$$

我们给出一些例子，以便与定理 1.1、1.3、1.4、1 进行比较 .5.

2.1. **关于可容许级 $1/2$ 的弦函数以及函数 $\mu_2(q)$。** 我们先从最简单的例子开始。我们有

推论 2.3. 对于 $p=2$、$j=1$、$r \in \{0,1\}$ 和 $s \in \{0,1,2\}$，我们有

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3 \delta_{2r,2s} = {} & (q)_\infty^3 j(q^{2+4s}; q^5) \mathcal{C}^{1/2}_{2s,2r}(q) \\ & - q^{-r} j(q^{1+2r}; q^5) \times \Big(- q^{2+3s} f_{5,5,1}(q^{4s+7}, q^4; q) + q^{1+s} f_{5,5,1}(q^{4s+7}, q^2; q) \Big).\end{aligned}$$

对于 $s=2$，这意味着双重求和系数为零，另见引理 5.5。

在本文中，我们将重点研究 theta 函数的 Hecke 型双重和系数，并用假 theta 函数恒等式来表示它们。下一个定理可能与定理 1.1, [9, 中的先前结果最为接近。1]

定理 2.4。成立

$$\begin{aligned}-q^{2+3s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\\ =(-1)^s j(q^{s+3};q^5)\left(q^{\binom{s+1}{2}}\frac{1}{2}\mu_2(q)+q^{-3\binom{s}{2}}\sum_{k=0}^{2s-1}(-1)^k q^{2sk-\binom{k+1}{2}}\right)\\ -(-1)^s(-q)^{\binom{s+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{s+3};-q^5).\end{aligned}$$

对于情形 $s=0$，定理 2.4 中的 Hecke 型双重和给出了以下类似模拟 theta 猜想的恒等式：

推论 2.5. 成立

$$-q^2f_{5,5,1}(q^7,q^4;q)+qf_{5,5,1}(q^7,q^2;q)=\frac{1}{2}j(q^2;q^5)\mu_2(q)-\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j(-q^3;-q^5). \tag{2.1}$$

2.2. **关于可容许级的弦函数 $1/3$和函数 $f_3(q)$和 $\omega_3(q)$**。本节中的例子与定理 1.1 具有相同的形式，即 [9, 定理 2.1]。这些例子也与定理 1.3 中的例子共享相同的假 theta 函数，即 [10, 定理 2.6]，，但恒等式的形式不同。theta 函数系数不是阿佩尔函数，而是 Hecke 型双重和，其求值结果是相同的假 theta 函数 $f_3(q)$ 和 $\omega_3(q)$，再加上一个简单的 theta 函数的商。

推论 2.6. 对于 $p=3$, $j=1$, $r\in\{0,1,2\}$ 和 $s\in\{0,1,2,3\}$，我们有

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s}=(q)_\infty^3 j(q^{3+6s};q^7)\mathcal{C}^{1/3}_{2s,2r}(q)\\ +q^{1-2r}\frac{j(q^{8+2r};q^{14})j(q^{2+4r};q^{28})}{J_{28}}\\ \times\Big(-q^{3+4s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^5;q)+q^{2+2s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^3;q)\Big)\\ -q^{-r}\frac{j(q^{1+2r};q^{14})j(q^{16+4r};q^{28})}{J_{28}}\\ \times\Big(-q^{3+5s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^6;q)+q^{1+s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^2;q)\Big).\end{aligned}$$

对于推论 2.6 的情形 $s=3$，两个双重求和系数均为零，另见引理 5.5。

我们分别计算两个 Hecke 型双重和系数。对于第一个 Hecke 型双重求和系数，我们有

定理 2.7。成立

$$\begin{aligned}-q^{3+4s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^5;q)+q^{2+2s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^3;q)\\ =(-1)^s j(q^{s+4};q^7)\left(q^{\binom{s+1}{2}}\cdot q\omega_3(-q)+q^{-5\binom{s}{2}}\sum_{k=0}^{s-1}q^{6ks-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2s-1}\right)\right)\\ -q^{5s^2-3s+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16s};q^{28}).\end{aligned}$$

对于第二个 Hecke 型双重求和系数，我们有

定理 2.8。成立

$$\begin{aligned}
&-q^{3+5s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^6;q)+q^{1+s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^2;q)\\
&\quad=(-1)^s j(q^{s+4};q^7)\left(q^{\binom{s+1}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^2)+q^{-5\binom{s}{2}-s}\sum_{k=0}^{s-1}q^{6ks-6\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)\right)\\
&\qquad-(-1)^s\frac{(-q)^{\binom{s+1}{2}}}{2}\frac{J_1^2}{J_4}j((-q)^{s+4};-q^7).
\end{aligned}$$

定理 2.7 和 2.8 的情形 $s=0$给出如下类似假 theta 猜想的恒等式:

推论 2.9。成立

$$-q^3f_{7,7,1}(q^{10},q^5;q)+q^2f_{7,7,1}(q^{10},q^3;q)=j(q^3;q^7)\cdot q\omega_3(-q)-q\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}\cdot J_{8,28},$$

$$-q^3f_{7,7,1}(q^{10},q^6;q)+qf_{7,7,1}(q^{10},q^2;q)=j(q^3;q^7)\frac{1}{2}f_3(q^2)-\frac{1}{2}\frac{J_1^2}{J_4}\cdot j(-q^3;-q^7).$$

我们注意到，theta 函数的简单商常常可以写成具有公共底数的形式，其中所有信息都位于分子中。特别地，推论 2.9 中的恒等式可以改写如下:

$$\begin{aligned}
&-q^3f_{7,7,1}(q^{10},q^5;q)+q^2f_{7,7,1}(q^{10},q^3;q)\\
&\quad=j(q^3;q^7)\cdot q\omega_3(-q)-q\cdot J_{1,28}^3J_{3,28}^3J_{4,28}J_{5,28}^3J_{7,28}^3J_{8,28}^2J_{9,28}^3J_{11,28}^3J_{12,28}J_{13,28}^3\frac{1}{J_{28}^{23}},
\end{aligned}\tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned}
&-q^3f_{7,7,1}(q^{10},q^6;q)+qf_{7,7,1}(q^{10},q^2;q)\\
&\quad=\frac{1}{2}j(q^3;q^7)f_3(q^2)-\frac{1}{2}J_{1,28}^2J_{2,28}^2J_{3,28}J_{4,28}^2J_{5,28}^2J_{6,28}^3J_{7,28}J_{8,28}J_{9,28}^2J_{10,28}^3J_{11,28}J_{12,28}J_{13,28}^2\frac{J_{14}^4}{J_{28}^{25}}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.3. **关于可容许级的弦函数** $2/3$**与函数** $f_3(q)$**与** $\omega_3(q)$。 偶自旋、 $2/3$层级的例子再次具有与定理 1.1 相同的形式，即 [9, 定理 2.1]。这些例子也具有与定理 1.4、1.5 中相同的假 theta 函数，即 [10,定理 2.7、2.8], ，但这些恒等式再次具有不同的形式。theta 函数系数不是阿佩尔函数，而是 Hecke 型双重和，它们再次等于相同的假 theta 函数 $f_3(q)$ 与 $\omega_3(q)$ 加上一个 theta 函数的简单商。

推论 2.10. 对于 $p=3$ 和 $j=2$、 $r\in\{0,1,2,3\}$ 和 $s\in\{0,1,2,3\}$，我们有

$$\begin{aligned}
(q)_\infty^3\delta_{2r,2s}&=(q)_\infty^3 j(-q^{7+6s};q^{16})\mathcal{C}_{2s,2r}^{(3,8)}(q)-(q)_\infty^3 j(-q^{15+6s};q^{16})\mathcal{C}_{2(1+s),2r}^{(3,8)}(q)\\
&\quad+q^{1-2r}\frac{j(q^{9+2r};q^{16})j(q^{2+4r};q^{32})}{J_{32}}\\
&\quad\times\Big(q^{7+4s}f_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^{13};q^4)-q^{5+2s}f_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^9;q^4)\\
&\qquad-q^{13+4s}f_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{15};q^4)+q^{9+2s}f_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{11};q^4)\Big)\\
&\quad-q^{-r}\frac{j(q^{1+2r};q^{16})j(q^{18+4r};q^{32})}{J_{32}}\\
&\quad\times\Big(q^{7+5s}f_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^{15};q^4)-q^{3+s}f_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^7;q^4)
\end{aligned}$$

$$- q^{14+5s} f_{4,4,1}(-q^{31+6s}, -q^{17}; q^4) + q^{6+s} f_{4,4,1}(-q^{31+6s}, -q^9; q^4)\Big).$$

为了从这两个 Hecke 型双重求和系数中得到类似假 theta 猜想的恒等式，我们需要考虑 s 为偶数、 s 为奇数的情形。对于第一组四个双重求和，当 $s \to 2s$ 为偶数时，我们有

定理 2.11。成立

$$\begin{aligned}
&q^{7+8s} f_{4,4,1}(-q^{23+12s}, -q^{13}; q^4) - q^{5+4s} f_{4,4,1}(-q^{23+12s}, -q^9; q^4) \\
&\quad - q^{13+8s} f_{4,4,1}(-q^{31+12s}, -q^{15}; q^4) + q^{9+4s} f_{4,4,1}(-q^{31+12s}, -q^{11}; q^4) \\
&= q^{7+16s} j(-q^{23+12s}; q^{16}) \left(q^{2s+12\binom{s}{2}} \cdot q^2 \omega_3(-q^2) + \sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2} \right) \right) \\
&\quad - q^{17+16s} j(-q^{31+12s}; q^{16}) \\
&\qquad \times \left(1 - q^{4s} \left(q^{4s+12\binom{s}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^4) + \sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4} \right) \right) \right) \\
&\quad - (-1)^s \frac{q^{\binom{2s}{2}+2}}{2} \frac{J_1^2 J_2}{J_4^2} j(-q^{1+4s}; q^{16}).
\end{aligned}$$

对于第一组四个双重求和，当 $s \to 2s+1$ 为奇数时，有

定理 2.12。成立

$$\begin{aligned}
&q^{11+8s} f_{4,4,1}(-q^{29+12s}, -q^{13}; q^4) - q^{7+4s} f_{4,4,1}(-q^{29+12s}, -q^9; q^4) \\
&\quad - q^{17+8s} f_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{15}; q^4) + q^{11+4s} f_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{11}; q^4) \\
&= q^{15+16s} j(-q^{29+12s}; q^{16}) \\
&\qquad \times \left(1 - q^{4s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4} \right) + q^{4s+12\binom{s}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^4) \right) \right) \\
&\quad - q^{25+16s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \\
&\qquad \times \left(1 - q^{4s+2} \left(1 - q^{8s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2} \right) + q^{2s+12\binom{s}{2}} \cdot q^2 \omega_3(-q^2) \right) \right) \right) \\
&\quad - (-1)^s \frac{q^{\binom{2s+1}{2}+2}}{2} \frac{J_1^2 J_2}{J_4^2} j(-q^{3+4s}; q^{16}).
\end{aligned}$$

对于第二组四个双重求和，当 $s \to 2s$ 为偶数时，有

定理 2.13。对于偶数 s，也就是说，我们用 $2s$ 替换 s，有

$$\begin{aligned}
&q^{7+10s} f_{4,4,1}(-q^{12s+23}, -q^{15}; q^4) - q^{3+2s} f_{4,4,1}(-q^{12s+23}, -q^7; q^4) \\
&\quad - q^{14+10s} f_{4,4,1}(-q^{31+12s}, -q^{17}; q^4) + q^{6+2s} f_{4,4,1}(-q^{31+12s}, -q^9; q^4) \\
&= q^{7+14s} j(-q^{12s+23}; q^{16}) \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4} \right) + q^{4s+12\binom{s}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^4) \right) \\
&\quad - q^{16+14s} j(-q^{31+12s}; q^{16}) \\
&\qquad \times \left(1 - q^{8s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2} \right) + q^{2s+12\binom{s}{2}} \cdot q^2 \omega_3(-q^2) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$-(-1)^s\frac{q^{\binom{2s+1}{2}}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{9+4s};q^{16}).$$

对于第二组四个双重求和，当 $s\to 2s+1$ 为奇数时，有

定理 2.14。当 s 为奇数时，也就是说，将 s 替换为 $2s+1$，我们有

$$\begin{aligned}
&q^{12+10s}f_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^{15};q^4)-q^{4+2s}f_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^7;q^4)\\
&\quad-q^{19+10s}f_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{17};q^4)+q^{7+2s}f_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^9;q^4)\\
&=q^{14+14s}j(-q^{12s+29};q^{16})\\
&\quad\times\left(1-q^{8s}\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+q^{2s+12\binom{s}{2}}\cdot q^2\omega_3(-q^2)\right)\right)\\
&\quad-q^{23+14s}j(-q^{37+12s};q^{16})\\
&\quad\times\left(1-q^{8s+4}\left(1-q^{4s}\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8s-4}\right)+q^{4s+12\binom{s}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^4)\right)\right)\right)\\
&\quad-(-1)^s\frac{q^{\binom{2s+2}{2}}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{11+4s};q^{16}).
\end{aligned}$$

对于 $s=0$ 这些情形，定理 2.11 和 2.13 中的 Hecke 型双重和给出了以下类似假 theta 猜想的恒等式：

推论 2.15。成立

$$\begin{aligned}
&q^7f_{4,4,1}(-q^{23},-q^{13};q^4)-q^5f_{4,4,1}(-q^{23},-q^9;q^4)\\
&\quad-q^{13}f_{4,4,1}(-q^{31},-q^{15};q^4)+q^9f_{4,4,1}(-q^{31},-q^{11};q^4)\\
&\quad=j(-q^7;q^{16})\cdot q^2\omega_3(-q^2)-q^2j(-q;q^{16})\left(1-\frac{1}{2}\left(f_3(q^4)-\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}\right)\right),
\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
&q^7f_{4,4,1}(-q^{23},-q^{15};q^4)-q^3f_{4,4,1}(-q^{23},-q^7;q^4)\\
&\quad-q^{14}f_{4,4,1}(-q^{31},-q^{17};q^4)+q^6f_{4,4,1}(-q^{31},-q^9;q^4)\\
&\quad=-qj(-q;q^{16})\left(1-q^2\omega_3(-q^2)\right)+\frac{1}{2}j(-q^7;q^{16})\left(f_3(q^4)-\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}\right).
\end{aligned}\tag{2.5}$$

读者会注意到，我们将简单的 theta 函数商与含有 $f_3(q^4)$ 的项合并了。对于这四个偶自旋、$2/3$ 层级的定理 2.11、2.12、2.13 和 2.14，也可以采用同样的做法。在这四个定理中，简单的 theta 函数商都可以与 $f_3(q^4)$合并。在定理 2.11 和 2.13 中，接着将 $f_3(q^4)$ 替换为

$$f_3(q^4)-(-1)^s\frac{J_1^2J_2}{J_4^2};$$

然而，在定理 2.12 和 2.14 中，人们将 $f_3(q^4)$ 替换为

$$f_3(q^4)+(-1)^s\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}.$$

对于全部四个定理，利用 theta 函数 (5.2a) 的拟椭圆变换性质很容易看出这一点。例如，对于定理 2.11，可以注意到

$$\begin{aligned} q^{17+16s} j(-q^{31+12s};q^{16}) q^{4s} q^{4s+12\binom{s}{2}} &= q^{17+16s} j(-q^{15+16(s+1)-4s};q^{16}) q^{4s} q^{4s+12\binom{s}{2}} \\ &= q^{17+16s} q^{-16\binom{s+1}{2}-(s+1)(15-4s)} j(-q^{15-4s};q^{16}) q^{4s} q^{4s+12\binom{s}{2}} \\ &= q^{\binom{2s}{2}+2} j(-q^{1+4s};q^{16}). \end{aligned}$$

推论 2.15 中的恒等式也可以改写为具有公共底数的形式如下：

$$\begin{aligned} & q^7 f_{4,4,1}(-q^{23},-q^{13};q^4) - q^5 f_{4,4,1}(-q^{23},-q^9;q^4) \\ &\quad - q^{13} f_{4,4,1}(-q^{31},-q^{15};q^4) + q^9 f_{4,4,1}(-q^{31},-q^{11};q^4) \\ &= q^2 j(-q^7;q^{16})\omega_3(-q^2) - q^2 j(-q^{15};q^{16}) \left(1 - \frac{1}{2} f_3(q^4)\right) \\ &\quad - \frac{q^2}{2} \cdot J_{1,32} J_{2,32}^4 J_{3,32}^2 J_{4,32} J_{5,32}^2 J_{6,32}^3 J_{7,32}^2 J_{8,32} J_{9,32}^2 J_{10,32}^3 J_{11,32}^2 J_{12,32} J_{13,32}^2 J_{14,32}^3 J_{15,32} \cdot \frac{J_{16}^2}{J_{32}^{30}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

and

$$\begin{aligned} & q^7 f_{4,4,1}(-q^{23},-q^{15};q^4) - q^3 f_{4,4,1}(-q^{23},-q^7;q^4) \\ &\quad - q^{14} f_{4,4,1}(-q^{31},-q^{17};q^4) + q^6 f_{4,4,1}(-q^{31},-q^9;q^4) \\ &= \frac{1}{2} j(-q^7;q^{16}) f_3(q^4) - q j(-q^{15};q^{16}) \left(1 - q^2 \omega_3(-q^2)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot J_{1,32}^2 J_{2,32}^3 J_{3,32}^2 J_{4,32} J_{5,32}^2 J_{6,32}^3 J_{7,32} J_{8,32} J_{9,32} J_{10,32}^3 J_{11,32}^2 J_{12,32} J_{13,32}^2 J_{14,32}^4 J_{15,32}^2 \cdot \frac{J_{16}^2}{J_{32}^{30}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

我们在本节最后指出，推论 2.15 中的恒等式让人联想到 Mortenson 和萨胡 [30, (2.18)] 中的一个恒等式。该恒等式用两个假 theta 函数和一项 θ商之和来表示一个二重求和。该二重求和的 q-超几何形式最初由 Andrews [5,(1.11)] 给出。

3. Results: On the generalized Euler identity for odd-spin

我们首先推导奇自旋容许级弦函数的拟周期关系。其证明和表述与定理 1.2 类似。

定理 3.1。对于 $(p,p') = (p, 2p+j)$，我们有奇自旋的拟周期关系

$$\begin{aligned} & (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2s+1,2r+1}(q) \\ &= (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}} q^{\binom{p+1}{2}-p(r+1-s)-\frac{p}{4j}(2s+1)^2} \sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2s+1)i} \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(ji+s-j+1)} - q^{-m(ji+s)}\right) \\ &\quad \times \left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\right). \end{aligned}$$

利用我们针对奇自旋的新拟周期关系，我们得到了新的偶自旋定理 2.1 的奇自旋对应版本。

定理 3.2. 对于 $2r+1\in\mathbb{Z}_{2p+j-1}$ 和 $2s+1\in\mathbb{Z}_{2p+j}$，我们有

$$(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}=(q)_\infty^3\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^{\binom{a}{2}}j(-(-1)^j q^{j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1)};q^{j(2p+j)})\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2(a+s)+1,2r+1}(q)$$
$$+(-1)^p q^{\binom{p}{2}-p(r-s)}\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^{pa}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\Phi^r_m(q)\Psi^s_{a,m}(q),$$

其中

$$\Phi^r_m(q):=j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})-q^{m(2p+j)-m(2r+2)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})$$

和

$$\begin{aligned}\Psi^s_{a,m}(q)&=(-1)^j q^{\binom{a}{2}+\binom{j}{2}+j(a+p)+m(a+s+1)}\\&\quad\times f_{2p+j,2p+j,j}(-(-1)^j q^{p(2(a+s)+1)+aj+3pj+j+3\binom{j}{2}},-(-1)^j q^{3\binom{j}{2}+j(a+m+p+1)};q^j)\\&\quad-(-1)^j q^{\binom{a}{2}+\binom{j}{2}+j(a+p)-m(a+s+j)}\\&\quad\times f_{2p+j,2p+j,j}(-(-1)^j q^{p(2(a+s)+1)+aj+3pj+j+3\binom{j}{2}},-(-1)^j q^{3\binom{j}{2}+j(a-m+p+1)};q^j).\end{aligned}$$

我们给出一个有用的推论，适用于变量 $j=1$ 且自旋为奇数的情况：

推论 3.3。对于 $2r+1\in\mathbb{Z}_{2p+j-1}$ 和 $2s+1\in\mathbb{Z}_{2p+j}$，有

$$\begin{aligned}&(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}\\&=(q)_\infty^3 j(q^{p+p(2s+1)};q^{(2p+1)})\mathcal{C}^{(p,2p+1)}_{2s+1,2r+1}(q)\\&\quad+(-1)^p q^{\binom{p}{2}-p(r-s)}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\\&\quad\times\Big(j(-q^{m(2p+1)+p(2r+2)};q^{2p(2p+1)})-q^{m(2p+1)-m(2r+2)}j(-q^{-m(2p+1)+p(2r+2)};q^{2p(2p+1)})\Big)\\&\quad\times\Big(-q^{p+m(s+1)}f_{2p+1,2p+1,1}(q^{p(2s+1)+3p+1},q^{m+p+1};q)\\&\qquad+q^{p-m(s+1)}f_{2p+1,2p+1,1}(q^{p(2s+1)+3p+1},q^{-m+p+1};q)\Big).\end{aligned}$$

对于奇自旋，我们只能得到推论 2.3、2.6 和 2.10 的类似结果，而无法得到定理 1.1 的类似结果。相反，我们将得到推论 3.4、3.6 和 3.9 中关于 Hecke 型双重求和系数 $s=0$ 情形的假 theta 函数恒等式。这些结果对应于定理 2.1、2.7、2.8、2.11 和 2.13 中 $s=0$ 情形的类似结果。

3.1. 关于可容许级 $1/2$ 的弦函数以及函数 $\mu_2(q)$。

我们从推论 2.3 的奇自旋类比开始。

推论 3.4。对于 $p=2$、$j=1$、$r\in\{0,1\}$ 和 $s\in\{0,1\}$，有

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}&=(q)_\infty^3 j(q^{4+4s};q^5)\mathcal{C}^{(2,5)}_{2s+1,2r+1}(q)\\&\quad-q^{-r}j(q^{2+2r};q^5)\Big(-q^{3+3s}f_{5,5,1}(q^{4s+9},q^4;q)+q^{1+s}f_{5,5,1}(q^{4s+9},q^2;q)\Big).\end{aligned}$$

对于情形 $s=0$，推论 3.4 中的 Hecke 型双重求和系数可化为如下形式：

定理 3.5。成立

$$-q^3f_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+qf_{5,5,1}(q^9,q^2;q)=j(q;q^5)\left(1-\frac{1}{2}\mu_2(q)\right)-\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j(-q;-q^5).\tag{3.1}$$

3.2. **关于可容许级 $1/3$ 的弦函数以及函数 $f_3(q)$ 和 $\omega_3(q)$。** 接下来给出推论 2.6 的奇自旋类比。

推论 3.6. 对于 $p=3$、 $j=1$、 $r\in\{0,1,2\}$ 和 $s\in\{0,1,2\}$，我们有

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1} &= (q)_\infty^3 j(q^{6s+6};q^7)\mathcal{C}^{(3,7)}_{2s+1,2r+1}(q)\\ &\quad + q^{1-2r}\frac{j(q^{9+2r};q^{14})j(q^{4+4r};q^{28})}{J_{28}}\\ &\quad \times\Big(-q^{4+4s}f_{7,7,1}(q^{6s+13},q^5;q)+q^{2+2s}f_{7,7,1}(q^{6s+13},q^3;q)\Big)\\ &\quad - q^{-r}\frac{j(q^{2+2r};q^{14})j(q^{18+4r};q^{28})}{J_{28}}\\ &\quad \times\Big(-q^{5+5s}f_{7,7,1}(q^{6s+13},q^6;q)+q^{1+s}f_{7,7,1}(q^{6s+13},q^2;q)\Big).\end{aligned}$$

对于 $s=0$ 这些情形，推论 3.6 中得到的两个 Hecke 型双重求和系数可化为以下类似假 theta 猜想的恒等式：

定理 3.7. 成立

$$-q^4f_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2f_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)=j(q;q^7)\left(1-\frac{1}{2}f_3(q^2)\right)-\frac{1}{2}\frac{J_1^2}{J_4}\cdot j(-q;-q^7),$$

$$-q^5f_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+qf_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)=j(q;q^7)\left(1-q\omega_3(-q)\right)-\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}\cdot J_{12,28}.$$

注 3.8. 利用 Hecke 型双重和函数方程性质 (5.8)，我们看到，上述两个恒等式等价于

$$q^4f_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+f_{7,7,1}(q^6,q^2;q)=j(q;q^7)\frac{1}{2}f_3(q^2)+\frac{1}{2}\frac{J_1^2}{J_4}\cdot j(-q;-q^7),\tag{3.2}$$

$$q^5f_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+f_{7,7,1}(q^6,q;q)=j(q;q^7)\cdot q\omega_3(-q)+\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}\cdot J_{12,28}.\tag{3.3}$$

我们所有的 Hecke 型双重和恒等式都可以利用 (5.5)、(5.8) 和 (5.9) 中的函数方程性质进行调整，但我们选择保留广义欧拉恒等式给出的双重求和形式。

3.3. **关于可容许级 $2/3$弦函数以及函数 $\psi_3(q)$ 和 $\chi_3(q)$。** 最后，我们给出推论 2.10 的奇自旋类比。

推论 3.9。 对于 $p=3$和 $j=2$、 $r\in\{0,1,2\}$和 $s\in\{0,1,2,3\}$，我们有

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1} &= (q)_\infty^3 j(-q^{10+6s};q^{16})\mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+1,2r+1}(q)-(q)_\infty^3 j(-q^{18+6s};q^{16})\mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+3,2r+1}(q)\\ &\quad + q^{1-2r}\frac{j(q^{10+2r};q^{16})j(q^{4+4r};q^{32})}{J_{32}}\\ &\quad \times\Big(q^{8+4s}f_{4,4,1}(-q^{6s+26},-q^{13};q^4)-q^{5+2s}f_{4,4,1}(-q^{6s+26},-q^9;q^4)\\ &\qquad -q^{14+4s}f_{4,4,1}(-q^{6s+34},-q^{15};q^4)+q^{9+2s}f_{4,4,1}(-q^{6s+34},-q^{11};q^4)\Big)\\ &\quad - q^{-r}\frac{j(q^{2+2r};q^{16})j(q^{20+4r};q^{32})}{J_{32}}\\ &\quad \times\Big(q^{9+5s}f_{4,4,1}(-q^{6s+26},-q^{15};q^4)-q^{3+s}f_{4,4,1}(-q^{6s+26},-q^7;q^4)\end{aligned}$$

,

$$- q^{16+5s} f_{4,4,1}(-q^{6s+34}, -q^{17}; q^4) + q^{6+s} f_{4,4,1}(-q^{6s+34}, -q^9; q^4)\Big).$$

对于 $s = 0$ 这些情况，推论 3.9 的 Hecke 型双重求和系数给出了涉及拉马努金两个不同三阶模拟 theta 函数的类似假 theta 猜想的恒等式。它们如下：

$$\psi_3(q) := \sum_{n\geq 1} \frac{q^{n^2}}{(q;q^2)_n}, \ \chi_3(q) := \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}(-q)_n}{(-q^3;q^3)_n}.$$

定理 3.10。成立

$$\begin{aligned} &q^8 f_{4,4,1}(-q^{26}, -q^{13}; q^4) - q^5 f_{4,4,1}(-q^{26}, -q^9; q^4) \\ &\quad - q^{14} f_{4,4,1}(-q^{34}, -q^{15}; q^4) + q^9 f_{4,4,1}(-q^{34}, -q^{11}; q^4) \\ &= j(-q^{10}; q^{16}) \left(-\psi_3(-q)\right) - j(-q^2; q^{16}) \left(1 - q\left(1 - \chi_3(q)\right)\right) + 3q^2 \frac{J_3 J_{12}^3}{J_4 J_6^2} j(-q^2; q^{16}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &q^9 f_{4,4,1}(-q^{26}, -q^{15}; q^4) - q^3 f_{4,4,1}(-q^{26}, -q^7; q^4) \\ &\quad - q^{16} f_{4,4,1}(-q^{34}, -q^{17}; q^4) + q^6 f_{4,4,1}(-q^{34}, -q^9; q^4) \\ &= j(-q^{10}; q^{16}) \left(1 - \chi_3(q)\right) - q j(-q^2; q^{16}) \left(q^{-2} + \psi_3(-q)\right) + 3q \frac{J_3 J_{12}^3}{J_4 J_6^2} j(-q^{10}; q^{16}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

备注 3.11. 与偶自旋、 $2/3$ 层级弦函数的情形类似，我们可以将简单的 theta 函数商与涉及 $\chi_3(q)$ 的项结合起来。

4. 结语与论文概述

一个自然的问题是：“能否恢复 [10] 的结果？”我们确实失去了 Weyl–Kac 公式中的“z”及其极点-有限分解 [10, 定理 2.3]。对于 $1/2$ 层级，我们可以轻松恢复 (1.13)；而对于 $1/3$ 层级，则需要 [18] 才能恢复定理 (1.3)。除此之外，似乎不太可能恢复 [10, 27] 的其他结果。不过，我们确实获得了一类新型的极点-有限形式，以及关于 Hecke 型双重和的新型类似假 theta 猜想的恒等式，但这与我们新的 $1/2$ 层级极点-有限形式有部分重叠。

利用 Hecke 型双重和的函数方程性质，见（5.5）、（5.8）、（5.9），很容易看出，恒等式（2.1）和（3.1）等价于 [9] 中的以下两个恒等式：

$$f_{5,5,1}(q^3, 1; q) - q^2 f_{5,5,1}(q^7, q^4; q) = \frac{1}{2} j(q^2; q^5) \mu_2(q) - \frac{1}{2} \frac{J_1^3}{J_2 J_4} j(-q^3; -q^5),$$

$$f_{5,5,1}(q^4, q; q) - q f_{5,5,1}(q^6, q^3; q) = \frac{1}{2} j(q; q^5) \mu_2(q) + \frac{1}{2} \frac{J_1^3}{J_2 J_4} j(-q; -q^5).$$

我们可以根据 [9], 中的结果拼凑出定理 2.4 和 3.5 的证明，但为了使证明风格统一，我们希望在本文中给出证明。

我们先介绍预备知识。第 5 节回顾 theta 函数、Hecke 型双重和、阿佩尔函数和假 theta 函数的基本事实。第 6 节列出证明第 2 节和第 3 节中类似假 theta 猜想的恒等式所需的 theta 函数恒等式。我们已使用 Frye 和 Garvan 的 Maple软件包证明了这些恒等式 [18]。

在第 7 节中，我们证明定理 3.1 中发现的奇自旋准周期关系。在第 8 节中，我们分别将偶自旋和奇自旋的准周期关系应用于广义欧拉恒等式，并分别证明定理 2.1 和定理 3.2。

在第 9 节中，我们将新的修正广义欧拉恒等式定理分别特化到偶自旋和奇自旋情形，从而得到可容许级 $1/2$ 下的推论 2.3 和 3.4、可容许级 $1/3$ 下的推论 2.6 和 3.6，以及可容许级 $2/3$ 下的推论 2.10 和 3.9 的结果。

在第 10 节中，我们证明了定理 2.4 中关于偶自旋、 $1/2$ 层级弦函数的新假 theta 函数恒等式；定理 2.7 和 2.8 中关于 $1/3$ 层级弦函数的新假 theta 函数恒等式；以及定理 2.11、2.12、2.13 和 2.14 中关于 $2/3$ 层级弦函数的新假 theta 函数恒等式。

在第 11 节中，我们证明了定理 3.5 中关于奇自旋、 $1/2$ 层级弦函数的新假 theta 函数恒等式；定理 3.7 中关于 $1/3$ 层级弦函数的新假 theta 函数恒等式；以及定理 3.10 中关于 $2/3$ 层级弦函数的新假 theta 函数恒等式。

5. 技术预备知识

本节回顾 theta 函数、阿佩尔函数、Hecke 型双重和以及假 theta 函数的一些基本性质。我们回顾了将 Hecke 型双重和转化为阿佩尔函数所需的公式。最后，我们给出将阿佩尔函数表达式转化为假 theta 函数所需的技术引理。

我们从 theta 函数开始。回顾一些有用的乘积变换，这些变换可直接使用而无须特别说明。我们有

$$\overline{J}_{0,1} = 2\overline{J}_{1,4} = \frac{2J_2^2}{J_1}, \overline{J}_{1,2} = \frac{J_2^5}{J_1^2 J_4^2}, J_{1,2} = \frac{J_1^2}{J_2}, \overline{J}_{1,3} = \frac{J_2 J_3^2}{J_1 J_6},$$
$$J_{1,4} = \frac{J_1 J_4}{J_2}, J_{1,6} = \frac{J_1 J_6^2}{J_2 J_3}, \overline{J}_{1,6} = \frac{J_2^2 J_3 J_{12}}{J_1 J_4 J_6}.$$

我们列出若干有用的 theta 函数性质：

$$j(q^n x; q) = (-1)^n q^{-\binom{n}{2}} x^{-n} j(x; q), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.2a}$$
$$j(x; q) = j(q/x; q), \tag{5.2b}$$
$$j(x; q) = J_1 j(x, qx, \dots, q^{n-1}x; q^n)/J_n^n \quad \text{if } n \geq 1, \tag{5.2c}$$
$$j(x; -q) = j(x; q^2) j(-qx; q^2)/J_{1,4}, \tag{5.2d}$$
$$j(z; q) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} z^k j\big((-1)^{m+1} q^{\binom{m}{2}+mk} z^m; q^{m^2}\big), \tag{5.2e}$$
$$j(x^n; q^n) = J_n j(x, \zeta_n x, \dots, \zeta_n^{n-1} x; q^n)/J_1^n \quad \text{if } n \geq 1. \tag{5.2f}$$

(5.2e) 的一个有用特化形式为

$$j(z; q) = j(-qz^2; q^4) - z j(-q^3 z^2; q^4). \tag{5.3}$$

我们回顾五重乘积恒等式：

命题 5.1。 [20, 定理 1。0] 对于一般的 x， y， $z \in \mathbb{C}^*$

$$j(qx^3; q^3) + x j(q^2 x^3; q^3) = j(-x; q) j(qx^2; q^2)/J_2 = J_1 j(x^2; q)/j(x; q). \tag{5.4a}$$

我们回顾 Hecke 型双重和的一些函数方程性质。

命题 5.2。 [22, 命题 6。2] 对于 x， $y \in \mathbb{C}^*$

$$f_{a,b,c}(x, y; q) = -\frac{q^{a+b+c}}{xy} f_{a,b,c}(q^{2a+b}/x, q^{2c+b}/y; q). \tag{5.5}$$

命题 5.3。 [22, 命题 6。3] 对于 x， $y \in \mathbb{C}^*$ 和 ℓ， $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f_{a,b,c}(x,y;q) = (-x)^{\ell}(-y)^{k} q^{a\binom{\ell}{2}+b\ell k+c\binom{k}{2}} f_{a,b,c}(q^{a\ell+bk}x, q^{b\ell+ck}y;q) \\ + \sum_{m=0}^{\ell-1}(-x)^{m} q^{a\binom{m}{2}} j(q^{mb}y;q^{c}) + \sum_{m=0}^{k-1}(-y)^{m} q^{c\binom{m}{2}} j(q^{mb}x;q^{a}), \end{aligned} \tag{5.6}$$

其中当 $b<a$ 时，我们遵循通常的约定：

$$\sum_{r=a}^{b} c_r := -\sum_{r=b+1}^{a-1} c_r. \tag{5.7}$$

推论 5.4. [22,推论 6.4] 我们有两个简单的特化式：

$$f_{a,b,c}(x,y;q) = -y f_{a,b,c}(q^{b}x, q^{c}y;q) + j(x;q^{a}), \tag{5.8}$$

$$f_{a,b,c}(x,y;q) = -x f_{a,b,c}(q^{a}x, q^{b}y;q) + j(y;q^{c}). \tag{5.9}$$

我们有如下出现在推论 2.5 和 2.9 中的 Hecke 型双重和系数的退化情形

引理 5.5. 我们有

$$-q^{8} f_{5,5,1}(q^{15},q^{4};q) + q^{3} f_{5,5,1}(q^{15},q^{2};q) = 0, \tag{5.10}$$

$$-q^{15} f_{7,7,1}(q^{28},q^{5};q) + q^{8} f_{7,7,1}(q^{28},q^{3};q) = 0, \tag{5.11}$$

$$-q^{18} f_{7,7,1}(q^{28},q^{6};q) + q^{4} f_{7,7,1}(q^{28},q^{2};q) = 0. \tag{5.12}$$

引理 *5.5* 的证明。 这三个证明只是反复使用恒等式 (5.5)、(5.8) 和 (5.9)。 □

[22, 31] 中的表达式使我们能够用阿佩尔函数来表示 Hecke 型双重和。下面列出一些阿佩尔函数性质。这些阿佩尔函数性质见于 [22, 38]，和 [22]，但我们将采用 [22] 中的记号。我们有

命题 5.6。 [22, 命题 3。1] 对于一般的 x， $z \in \mathbb{C}^*$

$$m(x,z;q) = m(x,qz;q), \tag{5.13a}$$

$$m(x,z;q) = x^{-1} m(x^{-1},z^{-1};q), \tag{5.13b}$$

$$m(qx,z;q) = 1 - x m(x,z;q). \tag{5.13c}$$

我们还有

命题5.7。 [22, 定理 3。3] 对于一般的 x， z_0， $z_1 \in \mathbb{C}^*$

$$m(x,z_1;q) - m(x,z_0;q) = \frac{z_0 J_1^3 j(z_1/z_0;q) j(xz_0z_1;q)}{j(z_0;q) j(z_1;q) j(xz_0;q) j(xz_1;q)}. \tag{5.14}$$

我们回顾一条仅见于 [22] 著作中的阿佩尔函数性质。我们取定理 3.5 [22] 的特化情形 $n=2$。由此得到

推论5.8。对于一般的 x， z， $z' \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} m(x,z;q) = m\big(-qx^2,-1;q^4\big) - q^{-1}x m\big(-q^{-1}x^2,-1;q^4\big) \\ - \frac{J_2^3}{j(xz;q) j(-1;q^4)} \left[\frac{j\big(qx^2z;q^2\big) j(-z^2;q^4)}{j\big(qx^2;q^2\big) j\big(z;q^2\big)} - \frac{xz j\big(q^2x^2z;q^2\big) j(-q^2z^2;q^4)}{j\big(qx^2;q^2\big) j\big(qz;q^2\big)} \right]. \end{aligned}$$

为了求系数中出现的 Hecke 型双重和的值，我们将使用 [22, 定理 1.4] 的特殊化。就我们的目的而言，我们首先将 [22, 定理 1.4] 特殊化为 $a = b = n$，$c = 1$。

定理 5.9. 设 n为正整数。则

$$f_{n,n,1}(x,y;q) = h_{n,n,1}(x,y;q) - \frac{1}{\overline{J}_{0,n-1}\overline{J}_{0,n(n-1)}} \cdot \vartheta_{n,n,1}(x,y;q),$$

其中

$$\begin{aligned} h_{n,n,1}(x,y;q) := j(x;q^n)m\big(-q^{n-1}yx^{-1},-1;q^{n-1}\big) \\ + j(y;q)m\big(q^{\binom{n}{2}}x(-y)^{-n},-1;q^{n^2-n}\big), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \vartheta_{n,n,1}(x,y;q) := \sum_{d=0}^{n-1} q^{(n-1)\binom{d+1}{2}} j\big(q^{(n-1)(d+1)}y;q^n\big) j\big(-q^{n(n-1)-(n-1)(d+1)}xy^{-1};q^{n(n-1)}\big) \\ \cdot \frac{J_{n(n-1)}^3 j\big(q^{\binom{n}{2}+(n-1)(d+1)}(-y)^{1-n};q^{n(n-1)}\big)}{j\big(-q^{\binom{n}{2}}x(-y)^{-n};q^{n(n-1)}\big) j\big(q^{(n-1)(d+1)}x^{-1}y;q^{n(n-1)}\big)}. \end{aligned}$$

我们现在列出 $n = 4,5,7$的其他特化式。对于层级 $2/3$ 假 theta 函数恒等式，我们将使用 $n = 4$的如下特化式。

推论 5.10. 我们有

$$f_{4,4,1}(x,y;q) = h_{4,4,1}(x,y;q) - \frac{1}{\overline{J}_{0,3}\overline{J}_{0,12}} \cdot \vartheta_{4,4,1}(x,y;q),$$

其中

$$h_{4,4,1}(x,y;q) := j(x;q^4)m\big(-q^3yx^{-1},-1;q^3\big) + j(y;q)m\big(q^6xy^{-4},-1;q^{12}\big),$$

and

$$\begin{aligned} \vartheta_{4,4,1}(x,y;q) := \sum_{d=0}^{3} q^{3\binom{d+1}{2}} j\big(q^{3(d+1)}y;q^4\big) j\big(-q^{12-3(d+1)}xy^{-1};q^{12}\big) \\ \cdot \frac{J_{12}^3 j\big(-q^{6+3(d+1)}y^{-3};q^{12}\big)}{j\big(-q^6xy^{-4};q^{12}\big) j\big(q^{3(d+1)}x^{-1}y;q^{12}\big)}. \end{aligned}$$

对于层级 $1/2$ 假 theta 函数恒等式，我们将使用以下关于 $n = 5$ 的特化。

推论 5.11。我们有

$$f_{5,5,1}(x,y;q) = h_{5,5,1}(x,y;q) - \frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\vartheta_{5,5,1}(x,y;q),$$

其中

$$h_{5,5,1}(x,y;q) := j(x;q^5)m(-q^4x^{-1}y,-1;q^4) + j(y;q)m(-q^{10}xy^{-5},-1;q^{20}),$$

and

$$\vartheta_{5,5,1}(x,y;q) := \sum_{d=0}^{4} q^{2d(d+1)} \frac{J_{20}^3 j\big(q^{4+4d}y;q^5\big) j\big(-q^{16-4d}xy^{-1};q^{20}\big) j\big(q^{14+4d}y^{-4};q^{20}\big)}{j\big(q^{10}xy^{-5};q^{20}\big) j\big(q^{4+4d}x^{-1}y;q^{20}\big)}.$$

对于层级为 $1/3$ 的假 theta 函数恒等式，我们将使用 $n = 7$ 的以下特化形式。

推论 5.12。我们有

$$f_{7,7,1}(x,y,q)=h_{7,7,1}(x,y;q)-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\cdot\vartheta_{7,7,1}(x,y;q),$$

其中

$$h_{7,7,1}(x,y;q):=j(x;q^7)m\big(-q^6yx^{-1},-1;q^6\big)+j(y;q)m\big(-q^{21}xy^{-7},-1;q^{42}\big),$$

and

$$\vartheta_{7,7,1}(x,y;q):=\sum_{d=0}^{6}q^{6\binom{d+1}{2}}j\big(q^{6(d+1)}y;q^7\big)j\big(-q^{42-6(d+1)}xy^{-1};q^{42}\big)\cdot\frac{J_{42}^3j\big(q^{21+6(d+1)}y^{-6};q^{42}\big)}{j\big(q^{21}xy^{-7};q^{42}\big)j\big(q^{6(d+1)}x^{-1}y;q^{42}\big)}.$$

用推论 5.10、5.11 和 5.12 将双重求和改写后，我们需要将涉及阿佩尔函数的表达式改写为假 theta 函数的形式。第一步是将其化至与假 theta 函数仅相差一个 theta 函数。对于奇自旋的简单结果，这一步很简短；但对于偶自旋的一般结果，我们需要以下引理：

引理 5.13. 我们有

$$\begin{aligned}&m(-q^{1+4s},-1;q^4)-q^{2s-1}m(-q^{-1+4s},-1;q^4)\qquad(5.15)\\&\quad=\sum_{k=0}^{2s-1}(-1)^kq^{2sk-\binom{k+1}{2}}+2q^{s+4\binom{s}{2}}m(-q,-1;q^4),\\&m(-q^{1+6s},-1;q^6)-q^{2s-1}m(-q^{-1+6s},-1;q^6)\qquad(5.16)\\&\quad=\sum_{k=0}^{s-1}q^{6sk-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2s-1}\right)+2q^{s+6\binom{s}{2}}m(-q,-1;q^6),\\&m(-q^{2+6s},-1;q^6)-q^{4s-2}m(-q^{-2+6s},-1;q^6)\qquad(5.17)\\&\quad=\sum_{k=0}^{s-1}q^{6sk-6\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+2q^{2s+6\binom{s}{2}}m(-q^2,-1;q^6).\end{aligned}$$

引理 *5.13* 的证明。这是一个直接的归纳法练习。 □

我们将使用的假 theta 函数均来自拉马努金的经典列表。我们采用 [22, 第 5] 节中的形式。这里既有二阶函数，也有三阶函数。对于二阶函数，我们只使用一个假 theta 函数：

$$\mu_2(q):=\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^nq^{n^2}(q;q^2)_n}{(-q^2;q^2)_n^2}=4m(-q,-1;q^4)-\frac{J_{2,4}^4}{J_1^3}.\qquad(5.18)$$

对于三阶函数，我们将有四个假 theta 函数：

$$f_3(q):=\sum_{n\geq0}\frac{q^{n^2}}{(-q)_n^2}=4m(-q,q;q^3)+\frac{J_{3,6}^2}{J_1},\qquad(5.19)$$

$$\omega_3(q):=\sum_{n\geq0}\frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}^2}=-2q^{-1}m(q,q^2;q^6)+\frac{J_6^3}{J_2J_{3,6}},\qquad(5.20)$$

$$\psi_3(q) := \sum_{n\geq 1} \frac{q^{n^2}}{(q;q^2)_n} = -m(q,-q;-q^3) + \frac{qJ_{12}^3}{J_4 J_{3,12}}, \tag{5.21}$$

$$\chi_3(q) := \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}(-q)_n}{(-q^3;q^3)_n} = m(-q,q;q^3) + \frac{J_{3,6}^2}{J_1}. \tag{5.22}$$

我们以若干引理结束本节，这些引理使我们能够将阿佩尔函数表达式转换为假 theta 函数。

引理 5.14。我们有

$$m(-q,-1;q^6) = \frac{1}{2}q\omega_3(-q) - \frac{1}{2}q\frac{J_6^3}{J_2\overline{J}_{3,6}} + \frac{J_6^3\overline{J}_{2,6}J_{3,6}}{\overline{J}_{0,6}J_{1,6}J_{2,6}\overline{J}_{3,6}}, \tag{5.23}$$

$$m(-q^2,-1;q^6) = \frac{1}{4}f_3(q^2) - \frac{1}{4}\frac{J_{6,12}^2}{J_2} + \frac{J_6^3}{\overline{J}_{0,6}J_{2,6}}. \tag{5.24}$$

引理 *5.14* 的证明。这可由阿佩尔函数形式 (5.20) 和 (5.19) 以及命题 5.7 得出。□

引理 5.15。我们有

$$m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12}) = \chi_3(q) - \frac{J_{3,6}^2}{J_1} - \frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}, \tag{5.25}$$

$$m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12}) = -\psi_3(-q) - q\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{3,12}J_4} - \frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}. \tag{5.26}$$

注5.16。上面的引理并没有错误。两条恒等式的左端确实相同!

引理 *5.15* 的证明。利用推论5.8，我们有

$$\begin{aligned} m(-q,q;q^3) = m(-q^5,-1;q^{12}) + q^{-2}m(-q^{-1},-1;q^{12}) \\ - \frac{J_6^3}{j(-q^2;q^3)j(-1;q^{12})}\frac{q^2 j\big(q^9;q^6\big)j(-q^8;q^{12})}{j\big(q^5;q^6\big)j\big(q^4;q^6\big)}. \end{aligned}$$

利用 (5.13b) 和 (5.2a) 可得

$$m(-q,q;q^3) = m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12}) + q^{-1}\frac{J_6^3}{\overline{J}_{1,3}\overline{J}_{0,12}}\frac{J_{3,6}\overline{J}_{4,12}}{J_{1,6}J_2}.$$

通过初等的乘积重排可得

$$m(-q,q;q^3) = m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12}) + \frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}.$$

结果随后由恒等式 (5.21) 和 (5.22) 得出 □

6. Families of theta function identities through Frye and Garvan

在本节中，我们列出使用 Frye和Garvan的 Maple软件包*qseries* 和 *thetaids* [18]证明的恒等式。这里不再概述证明过程，但感兴趣的读者可以在 [9,Section 4], [10,Section 5] 中找到关于这两个 Maple软件包如何证明恒等式的概述。

对于偶自旋、 $1/2$ 层级，我们需要以下恒等式来证明定理 2.4。我们回顾推论 5.11 中 $\vartheta_{5,5,1}(x,y;q)$ 的记号。

命题 6.1。对于 $s \in \{0,1,3,4\}$，有

$$\begin{aligned}(-1)^s q^{\binom{s+1}{2}} j(q^{s+3};q^5)\frac{1}{2}\frac{J_{2,4}^4}{J_1^3}\\ -\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^{2+3s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\right)\\ =-(-1)^s(-q)^{\binom{s+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{s+3};-q^5).\end{aligned}$$

对于命题 6.1 中的情形 $s=2$，推论 2.5 中的 Hecke 型双重求和系数等于零，见引理 5.5。

对于偶自旋、$1/3$ 层级的情形，我们将分别需要以下两个恒等式来证明定理 2.7 和 2.8。我们回顾推论 5.12 中 $\vartheta_{7,\ 7,\ 1}(x,\ y;q)$ 的记号。

命题 6.2。对于 $s \in \{0,1,2,4,5,6\}$，有

$$\begin{aligned}(-1)^s 2q^{\binom{s+1}{2}} j(q^{s+4};q^7)\left(-\frac{1}{2}q\frac{J_6^3}{J_2\overline{J}_{3,6}}+\frac{J_6^3\overline{J}_{2,6}J_{3,6}}{\overline{J}_{0,6}J_{1,6}J_{2,6}\overline{J}_{3,6}}\right)\\ -\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^{3+4s}\vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10},q^5;q)+q^{2+2s}\vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10},q^3;q)\right)\\ =-q^{5s^2-3s+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16s};q^{28}).\end{aligned}$$

命题 6.3。对于 $s \in \{0,1,2,4,5,6\}$，有

$$\begin{aligned}(-1)^s 2q^{\binom{s+1}{2}} j(q^{s+4};q^7)\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{6,12}^2}{J_2}+\frac{J_6^3}{\overline{J}_{0,6}J_{2,6}}\right)\\ -\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^{3+5s}\vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10},q^6;q)+q^{1+s}\vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10},q^2;q)\right)\\ =-(-1)^s\frac{(-q)^{\binom{s+1}{2}}}{2}\frac{J_1^2}{J_4}j((-q)^{s+4};-q^7).\end{aligned}$$

对于命题 6.2 和 6.3 中的情形 $s=3$，我们看到推论 2.9 中的双重求和系数等于零，见引理 5.5。

对于偶自旋的 $2/3$ 层级，分别证明定理 2.11 和 2.12 时，我们将需要以下两个恒等式。我们回顾推论 5.10 中 $\vartheta_{4,4,1}(x,y;q)$ 的记号。

命题 6.4. 对于 $s \in \{0,1,2,3\}$ 我们有

$$\begin{aligned}2q^{7+16s}q^{2s+12\binom{s}{2}}j(-q^{12s+23};q^{16})\left(-\frac{1}{2}q^2\frac{J_{12}^3}{J_4\overline{J}_{6,12}}+\frac{J_{12}^3\overline{J}_{4,12}J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12}J_{2,12}J_{4,12}\overline{J}_{6,12}}\right)\\ +2q^{17+16s}q^{4s}q^{4s+12\binom{s}{2}}j(-q^{31+12s};q^{16})\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{12,24}^2}{J_4}+\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12}J_{4,12}}\right)\\ -\frac{1}{\overline{J}_{0,12}\overline{J}_{0,48}}\Big(q^{7+8s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{13};q^4)-q^{5+4s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^9;q^4)\\ -q^{13+8s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{15};q^4)+q^{9+4s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{11};q^4)\Big)\\ =-(-1)^s\frac{q^{\binom{2s}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{1+4s};q^{16}).\end{aligned}$$

命题 6.5. 对于 $s \in \{0,1,2,3\}$ 我们有

$$
\begin{aligned}
&-2q^{4s}q^{4s+12\binom{s}{2}}q^{15+16s}j(-q^{29+12s};q^{16})\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{12,24}^2}{J_4}+\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12}J_{4,12}}\right)\\
&\quad-2q^{25+16s}q^{4s+2}q^{8s}q^{2s+12\binom{s}{2}}j(-q^{37+12s};q^{16})\left(-\frac{1}{2}q^2\frac{J_{12}^3}{J_4\overline{J}_{6,12}}+\frac{J_{12}^3\overline{J}_{4,12}J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12}J_{2,12}J_{4,12}\overline{J}_{6,12}}\right)\\
&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{0,12}\overline{J}_{0,48}}\Big(q^{11+8s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{29+12s},-q^{13};q^4)-q^{7+4s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{29+12s},-q^{9};q^4)\\
&\qquad\quad-q^{17+8s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{15};q^4)+q^{11+4s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{11};q^4)\Big)\\
&\quad=-(-1)^s\frac{q^{\binom{2s+1}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{3+4s};q^{16}).
\end{aligned}
$$

对于偶自旋、 $2/3$ 层级，我们将需要以下两个恒等式，分别用于证明定理 2.13 和 2.14。我们回顾推论 5.10 中 $\vartheta_{4,\ 4,\ 1}(x,\ \ y;q)$ 的记号。

命题 6.6。对于 $s \in \{0,1,2,3\}$ ，我们有

$$
\begin{aligned}
&2q^{7+14s}q^{4s+12\binom{s}{2}}j(-q^{12s+23};q^{16})\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{12,24}^2}{J_4}+\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12}J_{4,12}}\right)\\
&\quad+2q^{8s}q^{16+14s}q^{2s+12\binom{s}{2}}j(-q^{31+12s};q^{16})\left(-\frac{1}{2}q^2\frac{J_{12}^3}{J_4\overline{J}_{6,12}}+\frac{J_{12}^3\overline{J}_{4,12}J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12}J_{2,12}J_{4,12}\overline{J}_{6,12}}\right)\\
&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{12}\overline{J}_{0,48}}\Big(q^{7+10s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{15};q^4)-q^{3+2s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{7};q^4)\\
&\qquad\quad-q^{14+10s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{17};q^4)+q^{6+2s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{9};q^4)\Big)\\
&\quad=-(-1)^s\frac{q^{\binom{2s+1}{2}}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{9+4s};q^{16}).
\end{aligned}
$$

命题 6.7。对于 $s \in \{0,1,2,3\}$ ，我们有

$$
\begin{aligned}
&-2q^{8s}q^{2s+12\binom{s}{2}}q^{14+14s}j(-q^{12s+29};q^{16})\left(-\frac{1}{2}q^2\frac{J_{12}^3}{J_4\overline{J}_{6,12}}+\frac{J_{12}^3\overline{J}_{4,12}J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12}J_{2,12}J_{4,12}\overline{J}_{6,12}}\right)\\
&\quad-2q^{23+14s}q^{8s+4}q^{4s}q^{4s+12\binom{s}{2}}j(-q^{37+12s};q^{16})\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{12,24}^2}{J_4}+\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12}J_{4,12}}\right)\\
&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{12}\overline{J}_{0,48}}\Big(q^{12+10s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^{15};q^4)-q^{4+2s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^{7};q^4)\\
&\qquad\quad-q^{19+10s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{17};q^4)+q^{7+2s}\vartheta_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{9};q^4)\Big)\\
&\quad=-(-1)^s\frac{q^{\binom{2s+2}{2}}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{11+4s};q^{16}).
\end{aligned}
$$

对于奇自旋、 $1/2$ 层级，我们需要以下恒等式来证明定理 3.5。我们回顾推论 5.11 中 $\vartheta_{5,5,1}(x,y;\ q)$ 的记号。

命题 6.8。我们有

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}j(q;q^5)\frac{J_{2,4}^4}{J_1^3}-\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^3\vartheta_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+q\vartheta_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\right)\\&\quad=-\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j(-q;-q^5).\end{aligned}$$

对于奇自旋、 $1/3$ 层级，要证明定理 3.7，我们需要以下两个恒等式。我们回顾推论 5.12 中 $\vartheta_{7,\ 7,\ 1}(x,\ \ y;\ q)$ 的记号。

命题 6.9。我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{J_{6,12}^2J_{1,7}}{J_2}-2\frac{J_6^3J_{1,7}}{\overline{J}_{0,6}J_{2,6}}-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^4\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\right)\\&\quad=-\frac{1}{2}\frac{J_1^2}{J_4}\cdot j(-q;-q^7).\end{aligned}$$

命题 6.10。我们有

$$\begin{aligned}&q\frac{J_6^3J_{1,7}}{J_2\overline{J}_{3,6}}-2\frac{J_6^3\overline{J}_{2,6}J_{3,6}J_{1,7}}{\overline{J}_{0,6}J_{1,6}J_{2,6}\overline{J}_{3,6}}-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^5\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)\right)\\&=-\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}\cdot J_{12,28}.\end{aligned}$$

对于奇自旋、 $2/3$ 层级，要证明定理 3.10，我们需要以下两个恒等式。我们回顾推论 5.10 中 $\vartheta_{4,\ 4,\ 1}(x,\ \ y;q)$ 的记号。

命题 6.11。我们有

$$\begin{aligned}&-j(-q^{10};q^{16})\left(q\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{3,12}J_4}+\frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}\right)+j(-q^2;q^{16})\left(\frac{J_{3,6}^2}{J_1}+\frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}\right)\\&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{0,3}\overline{J}_{0,12}}\Big(q^8\vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^{13};q^4)-q^5\vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^9;q^4)\\&\qquad-q^{14}\vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^{15};q^4)+q^9\vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^{11};q^4)\Big)\\&=3q^2\frac{J_3J_{12}^3}{J_4J_6^2}j(-q^2;q^{16}).\end{aligned}$$

命题 6.12. 我们有

$$\begin{aligned}&j(-q^{10};q^{16})\left(\frac{J_{3,6}^2}{J_1}+\frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}\right)-qj(-q^2;q^{16})\left(q\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{3,12}J_4}+\frac{q^{-1}}{2}\frac{J_3J_6J_8J_{12}^3}{J_2J_4J_{24}^3}\right)\\&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{0,3}\overline{J}_{0,12}}\Big(q^9\vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^{15};q^4)-q^3\vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^7;q^4)\\&\qquad-q^{16}\vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^{17};q^4)+q^6\vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^9;q^4)\Big)\\&=3q\frac{J_3J_{12}^3}{J_4J_6^2}j(-q^{10};q^{16}).\end{aligned}$$

7. The quasi-periodic relations for odd-spin

我们证明定理 3.1，但将分几个步骤进行。首先回顾弦函数的 Hecke 型双重求和形式。设 $p' \geq 2$、$p \geq 1$ 为互质整数，$0 \leq \ell \leq p'-2$ 和 $m \in 2\mathbb{Z}+\ell$。我们将 (1.10) 特化为 $(m,\ell) = (2k+1, 2r+1)$，$(p,p') = (p, 2p+j)$。由此得到

$$(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) = f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+k+r}, -q^{p(2p+j+2r+2)}; q) - f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{k-r}, -q^{p(2p+j-2r-2)}; q). \tag{7.1}$$

利用 Hecke 型双重和的函数方程命题 5.3，我们可以确立以下关系：

命题 7.1。 我们有以下表达式

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 q^{-p(2k+1+j)} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \\ = -\sum_{m=1}^{2p} (-1)^m q^{-m(2+k+r)} q^{\binom{m+1}{2}} j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\ + \sum_{m=1}^{2p} (-1)^m q^{-m(k-r)} q^{\binom{m+1}{2}} j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}).\end{aligned} \tag{7.2}$$

利用一些抵消以及对称性，我们得到一个更简洁的表达式：

命题 7.2。 我们有

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 q^{-p(2k+1+j)} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \\ = -(-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(k+1)} - q^{-m(k+j)}\right) \\ \times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\ - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \Big).\end{aligned}$$

现在我们可以开始证明定理 3.1。下面给出两个命题的证明。

定理 *3.1* 的证明。 将弦函数记号按 (1.8) 替换后，我们得到

$$q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p}{4j}(2k+1)^2} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) = C^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \\ = -(-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p}{4j}(2k+1)^2} q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(k+1)} - q^{-m(k+j)}\right) \\ \times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\ - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \Big).\end{aligned}$$

重新排列各项并代入 $k \to k-j$，得到

$$(q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2k-2j+1,2r+1}(q)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p}{4j}(2k-2j+1)^2} q^{\binom{p+1}{2}-p(k-j+r+2)} \\
&\quad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(k-j+1)} - q^{-mk}\right) \\
&\quad \times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\qquad - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)})\Big).
\end{aligned}
$$

化简指数后得到

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2k-2j+1,2r+1}(q) \\
&\quad = (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p}{4j}(2k+1)^2} q^{\binom{p+1}{2}+p(k-r-1)} \\
&\qquad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(k-j+1)} - q^{-mk}\right) \\
&\qquad \times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\qquad\quad - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)})\Big).
\end{aligned}
$$

现在，我们考虑 $m = 2k$、 $k = jt + s$、 $0 \le s \le j-1$。由此可得

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2j(t-1)+2s+1,2r+1}(q) \\
&\quad = (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p}{4j}(2(jt+s)+1)^2} q^{\binom{p+1}{2}+p(jt+s-r-1)} \\
&\qquad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(jt+s-j+1)} - q^{-m(jt+s)}\right) \\
&\qquad \times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\qquad\quad - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)})\Big) \\
&\quad = (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}} q^{\binom{p+1}{2}-2pj\binom{t}{2}-p(r+1-s+(2s+1)t)-\frac{p}{4j}(2s+1)^2} \\
&\qquad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(jt+s-j+1)} - q^{-m(jt+s)}\right) \\
&\qquad \times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\qquad\quad - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)})\Big).
\end{aligned}
$$

迭代得到

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q) \\
&\quad = (q)_\infty^3 C^{(p,2p+j)}_{2j(t-1)+2s+1,2r+1}(q) \\
&\qquad + (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}} \sum_{i=1}^{t} q^{\binom{p+1}{2}-2pj\binom{i}{2}-p(r+1-s+(2s+1)i)-\frac{p}{4j}(2s+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$\times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(ji+s-j+1)} - q^{-m(ji+s)}\right)$$
$$\times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)})$$
$$- q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)})\Big).$$

重写该表达式即可得到结果。 □

命题 *7.1* 的证明。 在命题 5.3 中，我们令 $(\ell, k) = (-2p, 1)$。对于 (7.1) 中的第一个二重求和，这给出

$$\begin{aligned}
&f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+k+r}, -q^{p(2p+j+2r+2)}; q) \\
&\quad = (-q^{2+k+r})^{(-2p)} q^{p(2p+j+2r+2)} q^{\binom{-2p}{2}-2p(2p+j)} f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{j+2+k+r}, -q^{p(2p+j+2r+2)}; q) \\
&\qquad + \sum_{m=0}^{-2p-1} (-q^{2+k+r})^m q^{\binom{m}{2}} j(-q^{m(2p+j)} q^{p(2p+j+2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) + j(q^{2+k+r}; q) \\
&\quad = q^{-p(2k+1+j)} f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+j+k+r}, -q^{p(2p+j+2r+2)}; q) \\
&\qquad - \sum_{m=-2p}^{-1} (-q^{2+k+r})^m q^{\binom{m}{2}} j(-q^{m(2p+j)} q^{p(2p+j+2r+2)}; q^{2p(2p+j)}),
\end{aligned}$$

其中在最后一个等式中，我们使用了求和约定 (5.7) 以及 $j(q^n; q) = 0$ 对于 $n \in \mathbb{Z}$ 成立这一事实。进一步化简得到 $(m \to -m)$

$$\begin{aligned}
&f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+k+r}, -q^{p(2p+j+2r+2)}; q) \qquad (7.3)\\
&\quad = q^{-p(2k+1+j)} f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+j+k+r}, -q^{p(2p+j+2r+2)}; q) \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{2p} (-1)^m q^{-m(2+k+r)} q^{\binom{m+1}{2}} j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}$$

对于 (7.1) 中的第二个二重求和，采用相同的方法可得

$$\begin{aligned}
&f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{k-r}, -q^{p(2p+j-2r-2)}; q) \\
&\quad = (-q^{k-r})^{-2p} q^{p(2p+j-2r-2)} q^{\binom{-2p}{2}-2p(2p+j)} f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{j+k-r}, -q^{p(2p+j-2r-2)}; q) \\
&\qquad + \sum_{m=0}^{-2p-1} (-q^{k-r})^m q^{\binom{m}{2}} j(-q^{m(2p+j)} q^{p(2p+j-2r-2)}; q^{2p(2p+j)}) + j(q^{k-r}; q) \\
&\quad = q^{-p(2k+1+j)} f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{j+k-r}, -q^{p(2p+j-2r-2)}; q) \\
&\qquad - \sum_{m=-2p}^{-1} (-q^{k-r})^m q^{\binom{m}{2}} j(-q^{m(2p+j)} q^{p(2p+j-2r-2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\quad = q^{-p(2k+1+j)} f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{j+k-r}, -q^{p(2p+j-2r-2)}; q) \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{2p} (-1) q^{-m(k-r)} q^{\binom{m+1}{2}} j(-q^{(p-m)(2p+j)-p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}$$

将 (5.2b) 应用于 theta 函数可得

$$\begin{aligned} &f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{k-r},-q^{p(2p+j-(2r+2))};q) \\ &\quad= q^{-p(2k+1+j)}f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{j+k-r},-q^{p(2p+j-(2r+2))};q) \\ &\qquad-\sum_{m=1}^{2p}(-1)q^{-m(k-r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}). \end{aligned} \tag{7.4}$$

用 (7.3) 减去 (7.4)，得到

$$\begin{aligned} &f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+k+r},-q^{p(2p+j+2r+2)};q)-f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{k-r},-q^{p(2p+j-(2r+2))};q) \\ &\quad= q^{-p(2k+1+j)}\Big(f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{2+j+k+r},-q^{p(2p+j+2r+2)};q) \\ &\qquad-f_{1,2p+j,2p(2p+j)}(q^{j+k-r},-q^{p(2p+j-(2r+2))};q)\Big) \\ &\qquad-\sum_{m=1}^{2p}(-1)^m q^{-m(2+k+r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\qquad+\sum_{m=1}^{2p}(-1)q^{-m(k-r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}). \end{aligned}$$

使用弦函数记号 (7.1)，即可得到所述结果。 □

命题 *7.2* 的证明。首先注意到，(7.2) 中第一和第二个求和里的 $m=p$ 项相互抵消。这可由 (5.2a) 并经化简得到：

$$\begin{aligned} &-(-1)^p q^{-p(2+k+r)}q^{\binom{p+1}{2}}j(-q^{p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\qquad+(-1)^p q^{-p(k-r)}q^{\binom{p+1}{2}}j(-q^{2p(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\quad=-(-1)^p q^{-p(2+k+r)}q^{\binom{p+1}{2}}j(-q^{p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\qquad+(-1)^p q^{-p(k-r)}q^{\binom{p+1}{2}}q^{-(2r+2)}j(-q^{p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})=0. \end{aligned}$$

因此我们可以省去 $m=p$ 的两项，并将 (7.2) 中的两个求和拆开，写成

$$\begin{aligned} &(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q)-(q)_\infty^3 q^{-p(2k+1+j)}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \\ &\quad=-\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{-m(2+k+r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\qquad-\sum_{m=p+1}^{2p}(-1)^m q^{-m(2+k+r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\qquad+\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{-m(k-r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) \\ &\qquad+\sum_{m=p+1}^{2p}(-1)^m q^{-m(k-r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}). \end{aligned} \tag{7.5}$$

在 (7.5) 的第一个和第三个求和符号中，我们作如下代换 $m\to p-m$：

$$(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q)-(q)_\infty^3 q^{-p(2k+1+j)}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \tag{7.6}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^{p-m}q^{(m-p)(2+k+r)}q^{\binom{p-m+1}{2}}j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad -\sum_{m=p+1}^{2p}(-1)^{m}q^{-m(2+k+r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad +\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^{p-m}q^{(m-p)(k-r)}q^{\binom{p-m+1}{2}}j(-q^{(2p-m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad +\sum_{m=p+1}^{2p}(-1)^{m}q^{-m(k-r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}
$$

在 (7.6) 的第三个求和中，我们使用 (5.2a) 并进行化简。得到

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q)-(q)_\infty^3q^{-p(2k+1+j)}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \qquad (7.7)\\
&\quad =-(-1)^pq^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^mq^{\binom{m+1}{2}+m(k+r+1)-mp}j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad -\sum_{m=p+1}^{2p}(-1)^mq^{-m(2+k+r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p-m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad +(-1)^pq^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^mq^{\binom{m+1}{2}+m(k-r+p+j-1)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad +\sum_{m=p+1}^{2p}(-1)^mq^{-m(k-r)}q^{\binom{m+1}{2}}j(-q^{(p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}
$$

在 (7.7) 的第二个和第四个求和中，我们作代换 $m\to p+m$:

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q)-(q)_\infty^3q^{-p(2k+1+j)}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \qquad (7.8)\\
&\quad =-(-1)^pq^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^mq^{\binom{m+1}{2}+m(k+r+1)-mp}j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad -\sum_{m=1}^{p}(-1)^{p+m}q^{-(p+m)(2+k+r)}q^{\binom{p+m+1}{2}}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad +(-1)^pq^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^mq^{\binom{m+1}{2}+m(k-r+p+j-1)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad +\sum_{m=1}^{p}(-1)^{p+m}q^{-(p+m)(k-r)}q^{\binom{p+m+1}{2}}j(-q^{(2p+m)(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}
$$

在 (7.8) 的第四个求和中，我们使用 (5.2a)。由此得到

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q)-(q)_\infty^3q^{-p(2k+1+j)}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \qquad (7.9)\\
&\quad =-(-1)^pq^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^mq^{\binom{m+1}{2}+m(k+r+1)-mp}j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}-m(k+r+2-p)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&+(-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(k-r+p+j-1)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&+(-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-k-j-p)} j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}
$$

现在，在 (7.9) 的第二个和第四个求和中，我们看到 $m = p$ 的项相互抵消：

$$
\begin{aligned}
&-q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2-p)} j(-q^{-p(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\quad + q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} q^{\binom{p+1}{2}+p(r-k-j-p)} j(-q^{p(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&= -q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2-p)} j(-q^{-p(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\quad + q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} q^{\binom{p+1}{2}+p(r-k-j-p)} q^{p(2p+j)-p(2r+2)} j(-q^{-p(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) = 0,
\end{aligned}
$$

其中我们使用了 (5.2a) 并进行了化简。在 (7.9) 中，我们将第一项与第四项求和、第二项与第三项求和分别合并，得到

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 q^{-p(2k+1+j)} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \\
&\quad = (-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-k-j-p)} \left(1 - q^{m(2k+1+j)}\right) \\
&\qquad \times j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \\
&\qquad - (-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}-m(k+r+2-p)} \left(1 - q^{m(2k+1+j)}\right) \\
&\qquad \times j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}).
\end{aligned}
$$

合并剩余的两个求和式，得到

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 q^{-p(2k+1+j)} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2k+2j+1,2r+1}(q) \\
&= (-1)^p q^{\binom{p+1}{2}-p(k+r+2)} \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-k-j-p)} \left(1 - q^{m(2k+1+j)}\right) \\
&\quad \times \left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \right).
\end{aligned}
$$

重写指数后即可得到结果。 □

8. Ona generalized Euler identity for modified string functions: Theorems

在第 8.1 节中，我们将定理 1.2 中偶自旋的准周期关系应用于广义欧拉恒等式 (1.14)，从而得到定理 2.1。同样，在第 8.2 节中，我们将定理 3.1 中奇自旋的准周期关系应用于广义欧拉恒等式 (1.14)，从而得到定理 3.2。

8.1. **可容许级偶自旋的准周期性方法**。我们首先改写定理 1.2 的记号：

推论 8.1。我们有

$$\begin{aligned}
&(q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2s,2r}(q) - (q)_\infty^3 q^{pjt^2+2pts} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2s,2r}(q) \\
&\quad = (-1)^p q^{pjt^2+2pts} q^{\binom{p}{2}-p(r-s)} \sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-2psi} \\
&\qquad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(ji+s-j)} - q^{-m(ji+s)} \right) \\
&\qquad \times \left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+1)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+j)}) \right).
\end{aligned}$$

推论 *8.1* 的证明。我们回顾一下 (1.8)：

$$\mathcal{C}^N_{m,\ell}(q) := q^{-s_\lambda} C^N_{m,\ell}(q), \ s_\lambda := -\frac{1}{8} + \frac{(\ell+1)^2}{4(N+2)} - \frac{m^2}{4N},$$

得到

$$\begin{aligned}
&C^{(p,2p+j)}_{2jt+2s,2r}(q) - C^{(p,2p+j)}_{2s,2r}(q) \\
&\qquad = q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+1)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2jt+2s)^2}{4j}} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2s,2r}(q) - q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+1)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2s)^2}{4j}} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2s,2r}(q).
\end{aligned}$$

因此，我们的准周期关系可以改写为

$$\begin{aligned}
&q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+1)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2jt+2s)^2}{4j}} (q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2s,2r}(q) - q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+1)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2s)^2}{4j}} (q)_\infty^3 \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2s,2r}(q) \\
&\quad = (-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+1)^2}{4(2p+j)}} q^{\binom{p}{2}-p(r-s)-\frac{p}{j}s^2} \sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-2psi} \\
&\qquad \times \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)} \left(q^{m(ji+s-j)} - q^{-m(ji+s)} \right) \\
&\qquad \times \left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+1)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+1)}; q^{2p(2p+j)}) \right).
\end{aligned}$$

两边乘以适当次幂的 q 即可得到结果。 □

定理 *2.1* 的证明。对于 $\eta = 2s, \quad \ell = 2r, \quad L = jt + a$，有

$$C^{(p,p')}_{2L+\eta,\ell}(q) = C^N_{2(jt+a)+2s,2r}(q) = C^N_{2jt+2(a+s),2r}(q).$$

代入广义欧拉恒等式 (1.14) 可得

$$\begin{aligned}
(q)_\infty^3 \delta_{2r,2s} &= (q)_\infty^3 \sum_{L=-\infty}^{\infty} (-1)^L q^{\binom{L}{2}} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2L+2s,2r}(q) \\
&= (q)_\infty^3 \sum_{a=0}^{j-1} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^{jt+a} q^{\binom{jt+a}{2}} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2(jt+a)+2s,2r}(q) \\
&= (q)_\infty^3 \sum_{a=0}^{j-1} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^{jt+a} q^{\binom{jt+a}{2}} \mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2(a+s),2r}(q).
\end{aligned}$$

然后我们使用推论 8.1：

$$
\begin{aligned}
(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} = (q)_\infty^3 &\sum_{a=0}^{j-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt+a}q^{\binom{jt+a}{2}}q^{pjt^2+2pt(a+s)}\mathcal{C}_{2(a+s),2r}^{(p,2p+j)}(q)\\
&+\sum_{a=0}^{j-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt+a}q^{\binom{jt+a}{2}}(-1)^p q^{pjt^2+2pt(a+s)}q^{\binom{p}{2}-p(r-a-s)}\\
&\times\sum_{i=1}^{t}q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\left(q^{m(ji+a+s-j)}-q^{-m(ji+a+s)}\right)\\
&\times\Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+1)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad-q^{m(2p+j)-m(2r+1)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+1)};q^{2p(2p+j)})\Big).
\end{aligned}
$$

我们将其改写为

$$
\begin{aligned}
(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} = (q)_\infty^3 &\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^{\binom{a}{2}}j(-(-1)^j q^{j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s)};q^{j(2p+j)})\mathcal{C}_{2(a+s),2r}^{(p,2p+j)}(q)\\
&+(-1)^p q^{\binom{p}{2}-p(r-s)}\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^{pa}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\\
&\times\Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+1)};q^{2p(2p+j)})\\
&\quad-q^{m(2p+j)-m(2r+1)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+1)};q^{2p(2p+j)})\Big)\\
&\times\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt}q^{\binom{jt+a}{2}}q^{pjt^2+2pt(a+s)}\\
&\times\sum_{i=1}^{t}q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i}\left(q^{m(ji+a+s-j)}-q^{-m(ji+a+s)}\right).
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

我们重点考察（8.1）的最后两行，但首先改写指数。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt}q^{\binom{jt+a}{2}}q^{pjt^2+2pt(a+s)}\sum_{i=1}^{t}q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i}\left(q^{m(ji+a+s-j)}-q^{-m(ji+a+s)}\right)\\
&\quad=\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt}q^{\binom{a}{2}+j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))}\\
&\qquad\times\sum_{i=1}^{t}q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i}\left(q^{m(ji+a+s-j)}-q^{-m(ji+a+s)}\right)=:\Psi_{a,m}^{s}(q).
\end{aligned}
$$

对于 $t=0$，根据我们的求和约定，内层求和为零，因此我们可以写成

$$
\begin{aligned}
\Psi_{a,m}^{s}(q) = q^{\binom{a}{2}}\sum_{t\geq 1}\sum_{i=1}^{t}&(-1)^{jt}q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))}\\
&\times q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i}\left(q^{m(ji+a+s-j)}-q^{-m(ji+a+s)}\right)
\end{aligned}
$$

$$+ q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\leq -1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \times q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i} \left(q^{m(ji+a+s-j)} - q^{-m(ji+a+s)}\right).$$

再次使用求和约定，我们可以将第二个二重求和写成 t

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i} \left(q^{m(ji+a+s-j)} - q^{-m(ji+a+s)}\right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\leq -1} \sum_{i=t+1}^{0} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i} \left(q^{m(ji+a+s-j)} - q^{-m(ji+a+s)}\right).\end{aligned}$$

在第二个二重求和中，我们进行如下代换： $t \to -t$, $i \to -i+1$:

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i} \left(q^{m(ji+a+s-j)} - q^{-m(ji+a+s)}\right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{-t}{2}-t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{-i+1}{2}-2p(a+s)(-i+1)} \left(q^{m(j(-i+1)+a+s-j)} - q^{-m(j(-i+1)+a+s)}\right).\end{aligned}$$

化简后得到

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2}-2p(a+s)i} \left(q^{m(ji+a+s-j)} - q^{-m(ji+a+s)}\right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t+1}{2}-t(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2}+2p(a+s)(i-1)} \left(q^{-m(j(i-1)-a-s+j)} - q^{m(j(i-1)-a-s)}\right).\end{aligned}$$

将 i 替换为 $i+1$，并将 t 替换为 $t+1$，得到

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 0} \sum_{i=0}^{t} (-1)^{j(t+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+1}{2}+(t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2}-2p(a+s)(i+1)} \left(q^{m(ji+a+s)} - q^{-m(j(i+1)+a+s)}\right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 0} \sum_{i=0}^{t} (-1)^{j(t+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+2}{2}-(t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2}+2p(a+s)i} \left(q^{-m(j(i+1)-a-s)} - q^{m(ji-a-s)}\right).\end{aligned}$$

交换求和符号，得到

$$\begin{aligned}\Psi_{a,m}^{s}(q) = q^{\binom{a}{2}} \sum_{i\geq 0}\sum_{t=i}^{\infty}(-1)^{j(t+1)}q^{j(2p+j)\binom{t+1}{2}+(t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ \times q^{-2pj\binom{i+1}{2}-2p(a+s)(i+1)}\left(q^{m(ji+a+s)}-q^{-m(j(i+1)+a+s)}\right) \\ - q^{\binom{a}{2}} \sum_{i\geq 0}\sum_{t=i}^{\infty}(-1)^{j(t+1)}q^{j(2p+j)\binom{t+2}{2}-(t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ \times q^{-2pj\binom{i+1}{2}+2p(a+s)i}\left(q^{-m(j(i+1)-a-s)}-q^{m(ji-a-s)}\right).\end{aligned}$$

将 t 替换为 $i+t$ 后，我们便回到了一个熟悉的情形：

$$\begin{aligned}\Psi_{a,m}^{s}(q) = q^{\binom{a}{2}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{j(t+i+1)}q^{j(2p+j)\binom{t+i+1}{2}+(t+i+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ \times q^{-2pj\binom{i+1}{2}-2p(a+s)(i+1)}\left(q^{m(ji+a+s)}-q^{-m(j(i+1)+a+s)}\right) \\ - q^{\binom{a}{2}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{j(t+i+1)}q^{j(2p+j)\binom{t+i+2}{2}-(t+i+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+2p(a+s))} \\ \times q^{-2pj\binom{i+1}{2}+2p(a+s)i}\left(q^{-m(j(i+1)-a-s)}-q^{m(ji-a-s)}\right).\end{aligned} \tag{8.2}$$

我们希望将 (8.2) 写成两个形如 (1.9) 的双重求和之和。在第三个和与第四个和中，我们分别作代换 $i\to -i-1$ 和 $t\to -t-1$。第一个和与第三个双重求和配对，第二个和与第四个和配对，于是便得到所需结果。□

8.2. **可容许级、奇自旋的准周期性方法**。我们首先改写定理 3.1 的记号：

Co推论 8.2. 对于 $(p,p')=(p,2p+j)$，我们有奇自旋的拟周期关系 n

$$\begin{aligned}&(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q) - q^{pjt^2+pt(2s+1)}(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2s+1,2r+1}(q) \\ &= (-1)^p q^{pjt^2+pt(2s+1)+\binom{p}{2}-p(r-s)}\sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2s+1)i} \\ &\times \sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\left(q^{m(ji+s-j+1)}-q^{-m(ji+s)}\right) \\ &\times \left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+2)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\right).\end{aligned}$$

推论 *8.2* 的证明。回顾 (1.8)：

$$\mathcal{C}^{N}_{m,\ell}(q) := q^{-s_\lambda}C^{N}_{m,\ell}(q),\ s_\lambda := -\frac{1}{8}+\frac{(\ell+1)^2}{4(N+2)}-\frac{m^2}{4N},$$

以得到

$$\begin{aligned}&C^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q) - C^{(p,2p+j)}_{2s+1,2r+1}(q) \\ &\quad = q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2jt+2s+1)^2}{4j}}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q) - q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2s+1)^2}{4j}}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2s+1,2r+1}(q).\end{aligned}$$

因此，我们的准周期关系可以改写为

$$
\begin{aligned}
&q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2jt+2s+1)^2}{4j}}(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2s+1,2r+1}(q)-q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}-\frac{p(2s+1)^2}{4j}}(q)_\infty^3\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2s+1,2r+1}(q)\\
&=(-1)^p q^{-\frac{1}{8}+\frac{p(2r+2)^2}{4(2p+j)}}q^{\binom{p+1}{2}-p(r+1-s)-\frac{p}{4j}(2s+1)^2}\sum_{i=1}^{t}q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2s+1)i}\\
&\quad\times\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\left(q^{m(ji+s-j+1)}-q^{-m(ji+s)}\right)\\
&\quad\times\left(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})-q^{m(2p+j)-m(2r+2)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\right).
\end{aligned}
$$

两边乘以适当次幂的 q 即可得到结果。 □

定理 *3.2* 的证明。对于 $\eta=2s+1,\quad \ell=2r+1,\quad L=jt+a$，我们有

$$C^{(p,p')}_{2L+\eta,\ell}(q)=C^N_{2(jt+a)+2s+1,2r+1}(q)=C^N_{2jt+2(a+s)+1,2r+1}(q).$$

代入广义欧拉恒等式 **(1.14)** 得

$$
\begin{aligned}
(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}&=(q)_\infty^3\sum_{L=-\infty}^{\infty}(-1)^L q^{\binom{L}{2}}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2L+2s+1,2r+1}(q)\\
&=(q)_\infty^3\sum_{a=0}^{j-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt+a}q^{\binom{jt+a}{2}}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2(jt+a)+2s+1,2r+1}(q)\\
&=(q)_\infty^3\sum_{a=0}^{j-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt+a}q^{\binom{jt+a}{2}}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2jt+2(a+s)+1,2r+1}(q).
\end{aligned}
$$

接着使用推论 8.2:

$$
\begin{aligned}
&(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}\\
&=(q)_\infty^3\sum_{a=0}^{j-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt+a}q^{\binom{jt+a}{2}}q^{pjt^2+pt(2(a+s)+1)}\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2(a+s)+1,2r+1}(q)\\
&\quad+\sum_{a=0}^{j-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}(-1)^{jt+a}q^{\binom{jt+a}{2}}(-1)^p q^{pjt^2+pt(2(a+s)+1)+\binom{p}{2}-p(r-a-s)}\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{t}q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i}\times\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}\left(q^{m(ji+a+s-j+1)}-q^{-m(ji+a+s)}\right)\\
&\quad\times\Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\\
&\qquad-q^{m(2p+j)-m(2r+2)}j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)};q^{2p(2p+j)})\Big).
\end{aligned}
$$

我们将其改写为

$$
\begin{aligned}
(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}&=(q)_\infty^3\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^{\binom{a}{2}}j(-(-1)^j q^{j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1)})\mathcal{C}^{(p,2p+j)}_{2(a+s)+1,2r+1}(q)\\
&\quad+(-1)^p q^{\binom{p}{2}-p(r-s)}\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^{pa}\sum_{m=1}^{p-1}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-p)}
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

$$\times \Big(j(-q^{m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) - q^{m(2p+j)-m(2r+2)} j(-q^{-m(2p+j)+p(2r+2)}; q^{2p(2p+j)}) \Big) \times \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^{jt} q^{\binom{jt+a}{2}} q^{pjt^2+pt(2(a+s)+1)} \times \sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right).$$

我们重点讨论（8.3）的最后两行，但首先改写其中的指数。

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^{jt} q^{\binom{jt+a}{2}} q^{pjt^2+pt(2(a+s)+1)} \sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right)$$
$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^{jt} q^{\binom{a}{2}+j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times \sum_{i=1}^{t} q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right) =: \Psi_{a,m}^{s}(q).$$

对于 $t=0$，根据我们的求和约定，内层求和为零，因此可以写成

$$\Psi_{a,m}^{s}(q) = q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right) + q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\leq -1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right).$$

再次使用求和约定，我们可以将第二个二重求和写为 t

$$\Psi_{a,m}^{s}(q) = q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right) - q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\leq -1} \sum_{i=t+1}^{0} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right).$$

在第二个二重求和中，我们作如下代换 $t \to -t, i \to -i+1$:

$$\Psi_{a,m}^{s}(q) = q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2}+t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times q^{-2pj\binom{i}{2}-p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right)$$

$$- q^{\binom{a}{2}} \sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{-t}{2} - t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \times q^{-2pj\binom{-i+1}{2} - p(2(a+s)+1)(-i+1)} \left(q^{m(j(-i+1)+a+s-j+1)} - q^{-m(j(-i+1)+a+s)} \right).$$

化简后得到

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t}{2} + t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2} - p(2(a+s)+1)i} \left(q^{m(ji+a+s-j+1)} - q^{-m(ji+a+s)} \right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 1} \sum_{i=1}^{t} (-1)^{jt} q^{j(2p+j)\binom{t+1}{2} - t(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i}{2} + p(2(a+s)+1)(i-1)} \left(q^{-m(j(i-1)-a-s+j-1)} - q^{m(j(i-1)-a-s)} \right).\end{aligned}$$

将 i 替换为 $i+1$，并将 t 替换为 $t+1$，得到

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 0} \sum_{i=0}^{t} (-1)^{j(t+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+1}{2} + (t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2} - p(2(a+s)+1)(i+1)} \left(q^{m(ji+a+s+1)} - q^{-m(j(i+1)+a+s)} \right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{t\geq 0} \sum_{i=0}^{t} (-1)^{j(t+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+2}{2} - (t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2} + p(2(a+s)+1)i} \left(q^{-m(j(i+1)-a-s-1)} - q^{m(ji-a-s)} \right).\end{aligned}$$

我们交换求和符号，得到

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{i=0}^{t} \sum_{t\geq 0} (-1)^{j(t+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+1}{2} + (t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2} - p(2(a+s)+1)(i+1)} \left(q^{m(ji+a+s+1)} - q^{-m(j(i+1)+a+s)} \right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{i=0}^{t} \sum_{t\geq 0} (-1)^{j(t+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+2}{2} - (t+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2} + p(2(a+s)+1)i} \left(q^{-m(j(i+1)-a-s-1)} - q^{m(ji-a-s)} \right).\end{aligned}$$

将 t 代入 $i+t$，便回到了一个熟悉的情形:

$$\begin{aligned}\Psi^{s}_{a,m}(q) = q^{\binom{a}{2}} &\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{j(t+i+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+i+1}{2} + (t+i+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2} - p(2(a+s)+1)(i+1)} \left(q^{m(ji+a+s+1)} - q^{-m(j(i+1)+a+s)} \right) \\ - q^{\binom{a}{2}} &\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{j(t+i+1)} q^{j(2p+j)\binom{t+i+2}{2} - (t+i+1)(j(a+p)+\binom{j}{2}+p(2(a+s)+1))} \\ &\times q^{-2pj\binom{i+1}{2} + p(2(a+s)+1)i} \left(q^{-m(j(i+1)-a-s-1)} - q^{m(ji-a-s)} \right).\end{aligned} \tag{8.4}$$

我们想将 (8.4) 写成两个形如 (1.9) 的双重求和之和。在第三和第四个求和式中，我们分别作代换 $i \to -i-1$ 和 $t \to -t-1$。第一个与第三个双重求和配对，第二个与第四个求和式配对，这样就完成了。□

9. On a generalized Euler identity for modified string functions: Corollaries

本节将推导定理 2.1 和定理 3.2 中修正的广义欧拉恒等式的推论。第 9.1 节推导偶自旋弦函数的推论 2.3、2.6 和 2.10。第 9.2 节推导奇自旋弦函数的推论 3.4、3.6 和 3.9。

9.1. 可容许层级为： $1/2$、 $1/3$ 和 $2/3$ 的偶自旋弦函数。

推论 *2.3* 的证明。 我们将推论 2.2 特化为 $p=2$。由此得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} &= (q)_\infty^3 j(q^{2+4s};q^5)\mathcal{C}^{(2,5)}_{2s,2r}(q)\\ &\quad - q^{-r+2s}\Big(j(-q^{7+4r};q^{20}) - q^{4-2r}j(-q^{-3+4r};q^{20})\Big)\\ &\quad \times\Big(-q^{2+s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q) + q^{1-s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\Big).\end{aligned}$$

我们将两个 theta 函数合并。首先使用 (5.2b)，然后使用 (5.2a)

$$\begin{aligned}j(-q^{7+4r};q^{20}) - q^{4-2r}j(-q^{-3+4r};q^{20}) &= j(-q^{7+4r};q^{20}) - q^{4-2r}j(-q^{23-4r};q^{20})\\ &= j(-q^{7+4r};q^{20}) - q^{1+2r}j(-q^{3-4r};q^{20}).\end{aligned}$$

我们再次使用 (5.2b)，然后使用 (5.3)，得到

$$\begin{aligned}j(-q^{7+4r};q^{20}) - q^{4-2r}j(-q^{-3+4r};q^{20}) &= j(-q^{7+4r};q^{20}) - q^{1+2r}j(-q^{17+4r};q^{20})\\ &= j(q^{1+2r};q^5).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} &= (q)_\infty^3 j(q^{2+4s};q^5)\mathcal{C}^{(2,5)}_{2s,2r}(q)\\ &\quad - q^{-r+2s}j(q^{1+2r};q^5)\times\Big(-q^{2+s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q) + q^{1-s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\Big).\end{aligned}$$

如果重新分配第二行中的指数，就能得到所需结果。 □

推论 *2.6* 的证明。我们将推论 2.2 特化到 $p=3$。由此得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} &= (q)_\infty^3 j(q^{3+6s};q^7)\mathcal{C}^{(3,7)}_{2s,2r}(q)\\ &\quad - q^{3-3r+3s}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-3)}\\ &\quad\times\Big(j(-q^{7m+6r+3};q^{42}) - q^{7m-m(2r+1)}j(-q^{-7m+6r+3};q^{42})\Big)\\ &\quad\times\Big(-q^{3+ms}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^{m+4};q) + q^{3-m(s+1)}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^{-m+4};q)\Big).\end{aligned}$$

我们将 theta 函数合并。对于 $m=1$，我们首先使用 (5.2b) 得到

$$\begin{aligned}&j(-q^{10+6r};q^{42}) - q^{6-2r}j(-q^{-4+6r};q^{42})\\ &\qquad = j(-q^{32-6r};q^{42}) - q^{6-2r}j(-q^{46-6r};q^{42})\\ &\qquad = j(-q^{14+3(6-2r)};q^{42}) - q^{6-2r}j(-q^{28+3(6-2r)};q^{42}).\end{aligned}$$

利用五重乘积恒等式 (5.4a)，再一次使用 (5.2b)，我们得到

$$j(-q^{10+6r};q^{42}) - q^{6-2r}j(-q^{-4+6r};q^{42}) = \frac{j(q^{6-2r};q^{14})j(q^{14+2(6-2r)};q^{28})}{J_{28}} = \frac{j(q^{8+2r};q^{14})j(q^{2+4r};q^{28})}{J_{28}}.$$

对于 $m=2$，我们以类似的方式推导得到

$$j(-q^{17+6r};q^{42}) - q^{12-4r}j(-q^{-11+6r};q^{42}) = \frac{j(q^{1+2r};q^{14})j(q^{16+4r};q^{28})}{J_{28}}.$$

因此

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} = (q)_\infty^3 j(q^{3+6s};q^7)\mathcal{C}^{(3,7)}_{2s,2r}(q) &\\ - q^{3-3r+3s}\left(-q^{r-2}\right)\frac{j(q^{8+2r};q^{14})j(q^{2+4r};q^{28})}{J_{28}} &\\ \times\Big(-q^{3+s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^5;q) + q^{2-s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^3;q)\Big) &\\ - q^{3-3r+3s}\left(q^{2r-3}\right)\frac{j(q^{1+2r};q^{14})j(q^{16+4r};q^{28})}{J_{28}} &\\ \times\Big(-q^{3+2s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^6;q) + q^{1-2s}f_{7,7,1}(q^{6s+10},q^2;q)\Big).&\end{aligned}$$

重新分配指数即可得到所需结果。 □

推论 *2.10* 的证明。 我们将定理 2.1 特化为 $p=3, j=2$。由此得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} = (q)_\infty^3\sum_{a=0}^{1}(-1)^a j(-q^{7+8a+6s};q^{16})\mathcal{C}^{(3,8)}_{2(a+s),2r}(q) &\\ - q^{3-3r+3s}\sum_{a=0}^{1}(-1)^a q^{3a}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-3)} &\\ \times\Big(j(-q^{8m+3(2r+1)};q^{48}) - q^{8m-m(2r+1)}j(-q^{-8m+3(2r+1)};q^{48})\Big) &\\ \times\Big(q^{7+2a+m(a+s)}f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23},-q^{11+2(a+m)};q^2) &\\ - q^{7+2a-m(a+s+2)}f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23},-q^{11+2(a-m)};q^2)\Big).&\end{aligned}$$

我们展开关于 m 的求和。由此得到

$$\begin{aligned}&(q)_\infty^3\delta_{2r,2s}\\ &= (q)_\infty^3\sum_{a=0}^{1}(-1)^a j(-q^{7+8a+6s};q^{16})\mathcal{C}^{(3,8)}_{2(a+s),2r}(q)\\ &- q^{3-3r+3s}\sum_{a=0}^{1}(-1)^a q^{3a}\\ &\times\Big[-q^{r-2}\Big(j(-q^{11+6r};q^{48}) - q^{7-2r}j(-q^{-5+6r};q^{48})\Big)\\ &\quad\times\Big(q^{7+3a+s}f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23},-q^{13+2a};q^2) - q^{5+a-s}f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23},-q^{9+2a};q^2)\Big)\\ &+ q^{2r-3}\Big(j(-q^{19+6r};q^{48}) - q^{14-4r}j(-q^{-13+6r};q^{48})\Big)\end{aligned}$$

$$\times \Big(q^{7+4a+2s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{15+2a}; q^2) - q^{3-2s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{7+2a}; q^2)\Big)\Big].$$

我们再次合并 theta 函数。对于第一个 theta 函数求和式，我们使用 (5.2b)、(5.4a) 和 (5.2b)，得到

$$\begin{aligned} j(-q^{11+6r}; q^{48}) - q^{7-2r} j(-q^{-5+6r}; q^{48}) &= j(-q^{37-6r}; q^{48}) - q^{7-2r} j(-q^{53-6r}; q^{48}) \\ &= \frac{j(q^{7-2r}; q^{16}) j(q^{30-4r}; q^{32})}{J_{32}} \\ &= \frac{j(q^{9+2r}; q^{16}) j(q^{2+4r}; q^{32})}{J_{32}}. \end{aligned}$$

对于第二个求和，我们用类似的方法论证，得到

$$j(-q^{19+6r}; q^{48}) - q^{14-4r} j(-q^{-13+6r}; q^{48}) = \frac{j(q^{1+2r}; q^{16}) j(q^{18+4r}; q^{32})}{J_{32}}.$$

代回后得到

$$\begin{aligned} &(q)_\infty^3 \delta_{2r,2s} \\ &= (q)_\infty^3 \sum_{a=0}^{1} (-1)^a j(-q^{7+8a+6s}; q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2(a+s),2r}(q) \\ &\quad - q^{3-3r+3s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \\ &\qquad \times \Big[- q^{r-2} \frac{j(q^{9+2r}; q^{16}) j(q^{2+4r}; q^{32})}{J_{32}} \\ &\qquad\quad \times \Big(q^{7+3a+s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{13+2a}; q^2) - q^{5+a-s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{9+2a}; q^2)\Big) \\ &\qquad + q^{2r-3} \frac{j(q^{1+2r}; q^{16}) j(q^{18+4r}; q^{32})}{J_{32}} \\ &\qquad\quad \times \Big(q^{7+4a+2s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{15+2a}; q^2) - q^{3-2s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{7+2a}; q^2)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

我们展开关于 a的第一个求和，并将第二个求和分配到 a 上。由此得到

$$\begin{aligned} (q)_\infty^3 \delta_{2r,2s} = (q)_\infty^3 j(-q^{7+6s}; q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s,2r}(q) &- (q)_\infty^3 j(-q^{15+6s}; q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2(1+s),2r}(q) \\ &- q^{3-3r+3s} \times \Big[- q^{r-2} \frac{j(q^{9+2r}; q^{16}) j(q^{2+4r}; q^{32})}{J_{32}} \\ &\times \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \Big(q^{7+3a+s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{13+2a}; q^2) \\ &\quad - q^{5+a-s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{9+2a}; q^2)\Big) \\ &+ q^{2r-3} \frac{j(q^{1+2r}; q^{16}) j(q^{18+4r}; q^{32})}{J_{32}} \\ &\times \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \Big(q^{7+4a+2s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{15+2a}; q^2) \\ &\quad - q^{3-2s} f_{8,8,2}(-q^{8a+6s+23}, -q^{7+2a}; q^2)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

我们继续展开关于 a 的求和：

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r,2s} &= (q)_\infty^3 j(-q^{7+6s};q^{16})\mathcal{C}^{(3,8)}_{2s,2r}(q) - (q)_\infty^3 j(-q^{15+6s};q^{16})\mathcal{C}^{(3,8)}_{2(1+s),2r}(q)\\ &\quad - q^{3-3r+3s}\times\Big[-q^{r-2}\frac{j(q^{9+2r};q^{16})j(q^{2+4r};q^{32})}{J_{32}}\\ &\quad\times\Big(q^{7+s}f_{8,8,2}(-q^{6s+23},-q^{13};q^2) - q^{5-s}f_{8,8,2}(-q^{6s+23},-q^9;q^2)\\ &\qquad - q^{13+s}f_{8,8,2}(-q^{31+6s},-q^{15};q^2) + q^{9-s}f_{8,8,2}(-q^{31+6s},-q^{11};q^2)\Big)\\ &\quad + q^{2r-3}\frac{j(q^{1+2r};q^{16})j(q^{18+4r};q^{32})}{J_{32}}\\ &\quad\times\Big(q^{7+2s}f_{8,8,2}(-q^{6s+23},-q^{15};q^2) - q^{3-2s}f_{8,8,2}(-q^{6s+23},-q^7;q^2)\\ &\qquad - q^{14+2s}f_{8,8,2}(-q^{31+6s},-q^{17};q^2) + q^{6-2s}f_{8,8,2}(-q^{31+6s},-q^9;q^2)\Big)\Big].\end{aligned}$$

重新分配指数，并注意到

$$f_{8,8,2}(x,y;q) = f_{4,4,1}(x,y;q^2)$$

由此得到最终形式。 □

9.2. **可容许层级为 $1/2$、$1/3$ 和 $2/3$ 的奇自旋弦函数。**

推论 *3.4* 的证明。 我们将推论 3.3 特化为 $p=2$。由此得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1} &= (q)_\infty^3 j(q^{4+4s};q^5)\mathcal{C}^{(2,5)}_{2s+1,2r+1}(q)\\ &\quad - q^{-r}\Big(j(-q^{9+4r};q^{20}) - q^{3-2r}j(-q^{-1+4r};q^{20})\Big)\\ &\quad\times\Big(-q^{3+3s}f_{5,5,1}(q^{4s+9},q^4;q) + q^{1+s}f_{5,5,1}(q^{4s+9},q^2;q)\Big).\end{aligned}$$

我们合并 theta 函数。利用 (5.2b)，再应用 (5.3)，得到

$$\begin{aligned}j(-q^{9+4r};q^{20}) - q^{3-2r}j(-q^{-1+4r};q^{20}) &= j(-q^{11-4r};q^{20}) - q^{3-2r}j(-q^{21-4r};q^{20})\\ &= j(q^{3-2r};q^5).\end{aligned}$$

利用 (5.2b) 即可得到该结果。 □

推论 *3.6* 的证明。 我们将推论 3.3 特化至 $p=3$。由此得到

$$\begin{aligned}&(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1}\\ &\quad= (q)_\infty^3 j(q^{6s+6};q^7)\mathcal{C}^{(3,7)}_{2s+1,2r+1}(q)\\ &\qquad - q^{3-3r+3s}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-3)}\\ &\qquad\times\Big(j(-q^{7m+6r+6};q^{42}) - q^{5m-2mr}j(-q^{-7m+6r+6};q^{42})\Big)\\ &\qquad\times\Big(-q^{3+m(s+1)}f_{7,7,1}(q^{6s+13},q^{m+4};q) + q^{3-m(s+1)}f_{7,7,1}(q^{6s+13},q^{-m+4};q)\Big).\end{aligned}$$

展开对 m 的求和，得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3\delta_{2r+1,2s+1} &= (q)_\infty^3 j(q^{6s+6};q^7)\mathcal{C}^{(3,7)}_{2s+1,2r+1}(q)\\ &\quad + q^{1-2r+3s}\Big(j(-q^{13+6r};q^{42}) - q^{5-2r}j(-q^{-1+6r};q^{42})\Big)\end{aligned}$$

$$\times \Big(-q^{4+s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^5; q) + q^{2-s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^3; q) \Big)$$
$$- q^{-r+3s} \Big(j(-q^{20+6r}; q^{42}) - q^{10-4r} j(-q^{-8+6r}; q^{42}) \Big)$$
$$\times \Big(-q^{5+2s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^6; q) + q^{1-2s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^2; q) \Big).$$

我们合并 theta 函数。利用 (5.2b)、五重乘积恒等式 (5.4a)，并再次使用 (5.2b)，可得

$$\begin{aligned} j(-q^{13+6r}; q^{42}) - q^{5-2r} j(-q^{-1+6r}; q^{42}) &= j(-q^{29-6r}; q^{42}) - q^{5-2r} j(-q^{43-6r}; q^{42}) \\ &= \frac{j(q^{5-2r}; q^{14}) j(q^{14+2(5-2r)}; q^{28})}{J_{28}} \\ &= \frac{j(q^{9+2r}; q^{14}) j(q^{4+4r}; q^{28})}{J_{28}}. \end{aligned}$$

以类似的方式推理，可得

$$j(-q^{20+6r}; q^{42}) - q^{10-4r} j(-q^{-8+6r}; q^{42}) = \frac{j(q^{2+2r}; q^{14}) j(q^{18+4r}; q^{28})}{J_{28}}.$$

代回原始展开式，得到

$$\begin{aligned} (q)_\infty^3 \delta_{2r+1,2s+1} = (q)_\infty^3 & j(q^{6s+6}; q^7) \mathcal{C}^{(3,7)}_{2s+1,2r+1}(q) \\ & + q^{1-2r+3s} \frac{j(q^{9+2r}; q^{14}) j(q^{4+4r}; q^{28})}{J_{28}} \\ & \quad \times \Big(-q^{4+s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^5; q) + q^{2-s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^3; q) \Big) \\ & - q^{-r+3s} \frac{j(q^{2+2r}; q^{14}) j(q^{18+4r}; q^{28})}{J_{28}} \\ & \quad \times \Big(-q^{5+2s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^6; q) + q^{1-2s} f_{7,7,1}(q^{6s+13}, q^2; q) \Big). \end{aligned}$$

重新整理指数，即得所需结果。 □

推论 *3.9* 的证明。 我们将定理 3.2 特化到 $p = 3, j = 2$。由此得到

$$\begin{aligned} (q)_\infty^3 \delta_{2r+1,2s+1} = (q)_\infty^3 & \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{\binom{a}{2}} j(-q^{8a+10+6s}; q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2(a+s)+1,2r+1}(q) \\ & - q^{3-3r+3s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \sum_{m=1}^{2} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-3)} \\ & \times \Big(j(-q^{8m+6r+6}; q^{48}) - q^{6m-2mr} j(-q^{-8m+6r+6}; q^{48}) \Big) \\ & \times \Big(q^{\binom{a}{2}+7+2a+m(a+s+1)} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{11+2a+2m}; q^4) \\ & \quad - q^{\binom{a}{2}+7+2a-m(a+s+2)} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{11+2a-2m}; q^4) \Big). \end{aligned}$$

我们将第一个和式按 a展开，得到

$$\begin{aligned} (q)_\infty^3 \delta_{2r+1,2s+1} = (q)_\infty^3 & j(-q^{10+6s}; q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 j(-q^{18+6s}; q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+3,2r+1}(q) \\ & - q^{3-3r+3s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \sum_{m=1}^{2} (-1)^m q^{\binom{m+1}{2}+m(r-3)} \end{aligned}$$

$$\times \Big(j(-q^{8m+6r+6};q^{48}) - q^{6m-2mr} j(-q^{-8m+6r+6};q^{48})\Big)$$

$$, \qquad \times \Big(q^{\binom{a}{2}+7+2a+m(a+s+1)} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{11+2a+2m};q^4) - q^{\binom{a}{2}+7+2a-m(a+s+2)} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{11+2a-2m};q^4)\Big).$$

现在我们将和式按 m展开，得到

$$\begin{aligned}(q)_\infty^3 \delta_{2r+1,2s+1} &= (q)_\infty^3 j(-q^{10+6s};q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 j(-q^{18+6s};q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+3,2r+1}(q) \\ &\quad + q^{1-2r}\Big(j(-q^{14+6r};q^{48}) - q^{6-2r} j(-q^{-2+6r};q^{48})\Big) \\ &\quad , \qquad \times \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \Big(q^{8+3a+4s} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{13+2a};q^4) \\ &\qquad - q^{5+a+2s} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{9+2a};q^4)\Big) \\ &\quad - q^{-r}\Big(j(-q^{22+6r};q^{48}) - q^{12-4r} j(-q^{-10+6r};q^{48})\Big) \\ &\quad , \qquad \times \sum_{a=0}^{1} (-1)^a q^{3a} \Big(q^{9+4a+5s} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{15+2a};q^4) \\ &\qquad - q^{3+s} f_{4,4,1}(-q^{6s+8a+26}, -q^{7+2a};q^4)\Big).\end{aligned}$$

最后，我们展开剩余的求和项 a ，得到

$$\begin{aligned}&(q)_\infty^3 \delta_{2r+1,2s+1} \\ &\quad = (q)_\infty^3 j(-q^{10+6s};q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+1,2r+1}(q) - (q)_\infty^3 j(-q^{18+6s};q^{16}) \mathcal{C}^{(3,8)}_{2s+3,2r+1}(q) \\ &\qquad + q^{1-2r}\Big(j(-q^{14+6r};q^{48}) - q^{6-2r} j(-q^{-2+6r};q^{48})\Big) \\ &\qquad , \qquad \times \Big[q^{8+4s} f_{4,4,1}(-q^{6s+26}, -q^{13};q^4) - q^{5+2s} f_{4,4,1}(-q^{6s+26}, -q^{9};q^4) \\ &\qquad\quad - q^3\Big(q^{11+4s} f_{4,4,1}(-q^{6s+34}, -q^{15};q^4) - q^{6+2s} f_{4,4,1}(-q^{6s+34}, -q^{11};q^4)\Big)\Big] \\ &\qquad - q^{-r}\Big(j(-q^{22+6r};q^{48}) - q^{12-4r} j(-q^{-10+6r};q^{48})\Big) \\ &\qquad , \qquad \times \Big[q^{9+5s} f_{4,4,1}(-q^{6s+26}, -q^{15};q^4) - q^{3+s} f_{4,4,1}(-q^{6s+26}, -q^{7};q^4) \\ &\qquad\quad - q^3\Big(q^{13+5s} f_{4,4,1}(-q^{6s+34}, -q^{17};q^4) - q^{3+s} f_{4,4,1}(-q^{6s+34}, -q^{9};q^4)\Big)\Big].\end{aligned}$$

我们合并 theta 函数。利用 (5.2b) 和五重乘积恒等式 (5.4a) 得到

$$\begin{aligned}j(-q^{14+6r};q^{48}) - q^{6-2r} j(-q^{-2+6r};q^{48}) &= j(-q^{34-6r};q^{48}) - q^{6-2r} j(-q^{50-6r};q^{48}) \\ &= j(-q^{16+3(6-2r)};q^{48}) - q^{6-2r} j(-q^{32+3(6-2r)};q^{48}) \\ &= \frac{j(q^{6-2r};q^{16}) j(q^{16+2(6-2r)};q^{32})}{J_{32}}.\end{aligned}$$

再次利用（5.2b），可得

$$j(-q^{14+6r};q^{48}) - q^{6-2r} j(-q^{-2+6r};q^{48}) = \frac{j(q^{10+2r};q^{16}) j(q^{4+4r};q^{32})}{J_{32}}.$$

以类似方式推理，可得

$$j(-q^{22+6r};q^{48})-q^{12-4r}j(-q^{-10+6r};q^{48})=\frac{j(q^{2+2r};q^{16})j(q^{20+4r};q^{32})}{J_{32}}.$$

然后，我们将 theta 函数代入原始展开式并进行化简。 □

10. Mock theta function identities for double-sum coefficients from even-spin

本节讨论偶自旋情形下的广义欧拉恒等式。我们证明定理 2.4 中关于 $1/2$-层级、定理 2.7 和 2.8 中关于 $1/3$-层级，以及定理 2.11、2.12、2.13 和 2.14 中关于 $2/3$-层级的假 theta 函数恒等式的一般形式。本节中的证明方法都相同，但所涉及的繁琐的记录工作逐渐增多。

10.1. 定理 $1/2$-层级弦函数：定理 2.4。 我们陈述证明定理 2.4 所需的命题，然后给出定理的证明，接着给出各命题的证明。

我们将定理 2.4 中恒等式的左端定义为

$$F(r):=-q^{2+3r}f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^4;q)+q^{1+r}f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^2;q).$$

将右端定义为

$$G(r):=(-1)^r j(q^{r+3};q^5)\left(q^{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{2}\mu_2(q)+q^{-3\binom{r}{2}}\sum_{k=0}^{2r-1}(-1)^k q^{2rk-\binom{k+1}{2}}\right)$$
$$-(-1)^r(-q)^{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{r+3};-q^5).$$

命题 10.1. 我们有， $F(r)$ 和 $G(r)$ 满足相同的函数方程：

$$H(r+5)-q^{12+4r}H(r)$$
$$=-(-1)^r q^{10-3\binom{r}{2}-r}j(q^{r+3};q^5)\left(q^{2+3r}\sum_{m=0}^{4}q^{-2m^2-m-4mr}-q^{1+r}\sum_{m=0}^{4}q^{-2m^2-3m-4mr}\right).$$

对于定理 2.4 中相应的双重求和，我们利用推论 5.11 计算阿佩尔函数表达式。

命题 10.2. 我们有

$$-q^{2+3s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)$$
$$=-q^{2+5s}j(q^{4s+7};q^5)\left(\sum_{k=0}^{2s-1}(-1)^k q^{2sk-\binom{k+1}{2}}+2q^{s+4\binom{s}{2}}m(-q,-1;q^4)\right).$$

定理 2.4 的证明。 命题 10.1 告诉我们

$$F(s+5)-G(s+5)=q^{12+4r}\left(F(s)-G(s)\right),$$

因此，我们只需证明 $0\le s\le 4$ 的定理 2.4。 $s=2$ 的情形可由引理 5.5 得出。根据推论 5.11，我们有

$$-q^{2+3s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)$$
$$=-q^{2+3s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)$$
$$-\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^{2+3s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\right).$$

命题 10.2 和引理 5.14（5.18）给出

$$\begin{aligned}
&-q^{2+3s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\\
&\quad=-q^{2+5s}j(q^{4s+7};q^5)\left(\sum_{k=0}^{2s-1}(-1)^k q^{2sk-\binom{k+1}{2}}+q^{s+4\binom{s}{2}}\left(\frac{1}{2}\mu_2(q)+\frac{1}{2}\frac{J_{2,4}^2}{J_1^3}\right)\right)\\
&\qquad-\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^{2+3s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\right).
\end{aligned}$$

利用 (5.2a) 可得

$$-q^{2+5s}j(q^{4s+7};q^5)=-q^{2+5s}j(q^{5(s+1)+2-s};q^5)=-q^{2+5s}(-1)^{s+1}q^{-5\binom{s+1}{2}-(2-s)(s+1)}j(q^{2-s};q^5).$$

化简并利用 (5.2b) 可得

$$-q^{2+5s}j(q^{4s+7};q^5)=(-1)^s q^{-3\binom{s}{2}}j(q^{s+3};q^5).$$

代回后得到

$$\begin{aligned}
&-q^{2+3s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}f_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\\
&\quad=(-1)^s j(q^{s+3};q^5)\left(q^{-3\binom{s}{2}}\sum_{k=0}^{2s-1}(-1)^k q^{2sk-\binom{k+1}{2}}+q^{\binom{s+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\mu_2(q)+\frac{1}{2}\frac{J_{2,4}^4}{J_1^3}\right)\right)\\
&\qquad-\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^{2+3s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}\vartheta_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\right).
\end{aligned}$$

命题 6.1 随即给出该结果。 □

命题 *10.2* 的证明。由推论 5.11 可知

$$h_{5,5,1}(x,y;q)=j(x;q^5)m(-q^4x^{-1}y,-1;q^4)+j(y;q)m(-q^{10}xy^{-5},-1;q^{20}),\tag{10.1}$$

因此

$$\begin{aligned}
&-q^{2+3s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\\
&\quad=-q^{2+3s}\left(j(q^{4s+7};q^5)m(-q^{1-4s},-1;q^4)+j(q^4;q)m(-q^{-3+4s},-1;q^{20})\right)\\
&\qquad+q^{1+s}\left(j(q^{4s+7};q^5)m(-q^{-1-4s},-1;q^4)+j(q^2;q)m(-q^{7+4s},-1;q^{20})\right).
\end{aligned}$$

注意，$j(q^n;q)=0$ 适用于 $n\in\mathbb{Z}$，且相应的阿佩尔函数均已定义。由此得到更紧凑的

$$\begin{aligned}
&-q^{2+3s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\\
&\quad=q^{1+s}j(q^{4s+7};q^5)\left(m(-q^{-1-4s},-1;q^4)-q^{1+2s}m(-q^{1-4s},-1;q^4)\right).
\end{aligned}$$

利用阿佩尔函数性质(5.13b)，并提取一个 q项，得到

$$\begin{aligned}
&-q^{2+3s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^4;q)+q^{1+s}h_{5,5,1}(q^{4s+7},q^2;q)\\
&\quad=q^{1+s}j(q^{4s+7};q^5)\left(-q^{1+4s}m(-q^{1+4s},-1;q^4)+q^{6s}m(-q^{-1+4s},-1;q^4)\right)\\
&\quad=-q^{2+5s}j(q^{4s+7};q^5)\left(m(-q^{1+4s},-1;q^4)-q^{2s-1}m(-q^{-1+4s},-1;q^4)\right).
\end{aligned}$$

利用引理 5.13（5.15）即可得到结果。 □

命题 *10.1* 的证明： $F(r)$。将命题 5.3 特化为 $(a,b,c) = (5,5,1)$，其中$\ell=-1$ 且 $k=5$。于是

$$\begin{aligned} f_{5,5,1}(x,y;q) &= (-x)^{-1}(-y)^5 q^{5\binom{-1}{2}-25+\binom{5}{2}} f_{5,5,1}(q^{20}x,y;q) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{-1-1} (-x)^m q^{5\binom{m}{2}} j(q^{5m}y;q) + \sum_{m=0}^{4} (-y)^m q^{\binom{m}{2}} j(q^{5m}x;q^5). \end{aligned}$$

按照我们的求和约定 (5.7) 重写后，得到

$$\begin{aligned} f_{5,5,1}(x,y;q) &= x^{-1}y^5 q^{-10} f_{5,5,1}(q^{20s}x,y;q) \\ &\quad - \sum_{m=-1}^{-1} (-x)^m q^{5\binom{m}{2}} j(q^{5m}y;q) + \sum_{m=0}^{4} (-y)^m q^{\binom{m}{2}} j(q^{5m}x;q^5). \end{aligned} \tag{10.2}$$

在 (10.2) 中，代入 $(x,\ y) = (q^{4r+7},\ q^4)$ 和 $(x,\ y) = (q^{4r+7},\ q^2)$。回顾一下，对于 $n\in\mathbb{Z}$，有 $j(q^n;q) = 0$。由此分别得到

$$\begin{aligned} f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^4;q) &= q^{-4r+3} f_{5,5,1}(q^{20+4r+7},q^4;q) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{4} (-1)^m q^{4m} q^{\binom{m}{2}} j(q^{m5+4r+7};q^5), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^2;q) &= q^{-4r-7} f_{5,5,1}(q^{20+4r+7},q^2;q) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{4} (-1)^m q^{2m} q^{\binom{m}{2}} j(q^{m5+4r+7};q^5). \end{aligned}$$

我们将两个方程右端的双重求和单独列出，由此得到

$$f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^4;q) = q^{4r-3} f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^4;q) - q^{4r-3} j(q^{4r+7};q^5) \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-m-4mr},$$

and

$$f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^2;q) = q^{4r+7} f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^2;q) - q^{4r+7} j(q^{4r+7};q^5) \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-3m-4mr}.$$

我们希望将这两个方程合并，使左端用 $F(r+5)$ 表示，右端用 $F(r)$ 表示。为此，我们需要将两个方程分别乘以适当次幂的 q。由此可得

$$\begin{aligned} -q^{17+3r} f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^4;q) &= -q^{2+3r} q^{12+4r} f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^4;q) \\ &\quad + q^{2+3r} q^{12+4r} j(q^{4r+7};q^5) \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-m-4mr}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} q^{6+r} f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^2;q) &= q^{1+r} q^{12+4r} f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^2;q) \\ &\quad - q^{1+r} q^{12+4r} j(q^{4r+7};q^5) \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-3m-4mr}. \end{aligned}$$

将两个方程相加，得到

$$\begin{aligned}
&-q^{17+3r}f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^4;q)+q^{6+r}f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^2;q)\\
&\quad=q^{12+4r}\left(-q^{2+3r}f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^4;q)+q^{1+r}f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^2;q)\right)\\
&\qquad+q^{12+4r}j(q^{4r+7};q^5)\left(q^{2+3r}\sum_{m=0}^{4}q^{-2m^2-m-4mr}-q^{1+r}\sum_{m=0}^{4}q^{-2m^2-3m-4mr}\right).
\end{aligned}$$

我们需要改写这个新方程的几个方面。首先利用 (5.2a) 得到

$$\begin{aligned}
j(q^{4r+7};q^5)&=j(q^{5(r+1)+2-r};q^5)=(-1)^{r+1}q^{-5\binom{r+1}{2}-(r+1)(2-r)}j(q^{r+3};q^5)\\
&=(-1)^{r+1}q^{-3\binom{r+1}{2}-2r-2}j(q^{r+3};q^5).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&-q^{17+3r}f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^4;q)+q^{6+r}f_{5,5,1}(q^{27+4r},q^2;q)\\
&\quad=q^{12+4r}\left(-q^{2+3r}f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^4;q)+q^{1+r}f_{5,5,1}(q^{4r+7},q^2;q)\right)\\
&\qquad+(-1)^{r+1}q^{10+2r-3\binom{r+1}{2}}j(q^{r+3};q^5)\left(q^{2+3r}\sum_{m=0}^{4}q^{-2m^2-m-4mr}-q^{1+r}\sum_{m=0}^{4}q^{-2m^2-3m-4mr}\right).
\end{aligned}$$

将成对的二重求和用 $F(r)$ 表示，即可完成证明。 □

Pro 的证明 *position 10.1 for* $G(r)$. 为了建立 $G(r)$ 的函数方程，我们首先注意到

$$\begin{aligned}
G(r+5)&=(-1)^{5+r}j(q^{5+r+3};q^5)\left(q^{\binom{5+r+1}{2}}\frac{1}{2}\mu_2(q)+q^{-3\binom{5+r}{2}}\sum_{k=0}^{2(5+r)-1}(-1)^kq^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}}\right)\\
&\quad-(-1)^{5+r}(-q)^{\binom{5+r+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{5+r+3};-q^5).
\end{aligned}$$

我们来改写这个简单的 theta 函数的商。利用 (5.2a)，可得

$$\begin{aligned}
&(-1)^{5+r}(-q)^{\binom{5+r+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{5+r+3};-q^5)\\
&\qquad=-(-q)^{10+5(r+1)}(-1)^r(-1)(-q)^{-(r+3)}(-q)^{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{r+3};-q^5)\\
&\qquad=q^{12+4r}(-1)^r(-q)^{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{r+3};-q^5).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
G(5+r)&=(-1)^rq^{12+4r}j(q^{r+3};q^5)q^{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{2}\mu_2(q)\\
&\quad+(-1)^rq^{-33-16r}j(q^{r+3};q^5)q^{-3\binom{r}{2}}\sum_{k=0}^{2(5+r)-1}(-1)^kq^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}}\\
&\quad-q^{12+4r}(-1)^r(-q)^{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{J_1^3}{J_2J_4}j((-q)^{r+3};-q^5).
\end{aligned}$$

然后，我们用 $G(r)$ 改写右端。由此得到

$$G(r+5)=q^{12+4r}G(r)-(-1)^rq^{12+4r}j(q^{r+3};q^5)q^{-3\binom{r}{2}}\sum_{k=0}^{2r-1}(-1)^kq^{2rk-\binom{k+1}{2}}$$

$$+(-1)^r q^{-33-16r} j(q^{r+3};q^5) q^{-3\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{2(5+r)-1} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}}.$$

比较　结合命题 10.1 中的函数方程，我们看到需要证明

$$\begin{aligned}
&(-1)^{r+1} q^{10+2r-3\binom{r+1}{2}} j(q^{r+3};q^5) \left(q^{2+3r} \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-m-4mr} - q^{1+r} \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-3m-4mr} \right) \\
&\quad = -(-1)^r q^{12+4r} j(q^{r+3};q^5) q^{-3\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k q^{2rk-\binom{k+1}{2}} \\
&\qquad + (-1)^r q^{-33-16r} j(q^{r+3};q^5) q^{-3\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{2(5+r)-1} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}}.
\end{aligned}$$

我们可以将其简化。我们关注 $j(q^{r+3};q^5)$ 的系数，并且还可以提出 q 的一个幂。因此，现在只需证明

$$\begin{aligned}
&q^{1+2r} \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-m-4mr} - \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-3m-4mr} \\
&\quad = q^{1+4r} \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k q^{2rk-\binom{k+1}{2}} - q^{-44-16r} \sum_{k=0}^{10+2r-1} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}}.
\end{aligned}$$

为此，我们证明两点。首先，需要证明

$$q^{1+4r} \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k q^{2rk-\binom{k+1}{2}} - q^{-44-16r} \sum_{k=10}^{10+2r-1} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}} = 0, \tag{10.3}$$

其次，需要证明

$$q^{1+2r} \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-m-4mr} - \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-3m-4mr} = -q^{-44-14r} \sum_{k=0}^{9} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}}. \tag{10.4}$$

为证明（10.3），对指标进行简单平移可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{10+2r-1} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^{k+10} q^{2(5+r)(k+10)-\binom{k+10+1}{2}} \\
&= q^{45+20r} \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k q^{2rk-\binom{k+1}{2}}.
\end{aligned}$$

为证明 (10.4)，令我们将 k 替换为 $(2m, 2m+1)$。由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{9} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}} &= \sum_{m=0}^{4} q^{2(5+r)2m-\binom{2m+1}{2}} - \sum_{m=0}^{4} q^{2(5+r)(2m+1)-\binom{2m+2}{2}} \\
&= \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2+4rm+19m} - \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2+4rm+17m+2r+9}.
\end{aligned}$$

我们将求和顺序与 $m \to 4-m$ 交换，得到

$$\sum_{k=0}^{9} (-1)^k q^{2(5+r)k-\binom{k+1}{2}} = q^{16r+44} \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-4rm-3m} - q^{18r+45} \sum_{m=0}^{4} q^{-2m^2-4rm-m},$$

这正是我们想要的。 □

10.2. **定理** $1/3$**-层级弦函数：定理 2.7**。 我们陈述证明定理 2.7 所需的命题，然后给出证明，接着给出这些命题的证明。

我们将定理 2.7 中恒等式的左端定义为

$$F(r) := -q^{3+4r} f_{7,7,1}(q^{6r+10}, q^5; q) + q^{2+2r} f_{7,7,1}(q^{6r+10}, q^3; q),$$

而将右端定义为

$$G(r) := (-1)^r j(q^{r+4}; q^7) \left(q^{\binom{r+1}{2}} \cdot q\omega_3(-q) + q^{-5\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2r-1} \right) \right) - q^{5r^2-3r+1} \frac{J_1^3 J_4}{J_2^3} j(q^{8+16r}; q^{28}).$$

命题 10.3。 我们有， $F(r)$ 和 $G(r)$ 满足相同的函数方程：

$$H(r+7) - q^{24+6r} H(r) = -(-1)^r q^{-5\binom{r}{2}+23} j(q^{r+4}; q^7) \left(q^{1+2r} \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-2m-6mr} - \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-4m-6mr} \right).$$

我们对推论 5.12 中的阿佩尔函数表达式求值，该表达式对应于定理 2.7 中各自的双重求和。我们有

命题 10.4。我们有

$$-q^{3+4s} h_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^5; q) + q^{2+2s} h_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^3; q) = (-1)^s j(q^{s+4}; q^7) \left(q^{-5\binom{s}{2}} \sum_{k=0}^{s-1} q^{6sk-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2s-1} \right) + q^{\binom{s+1}{2}} \cdot q\omega_3(-q) \right) + (-1)^s 2 j(q^{s+4}; q^7) q^{\binom{s+1}{2}} \left(-\frac{1}{2} q \frac{J_6^3}{J_2 \overline{J}_{3,6}} + \frac{J_6^3 \overline{J}_{2,6} J_{3,6}}{\overline{J}_{0,6} J_{1,6} J_{2,6} \overline{J}_{3,6}} \right).$$

定理 *2.7* 的证明。命题 10.3 告诉我们

$$F(s+7) - G(s+7) = q^{24+6s} \left(F(s) - G(s) \right),$$

因此，我们只需证明定理 2.7 对于 $0 \le s \le 6$ 成立。 $s = 3$ 的情形由引理 5.5 得出。推论 5.12 和命题 10.4 告诉我们，这等价于证明

$$(-1)^s 2 j(q^{s+4}; q^7) q^{\binom{s+1}{2}} \left(-\frac{1}{2} q \frac{J_6^3}{J_2 \overline{J}_{3,6}} + \frac{J_6^3 \overline{J}_{2,6} J_{3,6}}{\overline{J}_{0,6} J_{1,6} J_{2,6} \overline{J}_{3,6}} \right) - \frac{1}{\overline{J}_{0,6} \overline{J}_{0,42}} \left(-q^{3+4s} \vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^5; q) + q^{2+2s} \vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^3; q) \right) = -q^{5s^2-3s+1} \frac{J_1^3 J_4}{J_2^3} j(q^{8+16s}; q^{28}),$$

但这正是命题 6.2。 □

命题 *10.4* 的证明。 由推论 5.12，我们有

$$h_{7,7,1}(x, y; q) = j(x; q^7) m\big(-q^6 y x^{-1}, -1; q^6\big) + j(y; q) m\big(-q^{21} x y^{-7}, -1; q^{42}\big).$$

因此

$$\begin{aligned}A(q) :&= -q^{3+4s}h_{7,7,1}(q^{6s+10},q^5;q)+q^{2+2s}h_{7,7,1}(q^{6s+10},q^3;q)\\&= -q^{3+4s}\left(j(q^{6s+10};q^7)m\left(-q^{1-6s},-1;q^6\right)+j(q^5;q)m\left(-q^{-4+6s},-1;q^{42}\right)\right)\\&\quad +q^{2+2s}\left(j(q^{6s+10};q^7)m\left(-q^{-1-6s},-1;q^6\right)+j(q^3;q)m\left(-q^{10+6s},-1;q^{42}\right)\right).\end{aligned}$$

注意到 $j(q^n;q)=0$ 对 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，且相应的阿佩尔函数均有定义。这给出了更紧凑的

$$A(q)=q^{2+2s}j(q^{6s+10};q^7)\left(m\left(-q^{-1-6s},-1;q^6\right)-q^{1+2s}m\left(-q^{1-6s},-1;q^6\right)\right).$$

利用 Appell函数性质(5.13b)并提出一个 q项，得到

$$\begin{aligned}A(q)&=q^{2+2s}j(q^{6s+10};q^7)\left(-q^{1+6s}m\left(-q^{1+6s},-1;q^6\right)+q^{8s}m\left(-q^{-1+6s},-1;q^6\right)\right)\\&=-q^{3+8s}j(q^{6s+10};q^7)\left(m\left(-q^{1+6s},-1;q^6\right)-q^{2s-1}m\left(-q^{-1+6s},-1;q^6\right)\right).\end{aligned}$$

利用引理 5.13 (5.16)，得到

$$A(q)=-q^{3+8s}j(q^{6s+10};q^7)\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{6sk-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2s-1}\right)+2q^{s+6\binom{s}{2}}m(-q,-1;q^6)\right).$$

利用引理 5.14 (5.23)重写最后一个阿佩尔函数，得到

$$\begin{aligned}A(q)=-q^{3+8s}j(q^{6s+10};q^7)&\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{6sk-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2s-1}\right)+q^{s+6\binom{s}{2}}q\omega_3(-q)\right)\\&-2q^{3+8s}j(q^{6s+10};q^7)q^{s+6\binom{s}{2}}\left(-\frac{1}{2}q\frac{J_6^3}{J_2\overline{J}_{3,6}}+\frac{J_6^3\overline{J}_{2,6}J_{3,6}}{\overline{J}_{0,6}J_{1,6}J_{2,6}\overline{J}_{3,6}}\right).\end{aligned}$$

利用 (5.2a) 和 (5.2b)，可知

$$\begin{aligned}j(q^{6s+10};q^7)&=j(q^{7(s+1)+4-s};q^7)=(-1)^{s+1}q^{-7\binom{s+1}{2}-(s+1)(4-s)}j(q^{4-s};q^7)\\&=(-1)^{s+1}q^{-7\binom{s+1}{2}-(s+1)(4-s)}j(q^{s+3};q^7),\end{aligned}$$

结果由此得出。 □

命题 *10.3* 的证明 $F(r)$。将命题 5.3 特化为 $(a,\ b,\ c)=(7,\ 7,\ 1)$，其中$\ell=-1$，且 $k=7$，然后在第一个求和中使用求和约定 (5.7)。这给出

$$\begin{aligned}f_{7,7,1}(x,y;q)&=x^{-1}y^7q^{-21}f_{7,7,1}(q^{42}x,y;q)\\&\quad-\sum_{m=-1}^{-1}(-x)^mq^{7\binom{m}{2}}j(q^{m7}y;q)+\sum_{m=0}^{6}(-y)^mq^{\binom{m}{2}}j(q^{m7}x;q^7).\end{aligned}\tag{10.5}$$

将 $(x,\ y)=(q^{6r+10},\ q^5)$ 和 $(x,\ y)=(q^{6r+10},\ q^3)$ 代入 (10.5)。回忆一下，$j(q^n;q)=0$当 $n\in\mathbb{Z}$。这分别给出

$$\begin{aligned}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^5;q)&=q^{-6r+4}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^5;q)\\&\quad+\sum_{m=0}^{6}(-1)^mq^{5m}q^{\binom{m}{2}}j(q^{7m+6r+10};q^7),\end{aligned}$$

and

$$f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^3;q) = q^{-6r-10}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^3;q) + \sum_{m=0}^{6}(-1)^m q^{3m}q^{\binom{m}{2}}j(q^{7m+6r+10};q^7).$$

我们重写两个求和式中的 theta 函数。利用 (5.2a) 并化简后，得到

$$\begin{aligned} j(q^{7m+6r+10};q^7) &= j(q^{7(m+r+1)-r+3};q^7) \\ &= (-1)^{m+r+1}q^{-7\binom{m+r+1}{2}}q^{-(m+r+1)(3-r)}j(q^{3-r};q^7) \\ &= (-1)^{m+r+1}q^{-7\binom{m}{2}-10m-6mr}q^{-5\binom{r}{2}-8r-3}j(q^{r+4};q^7). \end{aligned}$$

于是，我们的两个方程可以改写为

$$f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^5;q) = q^{-6r+4}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^5;q) + (-1)^{r+1}q^{-5\binom{r}{2}-8r-3}j(q^{r+4};q^7)\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-2m-6mr},$$

and

$$f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^3;q) = q^{-6r-10}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^3;q) + (-1)^{r+1}q^{-5\binom{r}{2}-8r-3}j(q^{r+4};q^7)\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-4m-6mr}.$$

我们将两个方程右端的双重求和单独列出，得到

$$f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^5;q) = q^{6r-4}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^5;q) + (-1)^{r}q^{-5\binom{r}{2}-2r-7}j(q^{r+4};q^7)\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-2m-6mr},$$

and

$$f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^3;q) = q^{6r+10}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^3;q) + (-1)^{r}q^{-5\binom{r}{2}-2r+7}j(q^{r+4};q^7)\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-4m-6mr}.$$

我们希望两个左端之和形如 $F(r+7)$，因此将等式两边同乘以 q 的适当次幂，得到

$$-q^{31+4r}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^5;q) = -q^{27+10r}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^5;q) - (-1)^{r}q^{-5\binom{r}{2}+2r+24}j(q^{r+4};q^7)\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-2m-6mr},$$

and

$$q^{16+2r}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^3;q) = q^{26+8r}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^3;q) + (-1)^{r}q^{-5\binom{r}{2}+23}j(q^{r+4};q^7)\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-4m-6mr}.$$

将这两个方程相加并合并同类项，我们得到

$$\begin{aligned}
&-q^{31+4r}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^5;q)+q^{16+2r}f_{7,7,1}(q^{42+6r+10},q^3;q)\\
&\quad=q^{24+6r}\left(-q^{3+4r}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^5;q)+q^{2+2r}f_{7,7,1}(q^{6r+10},q^3;q)\right)\\
&\qquad-(-1)^r q^{-5\binom{r}{2}+23}j(q^{r+4};q^7)\left(q^{1+2r}\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-2m-6mr}-\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-4m-6mr}\right).
\end{aligned}$$

将上述内容改写为 $F(r)$ 的形式，即得所需结果。 □

$G(r)$ 的命题 *10.3* 证明。我们首先注意到

$$\begin{aligned}
G(r+7)&=(-1)^{r+7}j(q^{r+4+7};q^7)\\
&\quad\times\left(q^{\binom{7+r+1}{2}+1}\omega_3(-q)+q^{-5\binom{r+7}{2}}\sum_{k=0}^{r+7-1}q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2(r+7)-1}\right)\right)\\
&\quad-q^{5(r+7)^2-3(r+7)+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16(r+7)};q^{28}).
\end{aligned}$$

我们来改写这个简单的 theta 函数商。利用 (5.2a)，可得

$$\begin{aligned}
q^{5(r+7)^2-3(r+7)+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16(r+7)};q^{28})&=q^{5(r+7)^2-3(r+7)+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16r+28\cdot4};q^{28})\\
&=q^{5(r+7)^2-3(r+7)+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}q^{-28\binom{4}{2}-4(8+16r)}j(q^{8+16r};q^{28})\\
&=q^{5r^2+3r+25}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16r};q^{28})\\
&=q^{24+6r}q^{5r^2-3r+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16r};q^{28}).
\end{aligned}$$

再次利用 (5.2a)，可写为

$$\begin{aligned}
G(r+7)&=(-1)^r q^{24+6r}j(q^{r+4};q^7)q^{\binom{r+1}{2}}\cdot q\omega_3(-q)\\
&\quad+(-1)^r q^{-109-36r}j(q^{r+4};q^7)q^{-5\binom{r}{2}}\sum_{k=0}^{r+7-1}q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2(r+7)-1}\right)\\
&\quad-q^{24+6r}q^{5r^2-3r+1}\frac{J_1^3J_4}{J_2^3}j(q^{8+16r};q^{28}).
\end{aligned}$$

将上述右端改写为 $G(r)$ 的形式，即得

$$\begin{aligned}
G(r+7)&=q^{24+6r}G(r)-(-1)^r q^{24+6r}j(q^{r+4};q^7)q^{-5\binom{r}{2}}\sum_{k=0}^{r-1}q^{6kr-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2r-1}\right)\\
&\quad+(-1)^r q^{-109-36r}j(q^{r+4};q^7)q^{-5\binom{r}{2}}\sum_{k=0}^{r+7-1}q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}}\left(q^k-q^{-k+2(r+7)-1}\right).
\end{aligned}$$

比较 结合命题 10.3 中的函数方程，我们看到需要证明

$$-(-1)^r q^{-5\binom{r}{2}+23}j(q^{r+4};q^7)\left(q^{1+2r}\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-2m-6mr}-\sum_{m=0}^{6}q^{-3m^2-4m-6mr}\right)$$

$$= -(-1)^r q^{24+6r} j(q^{r+4};q^7) q^{-5\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2r-1}\right)$$
$$+ (-1)^r q^{-109-36r} j(q^{r+4};q^7) q^{-5\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{r+7-1} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2(r+7)-1}\right).$$

我们将其分成两部分，但首先简化一下要做的事情。我们单独取出 $j(q^{r+4};q^7)$ 的系数，并提取出 q 的一个幂。因此，我们只需证明

$$-q^{1+2r} \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-2m-6mr} + \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-4m-6mr}$$
$$= -q^{1+6r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2r-1}\right)$$
$$+ q^{-132-36r} \sum_{k=0}^{r+7-1} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2(r+7)-1}\right).$$

要证明上述结论成立，只需证明

$$-q^{1+6r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2r-1}\right) \tag{10.6}$$
$$+ q^{-132-36r} \sum_{k=7}^{r+7-1} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2(r+7)-1}\right) = 0,$$

and

$$-q^{1+2r} \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-2m-6mr} + \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-4m-6mr} \tag{10.7}$$
$$= q^{-132-36r} \sum_{k=0}^{6} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2(r+7)-1}\right).$$

要证明 (10.6)，我们只需简单地对指标作移位。我们有

$$\sum_{k=7}^{r+7-1} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2(r+7)-1}\right)$$
$$= \sum_{k=7}^{r+7-1} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}+k} - \sum_{k=7}^{r+7-1} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}-k+2(r+7)-1}$$
$$= q^{42r+133} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}+k} - q^{42r+133} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}-k+2r-1}$$
$$= q^{42r+133} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2r-1}\right).$$

为证明 (10.7)，我们将求和与 $k \to 6-m$ 互换。由此得到

$$\sum_{k=0}^{6} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-k+2(r+7)-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{6} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}+k} - \sum_{k=0}^{6} q^{6k(r+7)-6\binom{k+1}{2}-k+2(r+7)-1}$$
$$= q^{36r+132} \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-6mr-4m} - q^{38r+133} \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-6mr-2m},$$

这正是我们所要的。 □

10.3. 层级 $1/3$弦函数：定理 2.8。 我们陈述证明定理 2.8 所需的命题，然后给出证明，接着给出这些命题的证明。

令定理 2.8 中恒等式的左端为

$$F(r) := -q^{3+5r} f_{7,7,1}(q^{6r+10}, q^6; q) + q^{1+r} f_{7,7,1}(q^{6r+10}, q^2; q).$$

并令右端为

$$G(r) := (-1)^r j(q^{r+4}; q^7) \left(q^{\binom{r+1}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^2) + q^{-5\binom{r}{2}-r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{6kr-6\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4r-2} \right) \right)$$
$$- (-1)^r \frac{(-q)^{\binom{r+1}{2}}}{2} \frac{J_1^2}{J_4} j((-q)^{r+4}; -q^7).$$

命题 10.5。 我们有， $F(r)$ 和 $G(r)$ 满足相同的函数方程：

$$H(r+7) - q^{24+6r} H(r)$$
$$= -(-1)^r q^{22-r} q^{-5\binom{r}{2}} j(q^{r+4}; q^7) \left(q^{2+4r} \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-6mr-m} - \sum_{m=0}^{6} q^{-3m^2-6mr-5m} \right).$$

命题 10.6。 我们有

$$-q^{3+5s} h_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^6; q) + q^{1+s} h_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^2; q)$$
$$= (-1)^s j(q^{s+4}; q^7) \left(q^{-5\binom{s}{2}-s} \sum_{k=0}^{s-1} q^{6sk-6\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2} \right) + q^{\binom{s+1}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^2) \right)$$
$$+ (-1)^s 2q^{\binom{s+1}{2}} j(q^{s+4}; q^7) \left(-\frac{1}{4} \frac{J_{6,12}^2}{J_2} + \frac{J_6^3}{\overline{J}_{0,6} J_{2,6}} \right).$$

定理 2.8 的证明。命题 10.6 告诉我们

$$F(s+7) - G(s+7) = q^{24+6s} \left(F(s) - G(s) \right),$$

因此，我们只需证明 $0 \le s \le 6$ 的定理 2.8。 $s = 3$ 的情形可由引理 5.5 得出。推论 5.12 和命题 10.6 告诉我们，这等价于证明

$$(-1)^s 2q^{\binom{s+1}{2}} j(q^{s+4}; q^7) \left(-\frac{1}{4} \frac{J_{6,12}^2}{J_2} + \frac{J_6^3}{\overline{J}_{0,6} J_{2,6}} \right)$$
$$- \frac{1}{\overline{J}_{0,6} \overline{J}_{0,42}} \left(-q^{3+5s} \vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^6; q) + q^{1+s} \vartheta_{7,7,1}(q^{6s+10}, q^2; q) \right)$$
$$= -(-1)^s \frac{(-q)^{\binom{s+1}{2}}}{2} \frac{J_1^2}{J_4} j((-q)^{s+4}; -q^7),$$

但这不过是命题 6.3。 □

命题 *10.6* 的证明。 由推论 5.12，我们有

$$h_{7,7,1}(x,y;q) = j(x;q^7)m\big(-q^6yx^{-1},-1;q^6\big) + j(y;q)m\big(-q^{21}xy^{-7},-1;q^{42}\big).$$

因此

$$\begin{aligned} A(q) :&= -q^{3+5s}h_{7,7,1}(q^{6s+10},q^6;q) + q^{1+s}h_{7,7,1}(q^{6s+10},q^2;q) \\ &= -q^{3+5s}\left(j(q^{6s+10};q^7)m\big(-q^{2-6s},-1;q^6\big) + j(q^6;q)m\big(-q^{-11+6s},-1;q^{42}\big)\right) \\ &\quad + q^{1+s}\left(j(q^{6s+10};q^7)m\big(-q^{-2-6s},-1;q^6\big) + j(q^2;q)m\big(-q^{17+6s},-1;q^{42}\big)\right). \end{aligned}$$

注意， $j(q^n;q) = 0$ 适用于 $n \in \mathbb{Z}$ ，且相应的阿佩尔函数均已定义。由此得到更简洁的

$$A(q) = q^{1+s}j(q^{6s+10};q^7)\left(m\big(-q^{-2-6s},-1;q^6\big) - q^{2+4s}m\big(-q^{2-6s},-1;q^6\big)\right).$$

利用阿佩尔函数性质(5.13b)，并提出一个 q 项，得到

$$\begin{aligned} A(q) &= q^{1+s}j(q^{6s+10};q^7)\left(-q^{2+6s}m\big(-q^{2+6s},-1;q^6\big) + q^{10s}m\big(-q^{-2+6s},-1;q^6\big)\right) \\ &= -q^{3+7s}j(q^{6s+10};q^7)\left(m\big(-q^{2+6s},-1;q^6\big) - q^{4s-2}m\big(-q^{-2+6s},-1;q^6\big)\right). \end{aligned}$$

利用引理 5.13 (5.17)，得到

$$A(q) = -q^{3+7s}j(q^{6s+10};q^7)\left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{6sk-6\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2}\right) + 2q^{2s+6\binom{s}{2}}m(-q^2,-1;q^6)\right).$$

利用引理 5.14 (5.24) 重写最后一个阿佩尔函数，得到

$$\begin{aligned} A(q) = -q^{3+7s}j(q^{6s+10};q^7)&\left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{6sk-6\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2}\right) + q^{2s+6\binom{s}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^2)\right) \\ &- 2q^{3+7s}j(q^{6s+10};q^7)q^{2s+6\binom{s}{2}}\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{6,12}^2}{J_2} + \frac{J_6^3}{\overline{J}_{0,6}J_{2,6}}\right). \end{aligned}$$

利用 (5.2a) 和 (5.2b)，可得

$$\begin{aligned} j(q^{6s+10};q^7) = j(q^{7(s+1)+4-s};q^7) &= (-1)^{s+1}q^{-7\binom{s+1}{2}-(s+1)(4-s)}j(q^{4-s};q^7) \\ &= (-1)^{s+1}q^{-7\binom{s+1}{2}-(s+1)(4-s)}j(q^{s+3};q^7), \end{aligned}$$

结论由此得证。 □

命题 *10.5* 的证明。这与命题 10.3 的证明类似，因此略去。 □

10.4. 层级弦函数：定理 2.11。我们先陈述证明定理 2.11 所需的命题，再给出证明，随后给出这些命题的证明。在接下来的小节中，我们需要考虑 s 的奇偶性；在这种情况下，只需将 s 替换为 $2s$ 或 $2s+1$。

我们将定理 2.11 中恒等式的左端定义为

$$\begin{aligned} F(r) :=& q^{7+8r}f_{4,4,1}(-q^{23+12r},-q^{13};q^4) - q^{5+4r}f_{4,4,1}(-q^{23+12r},-q^9;q^4) \\ &- q^{13+8r}f_{4,4,1}(-q^{31+12r},-q^{15};q^4) + q^{9+4r}f_{4,4,1}(-q^{31+12r},-q^{11};q^4). \end{aligned}$$

且右端为

$$\begin{aligned} G(r) :=\ & q^{7+16r}j(-q^{23+12r};q^{16})\left(q^{2r+12\binom{r}{2}}q^2\omega_3(-q^2) + \sum_{k=0}^{r-1} q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k} - q^{-2k+4r-2}\right)\right) \\ &- q^{17+16r}j(-q^{31+12r};q^{16}) \end{aligned}$$

$$\times\left(1-q^{4r}\left(q^{4r+12\binom{r}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^4)+\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8r-4}\right)\right)\right)$$
$$-(-1)^r\frac{q^{\binom{2r}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{1+4r};q^{16}).$$

命题 10.7. 我们有， $F(r)$ 和 $G(r)$ 满足相同的函数方程：

$$\begin{aligned}H(r+4)&=q^{27+12r}H(r)\\&-q^{25+4r}j(-q^{7+12r};q^{16})\left(q^{4r+2}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-4m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}\right)\\&+q^{21+4r}j(-q^{15+12r};q^{16})\left(q^{4r+4}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-14m}\right).\end{aligned}$$

这个命题与我们在前面小节中得到的结果相似，但我们还需要考虑 s 为偶数和 s 为奇数的情形。这里考虑 s 为偶数的情形，并在下一节考虑 s为奇数的情形。

命题 10.8. 我们有

$$\begin{aligned}&q^{7+4s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^{13};q^4)-q^{5+2s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^9;q^4)\\&\quad-q^{13+4s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{15};q^4)+q^{9+2s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{11};q^4)\\&=q^{7+8s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{2+6s},-1;q^{12})-q^{2s-2}m(-q^{-2+6s},-1;q^{12})\right)\\&\quad-q^{17+8s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(1-q^{2s}\left(m(-q^{4+6s},-1;q^{12})-q^{4s-4}m(-q^{-4+6s},-1;q^{12})\right)\right).\end{aligned}$$

对于 s 为偶数的情形，我们将 $s\to 2s$ 替换为，得到

推论 10.9. 我们有

$$\begin{aligned}&q^{7+8s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{13};q^4)-q^{5+4s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^9;q^4)\\&\quad-q^{13+8s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{15};q^4)+q^{9+4s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{11};q^4)\\&=q^{7+16s}j(-q^{12s+23};q^{16})\\&\quad\times\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+q^{2s+12\binom{s}{2}}q^2\omega_3(-q^2)\right)\\&\qquad+q^{7+16s}j(-q^{12s+23};q^{16})2q^{2s+12\binom{s}{2}}\left(-\frac{1}{2}q^2\frac{J_{12}^3}{J_4\overline{J}_{6,12}}+\frac{J_{12}^3\overline{J}_{4,12}J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12}J_{2,12}J_{4,12}\overline{J}_{6,12}}\right)\\&\quad-q^{17+16s}j(-q^{31+12s};q^{16})\\&\quad\times\left(1-q^{4s}\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8s-4}\right)+q^{4s+12\binom{s}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^4)\right)\right)\\&\qquad+q^{17+16s}j(-q^{31+12s};q^{16})q^{4s}2q^{4s+12\binom{s}{2}}\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{12,24}^2}{J_4}+\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12}J_{4,12}}\right).\end{aligned}$$

定理 *2.11* 的证明。 命题 10.7 告诉我们

$$F(s+4)-G(s+4)=q^{27+12s}\left(F(s)-G(s)\right),$$

因此，我们只需为 $0\le s\le 3$ 证明定理 2.11。然而，推论 5.10 和推论 10.9 告诉我们，这等价于命题 6.4。□

命题 *10.8* 的证明。 由推论 5.10，我们得到

$$h_{4,4,1}(x,y;q) = j(x;q^4)m\big(-q^3yx^{-1},-1;q^3\big) + j(y;q)m\big(q^6xy^{-4},-1;q^{12}\big),$$

但在我们的情形中，我们将需要带有 $q \to q^4$ 的版本：

$$h_{4,4,1}(x,y;q^4) = j(x;q^{16})m\big(-q^{12}yx^{-1},-1;q^{12}\big) + j(y;q)m\big(q^{24}xy^{-4},-1;q^{48}\big).$$

因此

$$\begin{aligned}
A(s) :&= q^{7+4s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^{13};q^4) - q^{5+2s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^9;q^4)\\
&\quad - q^{13+4s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{15};q^4) + q^{9+2s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{11};q^4)\\
&= q^{7+4s}\left(j(-q^{6s+23};q^{16})m(-q^{2-6s},-1;q^{12}) + j(-q^{13};q^4)m(-q^{-5+6s},-1;q^{48})\right)\\
&\quad - q^{5+2s}\left(j(-q^{6s+23};q^{16})m(-q^{-2-6s},-1;q^{12}) + j(-q^9;q^4)m(-q^{11+6s},-1;q^{48})\right)\\
&\quad - q^{13+4s}\left(j(-q^{31+6s};q^{16})m(-q^{-4-6s},-1;q^{12}) + j(-q^{15};q^4)m(-q^{-5+6s},-1;q^{48})\right)\\
&\quad + q^{9+2s}\left(j(-q^{31+6s};q^{16})m(-q^{-8-6s},-1;q^{12}) + j(-q^{11};q^4)m(-q^{11+6s},-1;q^{48})\right).
\end{aligned}$$

其中四个阿佩尔函数项相互抵消。利用 (5.2a)，我们看到

$$j(-q^{13};q^4) = q^{-15}j(-q;q^4) \text{ and } j(-q^{15};q^4) = q^{-21}j(-q^3;q^4),$$

以及

$$j(-q^9;q^4) = q^{-6}j(-q;q^4), \text{ and } j(-q^{11};q^4) = q^{-10}j(-q^3;q^4).$$

由此可知，四个阿佩尔函数相互抵消，于是我们得到

$$\begin{aligned}
A(s) &= -q^{5+2s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{-2-6s},-1;q^{12}) - q^{2+2s}m(-q^{2-6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad + q^{9+2s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(m(-q^{-8-6s},-1;q^{12}) - q^{4+2s}m(-q^{-4-6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}$$

利用阿佩尔函数性质(5.13b)，得到

$$\begin{aligned}
A(s) &= -q^{5+2s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(-q^{2+6s}m(-q^{2+6s},-1;q^{12}) + q^{8s}m(-q^{-2+6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad + q^{9+2s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(-q^{8+6s}m(-q^{8+6s},-1;q^{12}) + q^{8+8s}m(-q^{4+6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}$$

化简后得到

$$\begin{aligned}
A(s) &= q^{7+8s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{2+6s},-1;q^{12}) - q^{2s-2}m(-q^{-2+6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad - q^{17+8s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(m(-q^{8+6s},-1;q^{12}) - q^{2s}m(-q^{4+6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}$$

利用阿佩尔函数性质(5.13c)可得

$$\begin{aligned}
A(s) &= q^{7+8s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{2+6s},-1;q^{12}) - q^{2s-2}m(-q^{-2+6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad - q^{17+8s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(1 + q^{-4+6s}m(-q^{-4+6s},-1;q^{12}) - q^{2s}m(-q^{4+6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}$$

重新排列各项即可得到结果。 □

推论 *10.9* 的证明。我们考虑命题 10.8 中 s 偶数的情形。将 s 替换为 $2s$，得到

$$\begin{aligned}
&q^{7+8s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{13};q^4) - q^{5+4s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^9;q^4)\\
&\quad - q^{13+8s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{15};q^4) + q^{9+4s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{11};q^4)\\
&= q^{7+16s}j(-q^{12s+23};q^{16})\left(m(-q^{2+12s},-1;q^{12}) - q^{4s-2}m(-q^{-2+12s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad - q^{17+16s}j(-q^{31+12s};q^{16})\\
&\qquad \times\left(1 - q^{4s}\left(m(-q^{4+12s},-1;q^{12}) - q^{8s-4}m(-q^{-4+12s},-1;q^{12})\right)\right).
\end{aligned}$$

利用引理 5.13，得到

$$\begin{aligned}
&q^{7+8s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{13};q^4)-q^{5+4s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^9;q^4)\\
&\quad-q^{13+8s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{15};q^4)+q^{9+4s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{11};q^4)\\
&=q^{7+16s}j(-q^{12s+23};q^{16})\\
&\qquad\times\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+2q^{2s+12\binom{s}{2}}m(-q^2,-1;q^{12})\right)\\
&\quad-q^{17+16s}j(-q^{31+12s};q^{16})\\
&\qquad\times\left(1-q^{4s}\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8s-4}\right)+2q^{4s+12\binom{s}{2}}m(-q^4,-1;q^{12})\right)\right).
\end{aligned}$$

利用引理 5.14 可得结论。 □

命题 *10.7* 的证明，针对 $F(r)$。将命题 5.3 特化为 $(a,b,c)=(4,4,1)$（其中$\ell=-1$、$k=4$），然后对第一个求和使用求和约定 (5.7)。由此得到

$$\begin{aligned}
f_{4,4,1}(x,y;q)&=-x^{-1}y^4q^{-6}f_{4,4,1}(q^{12}x,y;q)\\
&\quad-\sum_{m=-1}^{-1}(-x)^mq^{4\binom{m}{2}}j(q^{4m}y;q)+\sum_{m=0}^{3}(-y)^mq^{\binom{m}{2}}j(q^{4m}x;q^4).
\end{aligned}$$

代入 $q\to q^4$ 得到

$$\begin{aligned}
f_{4,4,1}(x,y;q^4)&=-x^{-1}y^4q^{-24}f_{4,4,1}(q^{48}x,y;q^4)\\
&\quad-\sum_{m=-1}^{-1}(-x)^mq^{16\binom{m}{2}}j(q^{16m}y;q^4)+\sum_{m=0}^{3}(-y)^mq^{4\binom{m}{2}}j(q^{16m}x;q^{16}).
\end{aligned}\tag{10.8}$$

我们将 $(x,y)=(-q^{23+12r},-q^{13})$ 代入 (10.8)。我们有

$$\begin{aligned}
f_{4,4,1}(-q^{23+12r},-q^{13};q^4)&=q^{5-12r}f_{4,4,1}(-q^{71+12r},-q^{13};q^4)\\
&\quad-q^{-7-12r}j(-q^{-3};q^4)+\sum_{m=0}^{3}q^{2m^2+11m}j(-q^{16m+23+12r};q^{16}).
\end{aligned}$$

对两个 theta 函数应用 (5.2a)，得到

$$\begin{aligned}
f_{4,4,1}(-q^{23+12r},-q^{13};q^4)&=q^{5-12r}f_{4,4,1}(-q^{71+12r},-q^{13};q^4)-q^{-10-12r}j(-q^3;q^4)\\
&\quad+q^{-7-12r}j(-q^{7+12r};q^{16})\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-4m}.
\end{aligned}\tag{10.9}$$

将 $(x,y)=(-q^{23+12r},-q^9)$ 代入 (10.8)，并对两个 theta 函数应用 (5.2a)。由此得到

$$\begin{aligned}
f_{4,4,1}(-q^{23+12r},-q^9;q^4)&=q^{-11-12r}f_{4,4,1}(-q^{71+12r},-q^9;q^4)-q^{-17-12r}j(-q^3;q^4)\\
&\quad+q^{-7-12r}j(-q^{7+12r};q^{16})\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}.
\end{aligned}\tag{10.10}$$

将 $(x, y) = (-q^{31+12r}, -q^{15})$ 代入 (10.8)，并对两个 theta 函数应用 (5.2a)。由此得到

$$f_{4,4,1}(-q^{31+12r}, -q^{15}; q^4) = q^{5-12r} f_{4,4,1}(-q^{79+12r}, -q^{15}; q^4) - q^{-16-12r} j(-q; q^4) + q^{-15-12r} j(-q^{15+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m}. \tag{10.11}$$

将 $(x, \ y) = (-q^{31+12r}, \ -q^{11})$ 代入 (10.8)，并对两个 theta 函数应用 (5.2a)。得到

$$f_{4,4,1}(-q^{31+12r}, -q^{11}; q^4) = q^{-11-12r} f_{4,4,1}(-q^{79+12r}, -q^{11}; q^4) - q^{-21-12r} j(-q; q^4) + q^{-15-12r} j(-q^{15+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-14m}. \tag{10.12}$$

在四个恒等式 (10.9)-(10.12) 中，我们将方程右端的二重求和单独提取出来。重写后的四个方程为

$$f_{4,4,1}(-q^{71+12r}, -q^{13}; q^4) = q^{12r-5} f_{4,4,1}(-q^{23+12r}, -q^{13}; q^4) + q^{-15} j(-q^3; q^4) - q^{-12} j(-q^{7+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-4m}, \tag{10.13}$$

$$f_{4,4,1}(-q^{71+12r}, -q^{9}; q^4) = q^{12r+11} f_{4,4,1}(-q^{23+12r}, -q^{9}; q^4) + q^{-6} j(-q^3; q^4) - q^{4} j(-q^{7+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-8m}. \tag{10.14}$$

$$f_{4,4,1}(-q^{79+12r}, -q^{15}; q^4) = q^{12r-5} f_{4,4,1}(-q^{31+12r}, -q^{15}; q^4) + q^{-21} j(-q; q^4) - q^{-20} j(-q^{15+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m}, \tag{10.15}$$

$$f_{4,4,1}(-q^{79+12r}, -q^{11}; q^4) = q^{12r+11} f_{4,4,1}(-q^{31+12r}, -q^{11}; q^4) + q^{-10} j(-q; q^4) - q^{-4} j(-q^{15+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-14m}. \tag{10.16}$$

我们希望将方程 (10.13)–(10.16) 相加，使左端为 $F(r+4)$。为此，我们必须分别乘以 q 的适当幂。得到的四个新方程为

$$q^{39+8r} f_{4,4,1}(-q^{71+12r}, -q^{13}; q^4) = q^{34+20r} f_{4,4,1}(-q^{23+12r}, -q^{13}; q^4) + q^{24+8r} j(-q^3; q^4) - q^{27+8r} j(-q^{7+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-4m},$$

$$-q^{21+4r} f_{4,4,1}(-q^{71+12r}, -q^{9}; q^4) = -q^{32+16r} f_{4,4,1}(-q^{23+12r}, -q^{9}; q^4) - q^{15+4r} j(-q^3; q^4) + q^{25+4r} j(-q^{7+12r}; q^{16}) \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-8m},$$

$$-q^{45+8r}f_{4,4,1}(-q^{79+12r},-q^{15};q^4)=-q^{40+20r}f_{4,4,1}(-q^{31+12r},-q^{15};q^4)-q^{24+8r}j(-q;q^4)$$
$$+q^{25+8r}j(-q^{15+12r};q^{16})\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m},$$

$$q^{25+4r}f_{4,4,1}(-q^{79+12r},-q^{11};q^4)=q^{36+16r}f_{4,4,1}(-q^{31+12r},-q^{11};q^4)+q^{15+4r}j(-q;q^4)$$
$$-q^{21+4r}j(-q^{15+12r};q^{16})\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-14m}.$$

将这四个方程相加，用 $F(r)$ 表示结果，并合并同类项，即可得到所需结果。□

对 $G(r)$ 的命题 *10.7* 的证明。我们有

$$\begin{aligned}G(r+4)&=q^{71+16r}j(-q^{71+12r};q^{16})\\&\quad\times\Big(q^{2r+8+12\binom{r+4}{2}}q^2\omega_3(-q^2)+\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\Big(q^{2k}-q^{-2k+4(r+4)-2}\Big)\Big)\\&\quad-q^{81+16r}j(-q^{79+12r};q^{16})\\&\quad\times\Big(1-q^{4r+16}\Big(q^{4r+16+12\binom{r+4}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^4)\\&\qquad+\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\Big(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\Big)\Big)\Big)\\&\quad-(-1)^{r+4}\frac{q^{\binom{2r+8}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{1+4r+16};q^{16}).\end{aligned}$$

我们首先将 (5.2a) 应用于简单的 theta 函数的商。这给出

$$\begin{aligned}&(-1)^{r+4}\frac{q^{\binom{2r+8}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{1+4r+16};q^{16})\\&\qquad=(-1)^r\frac{q^{\binom{2r}{2}+16r+\binom{8}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}q^{-1-4r}j(-q^{1+4r};q^{16})\\&\qquad=q^{27+12r}(-1)^r\frac{q^{\binom{2r}{2}+2}}{2}\frac{J_1^2J_2}{J_4^2}j(-q^{1+4r};q^{16})\end{aligned}$$

我们使用 (5.2a) 并展开，得到

$$\begin{aligned}G(r+4)&=q^{71+16r}q^{-16\binom{3}{2}-3(23+12r)}j(-q^{23+12r};q^{16})q^{2r+8+12\binom{r}{2}+48r+12\binom{4}{2}}q^2\omega_3(-q^2)\\&\quad+q^{71+16r}q^{-16\binom{3}{2}-3(23+12r)}j(-q^{23+12r};q^{16})\\&\qquad\times\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\Big(q^{2k}-q^{-2k+4(r+4)-2}\Big)\\&\quad-q^{81+16r}q^{-16\binom{3}{2}-3(31+12r)}j(-q^{31+12r};q^{16})\\&\quad+q^{81+16r}q^{-16\binom{3}{2}-3(31+12r)}j(-q^{31+12r};q^{16})q^{4r+16}q^{4r+16+12\binom{r}{2}+48r+12\binom{4}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^4)\\&\quad+q^{81+16r}q^{-16\binom{3}{2}-3(31+12r)}j(-q^{31+12r};q^{16})q^{4r+16}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=0}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8(r+4)-4}\right)$$
$$- q^{27+12r}(-1)^r \frac{q^{\binom{2r}{2}+2}}{2} \frac{J_1^2 J_2}{J_4^2} j(-q^{1+4r}; q^{16}).$$

我们化简指数，得到

$$\begin{aligned} G(r+4) = {} & q^{27+12r} q^{7+16r} j(-q^{23+12r}; q^{16}) q^{2r+12\binom{r}{2}} q^2 \omega_3(-q^2) \\ & + q^{-46-20r} j(-q^{23+12r}; q^{16}) \sum_{k=0}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right) \\ & - q^{-60-20r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) \\ & + q^{27+12r} q^{17+16r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) q^{4r} q^{4r+12\binom{r}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^4) \\ & + q^{-44-16r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) \sum_{k=0}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8(r+4)-4}\right) \\ & - q^{27+12r}(-1)^r \frac{q^{\binom{2r}{2}+2}}{2} \frac{J_1^2 J_2}{J_4^2} j(-q^{1+4r}; q^{16}). \end{aligned}$$

我们将上述方程改写为关于 $G(r)$的形式。由此得到

$$\begin{aligned} G(r+4) = {} & q^{27+12r} G(r) \\ & - q^{27+12r} q^{7+16r} j(-q^{23+12r}; q^{16}) \sum_{k=0}^{r-1} q^{12rk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4r-2}\right) \\ & + q^{-46-20r} j(-q^{23+12r}; q^{16}) \sum_{k=0}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right) \\ & + q^{27+12r} q^{17+16r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) - q^{-60-20r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) \\ & - q^{27+12r} q^{17+16r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) q^{4r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{12rk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8r-4}\right) \\ & + q^{-44-16r} j(-q^{31+12r}; q^{16}) \sum_{k=0}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8(r+4)-4}\right). \end{aligned}$$

与命题 10.7 中的函数方程比较可知，我们需要证明

$$\begin{aligned} & -q^{25+4r} j(-q^{7+12r}; q^{16}) \left(q^{4r+2} \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-4m} - \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-8m}\right) \\ & \quad + q^{21+4r} j(-q^{15+12r}; q^{16}) \left(q^{4r+4} \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m} - \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-14m}\right) \\ & = -q^{27+12r} q^{7+16r} j(-q^{23+12r}; q^{16}) \sum_{k=0}^{r-1} q^{12rk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4r-2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+q^{-46-20r}j(-q^{23+12r};q^{16})\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4(r+4)-2}\right)\\
&+q^{27+12r}q^{17+16r}j(-q^{31+12r};q^{16})-q^{-60-20r}j(-q^{31+12r};q^{16})\\
&-q^{27+12r}q^{17+16r}j(-q^{31+12r};q^{16})q^{4r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8r-4}\right)\\
&+q^{-44-16r}j(-q^{31+12r};q^{16})\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right).
\end{aligned}
$$

我们利用 (5.2a) 改写需要证明的内容，得到

$$
\begin{aligned}
&-q^{25+4r}j(-q^{7+12r};q^{16})\left(q^{4r+2}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-4m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}\right)\\
&\quad+q^{21+4r}j(-q^{15+12r};q^{16})\left(q^{4r+4}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-14m}\right)\\
&=-q^{27+16r}j(-q^{7+12r};q^{16})\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4r-2}\right)\\
&\quad+q^{-53-32r}j(-q^{7+12r};q^{16})\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4(r+4)-2}\right)\\
&\quad+q^{29+16r}j(-q^{15+12r};q^{16})-q^{-75-32r}j(-q^{15+12r};q^{16})\\
&\quad-q^{29+16r}j(-q^{15+12r};q^{16})q^{4r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8r-4}\right)\\
&\quad+q^{-59-28r}j(-q^{15+12r};q^{16})\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right).
\end{aligned}
$$

我们将重点转向这两个 theta 函数的系数。首先考虑$j(-q^{7+12r};q^{16})$的系数。这里我们要证明

$$
\begin{aligned}
&-q^{25+4r}\left(q^{4r+2}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-4m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}\right)\\
&\quad=-q^{27+16r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4r-2}\right)\\
&\qquad+q^{-53-32r}\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4(r+4)-2}\right).
\end{aligned}
$$

让我们稍作改写。我们有

$$
\begin{aligned}
&-q^{25+4r}\left(q^{4r+2}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-4m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}\right)\\
&\quad=-q^{27+16r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4r-2}\right)
\end{aligned}
$$

$$+ q^{-53-32r} \sum_{k=0}^{3} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right)$$
$$+ q^{-53-32r} \sum_{k=4}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right).$$

只需证明两个独立的恒等式成立。对于第一个，我们要证明

$$0 = -q^{27+16r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{12rk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4r-2}\right) \tag{10.17}$$
$$+ q^{-53-32r} \sum_{k=4}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right),$$

而对于第二个，我们想要证明

$$-q^{25+4r} \left(q^{4r+2} \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-4m} - \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-8m}\right) \tag{10.18}$$
$$= q^{-53-32r} \sum_{k=0}^{3} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right).$$

为了证明 (10.17)，我们看到对求和指标作平移后可得

$$q^{-53-32r} \sum_{k=4}^{r+4-1} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right)$$
$$= q^{-53-32r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{12(r+4)(k+4)-12\binom{k+4+1}{2}} q^{2(k+4)}$$
$$- q^{-53-32r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{12(r+4)(k+4)-12\binom{k+4+1}{2}} q^{-2(k+4)+4(r+4)-2}$$
$$= q^{27+16r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{12kr-12\binom{k+1}{2}+2k} - q^{25+20r} \sum_{k=0}^{r-1} q^{12kr-12\binom{k+1}{2}-2k}$$
$$= q^{27+16r} \left(\sum_{k=0}^{r-1} q^{12kr-12\binom{k+1}{2}+2k} - \sum_{k=0}^{r-1} q^{12kr-12\binom{k+1}{2}-2k+4r-2}\right).$$

为证明 (10.18)，我们用 $k \to 3-m$ 交换求和顺序，得到

$$q^{-53-32r} \sum_{k=0}^{3} q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4(r+4)-2}\right)$$
$$= q^{25+4r} \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-8m} - q^{8r+27} \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-4m}$$
$$= -q^{25+4r} \left(q^{4r+2} \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-4m} - \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-8m}\right).$$

现在我们将注意力转向 $j(-q^{15+12r};q^{16})$ 的系数。我们要证明

$$\begin{aligned}
&q^{21+4r}\left(q^{4r+4}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-14m}\right)\\
&\quad=q^{29+16r}-q^{-75-32r}\\
&\qquad-q^{29+20r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8r-4}\right)\\
&\qquad+q^{-59-28r}\sum_{k=0}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right).
\end{aligned}$$

让我们将其改写为

$$\begin{aligned}
&q^{21+4r}\left(q^{4r+4}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m}-\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-14m}\right)\\
&\quad=q^{29+16r}-q^{-75-32r}\\
&\qquad-q^{29+20r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8r-4}\right)\\
&\qquad+q^{-59-28r}\sum_{k=0}^{3}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right)\\
&\qquad+q^{-59-28r}\sum_{k=4}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right).
\end{aligned}$$

我们继续按我们对第一个系数的做法进行。我们注意到，在平移 $k\to k+4$ 之后，

$$\begin{aligned}
&q^{-59-28r}\sum_{k=4}^{r+4-1}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right)\\
&\qquad=q^{29+20r}\sum_{k=0}^{r-1}q^{12rk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8r-4}\right).
\end{aligned}$$

其次，我们用 $k\to 3-m$ 反转求和指标，得到

$$\begin{aligned}
&q^{-59-28r}\sum_{k=0}^{3}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right)\\
&\qquad=q^{25+8r}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m}-q^{29+16r}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-2m}.
\end{aligned}$$

接着，我们调整右端的求和指标。首先，将第二个求和的求和范围改为从 $m=-1$ 到 $m=2$。然后，通过添加和减去若干项，将求和范围改回从 $m=0$ 到 $m=3$。由此得到

$$q^{-59-28r}\sum_{k=0}^{3}q^{12(r+4)k-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8(r+4)-4}\right)$$

$$= q^{25+8r}\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m} - q^{21+4r}\sum_{m=-1}^{2} q^{-6m^2-12mr-14m}$$
$$= q^{25+8r}\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m} - q^{21+4r}\left(q^{8+12r} + \sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-14m} - q^{-96-36r}\right)$$
$$= q^{25+8r}\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m} - q^{16r+29} + q^{-75-32r} - q^{21+4r}\left(\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-14m}\right),$$

这正是我们想要的。 □

10.5. **层级** $2/3$**-层弦函数：定理 2.12**。 我们陈述证明定理 2.12 所需的命题，然后给出证明，接着给出这些命题的证明。

命题 10.10。 在定理 *2.12* 中，我们将恒等式的左端定义为 $F(r)$，将右端定义为 $G(r)$。我们有，$F(r)$ 和 $G(r)$ 都满足相同的函数方程

$$H(r+4) = q^{33+12r}H(r)$$
$$+ q^{27+4r}j(-q^{13+12r};q^{16})\left(\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-14m} - q^{4+4r}\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-10m}\right)$$
$$- q^{18-8r}j(-q^{5+12r};q^{16})\left(\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-20m} - q^{6+4r}\sum_{m=0}^{3} q^{-6m^2-12mr-16m}\right).$$

在上一小节中，我们在命题 10.8 中考虑了 s偶数的情形。对于 s奇数的情形，我们将 $s \to 2s+1$ 替换为，得到

推论 10.11。 我们有

$$q^{11+8s}h_{4,4,1}(-q^{29+12s},-q^{13};q^4) - q^{7+4s}h_{4,4,1}(-q^{29+12s},-q^{9};q^4)$$
$$- q^{17+8s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{15};q^4) + q^{11+4s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{11};q^4)$$
$$= q^{15+16s}j(-q^{29+12s};q^{16})$$
$$\times\left(1 - q^{4s}\Big(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4}\right) + 2q^{4s+12\binom{s}{2}}m(-q^4,-1;q^{12})\Big)\right)$$
$$- q^{25+16s}j(-q^{37+12s};q^{16})$$
$$\times\Big(1 - q^{4s+2}\Big(1 - q^{8s}\Big(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2}\right)$$
$$+ 2q^{2s+12\binom{s}{2}}m(-q^2,-1;q^{12})\Big)\Big)\Big).$$

定理 *2.12* 的证明。 命题 10.10 告诉我们

$$F(s+4) - G(s+4) = q^{33+12s}\left(F(s) - G(s)\right),$$

因此，我们只需证明 $0 \le s \le 3$ 下的定理 2.12。不过，推论 10.11 和引理 5.14 表明

$$q^{11+8s}h_{4,4,1}(-q^{29+12s},-q^{13};q^4) - q^{7+4s}h_{4,4,1}(-q^{29+12s},-q^{9};q^4)$$
$$- q^{17+8s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{15};q^4) + q^{11+4s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{11};q^4)$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{15+16s} j(-q^{29+12s}; q^{16}) \\
&\quad \times \left(1 - q^{4s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4} + q^{4s+12\binom{s}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^4)\right)\right)\right) \\
&\quad - 2q^{4s} q^{4s+12\binom{s}{2}} q^{15+16s} j(-q^{29+12s}; q^{16}) \left(-\frac{1}{4} \frac{J_{12,24}^2}{J_4} + \frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12} J_{4,12}}\right) \\
&\quad - q^{25+16s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \\
&\quad \times \Big(1 - q^{4s+2}\Big(1 - q^{8s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2}\right) + 2q^{2s+12\binom{s}{2}} \frac{1}{2} q^2 \omega_3(-q^2)\right) \\
&\quad - 2q^{25+16s} q^{4s+2} q^{8s} q^{2s+12\binom{s}{2}} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \left(-\frac{1}{2} q^2 \frac{J_{12}^3}{J_4 \overline{J}_{6,12}} + \frac{J_{12}^3 \overline{J}_{4,12} J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12} J_{2,12} J_{4,12} \overline{J}_{6,12}}\right).
\end{aligned}
$$

随后，推论 5.10 和命题 6.5 给出了该结果。 □

推论 *10.11* 的证明。 我们考虑命题 10.8 中 s 为奇数的情形。将 s 替换为 $2s+1$，得到

$$
\begin{aligned}
&q^{11+8s} h_{4,4,1}(-q^{29+12s}, -q^{13}; q^4) - q^{7+4s} h_{4,4,1}(-q^{29+12s}, -q^9; q^4) \\
&\quad - q^{17+8s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{15}; q^4) + q^{11+4s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{11}; q^4) \\
&\quad = q^{15+16s} j(-q^{29+12s}; q^{16}) \left(m(-q^{8+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s} m(-q^{4+12s}, -1; q^{12})\right) \\
&\quad - q^{25+16s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \left(m(-q^{10+12s}, -1; q^{12}) - q^{8s} m(-q^{2+12s}, -1; q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

对于第一行，利用 Appell函数性质(5.13c)并进行因式分解，得到

$$
\begin{aligned}
&m(-q^{8+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s} m(-q^{4+12s}, -1; q^{12}) \\
&\quad = 1 + q^{-4+12s} m(-q^{-4+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s} m(-q^{4+12s}, -1; q^{12}) \\
&\quad = 1 - q^{4s} \left(m(-q^{4+12s}, -1; q^{12}) - q^{-4+8s} m(-q^{-4+12s}, -1; q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

由引理 5.13 (5.17)可得

$$
\begin{aligned}
&m(-q^{8+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s} m(-q^{4+12s}, -1; q^{12}) \\
&\quad = 1 - q^{4s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4}\right) + 2q^{4s+12\binom{s}{2}} m(-q^4, -1; q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

对于第二行，我们利用 (5.13c) 和引理 5.13 (5.16)得到

$$
\begin{aligned}
&m(-q^{10+12s}, -1; q^{12}) - q^{8s} m(-q^{2+12s}, -1; q^{12}) \\
&\quad = 1 + q^{-2+12s} m(-q^{-2+12s}, -1; q^{12}) - q^{8s} m(-q^{2+12s}, -1; q^{12}) \\
&\quad = 1 - q^{8s} \left(m(-q^{2+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s-2} m(-q^{-2+12s}, -1; q^{12})\right) \\
&\quad = 1 - q^{8s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{2k} - q^{-2k+4s-2}\right) + 2q^{2s+12\binom{s}{2}} m(-q^2, -1; q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

将这两部分合并，即得所需结果。 □

命题 *10.10* 的证明。 这与命题 10.7 的证明类似，因此略去。 □

10.6. **定理 $2/3$层级弦函数：定理 2.13**。 我们先陈述证明定理 2.13 所需的命题，然后给出证明，最后给出这些命题的证明。

命题 10.12. 在定理 *2.13* 中，我们将该恒等式的左端定义为 $F(r)$，并将右端定义为 $G(r)$。我们有 $F(r)$ 与 $G(r)$ 均满足同一函数方程：

$$\begin{aligned}H(r+4) &= q^{27+12r}H(r)\\ &+ q^{23+2r}j(-q^{7+12r};q^{16})\left(\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-10m} - q^{4+8r}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-2m}\right)\\ &- q^{18+2r}j(-q^{15+12r};q^{16})\left(\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-16m} - q^{8+8r}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}\right).\end{aligned}$$

下一命题类似于我们在前面各小节中所得到的结果，我们将再次需要考虑 s 为偶数与 s 为奇数的情形。我们在此处考虑 s 为偶数，并在下一节考虑 s 为奇数。

命题 10.13. 我们有

$$\begin{aligned}&q^{7+5s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^{15};q^4) - q^{3+s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^7;q^4)\\ &\quad - q^{14+5s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{17};q^4) + q^{6+s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^9;q^4)\\ &= q^{7+7s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{4+6s},-1;q^{12}) - q^{4s-4}m(-q^{-4+6s},-1;q^{12})\right)\\ &\quad - q^{16+7s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(1-q^{4s}\left(m(-q^{2+6s},-1;q^{12}) - q^{2s-2}m(-q^{-2+6s},-1;q^{12})\right)\right).\end{aligned}$$

对于 s 为偶数的情形，我们替换 $s\to 2s$，从而得到

推论 10.14. 我们有

$$\begin{aligned}&q^{7+10s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{15};q^4) - q^{3+2s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^7;q^4)\\ &\quad - q^{14+10s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{17};q^4) + q^{6+2s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^9;q^4)\\ &= q^{7+14s}j(-q^{12s+23};q^{16})\\ &\quad\times\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8s-4}\right)+2q^{4s+12\binom{s}{2}}m(-q^4,-1;q^{12})\right)\\ &\quad - q^{16+14s}j(-q^{31+12s};q^{16})\\ &\quad\times\left(1-q^{8s}\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+2q^{2s+12\binom{s}{2}}m(-q^2,-1;q^{12})\right)\right).\end{aligned}$$

定理 *2.13* 的证明。命题 10.12 告诉我们

$$F(s+4)-G(s+4) = q^{27+12s}\left(F(s)-G(s)\right),$$

因此，我们只需证明 $0\le s\le 3$ 的定理 2.13。不过，推论 10.9 和引理 5.14 告诉我们

$$\begin{aligned}&q^{7+10s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{15};q^4) - q^{3+2s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^7;q^4)\\ &\quad - q^{14+10s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{17};q^4) + q^{6+2s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^9;q^4)\\ &= q^{7+14s}j(-q^{12s+23};q^{16})\\ &\quad\times\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8s-4}\right)+q^{4s+12\binom{s}{2}}\frac{1}{2}f_3(q^4)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2q^{7+14s}q^{4s+12\binom{s}{2}}j(-q^{12s+23};q^{16})\left(-\frac{1}{4}\frac{J_{12,24}^2}{J_4}+\frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12}J_{4,12}}\right)\\
&-q^{16+14s}j(-q^{31+12s};q^{16})\\
&\times\left(1-q^{8s}\left(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+q^{2s+12\binom{s}{2}}q^2\omega_3(-q^2)\right)\right)\\
&+2q^{8s}q^{16+14s}q^{2s+12\binom{s}{2}}j(-q^{31+12s};q^{16})\left(-\frac{1}{2}q^2\frac{J_{12}^3}{J_4\overline{J}_{6,12}}+\frac{J_{12}^3\overline{J}_{4,12}J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12}J_{2,12}J_{4,12}\overline{J}_{6,12}}\right).
\end{aligned}
$$

接着，由推论 5.10 和命题 6.6 即可得出结果。 □

命题 *10.13* 的证明。 由推论 5.10 可得

$$h_{4,4,1}(x,y;q^4)=j(x;q^{16})m\big(-q^{12}yx^{-1},-1;q^{12}\big)+j(y;q)m\big(q^{24}xy^{-4},-1;q^{48}\big).$$

因此

$$
\begin{aligned}
A(s):&=q^{7+5s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^{15};q^4)-q^{3+s}h_{4,4,1}(-q^{6s+23},-q^7;q^4)\\
&\quad-q^{14+5s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^{17};q^4)+q^{6+s}h_{4,4,1}(-q^{31+6s},-q^9;q^4)\\
&=q^{7+5s}\left(j(-q^{6s+23};q^{16})m(-q^{4-6s},-1;q^{12})+j(-q^{15};q^4)m(-q^{-13+6s},-1;q^{148})\right)\\
&\quad-q^{3+s}\left(j(-q^{6s+23};q^{16})m(-q^{-4-6s},-1;q^{12})+j(-q^7;q^4)m(-q^{19+6s},-1;q^{48})\right)\\
&\quad-q^{14+5s}\left(j(-q^{31+6s};q^{16})m(-q^{-2-6s},-1;q^{12})+j(-q^{17};q^4)m(q^{-13+6s},-1;q^{48})\right)\\
&\quad+q^{6+s}\left(j(-q^{31+6s};q^{16})m(-q^{-10-6s},-1;q^{12})+j(-q^9;q^4)m(q^{19+6s},-1;q^{48})\right).
\end{aligned}
$$

四项阿佩尔函数项相互抵消。利用 (5.2a)，可得

$$j(-q^{15};q^4)=q^{-21}j(-q^3;q^4),\ \text{and}\ j(-q^{17};q^4)=q^{-28}j(-q;q^4)$$

以及

$$j(-q^7;q^4)=q^{-3}j(-q^3;q^4),\ \text{and}\ j(-q^9;q^4)=q^{-6}j(-q;q^4).$$

由此可知，四个阿佩尔函数相互抵消，得到

$$
\begin{aligned}
A(s)&=-q^{3+s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{-4-6s},-1;q^{12})-q^{4+4s}m(-q^{4-6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad+q^{6+s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(m(-q^{-10-6s},-1;q^{12})-q^{8+4s}m(-q^{-2-6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

利用阿佩尔函数性质(5.13b)，我们得到

$$
\begin{aligned}
A(s)&=-q^{3+s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(-q^{4+6s}m(-q^{4+6s},-1;q^{12})+q^{10s}m(-q^{-4+6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad+q^{6+s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(-q^{10+6s}m(-q^{10+6s},-1;q^{12})+q^{10+10s}m(-q^{2+6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

化简后得到

$$
\begin{aligned}
A(s)&=q^{7+7s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{4+6s},-1;q^{12})-q^{4s-4}m(-q^{-4+6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad-q^{16+7s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(m(-q^{10+6s},-1;q^{12})-q^{4s}m(-q^{2+6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

应用阿佩尔函数性质(5.13c)可得

$$
\begin{aligned}
A(s)&=q^{7+7s}j(-q^{6s+23};q^{16})\left(m(-q^{4+6s},-1;q^{12})-q^{4s-4}m(-q^{-4+6s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad-q^{16+7s}j(-q^{31+6s};q^{16})\left(1+q^{-2+6s}m(-q^{-2+6s},-1;q^{12})-q^{4s}m(-q^{2+6s},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}
$$

重新排列各项即可得到结果。 □

推论 *10.14* 的证明。 我们考虑命题 10.13 中 s 偶数的情形。将 s 替换为 $2s$，得到

$$\begin{aligned}
&q^{7+10s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^{15};q^4)-q^{3+2s}h_{4,4,1}(-q^{12s+23},-q^7;q^4)\\
&\quad-q^{14+10s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^{17};q^4)+q^{6+2s}h_{4,4,1}(-q^{31+12s},-q^9;q^4)\\
&=q^{7+14s}j(-q^{12s+23};q^{16})\left(m(-q^{4+12s},-1;q^{12})-q^{8s-4}m(-q^{-4+12s},-1;q^{12})\right)\\
&\quad-q^{16+14s}j(-q^{31+12s};q^{16})\\
&\qquad\times\left(1-q^{8s}\left(m(-q^{2+12s},-1;q^{12})-q^{4s-2}m(-q^{-2+12s},-1;q^{12})\right)\right).
\end{aligned}$$

应用引理 5.13 即得结论。 □

.....的证明 命题 *10.12.* 这与命题 10.7 的证明类似，因此略去。 d. □

10.7. **定理** $2/3$**-层级弦函数：定理 2.14.** 我们先陈述证明定理 2.13 所需的命题，然后给出证明，接着给出这些命题的证明。

命题 10.15. 在定理 *2.14* 中，我们将恒等式的左端定义为 $F(r)$，将右端定义为 $G(r)$。我们有，$F(r)$ 和 $G(r)$ 满足相同的函数方程：

$$\begin{aligned}
H(r+4)&=q^{33+12r}H(r)\\
&+q^{24+2r}j(-q^{13+12r};q^{16})\left(\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-16m}-q^{8+8r}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-8m}\right)\\
&-q^{14-10r}j(-q^{5+12r};q^{16})\left(\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-22m}-q^{12+8r}\sum_{m=0}^{3}q^{-6m^2-12mr-14m}\right).
\end{aligned}$$

在上一小节中，我们在命题 10.13 中考虑了 s 为偶数的情形。对于 s为奇数的情形，我们将 $s\to 2s+1$ 替换为，得到

推论 10.16. 我们有

$$\begin{aligned}
&q^{12+10s}h_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^{15};q^4)-q^{4+2s}h_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^7;q^4)\\
&\quad-q^{19+10s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{17};q^4)+q^{7+2s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^9;q^4)\\
&=q^{14+14s}j(-q^{12s+29};q^{16})\\
&\qquad\times\left(1-q^{8s}\Big(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{2k}-q^{-2k+4s-2}\right)+2q^{2s+12\binom{s}{2}}m(-q^2,-1;q^{12})\Big)\right)\\
&\quad-q^{23+14s}j(-q^{37+12s};q^{16})\\
&\qquad\times\left(1-q^{8s+4}\Big(1-q^{4s}\Big(\sum_{k=0}^{s-1}q^{12sk-12\binom{k+1}{2}}\left(q^{4k}-q^{-4k+8s-4}\right)+2q^{4s+12\binom{s}{2}}m(-q^4,-1;q^{12})\Big)\Big)\right).
\end{aligned}$$

定理 *2.14* 的证明。命题 10.15 告诉我们

$$F(s+4)-G(s+4)=q^{33+12s}\left(F(s)-G(s)\right),$$

因此，我们只需证明 $0\le s\le 3$ 的定理 2.14。然而，推论 10.16 和引理 5.14 告诉我们

$$\begin{aligned}
&q^{12+10s}h_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^{15};q^4)-q^{4+2s}h_{4,4,1}(-q^{12s+29},-q^7;q^4)\\
&\quad-q^{19+10s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^{17};q^4)+q^{7+2s}h_{4,4,1}(-q^{37+12s},-q^9;q^4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{14+14s} j(-q^{12s+29}; q^{16}) \\
&\quad \times \left(1 - q^{8s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^k - q^{-2k+4s-2}\right) + q^{2s+12\binom{s}{2}} q^2 \omega_3(-q^2)\right)\right) \\
&\qquad - 2q^{8s} q^{2s+12\binom{s}{2}} q^{14+14s} j(-q^{12s+29}; q^{16}) \left(-\frac{1}{2} q^2 \frac{J_{12}^3}{J_4 \overline{J}_{6,12}} + \frac{J_{12}^3 \overline{J}_{4,12} J_{6,12}}{\overline{J}_{0,12} J_{2,12} J_{4,12} \overline{J}_{6,12}}\right) \\
&\quad - q^{23+14s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \\
&\quad \times \left(1 - q^{8s+4} \left(1 - q^{4s} \left(\sum_{k=0}^{s-1} q^{12sk-12\binom{k+1}{2}} \left(q^{4k} - q^{-4k+8s-4}\right) + q^{4s+12\binom{s}{2}} \frac{1}{2} f_3(q^4)\right)\right)\right) \\
&\qquad - 2q^{23+14s} q^{8s+4} q^{4s} q^{4s+12\binom{s}{2}} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \left(-\frac{1}{4} \frac{J_{12,24}^2}{J_4} + \frac{J_{12}^3}{\overline{J}_{0,12} J_{4,12}}\right).
\end{aligned}
$$

接着，推论 5.10 和命题 6.7 给出了所需结果。 □

推论 *10.16* 的证明。 我们考虑命题 10.13 中 s为奇数的情形。将 s替换为 $2s+1$，得到

$$
\begin{aligned}
&q^{12+10s} h_{4,4,1}(-q^{12s+29}, -q^{15}; q^4) - q^{4+2s} h_{4,4,1}(-q^{12s+29}, -q^7; q^4) \\
&\quad - q^{19+10s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{17}; q^4) + q^{7+2s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^9; q^4) \\
&= q^{14+14s} j(-q^{12s+29}; q^{16}) \left(m(-q^{10+12s}, -1; q^{12}) - q^{8s} m(-q^{2+12s}, -1; q^{12})\right) \\
&\quad - q^{23+14s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \left(1 - q^{8s+4} \left(m(-q^{8+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s} m(-q^{4+12s}, -1; q^{12})\right)\right).
\end{aligned}
$$

在两行中应用 Appell函数性质(5.13c)，得到

$$
\begin{aligned}
&q^{12+10s} h_{4,4,1}(-q^{12s+29}, -q^{15}; q^4) - q^{4+2s} h_{4,4,1}(-q^{12s+29}, -q^7; q^4) \\
&\quad - q^{19+10s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{17}; q^4) + q^{7+2s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^9; q^4) \\
&= q^{14+14s} j(-q^{12s+29}; q^{16}) \left(1 + q^{-2+12s} m(-q^{-2+12s}, -1; q^{12}) - q^{8s} m(-q^{2+12s}, -1; q^{12})\right) \\
&\quad - q^{23+14s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \\
&\qquad \times \left(1 - q^{8s+4} \left(1 + q^{-4+12s} m(-q^{-4+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s} m(-q^{4+12s}, -1; q^{12})\right)\right).
\end{aligned}
$$

提出公因子后，得到

$$
\begin{aligned}
&q^{12+10s} h_{4,4,1}(-q^{12s+29}, -q^{15}; q^4) - q^{4+2s} h_{4,4,1}(-q^{12s+29}, -q^7; q^4) \\
&\quad - q^{19+10s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^{17}; q^4) + q^{7+2s} h_{4,4,1}(-q^{37+12s}, -q^9; q^4) \\
&= q^{14+14s} j(-q^{12s+29}; q^{16}) \left(1 - q^{8s} \left(m(-q^{2+12s}, -1; q^{12}) - q^{4s-2} m(-q^{-2+12s}, -1; q^{12})\right)\right) \\
&\quad - q^{23+14s} j(-q^{37+12s}; q^{16}) \\
&\qquad \times \left(1 - q^{8s+4} \left(1 - q^{4s} \left(m(-q^{4+12s}, -1; q^{12}) - q^{8s-4} m(-q^{-4+12s}, -1; q^{12})\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

由引理 5.13 可得结果 □

证明　　命题 *10.15*。这与命题 10.7 的证明类似，因此略去 d. □

11. Mock theta function identities for double-sum coefficients from odd-spin

本节讨论奇自旋情形下的广义欧拉恒等式。我们证明了定理 3.5 中关于 $1/2$-层级、定理 3.7 中关于 $1/3$-层级的类似假 theta 猜想的恒等式，

以及定理 3.10 中关于 $2/3$-层级的类似假 theta 猜想的恒等式。这些证明都很相似，但这里我们不使用函数方程，因此证明简短得多。

11.1. **定理 $1/2$-层级弦函数：定理 3.5**。我们陈述证明定理 3.5 所需的命题，然后给出证明，再给出这些命题的证明。

我们计算推论 3.4 中那对双重求和的 $s=0$ 情形。首先，我们分别求出推论 3.4 中相应双重求和所涉及的推论 5.11 里的阿佩尔函数表达式。我们有

命题 11.1. 我们有

$$-q^3 h_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+qh_{5,5,1}(q^9,q^2;q)=j(q;q^5)\left(1-2m(-q,-1;q^4)\right).$$

定理 *3.5* 的证明。推论 5.11 给出

$$\begin{aligned}-q^3 f_{5,5,1}(q^9,q^4;q)&+qf_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\\&=-q^3 h_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+qh_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\\&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^3\vartheta_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+q\vartheta_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\right).\end{aligned}$$

由命题 11.1 和 (1.12) 可得

$$\begin{aligned}-q^3 f_{5,5,1}(q^9,q^4;q)&+qf_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\\&=j(q;q^5)\left(1-2\left(\frac{1}{4}\mu_2(q)+\frac{1}{4}\frac{J_{2,4}^4}{J_1^3}\right)\right)\\&\quad-\frac{1}{\overline{J}_{0,4}\overline{J}_{0,20}}\left(-q^3\vartheta_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+q\vartheta_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\right).\end{aligned}$$

该结果随后由命题 6.8 得出。 □

命题 *11.1* 的证明。推论 5.11 给出

$$h_{5,5,1}(x,y;q)=j(x;q^5)m(-q^4x^{-1}y,-1;q^4)+j(y;q)m(-q^{10}xy^{-5},-1;q^{20}),\tag{11.1}$$

因此

$$\begin{aligned}-q^3 h_{5,5,1}(q^9,q^4;q)&+qh_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\\&=-q^3\left(j(q^9;q^5)m(-q^{-1},-1;q^4)+j(q^4;q)m(-q^{-1},-1;q^{20})\right)\\&\quad+q\left(j(q^9;q^5)m(-q^{-3},-1;q^4)+j(q^2;q)m(-q^9,-1;q^{20})\right).\end{aligned}$$

注意到 $j(q^n;q)=0$ 对于 $n\in\mathbb{Z}$。因此

$$\begin{aligned}-q^3 h_{5,5,1}(q^9,q^4;q)&+qh_{5,5,1}(q^9,q^2;q)\\&=-q^3 j(q^9;q^5)m(-q^{-1},-1;q^4)+qj(q^9;q^5)m(-q^{-3},-1;q^4).\end{aligned}$$

利用 Appell函数性质(5.13b) 并进行因式分解，得到

$$-q^3 h_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+qh_{5,5,1}(q^9,q^2;q)=q^4 j(q^9;q^5)\left(m(-q,-1;q^4)-m(-q^3,-1;q^4)\right).$$

阿佩尔函数性质 (5.13c)，随后是 (5.13b)，给出

$$-q^3 h_{5,5,1}(q^9,q^4;q)+qh_{5,5,1}(q^9,q^2;q)=q^4 j(q^9;q^5)\left(-1+2m(-q,-1;q^4)\right).$$

结果随即由 (5.2a) 得出。 □

11.2. $1/3$ **层级弦函数：定理 3.7**。 我们先陈述证明定理 3.7 所需的命题，然后给出定理的证明，最后给出这些命题的证明。

我们计算推论 3.6 中两组双重求和的 $s = 0$ 情形。首先，我们求出推论 3.6 中相应双重求和在推论 5.12 里的阿佩尔函数表达式。我们有

命题 11.2。我们有

$$-q^4 h_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 h_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)=j(q^6;q^7)\left(1-2m\big(-q^2,-1;q^6\big)\right),$$
$$-q^5 h_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q h_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)=j(q^6;q^7)\left(1-2m\big(-q,-1;q^6\big)\right).$$

定理 *3.7* 的证明。我们证明第一个恒等式。推论 5.12 给出

$$\begin{aligned}&-q^4 f_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 f_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\\&\quad=-q^4 h_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 h_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\\&\qquad-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^4\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\right).\end{aligned}$$

由命题 11.2 和引理 5.14（5.24），可得

$$\begin{aligned}&-q^4 f_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 f_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\\&\quad=j(q;q^7)\left(1-\frac{1}{2}f_3(q^2)\right)+\frac{1}{2}\frac{J_{6,12}^2 J_{1,7}}{J_2}-2\frac{J_6^3 J_{1,7}}{\overline{J}_{0,6}J_{2,6}}\\&\qquad-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^4\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\right).\end{aligned}$$

结论由命题 6.9 得出。

我们证明第二个恒等式。由推论 5.12 可得

$$\begin{aligned}&-q^5 f_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q f_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)\\&\quad=-q^5 h_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q h_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)\\&\qquad-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^5\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)\right).\end{aligned}$$

由命题 11.2 和引理 5.14 (5.23) 可得

$$\begin{aligned}&-q^5 f_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q f_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)\\&\quad=j(q^6;q^7)\left(1-q\omega_3(-q)\right)+q\frac{J_6^3 J_{1,7}}{J_2\overline{J}_{3,6}}-2\frac{J_6^3\overline{J}_{2,6}J_{3,6}J_{1,7}}{\overline{J}_{0,6}J_{1,6}J_{2,6}\overline{J}_{3,6}}\\&\qquad-\frac{1}{\overline{J}_{0,6}\overline{J}_{0,42}}\left(-q^5\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^6;q)+q\vartheta_{7,7,1}(q^{13},q^2;q)\right).\end{aligned}$$

结论由命题 6.10 即可推出。 □

命题 *11.2* 的证明。 我们证明第一个恒等式。第二个恒等式的证明类似，故略去。由推论 5.12 可得

$$h_{7,7,1}(x,y;q)=j(x;q^7)m\big(-q^6yx^{-1},-1;q^6\big)+j(y;q)m\big(-q^{21}xy^{-7},-1;q^{42}\big).$$

因此

$$\begin{aligned}&-q^4 h_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 h_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\\&\quad=-q^4 j(q^{13};q^7)m\big(-q^{-2},-1;q^6\big)+q^2 j(q^{13};q^7)m\big(-q^{-4},-1;q^6\big).\end{aligned}$$

使用 (5.2a)，然后应用 (5.13b)，可得

$$\begin{aligned}
&-q^4 h_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 h_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\\
&\quad= q^{-2} j(q^6;q^7) m\big(-q^{-2},-1;q^6\big) - q^{-4} j(q^6;q^7) m\big(-q^{-4},-1;q^6\big)\\
&\quad= -j(q^6;q^7) m\big(-q^2,-1;q^6\big) + j(q^6;q^7) m\big(-q^4,-1;q^6\big).
\end{aligned}$$

利用 (5.13c) 和 (5.13b) 可得

$$\begin{aligned}
&-q^4 h_{7,7,1}(q^{13},q^5;q)+q^2 h_{7,7,1}(q^{13},q^3;q)\\
&\quad= -j(q^6;q^7) m\big(-q^2,-1;q^6\big) + j(q^6;q^7)\left(1+q^{-2} m\big(-q^{-2},-1;q^6\big)\right)\\
&\quad= -j(q^6;q^7) m\big(-q^2,-1;q^6\big) + j(q^6;q^7)\left(1- m\big(-q^2,-1;q^6\big)\right),
\end{aligned}$$

结论由此得出。 □

11.3. $2/3$**层级弦函数：定理 3.10**。 我们陈述证明定理 3.10 所需的命题，随后给出证明，再给出这些命题的证明。

我们计算推论 3.9 中两组二重求和的情形 $s=0$ 。首先，我们分别计算推论 3.9 中相应二重求和的推论 5.10 里的阿佩尔函数表达式。

我们考虑推论 3.9 中第一组二重求和。我们有

命题 11.3。我们有

$$\begin{aligned}
&q^8 h_{4,4,1}(-q^{26},-q^{13};q^4) - q^5 h_{4,4,1}(-q^{26},-q^9;q^4)\\
&\qquad - q^{14} h_{4,4,1}(-q^{34},-q^{15};q^4) + q^9 h_{4,4,1}(-q^{34},-q^{11};q^4)\\
&= j(-q^{10};q^{16})\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1} m(-q,-1;q^{12})\right)\\
&\qquad - j(-q^2;q^{16})\left(1-q+q\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1} m(-q,-1;q^{12})\right)\right),
\end{aligned}$$

对于推论 3.9 中二重求和的第二个四元组，我们有

命题 11.4。我们有

$$\begin{aligned}
&q^9 h_{4,4,1}(-q^{26},-q^{15};q^4) - q^{3+s} h_{4,4,1}(-q^{26},-q^7;q^4)\\
&\qquad - q^{16} h_{4,4,1}(-q^{34},-q^{17};q^4) + q^6 h_{4,4,1}(-q^{34},-q^9;q^4)\\
&= j(-q^{10};q^{16})\left(1-\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1} m(-q,-1;q^{12})\right)\right)\\
&\qquad - qj(-q^2;q^{16})\left(q^{-2}-\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1} m(-q,-1;q^{12})\right)\right).
\end{aligned}$$

定理 *3.10* 的证明。 我们证明第一个恒等式 (3.4)。推论 5.10 和命题 11.3 于是给出

$$\begin{aligned}
&q^8 f_{4,4,1}(-q^{26},-q^{13};q^4) - q^5 f_{4,4,1}(-q^{26},-q^9;q^4)\\
&\qquad - q^{14} f_{4,4,1}(-q^{34},-q^{15};q^4) + q^9 f_{4,4,1}(-q^{34},-q^{11};q^4)\\
&= j(-q^{10};q^{16})\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1} m(-q,-1;q^{12})\right)\\
&\qquad - j(-q^2;q^{16})\left(1-q+q\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1} m(-q,-1;q^{12})\right)\right)\\
&\qquad - \frac{1}{\overline{J}_{0,3}\overline{J}_{0,12}}\Big(q^8 \vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^{13};q^4) - q^5 \vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^9;q^4)\\
&\qquad\qquad - q^{14} \vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^{15};q^4) + q^9 \vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^{11};q^4)\Big).
\end{aligned}$$

于是该结果由引理 5.15 和命题 6.11 得出。

我们证明第二个恒等式 (3.5)。随后，推论 5.10 和命题 11.4 给出

$$\begin{aligned}
&q^9 f_{4,4,1}(-q^{26},-q^{15};q^4) - q^3 f_{4,4,1}(-q^{26},-q^7;q^4)\\
&\quad - q^{16} f_{4,4,1}(-q^{34},-q^{17};q^4) + q^6 f_{4,4,1}(-q^{34},-q^9;q^4)\\
&= j(-q^{10};q^{16})\left(1-\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12})\right)\right)\\
&\quad - qj(-q^2;q^{16})\left(q^{-2}-\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12})\right)\right)\\
&\quad - \frac{1}{\overline{J}_{0,3}\overline{J}_{0,12}}\Big(q^9\vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^{15};q^4) - q^3\vartheta_{4,4,1}(-q^{26},-q^7;q^4)\\
&\qquad - q^{16}\vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^{17};q^4) + q^6\vartheta_{4,4,1}(-q^{34},-q^9;q^4)\Big).
\end{aligned}$$

由引理 5.15 和命题 6.12 即得该结果。 □

命题 *11.3* 的证明。由推论 5.10 可得

$$h_{4,4,1}(x,y;q^4) = j(x;q^{16})m(-q^{12}yx^{-1},-1;q^{12}) + j(y;q^4)m(q^{24}xy^{-4},-1;q^{48}).$$

因此

$$\begin{aligned}
A(s) :&= q^8 h_{4,4,1}(-q^{26},-q^{13};q^4) - q^5 h_{4,4,1}(-q^{26},-q^9;q^4)\\
&\quad - q^{14} h_{4,4,1}(-q^{34},-q^{15};q^4) + q^9 h_{4,4,1}(-q^{34},-q^{11};q^4)\\
&= q^8\left(j(-q^{26};q^{16})m(-q^{-1},-1;q^{12}) + j(-q^{13};q^4)m(q^{-2},-1;q^{48})\right)\\
&\quad - q^5\left(j(-q^{26};q^{16})m(-q^{-5},-1;q^{12}) + j(-q^9;q^4)m(q^{14},-1;q^{48})\right)\\
&\quad - q^{14}\left(j(-q^{34};q^{16})m(-q^{-7},-1;q^{12}) + j(-q^{15};q^4)m(q^{-2},-1;q^{48})\right)\\
&\quad + q^9\left(j(-q^{34};q^{16})m(-q^{-11},-1;q^{12}) + j(-q^{11};q^4)m(q^{14},-1;q^{48})\right).
\end{aligned}$$

其中四项相互抵消。我们利用 (5.2a) 将 theta 函数改写，得到

$$q^8 j(-q^{13};q^4) = q^{-7}j(-q;q^4), \text{ and } q^5 j(-q^9;q^4) = q^{-1}j(-q;q^4),$$

以及

$$q^{14} j(-q^{15};q^4) = q^{-7}j(-q^3;q^4), \text{ and } q^9 j(-q^{11};q^4) = q^{-1}j(-q^3;q^4).$$

因此，四项相消，得到

$$\begin{aligned}
A(s) &= -q^5 j(-q^{26};q^{16})\left(m(-q^{-5},-1;q^{12}) - q^3 m(-q^{-1},-1;q^{12})\right)\\
&\quad + q^9 j(-q^{34};q^{16})\left(m(-q^{-11},-1;q^{12}) - q^5 m(-q^{-7},-1;q^{12})\right).
\end{aligned}$$

接着，我们利用阿佩尔函数性质(5.13b)，得到

$$\begin{aligned}
A(s) &= -q^5 j(-q^{26};q^{16})\left(-q^5 m(-q^5,-1;q^{12}) + q^4 m(-q,-1;q^{12})\right)\\
&\quad + q^9 j(-q^{34};q^{16})\left(-q^{11}m(-q^{11},-1;q^{12}) + q^{12}m(-q^7,-1;q^{12})\right).
\end{aligned}$$

利用阿佩尔函数性质(5.13c)，再利用(5.13b)，得到

$$\begin{aligned}
A(s) &= -q^5 j(-q^{26};q^{16})\left(-q^5 m(-q^5,-1;q^{12}) + q^4 m(-q,-1;q^{12})\right)\\
&\quad + q^9 j(-q^{34};q^{16})\left(-q^{11}\left(1-m(-q,-1;q^{12})\right) + q^{12}\left(1-m(-q^5,-1;q^{12})\right)\right).
\end{aligned}$$

这可以改写为

$$\begin{aligned}
A(s) &= q^{10} j(-q^{26};q^{16})\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12})\right)\\
&\quad - q^{20} j(-q^{34};q^{16})\left(1-q+q\left(m(-q^5,-1;q^{12}) - q^{-1}m(-q,-1;q^{12})\right)\right).
\end{aligned}$$

由此即可得出结论 (5.2a)。 □

命题 *11.4* 的证明。证明与命题 11.3 的证明类似，因此略去。□

Acknowledgements

本研究得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的支持（协议编号：075-15-2025-343）。我们感谢尼古拉·博罗泽涅茨提出的一些有益意见和建议。

References

[1] D. Adamovi´c, A. 米拉斯, *The $N = 1$ triplet vertex operator superalgebras*, Comm. Math. Phys. 288.1 (2009), 第1期, 第225–270页。[2] C. 安, S. W. 郑, S.-H. 戴, *New parafermion, SU(2) coset and $N = 2$ superconformal field theories*, Nuclear Phys. B 365 (1991), 第1期, 第191–240页。[3] G. E. 安德鲁斯, *Mordell integrals and Ramanujan's "lost" notebook*, 第 10–48 页, 解析数论, 费城（1980）, Lect. Notes Math. 889 (1981)。[4] G. E. 安德鲁斯, *The fifth and seventh order mock theta functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), 第113–134页。[5] G. E. 安德鲁斯, *q-orthogonal polynomials, Rogers–Ramanujan identities, and mock theta functions*, Proc. Stek. Inst. Math. 276(1) (2012) 21–32。[6] G. E. 安德鲁斯, B. C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook: Part V.*, Springer, 柏林, 2018。[7] G. E. 安德鲁斯, F. 加文, *Ramanujan's "lost" notebook VI: The mock theta conjectures*, Adv. Math. 73 (1989), 第2期, 242–255。[8] J. 奥热, T. 克罗伊齐希, D. 里多特, *Modularity of logarithmic parafermion vertex algebras*, Lett. Math. Phys. 108 (2018), 第12期, 第2543–2587页。[9] N. Borozenets, E. T. Mortenson, *On string functions of the generalized parafermionic theories mock theta functions and false theta functions*, , , Adv. Math. ( ), . [10] N. Borozenets, E. T. Mortenson, *On string functions of the generalized parafermionic theories mock theta functions and false theta functions II*, , , , arXiv: . . [11] K. 布林曼, J. 卡希安, A. 米拉斯, S. Zwegers, *Rank two false theta functions and Jacobi forms of negative definite matrix index*, *112* 2020 101946, Adv. Appl. Math. ( ), . [12] K. 布林曼, A. 米拉斯, *$\mathcal{W}$-algebras, false theta functions and quantum modular forms, I*, Int. Math. Res. Not. 2015 (2015), 第21期, 第11351–11387页。[13] K. 布林曼, J. 卡希安, A. 米拉斯, C. 纳扎罗格鲁, *Integral representations of rank two false theta functions and their modularity properties*, **8** 2021 4, 54, Res. Math. Sci. ( ), 第 期。[14] K. 布林曼, K. 小野, *The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks*, Invent. Math., 165 (2006), 第243–266页。[15] K. 布林曼, K. 小野, *Dyson's Ranks and Maass forms*, Ann. Math., 171 (2010), 第419–449页。[16] A. 达博尔卡, S. 穆尔蒂, D. 扎吉尔, *Quantum black holes, wall crossing, and mock modular forms*, arXiv:1208.4074 (2012)。[17] F. J. 戴森, *Some guesses in the theory of partitions*, Eureka, 剑桥 8 (1944), 第10–15页。[18] J. 弗赖, F. 加文, *Automatic proof of theta-function identities*, 量子场论中的椭圆积分、椭圆函数与模形式, 第195–258页, Texts Monogr. Symbol. Comput., Springer, Cham, 2019。[19] B. 戈登, R. McIntosh, *Some eighth order mock theta functions*, J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), 第321–335页。[20] D. R. 希克森, *A proof of the mock theta conjectures*, Invent. Math. 94 (1988), 第3期, 第639–660页。[21] D. R. 希克森, *On the seventh order mock theta functions*, Invent. Math. 94 (1988), 第3期, 第661–677页。[22] D. R. 希克森, E. T. Mortenson, *Hecke-type double sums, Appell–Lerch sums, and mock theta functions, I*, Proc. London Math. Soc. (3) 109 (2014), 第2期, 382–422。[23] V. Kac, D. 彼得森, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms*, Adv. Math. 53 (1984), 125–264. [24] V. Kac, M. Wakimoto, *Modular and conformal invariance constraints in representation theory of affine algebras*, **70** 1988 2, 156 236, Adv. Math. ( ), 第–期。[25] V. Kac, M. Wakimoto, *Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, **85** 1988 4956 4960, Proc. Nat. Acad. Sci. USA ( ), -。

[26] V. Kac, M. Wakimoto, *Branching functions for winding subalgebras and tensor products*, Acta Appl. Math. **21** (1990), 3–39。[27] S. Konenkov, E. T. Mortenson, *Two 2/5-level mock theta conjecture-like identities*, Res. in Number Theory**11**, 93 (2025) [28] S. Lu, *Some results on modular invariant representations*, 无穷维李代数与群, Adv. Ser. in Math. Phys. **7** (1988)，第235–253页。[29] R. McIntosh, *Second order mock theta functions*, Can. Math. Bull., **50** (2007)，第2期，第284–290页。[30] E. T. Mortenson, A. Sahu, *Expressing q-series in terms of building blocks of Hecke-type double-sums*, Int. J. Number Theory **16** (2023)，第6期，1429–1451。[31] E. T. Mortenson, S. Zwegers, *The mixed mock modularity of certain duals of generalized quantum modular forms of Hikami and Lovejoy* **418** 2023 108944 , Adv. Math. ( ), . [32] S. Ramanujan, *The lost notebook and other unpublished papers*, Narosa Publishing House，新德里，1987。[33] A. Schilling, S. O. Warnaar, *Conjugate Bailey Pairs*, Contemp. Math., **197** (2002)，第227–255页。[34] A. Selberg, *Über die Mock-Thetafunktionen siebenter Ordnung*, Arch. Math. og Naturvidenskab **41** (1938)，第3–15页。[35] G. N. Watson, *The final problem: an account of the mock theta functions,* J. London Math. Soc., **11** (1936)，第55–80页。[36] D. B. Zagier, *Ramanujan's mock theta functions and their applications [d'après Zwegers and Bringmann-Ono]* ´ 2007 2008, 986 , Seminaire Bourbaki, - no. . [37] S. P. Zwegers, *Mock ϑ-functions and real analytic modular forms*, *q*-级数及其在组合学、数论与物理学中的应用（编者：B. C. Berndt 和 K. Ono），Contempt. Math. **291**，美国数学会 (2001)，第269–277页。[38] S. P. Zwegers, *Mock theta functions*, 博士论文，乌得勒支大学，2002。

Department of Mathematics and Computer Science, Saint Petersburg State University, Saint Pe-tersburg, Russia, 199178*Email address*: konenkov.stepan@yandex.ru

Department of Mathematics and Computer Science, Saint Petersburg State University, Saint Pe-tersburg, Russia, 199178*Email address*: etmortenson@gmail.com