arXiv:2602.02247v1 [math.NA] 2 Feb 2026

第1章
浅水线性化矩方程的新能量方程推导

Julian Koellermeier

摘要 浅水矩方程（SWME）是对著名的浅水方程（SWE）的扩展，可用于高效地模拟和数值仿真自由表面流。浅水方程通常假设垂向速度剖面为深度平均值，而浅水矩方程则允许速度剖面存在垂向变化。因此，浅水矩方程假设速度剖面为多项式形式，并通过更高阶的深度积分，推导出多项式系数对应的附加演化方程。本文针对浅水矩方程的一种特定变体——浅水线性化矩方程（SWLME），系统地重新推导其能量方程。该推导基于标准浅水方程能量方程的推导，并纳入了模型的反对称形式。这种系统化的新推导有助于将模型扩展至其他浅水矩方程变体，并对其进行数值求解。

关键词：斜对称形式；能量稳定；熵变量。**MSC2020：**35L60；35B38；76Bxx。

1.1 浅水方程与能量守恒

浅水流广泛存在于各种自由表面流动情形中，包括海洋或河流波、雪崩和泥流。浅水流的特点是表面波长远大于水深。在本研究中，我们考虑一种简单的一维情形，即忽略几何形状或速度在横向（展向）上的变化。此外，我们假设压力为静水压力，并忽略摩擦项。非

Julian Koellermeier 数学、计算机科学与统计学系，根特大学；伯努利研究所，格罗宁根大学 电子邮箱：julian.koellermeier@ugent.be

静水扩展和摩擦项可在 [8, 11] 中轻松找到。请注意，浅水流的假设通常仅在河床坡度较小 [9] 时才成立。

用于模拟此类流动的最常见模型是浅水方程（SWE）。该模型假设速度为深度平均速度，并通过对底层纳维–斯托克斯方程进行深度平均推导而来。在已知底部地形项 b 的一维情形下，关于水深 $h(t,\ x)$ 和深度平均速度 $u_m(t,\ x)$ 的偏微分方程组由两个方程构成，其形式为

$$\partial_t h + \partial_x (hu_m) = 0, \qquad \partial_t (hu_m) + \partial_x \left(hu_m^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) = -gh\partial_x b. \tag{1.1}$$

众所周知，对于浅水方程（1.1），可以推导出一个能量方程，其形式为 [5]

$$\partial_t \left(\frac{hu_m^2}{2} + g\frac{h^2}{2} + ghb \right) + \partial_x \left(\frac{hu_m^3}{2} + ghu_m(h+b) \right) = 0, \tag{1.2}$$

其中，能量 $e = \frac{hu^2 m}{2} + \frac{gh^2}{2} + ghb$ 是一个守恒量，也是一种熵函数，其熵通量为 $f = \frac{hu^3 m}{2} + ghu_m(h+b)$。这使得我们能够设计专门的数值方法，在数值模拟过程中离散地保持能量 [4, 5, 10]。

考虑水平速度 $u(t,\ x,\ z)$ 随 z 垂向变化的影响，一种方法是在式（1.1）中为非线性项 hu_m^2 引入所谓的 Boussinesq 系数 β [9]，其定义如下：

$$\beta = \frac{1}{hu_m^2} \int_{b(t,x)}^{h(t,x)} u(t,x,z)^2 \, dz. \tag{1.3}$$

然而，由于在浅水方程（1.1）中，精确的速度分布 $u(t,x,z)$ 是未知的，因此需要对 β 建模作出假设，例如假设 $u(t,x,z)$ 具有某种特定形状。这最终使浅水方程只能包含一个速度变量，即平均流速 $u_m(t,x)$。

1.2 浅水矩方程

标准浅水方程模型（1.1）受深度平均化假设的限制，因此只有一个变量 $u_m(t,x)$ 来表示速度剖面（也可能包含形状因子或 Boussinesq 系数 β (1.3)）。当速度剖面在垂直方向上变化显著时，这可能导致模型不准确。事实上，[9] 曾指出，这是明渠流计算出现误差的主要原因之一。为了解决这一问题，人们推导出了扩展浅水模型。其中一种扩展模型称为浅水矩方程（SWME）[8]。

浅水矩方程采用垂向速度展开

$$u(t,x,z) = u_m(t,x) + \sum_{i=0}^{N} u_i(t,x)\phi_i\left(\frac{z-b(t,x)}{h(t,x)}\right), \tag{1.4}$$

其中 $\zeta = \frac{z-b(t,x)}{h(t,x)} \in [0,1]$ 是缩放后的垂向变量，而 $u_i(t,x)$ 和 $\phi_i(\zeta)$（$i = 1,\ldots,N$）分别是 $[0,1]$，上的多项式系数和正交勒让德多项式 [8]。

注 *1* 注意，展开式 (1.4) 与动态变化的 Boussinesq 系数 β (1.3) 相同，该系数成为多项式系数 $u_i(t,x)$ 的函数，其中 $i = 1, \ldots, N$由下式给出

$$\beta = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1}\frac{u_i(t,x)^2}{u_m(t,x)^2} = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1}(Mu)_i^2, \tag{1.5}$$

其中，$(Mu)_i = ui(t,x)\ um(t,x)$ 衡量多项式系数 $u_i(t, x)$ 相对于深度平均速度 $u_m(t, x)$ 的大小，其中 $i = 1, \ldots,N$。有趣的是，项 $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1}(Mu)_i^2$ 也出现在下文所讨论的 SWLME 模型的 Rankine–Hugoniot 跳跃条件计算中，见 [7]。这说明 $u(t, x, z)$ 的形状会直接影响模型的性质；现在可以对这些性质进行显式建模，而不必再依赖单一变量 $u_m(t, x)$ 和一个未知系数β。

显然，$h(t,x), u_m(t,x), u_i(t,x)$ 会随时间 t和空间 x变化。为简洁起见，从现在开始，我们省略变量对 t,x 的显式依赖。此外，假设给定的底部地形 $b(t,x) = b(x)$ 不随时间变化。

变量 h, u_m, u_i在 $i = 1,\ldots,N$范围内的演化方程，通过对纳维–斯托克斯方程进行高阶深度积分推导得出，结果得到 $N+2$个方程：一个关于 h 的方程（连续性方程），一个关于 hu_m 的方程（深度平均动量平衡），以及 N个关于 hu_i的附加方程，适用于 $i = 1,\ldots,N$（高阶矩方程），具体如下：

$$\partial_t h + \partial_x(hu_m) = 0, \quad \partial_t(hu_m) + \partial_x\left(hu_m^2 + h\sum_{j=1}^{N}\frac{u_j^2}{2j+1} + \frac{1}{2}gh^2\right) = -gh\partial_x b, \tag{1.6}$$

$$\partial_t(hu_i) + \partial_x\left(h\left(2u_m u_i + \sum_{j,k=1}^{N} A_{ijk}u_j u_k\right)\right) = u_m\partial_x(hu_i) - \sum_{j,k=1}^{N} B_{ijk}u_k\partial_x(hu_j), \tag{1.7}$$

其中 $A_ijk = (2i+1)\int_0^1 \phi_i\phi j\phi_k d\zeta$以及 $B_ijk = (2i+1)\int_0^1 \phi' i \left(\int_0^\zeta \phi j d\zeta\right)\phi_k d\zeta$，其中$i, j, k = 1,\ldots, N$，参见 [8]。

SWME (1.6)-(1.7) 存在不同的变体，这些变体通过近似系数 A_{ijk}和 B_{ijk}得到，见 [7, 6]。例如，采用 $A_{ijk} = 0, B_{ijk} = 0$，便得到所谓的浅水线性化矩方程（SWLME） [7]。最初，推导 SWLME 是为了以一种简单的方式获得解析稳态，这些稳态是经典浅水方程（SWE）Rankine–Hugoniot 跳跃条件的扩展。不过， [2] 推导了以下 SWLME能量方程

$$\partial_t\left(\frac{hu_m^2}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}+g\frac{h^2}{2}+ghb\right)+\partial_x\left(\frac{hu_m^3}{2}+\frac{3hu_m}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}+ghu_m(h+b)\right)=0. \tag{1.8}$$

这个能量方程（1.8）可视为标准浅水方程能量方程（1.2）的扩展。值得注意的是，SWLME能量方程（1.8）将能量中的高阶系数 u_i（$i=1,\ldots,N$）纳入考虑。

[2] 中能量方程 (1.8) 的推导仅作为附带说明，省略了若干中间步骤，而这些步骤有助于将其推广到更多类似类型的模型。因此，本文基于 [5] 中标准浅水方程模型的逐步推导，给出一种新的推导方法。

1.3 SWLME 的能量方程推导

含底部地形的无摩擦一维SWLME系统（推导见 [7], ）包含关于$N+2$个方程，分别描述h、hu_m和hu_i，其中$i=1,\ldots,N$，写作

$$(\mathrm{C}): \qquad \partial_t h+\partial_x(hu_m)=0, \tag{1.9}$$

$$(\mathrm{M}): \qquad \partial_t(hu_m)+\partial_x\left(hu_m^2+h\sum_{j=1}^{N}\frac{u_j^2}{2j+1}+\frac{1}{2}gh^2\right)=-gh\partial_x b, \tag{1.10}$$

$$(u_i): \qquad \partial_t(hu_i)+\partial_x(2hu_mu_i)=u_m\partial_x(hu_i), \tag{1.11}$$

其中，(C)表示连续性方程，(M)表示动量平衡，而 (u_i) 表示$i=1,\ldots,N$对应的矩系数平衡。

再次注意，SWLME 是浅水矩方程 (1.6)-(1.7) 的一个特例，因为它采用系数

$$A_{ijk}=0, \quad B_{ijk}=0. \tag{1.12}$$

现在我们将逐步推导 SWLME (1.9)-(1.11) 的能量方程。

首先，势能 (P) 的求法与浅水方程完全相同：计算 $g(h+b)\cdot(\mathrm{C})=(\mathrm{P})$，得到

$$(\mathrm{P}): \qquad \partial_t\left(g\frac{h^2}{2}+ghb\right)+g(h+b)\partial_x(hu_m)=0, \tag{1.13}$$

其中 $g\frac{h^2}{2}+ghb$ 表示势能。

其次，我们旨在推导一个关于（平均）动能的方程。我们注意到，动量平衡(M)可以写成

$$(\mathrm{M'}): \qquad \partial_t(hu_m)+\partial_x\left(hu_m^2+h\sum_{j=1}^{N}\frac{u_j^2}{2j+1}\right)+gh\partial_x(h+b)=0. \tag{1.14}$$

然后，我们可以计算 (M') $-u_m\cdot$(C)，从而得到新的方程 (A)：

$$\underbrace{\partial_t(hu_m)-u_m\partial_t h}+\underbrace{\partial_x(hu_m^2)-u_m\partial_x(hu_m)}+gh\partial_x(h+b)+\partial_x\sum_{j=1}^{N}\frac{hu_j^2}{2j+1}=0, \tag{1.15}$$

$$(\mathrm{A}):\quad h\partial_t u_m \quad + \quad hu_m\partial_x u_m \quad +gh\partial_x(h+b)+\partial_x\sum_{j=1}^{N}\frac{hu_j^2}{2j+1}=0. \tag{1.16}$$

接下来，对 (A) 和 (M') 取平均，得到 (S) $=\frac{1}{2}$(A) $+\frac{1}{2}$(M')

$$(\mathrm{S}):\quad \frac{1}{2}\left(\partial_t(hu_m)+h\partial_t u_m\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_x\left(hu_m^2\right)+hu_m\partial_x u_m\right)+gh\partial_x(h+b)+\partial_x\sum_{j=1}^{N}\frac{hu_j^2}{2j+1}=0. \tag{1.17}$$

注意，(S) 关于u_m导数是反对称的，见 [5]。

然后，我们可以计算$u_m\cdot$(S)，得到动能 (K) 的方程

$$\frac{1}{2}\underbrace{\left(u_m\partial_t(hu_m)+hu_m\partial_t u_m\right)}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(u_m\partial_x\left(hu_m^2\right)+hu_m^2\partial_x u_m\right)}+ghu_m\partial_x(h+b)+u_m\partial_x\sum_{j=1}^{N}\frac{hu_j^2}{2j+1}=0 \tag{1.18}$$

$$(\mathrm{K}):\quad \partial_t\left(\frac{hu_m^2}{2}\right) \quad + \quad \partial_x\left(\frac{hu_m^3}{2}\right) \quad +ghu_m\partial_x(h+b)+u_m\partial_x\sum_{j=1}^{N}\frac{hu_j^2}{2j+1}=0, \tag{1.19}$$

其中$hu_m^2$2 表示动能。

第三，我们按照上述相同的方法，从矩方程（u_i）推导出一个方程，只是将其应用于（u_i），而不是 (M)。我们首先通过初等变换计算替代矩方程（u_i'），如下：

$$(u_i'):\qquad \partial_t(hu_i)+\partial_x(hu_mu_i)+hu_i\partial_x u_m=0. \tag{1.20}$$

然后我们计算 (Au_i) $=(u_i')$ $-u_i\cdot$(C)，如下：

$$\underbrace{\partial_t(hu_i)-u_i\partial_t h}+\underbrace{\partial_x(hu_mu_i)-u_i\partial_x(hu_m)}+hu_i\partial_x u_m=0, \tag{1.21}$$

$$(\mathrm{A}u_i):\quad h\partial_t u_i \quad + \quad hu_m\partial_x u_i \quad +hu_i\partial_x u_m=0, \tag{1.22}$$

接下来，我们再次对 (Au_i) 和 (u_i') 取平均，得到 (Su_i) $=\frac{1}{2}$(Au_i) $+\frac{1}{2}(u_i')$

$$(\mathrm{S}u_i):\quad \frac{1}{2}\left(\partial_t(hu_i)+h\partial_t u_i\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_x\left(hu_mu_i\right)+hu_m\partial_x u_i\right)+hu_i\partial_x u_m=0. \tag{1.23}$$

注意，与之前类似，(Su_i) 关于 u_i-导数是反对称的，见 [5]。然后我们计算 $u_i \cdot$ (Su_i)，得到

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{u_i\partial_t(hu_i)+hu_i\partial_t u_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\underbrace{u_i\partial_x(hu_m u_i)+hu_m u_i\partial_x u_i}\right)+hu_i^2\partial_x u_m=0, \tag{1.24}$$

$$\partial_t\left(\frac{hu_i^2}{2}\right) \quad + \quad \partial_x\left(\frac{hu_m u_i^2}{2}\right) \quad +hu_i^2\partial_x u_m=0, \tag{1.25}$$

或者等价地

$$(\mathrm{K}u_i)\ : \qquad \partial_t\left(\frac{h}{2}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)+\partial_x\left(\frac{hu_m}{2}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)+\frac{hu_i^2}{2i+1}\partial_x u_m=0, \tag{1.26}$$

其中，$h2\ u^2_i 2_{i+1}$ 可视为“部分动能”，其中包含了矩系数u_i的影响。

然后，我们可以使用N公式 (Ku) $=$ (K) $+\sum$ (Ku_i)$_{i=1}$计算总动能 (Ku) 的方程

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{hu_m^2}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)+\partial_x\frac{hu_m^3}{2}+ghu_m\partial_x(h+b)\\ \underbrace{+u_m\partial_x\sum_{j=1}^{N}\frac{hu_j^2}{2j+1}+\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2h}{2i+1}\partial_x u_m+\partial_x\left(\frac{hu_m}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)}_{\partial_x\left(\frac{3hu_m}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)}=0,\end{aligned} \tag{1.27}$$

这意味着，总动能 (Ku) 为：

$$\partial_t\left(\frac{hu_m^2}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)+\partial_x\frac{hu_m^3}{2}+ghu_m\partial_x(h+b)+\partial_x\left(\frac{3hu_m}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}\right)=0, \tag{1.28}$$

其中，$hu^2_m 2\ \ + h2\ N\sum_{i=1}\ u^2_i 2_{i+1}$ 表示总动能。

将总动能 (Ku) 和势能 (P) 的方程相加，可得到总能量 (E) 的方程：

$$\partial_t\left(\frac{hu_m^2}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}+g\frac{h^2}{2}+ghb\right)+\partial_x\left(\frac{hu_m^3}{2}+\frac{3hu_m}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}+ghu_m(h+b)\right)=0, \tag{1.29}$$

其中，总能量记为 e ＝hu²m2 ＋h2 NΣi=1 u²i2i+1 ＋g$\frac{h^2}{2}$ ＋ghb。显然，总能量 e 是一个守恒量，也是一种熵函数，其熵通量为 f ＝hu³m$_{2}$ ＋³ hum2 NΣi=1 u²i2i+1 ＋ghu$_m$(h ＋b)。

能量e可用对流变量（h、q、r_i）＝（h、hu_m，hu_i）表示为

$$e=\frac{q^2}{2h}+\frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i^2}{2i+1}+g\frac{h^2}{2}+ghb. \tag{1.30}$$

这意味着可以直接计算相应的熵变量：

$$q_1=\partial_h e=-\frac{u_m^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{2i+1}+g(h+b), \tag{1.31}$$

$$q_2=\partial_q e=u_m, \tag{1.32}$$

$$q_{u_i}=\partial_{r_i} e=\frac{u_i}{2i+1}. \tag{1.33}$$

我们注意到，因此也可以通过计算$_N$（E）＝q_1·（C）＋q_2·（M）＋Σ q^{u_i}·（u_i）。$_{i=1}$来得到总能量方程。

1.4 结论

本文为自由表面流 SWLME 模型提出了一种新的系统性能量方程推导方法。

SWLME能量方程 (1.29) 与 [2] 中推导出的 (1.8) 相同。然而，本文中的推导基于对 [5] 中浅水方程能量方程推导的扩展。作为副产品，该推导揭示了动量方程 (1.17) 和矩方程 (1.23) 的反对称形式。

尽管所推导的能量方程（1.29）专门针对SWLME系统（1.9）-（1.11），能量的推导遵循一套清晰的步骤。这些步骤是对 [5]中标准浅水方程能量方程推导的扩展。因此，我们认为本文中的推导对于更一般系统（如浅水矩方程 [8] 或色散模型[11]）的能量方程推导是有用的。此外，该问题的斜对称形式可用于推导类似于 [1, 3, 4, 5]的熵守恒数值格式。

致谢 本出版物是项目*HiWAVE*的一部分，档案号为*ENW Vidi*研究计划中的VI.Vidi.233.066，由荷兰研究委员会（*NWO*）资助。

参考文献

1. B¨OHM, M., WINTERS, A. R., GASSNER, G. J., DERIGS, D., HINDENLANG, F., SAUR, J., 电阻磁流体力学方程的熵稳定节点间断伽辽金方法。第一部分：理论与数值验证，《计算物理学杂志》*422 (2020)*。*2. CABALLERO-C´ARDENAS, C., G´OMEZ-BUENO, I., DEL GROSSO, A., KOELLERMEIER, J., MORALES DE LUNA, T.,* 浅水线性化矩方程的半隐式精确全平衡松弛格式，《计算方法与应用力学和工程》*437 (2025)*。*3. ERSING, P., WINTERS, A. R.,* 曲线网格上双层浅水方程的熵稳定间断伽辽金方法，《科学计算杂志》*98 (2024)*。*4. ERSING, P., GOLDBERG, S., WINTERS, A. R.,* 浅水系统的熵稳定静水重构格式，《计算物理学杂志》*527 (2025)*。*5. GASSNER, G. J., WINTERS, A. R., KOPRIVA, D. A.,* 浅水方程的良平衡熵守恒间断伽辽金谱元方法，《应用数学与计算》*272 (2016)*。*6. KOELLERMEIER, J., ROMINGER, M.,* 双曲型浅水矩方程的分析与数值模拟，《计算物理通讯》*28 (2020)*。*7. KOELLERMEIER, J., PIMENTEL-GARC´IA, E.,* 含地形的浅水矩方程的稳态与良平衡格式，《应用数学与计算》*427 (2022)*。*8. KOWALSKI, J., TORRILHON, M.,* 浅水流的矩近似与模型级联，《计算物理通讯》*25 (2019)*。*9. LIGGETT, J. A.,* 临界水深、速度剖面与平均化，《灌溉与排水工程杂志》*119 (1993)*。*10. PARISOT, M.,* 自由表面流色散约化模型层级的熵满足格式，《国际数值方法与流体》*91 (2019)*。*11. SCHOLZ, U., KOWALSKI, J., TORRILHON, M.,* 浅水矩方程中的色散，《应用数学与计算通讯》*6 (4) (2024)*。