arXiv:2602.02257v1 [math.AG] 2 Feb 2026

低亏格三角与嵌入热带曲线

HANNAH MARKWIG 和 ANGELINA ZHENG

Abstract. 在代数几何中，三角曲线总能嵌入希策布鲁赫曲面。在热带几何中，三角性的概念并没有唯一的对应译法。我们聚焦于这样一种刻画：存在一个到直线的 3 次态射；并讨论它与嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 的可能性之间的关系，后者反映了嵌入希策布鲁赫曲面的情形。我们的结果可分为三个部分：对于亏格 3 和 4 的低亏格热带曲线，我们在关于超椭圆热带曲线和低亏格曲线嵌入的研究基础上，讨论三重态态射与一种对偶于希策布鲁赫曲面多边形的嵌入之间的关系 [30, 8]。我们比较嵌入的障碍与存在到直线的 3 次态射的障碍。最后，我们展示一些例子，其中非光滑嵌入可以展开，以反映到直线的 3 次态射的某些特征。

1. Introduction

在代数几何中，三角曲线构成了一类研究得十分透彻的曲线。它们被定义为允许存在 g^1_3的光滑射影非超椭圆曲线，或者等价地说，是到 $\mathbb{P}^1$的3次态射。Noether、Enriques、Babbage 和 Petri 的经典结果 [3], 以及 Miranda [29] 和 Casnati–Ekedahl [13], 的后续工作，为三角曲线的典范模型提供了详尽描述。特别地，这类曲线的典范像位于一个有理正规卷曲上，也就是嵌入射影空间中的、位于 $\mathbb{P}^1$ 之上的有理直纹曲面的像。这个曲面称为希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$，其中整数 n被称为马罗尼不变量，满足

$$0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{g+2}{3} \right\rfloor \quad \text{and} \quad g \equiv n \mod 2. \tag{1}$$

更准确地说，若 $C \subset \mathbb{F}_n$ 是亏格为 g 且马罗尼不变量为 n的三角曲线，则其除子类为

$$[C] \sim 3E_n + \frac{g+3n+2}{2} F_n,$$

其中， E_n 表示自交数为 $-n$ 的唯一曲线的类（当 $n > 0$时），而 F_n 是纤维化中的一条直线的类。将投影 $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ 限制在 C 上，得到一个三次态射。将 $\mathbb{F}_n$ 视为由多边形定义的环面曲面，并将 C 的类视为超平面截面的类时，所考虑的多边形如图 1 所示。

特别地，由（1）可知，亏格 3 的三角曲线的马罗尼不变量总是 1。事实上，亏格 3 的三次曲线 C 是平面四次曲线，且每个 g^1_3 都通过固定一个点 $p \in C$ 并考虑所有经过 p的直线得到。对平面上的一点 p 进行爆破，所得曲面同构于第一 Hirzebruch 曲面： $\mathbb{F}_1 \cong Bl_{[0,0,1]}\mathbb{P}(1,\ 1,\ 1)$; $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(1,\ 1,\ 1)$。

对于亏格 4 曲线，同样由 (1) 可知，可能的马罗尼不变量为 0,2。事实上，亏格 4 的三角曲线在 $\mathbb{P}^3$ 中的典范嵌入是一个非奇异三次曲线与一个

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14T15,14T20.*Key words and phrases.* 热带曲线、图的调和态射、三角性、平面热带曲线与对偶牛顿剖分。

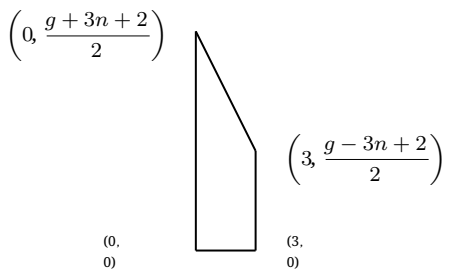


FIGURE 1. $\mathbb{F}_n$中一条 $3E_n + \frac{g+3n+2}{2}F_n$ 类曲线的多边形。

二次曲面的完全交，其中二次曲面可能奇异，也可能非奇异。如果二次曲面非奇异，则自然得到嵌入于次数为 0 的希策布鲁赫曲面中，因为 $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. 如果二次曲面奇异，那么锥体顶点的膨胀（该锥体可识别为加权射影平面 $\mathbb{P}(1,1,2)$）通过同构$\mathbb{F}_n \cong Bl_{[0,0,1]}\mathbb{P}(1,1,n)$ 与第二个希策布鲁赫曲面同构； $n \geq 1$。

反过来，一般而言， $\mathbb{F}_n$ 中的类为 $3E_n + kF_n$ 的曲线是三角的，因为投影态射会诱导一个到 $\mathbb{P}^1$的三次覆盖。

与代数情形不同，抽象热带曲线的亏格性概念并没有唯一的定义，目前已有若干种彼此不等价的定义。尤其值得注意的是，图的亏格性至少有两种不同概念：一种是所谓的亏格性，通过调和态射定义；另一种是除子冈纳利，通过图上的线性系定义。

若一个度量图存在一个到树的次数为d的非退化调和态射（必要时可先进行热带修改），则称其为 d-冈纳利 。另一方面，若其上存在一个次数为 d 且秩至少为一的除子，则称其为除子 d-冈纳利 。已知当 $d = 2$ [17]时，这两个定义一致，对应于超椭圆曲线的热带类比。关于 $d = 3$时二者的关系，即三角情形，文献 [26, 27]对此进行了详细研究。

从热带曲线（或其热带修改）到树的次数为 d 的非退化调和态射的存在性，总是蕴含着次数为 d 且秩至少为1的除子的存在性。特别地，每条 d角热带曲线必然在除子意义下是 d角的。然而，其逆命题一般并不成立。

对于情形 $d = 3$，在某些附加假设下这两个概念是一致的，具体而言，当底层图是3-边连通时。更一般地，若去掉边连通性假设，则当图没有分离顶点时，这两个概念再次等价。

此外，在3-边连通的情形下，若一条热带曲线是三角的，并且配备了一个到树的3次非退化调和态射，则该态射在 [14]的意义下定义了一个次数为3的热带容许覆盖 。若不假设边连通性，只要限制在没有分离顶点或重边的图上，同样的关系仍然成立。自然地，热带容许覆盖是相同次数的调和态射，而一般而言其逆命题并不成立。

当然，我们可以利用热带化 将代数几何中的概念引入热带几何，但这一过程相当复杂，而且对于在代数几何中等价的概念，在热带几何中考察时可能会得到不同的结果。粗略地说，这就是为什么抽象热带曲线会出现不同的亏格性概念。

设一条曲线定义在带有非阿基米德赋值的域上，半稳定约化理论会产生一种热带化，它可以看作该曲线的贝尔科维奇解析化的骨架；或者等价地，看作半稳定约化的特殊纤维的对偶图的度量化，其中一条边的长度反映了对偶结点在这一族中形成的“快慢”，

也就是说，形成中的节点的局部方程 $xy = h$ 中 h 的赋值是多少。给定一个曲线覆盖，可以将源和目标都热带化，从而得到一个热带曲线之间的调和态射；此外，该态射在每个顶点处都满足黎曼-赫尔维茨条件（即热带覆盖），并且可以与各顶点关联的局部赫尔维茨数均非零。事实上，这也是热带曲线之间的调和态射的可实现性条件：若它满足黎曼-赫尔维茨条件（即它是热带覆盖），且所有局部赫尔维茨数均非零，那么它就是某个曲线覆盖的热带化 [1, 2]。因此，我们称这样的热带覆盖为可实现覆盖。正如 [12, 第 2 节2] 所述，三度热带覆盖均可实现。因此，我们将考虑的所有热带覆盖也都可实现。

假设有一条嵌入环面曲面的曲线 C，例如 $\mathbb{F}_n$。将曲线上的环面点取出，并逐坐标应用（负的）赋值映射，我们得到一个嵌入热带化。总存在一个从 C 的抽象热带化到环面的热带化的映射，即 $\mathbb{R}^2$。但一般来说，这个映射可能存在问题，因为它可能会压缩抽象热带曲线的重要特征，例如环。只有当嵌入热带化是光滑的，我们才能确定其底层度量图结构确实反映了抽象热带化 [6]。

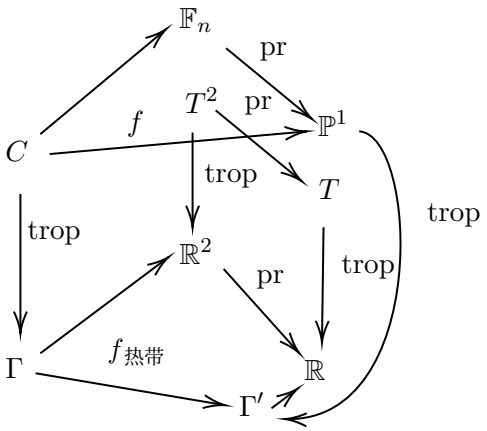


FIGURE 2. 具有到 $\mathbb{P}^1$ 的态射、且该态射经过希策布鲁赫曲面到 $\mathbb{P}^1$的投影的曲线的热带化。

图 2 展示了曲线的热带化关系：该曲线具有到 $\mathbb{P}^1$ 的态射，且该态射经过希策布鲁赫曲面到 $\mathbb{P}^1$ 的投影。由于我们将$\mathbb{F}_n$ 的热带化限制在环面点上，该投影便给出一个从 C 的热带化到 $\mathbb{R}$的热带覆盖。如果我们直接对覆盖 $C \to \mathbb{P}^1$ 进行抽象热带化，那么我们不一定会预期目标是 $\mathbb{R}$，而可能是任意一棵可压缩到 $\mathbb{R}$的度量树 Γ'。由于本文关注的是热带版本的这一图最有意义的情形，因此我们相应地聚焦于到 $\mathbb{R}$的可实现覆盖。

如上所述，我们预期当 C 的嵌入热带化是光滑的时，图的热带版本中会呈现最理想的关系，因为此时将 Γ 映射到这条平面热带曲线的映射不会收缩本质特征。我们的研究建立在 [8]，的基础上；该研究探讨了哪些低亏格抽象热带曲线可以光滑地嵌入为平面热带曲线。

我们的研究可以视为 [30]，的延伸；该研究探讨了热带双曲曲线向平面的嵌入。

我们的研究始于以下观察，我们将在第3节中证明这一点 :

命题 1.1（见 3.1）。假设 Γ 可光滑嵌入 $\mathbb{R}^2$，即满足（对 Γ 进行某种修改后）其与图 *1* 中多边形的一个幺模三角剖分对偶。那么，将投影限制在 Γ 上所得的映射是一个次数为 3 的可实现的良好收缩热带覆盖。

这里，良好收缩（见定义 2.5）大致意味着覆盖不会收缩任何重要特征，尤其是不会收缩任何圈。

反过来，给定一个次数为 3 的可实现热带覆盖 $\Gamma \to \mathbb{R}$，则可以将 Γ 映射到 $\mathbb{R}^2$，使其像与图 1 中的多边形对偶。这一点可从代数几何的角度得到：$\Gamma \to \mathbb{R}$ 可以提升为一个三重态态射 $C \to \mathbb{P}^1$。由于 C 是三角的，它可以嵌入到 $\mathbb{F}_n$中。接着，我们可以使用嵌入热带化。然而，以这种方式得到的从 $\Gamma \to \mathbb{R}^2$出发的映射可能很糟糕，因为它可能收缩重要特征；这是因为无法期望嵌入热带化是光滑的。

我们的研究关注命题 1.1 的逆命题，核心问题是如何控制上述收缩。我们的结果可分为三个部分。

(1) 我们着重研究低亏格 3、4 的热带曲线，并证明对于极大组合类型的热带曲线，可能发生的收缩并无不良影响，因为收缩后仍属于同一组合类型。在研究将亏格 3 和 4 的曲线嵌入 $\mathbb{R}^2$ 时，我们以 [8], 为基础；该文开创了抽象热带曲线平面嵌入的研究。我们还研究了亏格 3 和 4 的马罗尼不变量的热带版本。相关结果见第4节。(2) 我们研究了将 Γ 光滑嵌入到与图 1 中多边形对偶的 $\mathbb{R}^2$ 中所面临的障碍，并发现这类障碍会出现在不允许存在指向 $\mathbb{R}$ 的可实现的3次调和态射的组合类型中，见第5节。(3) 设 $\Gamma \to \mathbb{R}$ 是一个可实现的3次调和态射。如果 Γ 不能光滑嵌入 $\mathbb{R}^2$，通常可以对周围的平面进行热带修改，以展开收缩特征，同时保持与该态射相容。一般来说，这一过程很难描述，但我们在第6节通过两个案例研究作了示范。

1.1. **致谢**。 我们感谢洪堡基金会提供资助。我们感谢 Erwan Brugall´e、Andr´es Jaramillo Puentes、Michael Joswig、Johannes Rau 和 Ilya Tyomkin 的有益讨论。第一作者感谢德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）对项目 ID 286237555（TRR 195）的资助。第二作者是意大利国家高等数学研究所 GNSAGA 小组的成员。

2. Preliminaries

2.1. **平面热带曲线与对偶牛顿多边形**。 我们简要介绍平面热带曲线及其对偶牛顿细分；更多详情请参见例如 [11, 9, 25, 31, 15]。

域 K上的平面代数曲线（或者更一般地，环面曲面中嵌入的曲线）由 $K[x, y]$ 中一个多项式的零点集给出。在热带几何中，我们可以采用类似的定义，只需在各处加上“热带”一词：平面热带曲线是热带半域上热带多项式的热带零点轨迹。或者，也可以从一个配备非阿基米德赋值 $\mathrm{val} : K^\times \to \mathbb{R}$ 的（代数闭）域 K 出发，并考虑定义在 K 上的代数曲线 C。一个自然的例子是 $\mathbb{C}$ 上的 Puiseux 级数域。

C 的热带化是 $C \cap (K^\times)^2$ 在热带化映射下的像的闭包

$$\mathrm{tr} : (K^\times)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \longmapsto \big(-\mathrm{val}(x), -\mathrm{val}(y)\big)$$

并且这是一个热带平面曲线。它是平面 $\mathbb{R}^2$ 中由有理斜率的边组成的分段线性图。事实上，根据卡普兰诺夫定理，这里提到的两个定义是等价的。

每条热带平面曲线都与其定义方程的牛顿多边形的牛顿细分对偶。该细分通过投影扩展牛顿多边形的上面得到，其中考虑了系数的赋值。热带曲线的每个顶点都与细分中的一个多边形对偶，每条边都与一条正交边对偶，而热带曲线的每个部分都与细分中的一个顶点对偶。图3展示了一个例子。

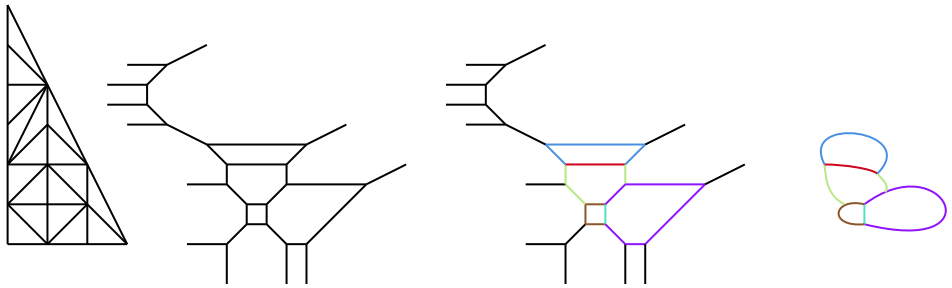


FIGURE 3. 一个牛顿细分及其对偶热带平面曲线。右侧是一条可以嵌入平面的抽象热带曲线，作为平面热带曲线的骨架；如从右数第二幅图中以彩色所示。

热带平面曲线的每条边都有一个方向向量，其定义为：该边所在直线的本原方向向量乘以一个权重，该权重等于对偶牛顿细分中对偶边的格长。利用方向向量，我们为热带平面曲线的一条边赋予一个长度，其等于欧几里得长度除以其方向向量的范数。

如果一个热带平面曲线的对偶牛顿细分仅包含最小面积的三角形，我们就称它为光滑的。

热带平面曲线的次数是其对偶牛顿多边形。如果一个热带平面曲线的对偶牛顿多边形是顶点为 $(0,\ 0)$、$(d,\ 0)$ 和 $(0,\ d)$ 的三角形，我们就称该曲线的次数为 d。

如果一个热带平面曲线对偶于图 1 所示的牛顿多边形，我们就称它为 $\mathbb{F}_n$，次数为 $(3,\ \binom{g+3n+2}{2})$。

2.2. 抽象热带曲线。抽象热带曲线是一个连通的度量图 Γ，带有无界射线或“端”，以及一个属数函数 $g : \Gamma \to \mathbb{N}$，该函数仅在有限个点处非零。在点 p 附近，Γ 同胚于一个具有 r 条半射线的星形。数 r 称为点 p的价，记作 $\mathrm{val}(p)$。我们要求价为 $\neq 2$ 的点p只有有限个，并且所有亏格非零或价大于 2 的点构成的集合非空。可以选取一个有限点集，其中包含（但不一定等于）所有亏格非零或价大于 2 的点；该点集的元素称为顶点。

非端的边称为有界边。图配有一个长度函数l，它为每条有界边赋予一个正实数。热带曲线的同构是保持度量和属数函数的同胚。热带曲线的亏格 是第一贝蒂数 $b_1(\Gamma)$加上所有顶点的亏格之和。

热带曲线 Γ 的组合类型 G 是通过去掉度量信息得到的。我们还将分别用 $V(G)$、$E(G)$表示其顶点集和有界边集。我们称(G, l)是 Γ 的模型，并记作 $\Gamma = (G, l)$。注意，热带曲线（或等价地，其底层度量图）的模型并不唯一；例如，人们总是可以

通过添加任意多个顶点来细化 G，并相应地在新边上定义长度函数。通常，我们采用顶点集最小的模型，并将其记为 Γ，从而在下文中图结构随热带曲线一并给出。当需要另一种图结构时，我们会予以指出。

遵循这一约定，设 Γ 为一个抽象热带曲线，其图结构由最小顶点集给出。我们可以收缩所有端，并迭代地收缩所有因此变成叶边的边。由此得到的抽象热带曲线 Γ' 称为 Γ的 典范模型。

如果两个度量图具有相同的典范模型，则称它们热带等价。度量图 Γ 的热带~修改是一个与 Γ, 热带等价的度量图 Γ，它通过在若干点处粘接树而得到。

固定一个亏格 g，以及一个亏格为 g、无端的热带曲线典范模型的组合类型。此组合类型的所有抽象热带曲线均由一个正交象限 $\mathbb{R}^b_{>0}$参数化，其中 b 分别表示有界边的数量；也可以由该正交象限关于底层图的自同构群取商所得的商锥参数化。移动到锥体的边界意味着将热带曲线的一条边收缩至 0，从而得到一个边数更少的新组合类型。我们可以将该边界与对应于这一新组合类型的锥体等同。这样，不同组合类型对应的锥体可以粘接起来，形成一个称为抽象锥复形的对象，即亏格为 g 的抽象热带曲线模空间；它参数化所有亏格为 g 的抽象热带曲线，记作 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{trop}}$ [7, 18, 16, 12, 28]。

所有顶点的亏格均为 0 且均为三价的抽象热带曲线，具有最多数量的有界边，因此在抽象热带曲线的模空间中对应最大维数的锥体。基于此，我们称它们为具有极大组合类型的抽象热带曲线。由于模空间中不具有极大组合类型的抽象热带曲线子集维数较低，因此，将考察范围限制在具有极大组合类型的抽象热带曲线上，可视为考察一般抽象热带曲线的一种方式。接下来我们将采用这一观点。

考虑一条光滑平面热带曲线。根据光滑性条件，每个顶点都是三价的。忘掉它在平面中的嵌入，并取典范模型，再赋予我们为平面热带曲线的边定义的长度，所得便是一条抽象热带曲线；我们称之为遗忘映射下的像。若对偶牛顿多边形有 g 个内部点，则该曲线的亏格为 g。固定一个对偶牛顿多边形 Δ，并考虑所有与 Δ 的某个细分对偶的光滑平面热带曲线后，遗忘映射便从平面热带曲线映射到亏格为 g [8] 的抽象热带曲线模空间。由光滑性可知，该映射的像始终具有极大组合类型，也就是说，在抽象热带曲线的模空间中是一般的。

定义 2.1。如果存在一条光滑平面热带曲线，其在遗忘映射下的像为 Γ，则称抽象热带曲线 Γ 可实现为平面热带曲线（或可嵌入为平面热带曲线）。

半稳定约化理论提供了一种热带化抽象曲线 C 的方法：该曲线定义在一个带有非阿基米德赋值的域上，取其特殊纤维中抽象曲线的对偶图（并赋予度量，以反映节点形成的“快慢”，即节点局部方程 $xy = p$ 中 Puiseux级数 p 的赋值）。由此得到一条抽象热带曲线 Γ[32, 6]。这一过程也可以通过取 C的 Berkovich解析空间的极小骨架来描述。

假设抽象曲线 C 嵌入到环面曲面中，且嵌入热带化是光滑的。那么，由此得到的平面热带曲线在遗忘映射下的像等于抽象热带化 [6, 节 5]。

2.3. **调和态射/热带覆盖**。热带世界中黎曼曲面分歧覆盖的对应物建立在调和态射之上:

定义 2.2。 连续映射 $\varphi:\ \Gamma \to \Gamma'$ 是度量图的态射，如果存在模型 $\Gamma = (G,\ l)$、 $\Gamma' = (G',\ l')$，使得 $\varphi(V(G)) \subset V(G')$， $\varphi^{-1}(E(G')) \subset E(G)$，且对于任意$e \in E(G)$

$$\mu_\varphi(e) = \begin{cases} \frac{l'(\varphi(e))}{l(e)} \in \mathbb{Z}_{>0} & \text{if } \varphi(e) \in E(G'); \\ 0 & \text{if } \varphi(e) \in V(G'). \end{cases}$$

此外，如果对于任意 $v \in V(G)$，都存在 $e \in E_v(G)$使得$\mu_\varphi(e) > 0$ ，且它不收缩任何回路，我们就称该态射是非退化的。如果对于任意 $e \in E(G)$， $\mu_\varphi(e) > 0$ ，那么该态射是有限的。

度量图的态射是调和的，如果对于任意 $v \in V(G)$，整数

$$m_\varphi(v) := \sum_{\substack{e \in E_v(G); \\ \varphi(e) = e'}} \mu_\varphi(e)$$

与 $e' \in E_{\varphi(v)}(G')$无关。这个数称为 φ 在 v处的重数。当该态射是调和的，则其次数为 $d(\varphi)$: $= \sum_{e;\ \varphi(e)=e'} \mu_\varphi(e)$，且与 $e' \in E(G')$无关。

定义 2.3。 次数为 d 的热带覆盖 $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 是一个次数为 d 的调和态射，并且在任意 $v \in \{\varphi^{-1}(t) | \, t \in \Gamma_2;\ \mathrm{val}(t) \geq 2\}$ 处都满足黎曼–赫尔维茨不等式，即

$$(2m_\varphi(v) - 2) - \sum_{e \in E_v(\Gamma_1)} (\mu_\varphi(e) - 1) \geq 0, \tag{2}$$

其中， $E_v(G_1)$ 表示在 $\Gamma_1 = (G_1,\ l_1)$ 中从 v 出发的出射边集合。

注 2.4。 在 [14], 中，热带覆盖被定义为满足黎曼–赫尔维茨等式的调和态射。然而，在下一节中，我们将考虑允许进行热带修改的态射。在这种情况下，只要出现严格不等式，我们总可以附加叶（按重数计数），使其达到等式。因此，我们将不严格地把 (2) 称为等式。

给定上述热带覆盖，对于任意 $v \in V(G_1)$，我们可以关联一个数，称为局部赫尔维茨数，其定义见 [14, 第3节 3.2.4]。这些数取决于 (2)；若一个热带覆盖的局部赫尔维茨数均非零，则称其可实现 。

黎曼–赫尔维茨等式是否会产生非零的赫尔维茨数，是一个尚未解决的问题，称为赫尔维茨存在性问题。这一问题已在 [12, 第 2 节2]中进行研究；特别地，人们注意到，对于 $d \leq 3$ ，赫尔维茨存在性问题已经解决，即任意次数为 $d \leq 3$ 的热带覆盖，其局部赫尔维茨数都非零，因此总是可实现的。由于我们关注的是三次覆盖，因此在下文中，我们将默认讨论可实现的热带覆盖，并简称为热带覆盖。

度量树上的热带覆盖得到了广泛研究，尤其是因为它们代表了可容许覆盖的热带类比。我们将度量树上的有限热带覆盖称为容许热带覆盖。现在，我们将注意力限制在这类覆盖的一个特定类上，定义如下。

定义 2.5。 良收缩覆盖是一种非退化热带覆盖 $\varphi:\ \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ，其中 Γ_2 是一条路径。

注 2.6。 请注意，良收缩覆盖总是可以从以下数据中恢复：一个可容许覆盖 $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$，其中 Γ_2 是一棵度量树，经过叶边收缩后成为一条路径，并且收缩任意叶边在原像中对应的边，不会降低 Γ_2.的亏格。

例如，考虑一个可容许覆盖 $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$，其中 Γ_2 是一棵有三条边且恰有一个价数为3的顶点的度量树；收缩叶边的原像不会降低 Γ_1 的亏格。特别地，如果原像中的一条边是叶边，我们就将其移除，并考虑将该叶边收缩后与之热带等价的图。对于其他边，我们注意到它不可能是回路（否则收缩它会使亏格降低1）。因此，其端点不会重合，我们只需定义一个收缩这条边的态射。该态射仍然是调和的，因为调和性只取决于目标上非叶顶点的关联边。移除叶边不会影响调和性。示例见图4。

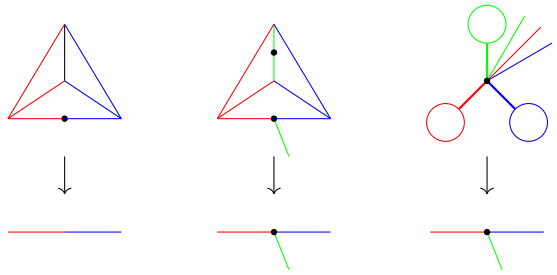


FIGURE 4. 左侧是一个良收缩覆盖，中间是可由其恢复该覆盖的可容许覆盖。右侧则描绘了一个不能定义良收缩覆盖的可容许覆盖：对于目标树中的任意一条边，收缩其原像中的边都会降低图的亏格。

2.4. 热带曲线亏格性的定义及其关系。 这里我们回顾热带曲线亏格性的各种定义。与代数情形类似，可以通过给定次数和秩的除子的存在性来定义亏格性，也可以通过对度量树的调和态射的存在性来定义。然而，与代数情形不同，这些定义对热带曲线并不一致。造成这一差异的原因之一是，热带曲线上除子的 Baker–Norine 秩与其代数对应物的行为大不相同。

代数曲线 C 上的除子 D_C 自然地定义了由 C 的热带化得到的度量图上的除子 D。Baker 和 Norine 引入了图上除子秩的概念，对应于代数曲线上除子秩的概念，并证明了一个引人注目的事实：它满足黎曼-罗赫定理的精确类比，[5]。然而，Baker 特化引理 [4, 引理 2.8] 表明，D 的秩相对于 D_C 的秩只能增加。

为了通过除子的存在性来定义亏格性，我们首先回顾抽象热带曲线的除子理论中的一些记号与定义。

定义 2.7. 设 Γ 为一个度量图。Γ 的一个除子是一个形式和 $D := \sum_{x\in\Gamma} D(x)x$，其中$D(x) \in \mathbb{Z}$ 且 $D(x) \neq 0$ 对有限多个 $x \in \Gamma$.

D 的次数 为 $\deg(D) = \sum_{x\in\Gamma} D(x)$。若对任意 $x \in \Gamma$. 有 $D(x) \geq 0$，则称 D 是有效的，并记作 $D \geq 0$,

Γ 上的有理函数 是一个连续的分段线性函数 $f : \Gamma \to \mathbb{R}$， 并在其各线性区域上具有整数斜率。

除子 D当且仅当存在某个有理函数 f，使得 div(f) $D =$是主，其中 div(f) 是一个除子，其在 x 处的 div(f)f 等于 f 沿着从 x.发出的各边的所有斜率之和

两个除子 D_1， D_2 线性等价 当且仅当它们的差是主除子，记作 $D_1 \sim D_2$。 D 的（Baker–Norine）秩 定义为：若 D 不等价于某个有效除子，则 r(D) $= -1$ ； 否则

$$\mathrm{r}(D) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \forall E \geq 0 \text{ with } \deg(E) = k, \exists\, E' \geq 0 \text{ such that } D - E \sim E'\}.$$

定义 2.8。 度量图 Γ 称为除子意义下的 d-亏格性，如果存在一个次数为 d 且（Baker–Norine）秩至少为 1 的除子 D 。

通过态射的存在性来定义亏格性的方式如下。

定义 2.9。 度量图 Γ 称为 d-亏格性，如果存在一个次数为 d 的非退化调和态射$\varphi : \Gamma' \to T$，其中 Γ' 是 Γ 的热带修改，且 T 是度量树。

注记 2.10. 值得注意的是，在文献中， d亏格性也可以通过有限态射来定义。然而请注意，正如 [26, 命题 2.11]所证明的，非退化态射总可以在进行热带修改后替换为有限态射。

d亏格性的定义也可与可容许覆盖的存在性联系起来，因为根据定义，可容许覆盖是调和的。特别地，若一条热带曲线在经过热带修改后可作为一棵度量树的次数为 d 的热带覆盖，则它是 d 亏格的。此外，给定一个到树的次数为 d的非退化调和态射，总可以考虑一个点的拉回。由此将得到一个次数为 d 且秩至少为 1, [26, 的除子（引理 2.25]）。因此，一般而言，对任意 $d \geq 2$，以下结论成立。

$$\Gamma \text{ 存在一个次数为 } d \text{ 的良收缩覆盖} \Rightarrow \Gamma \text{ 存在一个次数为 } d \text{ 的可容许覆盖}$$
$$\Rightarrow \Gamma\, d\text{-gonal} \Rightarrow \Gamma \text{ divisorially } d\text{-gonal}.$$

当 $d = 3$时，让我们回顾上述定义之间的已知关系，这些关系已在 [26], [27]中得到证明。

定理 2.11. 设 Γ 为一个3-边连通度量图。则在相差热带修改的意义下，

$$\Gamma \text{ 容许一个3 次可容许覆盖} \Leftrightarrow \Gamma \text{ 三角的} \Leftrightarrow \Gamma \text{ 除子意义上的三重。}$$

定理 2.12. 设 Γ 为一个没有分离顶点或重边的度量图。则在相差热带修改的意义下，

$$\Gamma \text{ 容许一个3 次可容许覆盖} \Leftrightarrow \Gamma \text{ 三角的} \Leftrightarrow \Gamma \text{ 除子意义上的三重。}$$

由 [20, 定理 2], 可知，度量图的树冈纳数，即从该度量图的任意热带修改到度量树的热带态射的最小次数，至多为 $\lceil g/2 \rceil + 1$，且该界是紧的。因此，所有亏格 3,4 热带曲线都容许一个3 次可容许覆盖，从而它们都是三角的，并且是除子意义上的三重。与良好压缩覆盖的关系则将在定理 5.1中加以考察。我们将看到，对于极大组合类型的热带曲线，具有一个3 次良好压缩覆盖与光滑嵌入$\mathbb{R}^2$, 作为图 1 中一个多边形的对偶幺模三角剖分密切相关。

3. The projection of a tropical curve in a Hirzebruch surface

在这里，我们证明引言中的观察：希策布鲁赫曲面中的热带平面曲线与三角抽象热带曲线之间的联系。

命题3.1。 假设 Γ 可以嵌入到 $\mathbb{R}^2$中，使得（经过某种修改后的） Γ 与图 *1* 中多边形的一个幺模三角剖分对偶，即它是希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n$ 中的一条次数为$(3, b)$ 的光滑热带平面曲线，其中 b。那么，限制在 Γ 上的投影是一个次数为3的可实现的良好收缩热带覆盖。

证明。 该投影诱导一个到 $\mathbb{R}$ 的映射，其中源图 Γ' 按定义是对 Γ 的修改。调和性由平衡条件得出。

根据光滑性假设， Γ 的每个顶点都是三价的，并映射到细分后的 $\mathbb{R}$ 的一个二价顶点。由平衡条件可知，要么两条边沿同一方向映射，且它们的权重之和等于沿相反方向映射的第三条边的权重；要么一条边被收缩，而另外两条边以相同的权重映射到相反的方向。

重数等于沿同一方向映射的两条边的权重之和，相应地，在第二种情形中等于沿相反方向映射的两条边的权重。无论如何，黎曼-赫尔维茨不等式左侧的等式都给出 1。

对于通过细分而得到、从而具有图态射结构的二价顶点，黎曼-赫尔维茨不等式左侧的等式给出 0。无论如何，黎曼-赫尔维茨条件均成立。

因此，我们得到一个热带覆盖。由于不可能将与某个顶点相邻的所有边都收缩，该覆盖是非退化的。

由光滑性可知， $\mathbb{F}_n$ 中的嵌入热带曲线有三个权重为 1 的竖直端。取一个充分负的点的原像，我们在这些端上得到三个点，因此，热带覆盖 $\Gamma' \to \mathbb{R}$ 的次数为 3。

由于光滑地嵌入 $\mathbb{R}^2$，投影无法收缩回路。

因此，我们得到一个次数为 3 的良收缩覆盖。注意，根据注 2.4 下方的讨论，由于该覆盖的次数为 3，它必定可实现。

□

也可以借助代数几何证明命题3.1：光滑平面热带曲线是嵌入 $\mathbb{F}_n$中的代数曲线的热带化。该处的投影诱导出一个到 $\mathbb{P}^1$ 的三次态射，其热带化可以通过收缩得到我们的可实现调和态射，见图 2。

4. Abstract tropical curves of genus 3 and 4 of maximal combinatorial type and their Maroni invariant

现在我们考虑亏格 3 和 4 的极大组合类型抽象热带曲线。在 [8], 中，作者研究了哪些抽象热带曲线可以由热带平面曲线产生。换言之，他们确定了抽象热带曲线必须满足的边长条件，使其能够作为次数为 d 的曲线嵌入热带平面中，即每种方向 $(-1,\ 0)$、$(0,\ -1)$ 和 $(1,\ 1)$ 的端各有 d 个。在这里，我们希望重复同样的研究，将次数为 d 替换为对偶于希策布鲁赫曲面的多胞形，其次数随代数马罗尼不变量而变化。

4.1. 亏格 3。

由于代数亏格 3 三次曲线的马罗尼不变量为 1，因此我们将在这里考虑 $\mathbb{F}_1$. 事实上，从图 1 可以看出，整数 $g,\ n$ 必须具有相同的奇偶性，否则 $\binom{g+3n+2}{2}$ 和 $\binom{g-3n+2}{2}$ 将不会是整数。此外，一个~~亏格~~为 g ~~的抽象~~热带曲线不可能在 $\mathbb{F}_n$ 中实现，其 $n > \binom{g+2}{3}$. 因此，亏格 3 的曲线只能在 $\mathbb{F}_1,$ 中实现，这与代数情形相同。 ——

从图 1 可以看出，定义 $\mathbb{F}_1$ 的多边形严格包含于一个 4 次、亏格 3 的平面曲线对应的多边形中，二者仅相差一个小三角形，如图 5 所示。

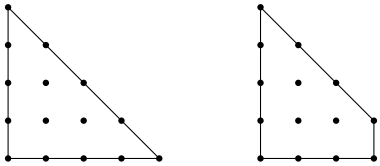


FIGURE 5. 定义亏格 3、以 4 次嵌入平面（左）和第一 Hirzebruch 曲面（右）的曲线的多边形。

因此，对于亏格 3 的情形，我们可以直接从 [8, 第 5] 节推导出抽象热带曲线嵌入第一 Hirzebruch 曲面时必须满足的大部分边长条件。

我们沿用 [8, 节 5] 中关于极大组合类型的记号，这些类型见图 6。显然，如果热带曲线无法在平面中实现，那么它也无法在希策布鲁赫曲面上实现，因此我们只考虑可实现为平面曲线的热带曲线的极大类型。

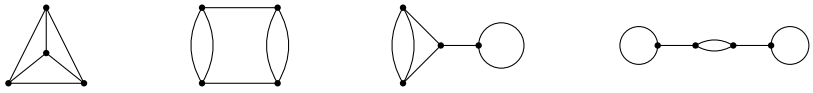


FIGURE 6. 可作为平面曲线实现的亏格 3 曲线的极大组合类型 .

由 [8, 定理 5.1], 的证明可以验证，将图 (020)、(111)、(212) 实现为热带平面曲线的三角剖分，仅通过改变无界边，便在与 $\mathbb{F}_1$相关联的多边形中诱导出一个三角剖分，因此边长条件将完全相同。

相反， [8, 图 5] 中为组合类型 (000) 的图定义 [8, 定理 5.1]中边长条件的三角剖分，会诱导出一个略有不同的三角剖分，从而在 $\mathbb{F}_1$.中实现类型 (000) 的图

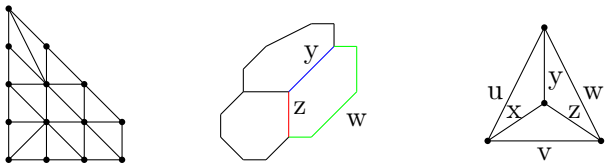


FIGURE 7. 在 $\mathbb{F}_1$ 中实现类型 (000) 的图的三角剖分，由在平面上实现同一图的三角剖分所诱导，并带有相关联的最大维锥。

特别地，图 7 表明，可在 $\mathbb{F}_1$ 中实现的类型 (000) 的图要求边长满足 $y + z \leq w$, 其中 y, z, w 表示其边长，如图 6 所示。

那么， [8, 定理 5.1] 的类似结论如下。

定理 4.1. 亏格为3 且具有极大组合类型的抽象热带曲线在 $\mathbb{F}_1$ 中可实现，当且仅当其组合类型是图 *6* 中的某一种。组合类型为

(000) 的热带曲线在 $\mathbb{F}_1$ 中可实现，当且仅当其边长（如图 7 所标注）在对称性意义下满足：

$$\max\{x,y\} \leq u, \quad \max\{x,z\} \leq v, \quad y+z \leq w.$$

组合类型（*020*）、（*111*）、（*212*）的抽象热带曲线在 $\mathbb{F}_1$ 中可实现，当且仅当它可作为次数为 4的平面曲线实现，并且特别地，其边长满足与 [8,定理 5.1]中相同的关系。

4.2. 亏格 4. 在 [8], 中，由可嵌入平面（具有不同次数）这一条件所施加于边长的不等式是通过计算得到的：取参数化所有与给定细分对偶的平面热带曲线的次级锥，并计算该锥体在模空间 $\mathcal{M}_g$中的像。亏格 4 的热带曲线情形下，计算难度远大于亏格 3。因此，我们在此不逐一讨论所有不等式。尽管如此，我们仍可给出亏格 4、具有固定极大组合类型、且分别在 $\mathbb{F}_0$ 与 $\mathbb{F}_2$,中可实现的抽象热带曲线边长的必要条件。

从 [8, 表 3], 首先可以看出，不存在某种组合类型在 $\mathbb{F}_2$ 中可实现而在 $\mathbb{F}_0$中不可实现。接下来，我们将考察可在 $\mathbb{F}_0$ 和 $\mathbb{F}_2$中实现的极大组合类型的亏格 4 热带曲线，这些曲线如图 8 所示。

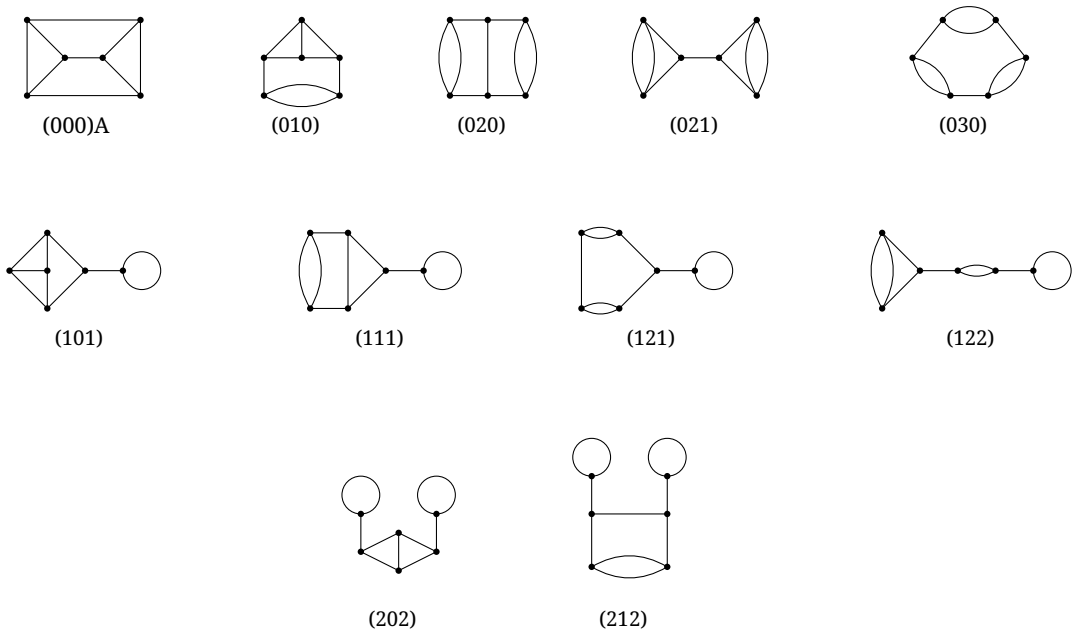


FIGURE 8. 在 $\mathbb{F}_0$ 和 $\mathbb{F}_2$ 中可实现的亏格 4 曲线的极大组合类型。

对于每种组合类型，我们可以研究相应热带曲线的边长必须满足哪些必要条件，才能分别嵌入 $\mathbb{F}_0$ 和 $\mathbb{F}_2$，。首先需要注意的是，在研究嵌入热带曲线时，组合图与实现该曲线的三角剖分之间存在以下对应关系：

环 $\leftrightarrow$内部点 两个相邻环 $\leftrightarrow$ 1-连接两个内部点的单纯形 通过桥连接的环 $\leftrightarrow$ 1-分隔两个内部点的单纯形。

这类关系将部分确定相应的三角剖分，从而使我们能够确定必要的边长条件。对于组合类型 (000)A，我们展示了这一点。对于图 8 中的所有其他组合类型，请参阅附录 A。

首先考虑在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入。组合图中各环之间的关联对应迫使三角剖分呈现为图 9 所示的形式。

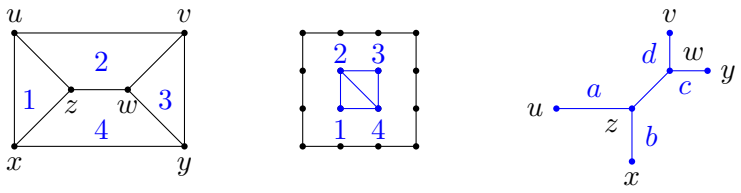


FIGURE 9. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线。

边 a、b、c、d 的长度均非平凡，这迫使边 zw 以及 a 或 d，（分别为 b 或 c）的长度严格小于 uv（分别小于 xy.）的长度

相反，若考虑在 $\mathbb{F}_2$，中的嵌入，则三角剖分必须如图 10 所示。

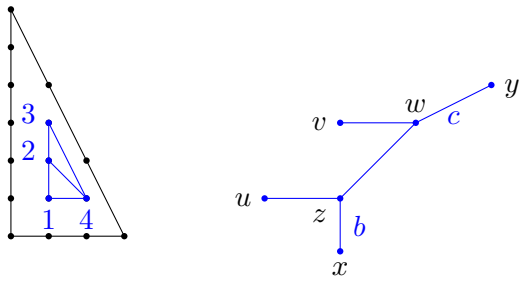


FIGURE 10. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线。

同样，边 b, c 的长度非零，因此 $wz+wy < xy$ 和 $wz+xz < xy$。此外，点 u, z 具有相同的 y 坐标，点 v, w 也具有相同的 y 坐标。因此，对图 10 所示的部分三角剖分进行补全后，任意一种三角剖分都会产生连接 u 和 v、方向向量为 $(\alpha,1)$, 的边，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，因此 $wz = uv$。

这证明了以下结论。

引理 4.2. 设 Γ 是一条组合类型为 *(000)A* 的亏格 4 热带曲线 .

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_0$中实现，那么其边长满足以下条件（忽略对称性）：

$$\begin{cases} wz + vw < uv, \\ wz + uz < uv, \\ wz + wy < xy, \\ wz + xz < xy. \end{cases} \tag{3}$$

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_2$中实现，那么其边长满足以下条件（忽略对称性）：

$$\begin{cases} wz = uv, \\ wz + wy < xy, \\ wz + xz < xy. \end{cases} \tag{4}$$

正如第4.1节开头所观察到的，亏格 3、4 且具有极大组合类型的热带曲线可在 $\mathbb{F}_n$ 中实现时所对应的整数 n，满足与同亏格代数曲线的马罗尼不变量必须满足的相同条件 (4.3)。此外，上述结果（以及附录 A 中的结果）还表明，对于我们所考虑的任意组合类型，在 $\mathbb{F}_0$ 中可实现所需的边长条件，与在 $\mathbb{F}_2$. 中可实现所需的边长条件并不相容。换言之，亏格 4（及 3）的抽象热带曲线无法同时嵌入次数不同的希策布鲁赫曲面。

定义 4.3。设 Γ 是一条可在 $\mathbb{F}_n$ 中实现的、具有极大组合类型的亏格 3、4 热带曲线。则整数 n 称为 Γ 的热带马罗尼不变量。

Jensen 和 Lehmann 在 [22]中为热带曲线定义了卷曲不变量，更准确地说，是复合卷曲不变量。在代数情形下，三次曲线的第二个与第一个复合卷曲不变量之差决定了马罗尼不变量。因此，可以尝试以相同方式通过复合卷曲不变量为热带曲线定义马罗尼不变量，即取第二个（亏格性为 3 时，它总是等于代数情形中的相应不变量）与第一个不变量之差。更准确地说，对于 [22], 一个度量图 Γ 以及其上秩1的一个除子 D，在 Γ，第二个与第一个复合卷曲不变量之差为 $\sigma_2(\Gamma, D) - \sigma_1(\Gamma, D) = m+1$，其中 m 是使得 $K_\Gamma - mD$ 无效的最小整数。这里， K_Γ 表示 Γ. 上的典范除子。由 [22, 定理 1.1] 还可推出，若 Γ 是三次代数曲线 X，的骨架，则上述数值也给出了 X. 的马罗尼不变量的一个上界。

然而，我们并不认为这样的数与上文定义的热带马罗尼不变量有关。事实上，整数 n 显然取决于热带曲线上的除子 D；与代数情形不同，这个除子并非唯一：一条可实现在某个希策布鲁赫曲面上的热带曲线，可能有两个线性无关的次数为 3、秩为 1 的除子，它们可能定义不同的复合卷曲不变量。

5. Obstructions for smooth embeddings into $\mathbb{R}^2$

在命题3.1中，我们证明了：如果一条热带曲线 Γ 可实现在 $\mathbb{F}_n$ 中，那么从 $\mathbb{F}_n$ 到热带直线的自然投影会诱导出一个从 Γ出发的三次良好压缩覆盖，模去热带修改意义下成立。现在我们想要理解这一陈述的反方向，但仅考虑极大组合类型的亏格 g 曲线，其中 $g = 3$，4。

例如，考虑属数 3 热带曲线。我们从上一节得知，组合类型如图 6 所示的曲线在满足某些边长条件时可实现。事实上，这些曲线中的每一条都存在一个良收缩三重覆盖，模去热带修改意义下如图 11 所示。

我们不妨转而考虑亏格 3 曲线中唯一一种无法在 $\mathbb{R}^2$中实现的极大组合类型，即由三个互不相交的环构成的图，每个环都带有一条边，且这三条边交于一个公共顶点。可以验证，典范模型具有这种组合类型的热带曲线都不允许存在 3 次良好压缩覆盖。稍后我们将对此作更精确的说明。

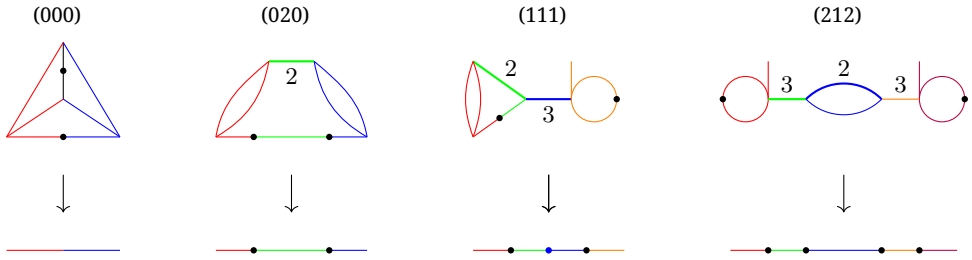


FIGURE 11. 3 次良好压缩覆盖的示例。

此外，底层图为平面的极大组合类型亏格4热带曲线也有相同的性质：那些无法在 $\mathbb{F}_n$ 中实现的曲线，在经过热带修改后仍不允许存在 3 次良好压缩覆盖。

定理5.1。 设 Γ 是一条亏格为 $g = 3$、4 具有平面极大组合类型的热带曲线。那么， Γ （或其热带修改）存在一个*3*次良收缩覆盖，当且仅当 Γ 在 $\mathbb{F}_n$中可实现，允许进行不改变组合类型的收缩。

证明。 命题3.1恰好给出了该结论的一个方向。要完成证明，只需说明：对于那些在 $\mathbb{F}_n$ 中永不可实现、且具有极大组合类型的热带曲线，即使经过热带修改，也不可能存在3次良收缩覆盖。根据第4节的结果，在 $\mathbb{F}_n$ 中不可实现的热带曲线，其组合类型在亏格3时记为(303)，在亏格4时记为(213)、(303)、(314)、(405)。组合类型(303)（亏格3时）、(213)、(314)和(405)都包含一种称为蔓延节点的禁型。我们将在引理5.2中看到，包含这种禁型会构成存在3次良收缩覆盖的障碍。因此，我们只需验证组合类型为(303)的亏格4曲线不存在3次良收缩覆盖。这是因为，以具有该图（或其热带修改）的图作为源的唯一3次热带覆盖，就是图12所示的覆盖，而它并非良收缩。□

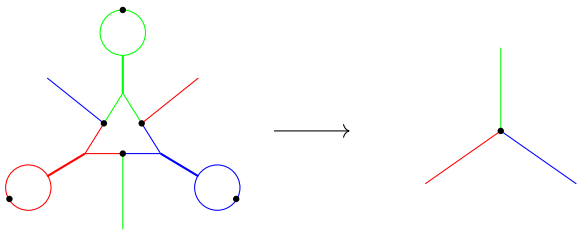


FIGURE 12. 一个未良好收缩的3次热带覆盖。

请注意，在上述定理中，我们要求热带曲线的底层图是平面的。这是因为亏格 4 的唯一非平面图，其组合类型为 (000)B，如 [8] 所示。组合类型为 (000)B 的热带曲线确实存在一个次数为 3 的良收缩覆盖，但它在 $\mathbb{F}_n$ 中不可实现。尽管如此，我们稍后将在第6.1小节中看到，可以将它作为一条非光光滑热带曲线嵌入 $\mathbb{F}_0$ 。

在此我们继续关注底层图为平面的热带曲线。定理5.1的证明依赖于如下事实：某些亏格为 $g = 3$,4的不可实现极大组合类型包含一个蔓延节点，如 [23, 图 1]所示。

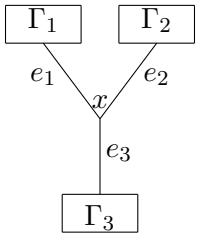


FIGURE 13. 一个带有蔓延节点的图。

现在我们将通过证明包含蔓延节点的图不能容许3 次良好压缩覆盖，来完成定理5.1的证明。下述结果在更高亏格时同样成立。

引理5.2。 设 Γ 是一个亏格为 $g \geq 3$ 且含有作为蔓延节点的禁型的热带曲线。则 Γ 在热带修改意义下不承认*3*次3 良收缩覆盖。

证明。 设 e_1， e_2， e_3 表示 Γ中定义蔓延节点的三条边， 如图13所示，且$x = e_1 \cap e_2 \cap e_3$. 反设 Γ 承认到路径 T的非退化3度热带覆盖。那么，这些边中要么有一条被收缩，要么至少有两条边通过 φ.具有相同的像。

如果对于某个 $i \in \{1, 2, 3\}$， e_i 被收缩，那么由于 Γ_i 具有正亏格， φ 到Γ_i 的限制次数至少为2。这将迫使 φ 限制在某个 Γ_j 上，并使 $j \neq i$ 要么成为收缩，要么成为1度态射，而这两种情况都不可能。

若对于 $i = 1$， 2（最终也包括 $i = 3$），反而有 $\varphi(e_i) = e \in E(T)$，那么子曲线 Γ_i 也存在良好收缩覆盖，并且将 φ 限制在 Γ_i 中（至少一个）会得到一个到 T中某条子路径的1度态射，从而再次产生矛盾。

□

我们还来考察 [23, 图 1], 中的另外两种禁型，它们出现在亏格为 $g \geq 5$的图中。上述结果确实可以推广到这类图：具有这些禁型的度量图不存在次数3良好压缩覆盖。

引理5.3. 设 Γ 是一个带有禁型的热带曲线，且该禁型是一个拥挤图。那么Γ 不存在次数*3*良好压缩覆盖（相差热带修改）。

证明. 反设存在一个次数3良好压缩覆盖，因此存在一个到某条路径的同次数非退化调和态射（相差热带修改）。如第2.4节所述，这样的覆盖确定了一个次数为3、秩为1的除子 D 。 于是可设 $D = v_1 + y_1 + y_2$ ，其中某个 $y_i \in \Gamma$ 和 v_1 如图14所示。

下文中，我们指的是 Γ. 的典范模型的顶点和边。不失一般性，我们还假设 D 的支撑中任意两个点都不在同一条边的内部。还需注意， Γ 是无桥的。于是，利用 Dhar燃烧算法，点 y_i 必须确定一条或两条边，它们与一条关联于 v_1 的边（记作 e_1）构成一个 k-边割，其中 $k = 2$， 3。可能情况如下。

(1) 假设 $k = 3$，则可能情况如下。

(a) 点 y_1、 y_2 包含在 Γ_1 的一个 2-边割中。例如，在 Γ_2 中引发一场火，会烧到 v_1 ，火势沿着 Γ_1、 蔓延，并在 y_1、 y_2. 处停下。然而，火势也会经由 v_2 蔓延，从另一方向到达 y_1、 y_2 ，从而烧遍整个图。

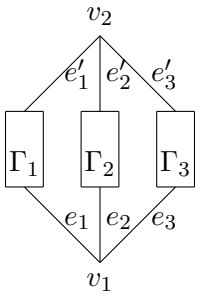


FIGURE 14. 一个拥挤图。

(b) 若 $y_2 \in e_2 \cup e_2'$、 $y_3 \in e_3 \cup e_3'$，考虑一个有理函数，其斜率为 -1，从这三个点出发，沿着三边割延伸，直到其中一个点到达某个 Γ_i 中的顶点（在线性等价意义下，这总是可以做到的；否则我们就属于稍后将讨论的情形 (2)）。在 Γ_i. 的任意其他点引发一场火，首先会烧到 Γ_i 中的顶点，然后凭借连通性烧到另外两个顶点。(c) 最后，若对于某个 $j \in \{2,3\}$， y_j 位于 Γ_j 的一座桥中，则前面的论证仍然适用：用 Γ_j 中的桥替换 e_2、e_2'、e_3、e_3' 之间构成三边割的边，并用移除该桥后 Γ_j 的某个连通分支替换 Γ_j。

（2）若 $k = 2$，则 $y_2 \in e$； $e \in \{e_1', b\}$，其中 b 是 Γ_1. 中的一条桥。从 $\Gamma \setminus \{e_1, e\} \cup \Gamma_1$ 中的任意一点开始运行 Dhar燃烧算法，除非 $y_3 = v_1$，或者它属于一条边 $e' \subset \Gamma_1$，而该边与 e_1 或 e 构成一个 2-边割，否则整个图都会被烧尽。然而在这种情况下，我们可以考虑一个有理函数：从识别出一个 2-边割的任意一对点出发，沿着与 v_1相反的方向，其斜率为 -1 ， v_2，直到其中一点首先到达一个顶点。然后从 Γ_1 中的其他任意顶点重新运行 Dhar燃烧算法，整个图就会被烧尽。注意，只有当 Γ_1 没有其他顶点时，图才不会被烧尽，这意味着 Γ_1 由平行边构成；对 Γ_2， Γ_3也可以重复同样的论证。特别地，该除子必为 $2v_1 + v_2$的形式。那么，诱导出该除子的态射 φ（通过拉回度量树中的任意一点）满足：同一顶点 v_i 的任意两条关联边都不能被识别。特别地，目标树不能是路径。

□

引理5.4. 设 Γ 是一条具有禁型的热带曲线，且该禁型为TIE-fighter图。则Γ 在相差热带修改的意义下不容许*3* 次良好压缩覆盖。

证明。再次反设存在一个 3 次良好压缩覆盖φ: $\Gamma \to \Gamma'$，其对应的 Γ TIE-fighter图如图 15 所示。采用与引理5.2证明中类似的论证，可以验证这两条桥 e_1、 e_4 被映射到 Γ'中的不同边。这尤其意味着， $\Gamma \setminus (e_1 \cup e_4)$中包含 Γ_2和 Γ_3 的连通分支里的任何边，都不能被映射到 Γ'.中的叶边

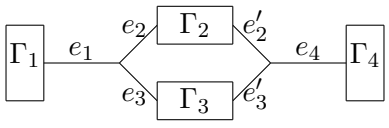


FIGURE 15. 一个TIE-fighter图，以及通过收缩所有桥得到的图。

态射 φ确定了一个次数为 3 且秩至少为 1 的除子 D，因此我们可以写作$D = v + y_2 + y_3$，其中 $v = \Gamma_1 \cap e_1$。如果 y_2、$y_3 \notin \Gamma_1$，那么它们必须确定图的一个 2-边割。我们还可以假设它们都不在桥上，且至少有一个是顶点。从 $\Gamma_1 \setminus \{v\}$ 开始放火会烧遍整个图，除非 y_2、y_3 分别包含在e_2、e_3的闭包中。于是，在线性等价意义下，我们可以假设它们中至少有一个位于 Γ_1，并引出如下内容。

如果 y_2，y_3 在 Γ_1中，那么例如考虑 $D \sim 3v$ 的情形（如果重数仅为 2，则论证会更加容易）。特别地，我们可以考虑线性等价的除子沿着 e_1 移动 $2v$，并沿着 e_1 和 e_3移动 e_2 和 v，直到至少有两个点（计重数）到达 Γ_2 或 Γ_3中的一个顶点。如果它们都到达一个顶点，那么例如从 Γ_4 开始点火将烧遍整个图，除非在 $2v$先沿着 e_2移动之后，沿着 e_3 移动的点 v 才到达顶点–$\Gamma_3 \cap e_3$。这尤其意味着存在某个点 $w \in e_3$，使得 $D \sim 3w$.由于 e_3 不是一座桥，因此 φ（w）是一片叶，这与 Γ' 是一条路径相矛盾。□

6. Unfolding contracted features of a planar embedding of a trigonal Γ

到目前为止，我们关注的是光滑平面热带曲线，以及它们在遗忘映射下的像；这些像是极大组合类型的抽象热带曲线。

假设 C 是定义在 K上的一条抽象曲线，且 C 嵌入在一个环面曲面中。假设其嵌入热带化并不光滑。此时，仍存在一个从抽象热带化 Γ 到嵌入热带化的映射（在光滑情形下，可以将Γ恒等映射到平面热带曲线中通过反复收缩端和叶边得到的部分），但这个映射现在可以收缩 Γ的子图，因此，嵌入热带化不一定还能反映抽象热带化的重要特征。因此，将遗忘映射推广到非光滑热带平面曲线并无意义。

不过，我们可以对环面进行线性再嵌入，使新嵌入曲线的热带化不再收缩 Γ的部分。这可以称为骨架的 展开 。

其理论背景见 [6], ，其中，能够反映所有重要特征的热带化称为忠实。

利用线性重新嵌入来展开的概念已在各种情形下得到研究，例如见[21, 10, 28, 19]。请注意，这一概念适用于热带化曲线；也就是说，我们总能找到与热带曲线相容的热带化原像。

I本文旨在展示重新嵌入在以下两种情形中的作用：

(1) 我们证明，亏格 4 的非平面图 (000)B 可以是某个重新嵌入的平面热带曲线的抽象热带化。

(2) 以图 (000)A 为例，我们证明，任何这类抽象热带曲线 Γ 连同一个到 $\mathbb{R}$ 的三重态态射，都可以嵌入为重新嵌入的热带平面曲线，使得投影到 $\mathbb{R}$ 后得到该三重态态射。

6.1. 展开 (000)B 型抽象热带曲线。考虑 $\mathbb{F}_0$ 中图 16 所示的非光滑热带平面曲线。根据定理 3.2 [19], ，我们可以重新嵌入该曲线，从而展开任意长度的边，并将构成交叉且对偶于平行四边形的边分隔开。图中底部展示了重新嵌入后，在修改所得的平面中出现的热带平面曲线新部分：它是由三个沿一条直线粘合在一起的半平面构成的热带平面。在一个胞腔中，我们看到热带平面曲线的左侧部分（即交叉左侧的一切）；在第二个胞腔中，我们看到右侧部分；而在新的第三个胞腔中，我们看到新增的部分。这意味着，穿过交叉的红色边和绿色边被降入新胞腔，而粉色边则作为一条新边出现。

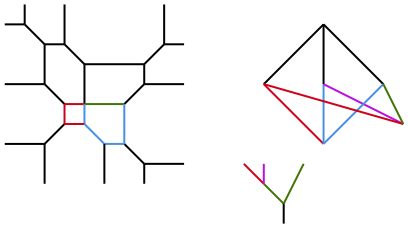


FIGURE 16. 展开图类型 (000)B。

右侧的图展示了通过迭代收缩端和叶边后得到的抽象热带曲线。值得注意的是，我们可以得到一个非平面图，作为某条平面热带曲线重新嵌入后所对应的抽象热带曲线。例如， [24] 中可以找到类似的例子。

6.2. 展开类型 (000)A 的抽象热带曲线的三重态态射。 假设 Γ 是类型 (000)A 的抽象热带曲线。设 $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ 是 Γ 的三重态态射。从一条非光滑热带平面曲线开始，反复收缩端和叶边 ~ ~后得到 Γ，其中 Γ 可由 Γ 收缩边得到。我们将展示如何利用线性再嵌入，从这条非光滑热带平面曲线展开 Γ ，使得~由 $\Gamma\to\Gamma$ 的收缩与从 $\mathbb{F}_n$ 出发的投影复合后，得到 Γ的三重态态射。

类型 (000)A 有 6 种三重态态射的组合类型（见图17）。

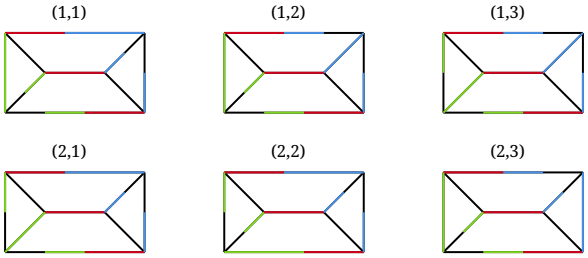


FIGURE 17. 类型 (000)A 的图的三重态态射的六种组合类型。对于蓝、红、绿三种颜色，同色边的长度应相同（并通过态射映射到同一条像边）。黑色边在态射下收缩，长度可以任意。

我们考 虑 $\mathbb{F}_0$中的四种非光滑热带曲线组合类型，见图 1 8.

根据定理 3.2 [19], ，我们可以重新嵌入曲线，使得能够展开任意长度的边，从而分离构成交叉、且与平行四边形（分别与四边形）对偶的边（分别是顶点和边）。投影态射的效果如图 19 所示，其中我们将全部 4 种组合类型绘于一图，这是可行的，因为只需将相应展开边的长度设为 0。

在图 20 中，我们对收缩边的长度采用统一标记。蓝色边的长度为 L_1，红色边为 L_2 ，绿色边为 L_3。若图 17 中属于类型 (1,1)，则$a_1=a_5=0$。类型 (1,2) 时， $a_2=a_5=0$。类型 (1,3) 时， $a_2=a_6=0$。类型 (2,1) 时， $a_1=a_6=0$。类型 (2,2) 时， $a_1=a_7=0$。最后，类型 (2,3) 时， $a_3=a_5=0$。

在类型 (1,1) 中，令 $l_3=l_8=0$。则还有 $l_2=0$。令 $l_4=l_5=\min\{a_3,a_4\}$。

若 $a_7<l_5+L_2$，选择左上方的嵌入，即 l_{13} 和 l_{14} 不存在。否则，选择左下方的嵌入，即 l_{13} 不存在。

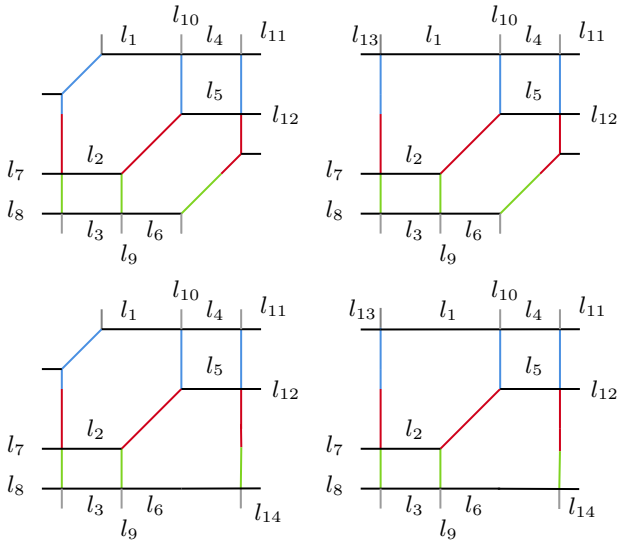


FIGURE 18. 非光滑嵌入的四种组合类型。蓝色边的长度为 L_1，红色边的长度为 L_2，绿色边的长度为 L_3。黑色边已收缩，其长度记为 $l_1, \ldots, l_6$。长度 $l_7 \ldots, l_{14}$ 表示从四价顶点展开的边的长度。

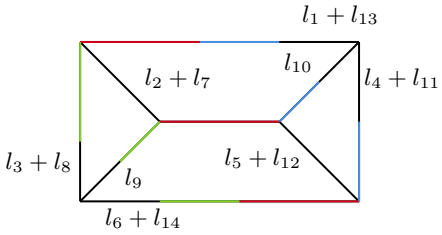


FIGURE 19. 投影态射对嵌入到 $\mathbb{F}_0$ 中的 4 个非光滑嵌入的作用。

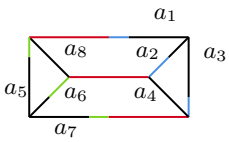


FIGURE 20. 类型 (000)A 的图中收缩边的标记。

令 $l_1 = 0$。选择 $l_7 = a_8, l_9 = a_6, l_{10} = a_2$。令 $l_4 = l_5 = \min\{a_3, a_4\}$。若 $\min\{a_3, a_4\} = a_3$，令$l_{11} = 0$ 和 $l_{12} = a_4 - a_3$。否则，令 $l_{12} = 0$ 和 $l_{11} = a_3 - a_4$。若 $a_7 < l_5 + L_2$，令 $l_6 = a_7$。否则，$l_6 = l_5 + L_2$，选择 $l_{14} = a_7 - l_6$。

对于类型 (1,2)，设 $l_3 = l_8 = l_{10} = 0$。那么 $l_2 = 0$ 也成立。设 $l_9 = a_6, l_7 = a_8$。

如果 $a_1 < l_2 + L_2$，则从左侧的嵌入中选一个，即 l_{13} 不存在。设 $a_1 = l_1$。否则，从右侧的嵌入中选一个。于是 $l_1 = l_2 + L_2$。设 $l_{13} = a_1 - l_1$。

令 $l_4 = l_5 = \min\{a_3, a_4\}$。如果 $\min\{a_3, a_4\} = a_3$，令 $l_{11} = 0$ 和 $l_{12} = a_4 - a_3$。否则，令 $l_{12} = 0$ 和 $l_{11} = a_3 - a_4$。

如果 $a_7 < l_5 + L_2$，选取上方的一个嵌入，即 l_{14} 不存在。令 $a_7 = l_6$。否则，选取下方的一个嵌入。然后 $l_6 = l_5 + L_2$。令 $l_{14} = a_7 - l_6$。

在类型 (1,3) 中，令 $l_9 = l_{10} = 0$。令 $l_2 = l_3 = \min\{a_5, a_8\}$。若 $\min\{a_5, a_8\} = a_5$，则令 $l_8 = 0$ and $l_7 = a_8 - a_5$。否则，令 $l_7 = 0$ and $l_8 = a_5 - a_8$。

若 $a_1 < l_2 + L_2$，则从左侧的嵌入中选取一个，即 l_{13} 不存在。令 $a_1 = l_1$。否则，从右侧的嵌入中选取一个。于是 $l_1 = l_2 + L_2$。令 $l_{13} = a_1 - l_1$。

令 $l_4 = l_5 = \min\{a_3, a_4\}$。若 $\min\{a_3, a_4\} = a_3$，则令 $l_{11} = 0$ and $l_{12} = a_4 - a_3$。否则，令 $l_{12} = 0$and $l_{11} = a_3 - a_4$。

若 $a_7 < l_5 + L_2$，则选取上方的一个嵌入，即 l_{14} 不存在。令 $a_7 = l_6$。否则，选取下方的一个嵌入。于是 $l_6 = l_5 + L_2$。令 $l_{14} = a_7 - l_6$。

在类型 (2,1) 中，令 $l_4 = l_5 = \min\{a_3, a_4\}$。若 $\min\{a_3, a_4\} = a_3$，令 $l_{11} = 0$ 和 $l_{12} = a_4 - a_3$。否则，令 $l_{12} = 0$ 和 $l_{11} = a_3 - a_4$。

令 $l_2 = l_3 = \min\{a_5, a_8\}$。若 $\min\{a_5, a_8\} = a_5$，令 $l_8 = 0$ 和 $l_7 = a_8 - a_5$。否则，令 $l_7 = 0$ 和 $l_8 = a_5 - a_8$。

若 $a_7 < l_5 + L_2$，则选取左上方的嵌入，即 l_{13} 和 l_{14} 不存在。令 $a_7 = l_6$。否则，选取左下方的嵌入，即 l_{13} 不存在。于是 $l_6 = l_5 + L_2$。令 $l_{14} = a_7 - l_6$。

令 $l_1 = l_9 = 0$。令 $l_{10} = a_2$。

在类型为 (2,2) 时，令 $l_1 = l_6 = 0$。选取左上方的嵌入，即 l_{13}，l_{14} 不存在。

令 $l_2 = l_3 = \min\{a_5, a_8\}$。若 $\min\{a_5, a_8\} = a_5$，令 $l_8 = 0$ 和 $l_7 = a_8 - a_5$。否则，令 $l_7 = 0$ 和 $l_8 = a_5 - a_8$。

令 $l_4 = l_5 = \min\{a_3, a_4\}$。若 $\min\{a_3, a_4\} = a_3$，令 $l_{11} = 0$ 和 $l_{12} = a_4 - a_3$。否则，令 $l_{12} = 0$ 和 $l_{11} = a_3 - a_4$。

令 $l_{10} = a_1$, $l_9 = a_6$。

在类型 (2,3) 中，令 $l_2 = l_3 = l_8 = l_4 = l_5 = l_{11} = 0$。

若 $a_1 < l_2 + L_2$，则从左侧的嵌入中选取一个，即 l_{13} 不存在。令 $a_1 = l_1$。否则，从右侧的嵌入中选取一个。于是 $l_1 = l_2 + L_2$。令 $l_{13} = a_1 - l_1$。

若 $a_7 < l_5 + L_2$，则从顶部的嵌入中选取一个，即 l_{14} 不存在。令 $a_7 = l_6$。否则，从底部的嵌入中选取一个。于是 $l_6 = l_5 + L_2$。令 $l_{14} = a_7 - l_6$。

令 $l_7 = a_8$、$l_9 = a_6$、$l_{10} = a_2$ 和 $l_{12} = a_4$。

无论如何，我们都能以一种保持三重态态射的方式展开 Γ。

Appendix A. Embeddings of genus 4 curves of maximal combinatorial type in Hirzebruch surfaces

这里我们继续完成第 4.2 节的讨论，涵盖图 8 中所有剩余的组合类型。

类型 *(010)*。按照图 21 标记各个环和顶点。环 3 与其他所有环都相邻，而环 4 不与环 1 和环 2 相交。于是，描述 $\mathbb{F}_0$ 中嵌入的三角剖分必须包含图 21 第二幅图中的蓝色边；又由于我们希望热带平面曲线光滑，因此它还必须包含第三幅图中的黑色边。

比较 ux 和边 uz、zv、vy、xy 的 x 坐标（分别为 y 坐标），可得不等式 $uz + vz + vy < ux$,（分别为 $vz + 2vy + xy < ux$）。

类似地，$\mathbb{F}_2$的可能三角剖分必须如图 22 所示。

在这两种情况下，对这类三角剖分进行任何补全，都会产生连接 u和 x的线段，其形式为 α,1),，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 为某个值。因此，边 ux 的长度将等于点 x 和 u. 的 y坐标之差。对于连接这些点的边，这一点同样成立

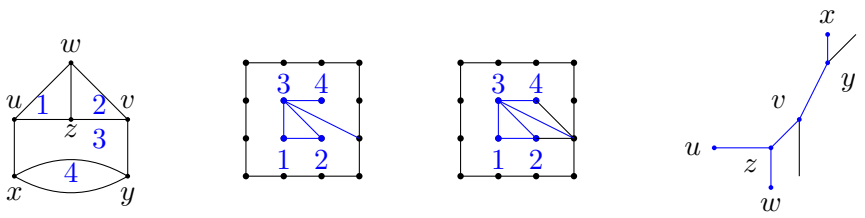


FIGURE 21. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分和部分嵌入热带曲线。

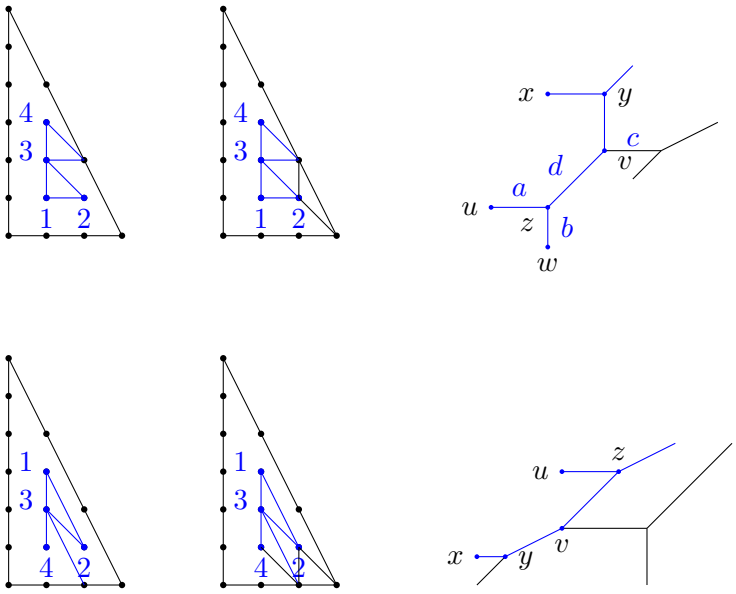


FIGURE 22. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分和部分嵌入热带曲线。

v, y, z，因为它们也由形式为 $(\alpha', 1)$ 的线段定义，其中 $\alpha' \in \mathbb{Z}$为某个值。此外， y, z的 y坐标分别与 $x, u,$ 相同，因此 $vz + vy = ux.$。由此得到以下结论。

引理 A.1. 设 Γ 是一个亏格为4 、组合类型为 *(010)* 的热带曲线 .

- 若 Γ 可在 $\mathbb{F}_0$中实现，则其边长在对称性意义下满足：

$$\begin{cases} uz + vz + vy < ux; \\ vz + 2vy + xy < ux. \end{cases} \tag{5}$$

- 若 Γ 可在 $\mathbb{F}_2$中实现，则其边长在对称性意义下满足：

$$vz + vy = ux. \tag{6}$$

类型（*020*）。现在我们来考察组合类型（020）。描述 $\mathbb{F}_0$ 中嵌入的三角剖分如图 23 所示。

比较这些点的 x 坐标和 y 坐标，分别得到 $2xz + zw < uw$ 和 $2vw + zw < yz$，以及 $xz + zw < uw$ 和 $vw + zw < yz,$

相反，对于 $\mathbb{F}_2$，的三角剖分，我们有两种可能性，如图 24 和图 25 所示。

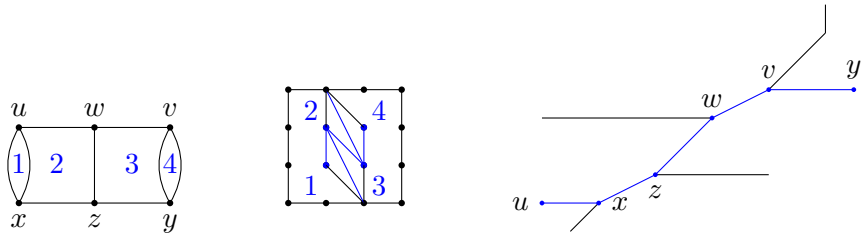


FIGURE 23. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线。

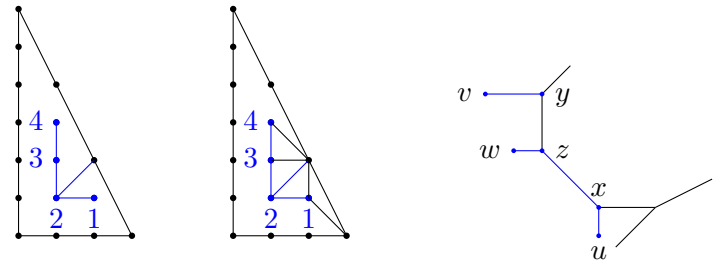


FIGURE 24. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线 .

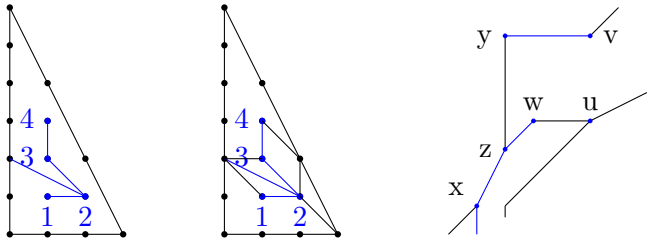


FIGURE 25. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线。

图 24 中的第一种可能性表明，可以通过用对应于线段（α，1)， 的边连接点 v， w 来完成三角剖分，从而 $vw = yz$.

然而，图 25 所示的三角剖分可以通过用类型为 (0，1) 或 (2，1) 的线段连接点 $z\,y$ 来补全。两者具有相同的 y-坐标，因此$yz = vw + wz$.

这证明了以下引理。

引理 A.2。 设 Γ 是一条组合类型（*020*）的4 亏格热带曲线。

- 若 Γ 在 $\mathbb{F}_0$中可实现，则其边长在对称性意义下满足：

$$\begin{cases} 2xz + wz < uw \\ 2vw + wz < yz. \end{cases} \tag{7}$$

- 若 Γ 在 $\mathbb{F}_2$中可实现，则其边长在对称性意义下满足：

$$\begin{cases} xz + wz < uw \\ vw = yz; \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} 2xz + wz < uw \\ yz = vw + wz. \end{cases} \tag{8}$$

类型（*021*）。现在我们考虑组合类型（021）。描述 $\mathbb{F}_0$ 中嵌入的三角剖分如图26所示。

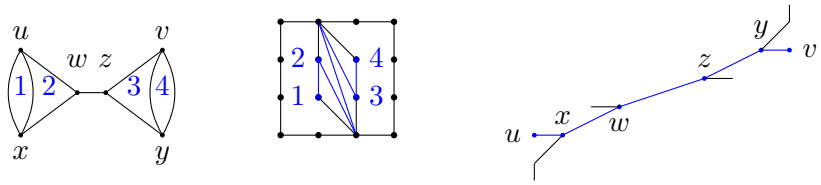


FIGURE 26. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分以及部分嵌入热带曲线。

比较这些点的 x坐标与 y坐标，分别得到关系 $ux + 2wx < uw$和$vy + 2yz < vz$，以及 $wx < uw$ 和 $yz < vz$.

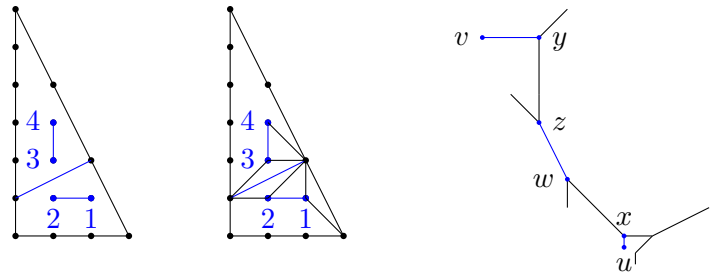


FIGURE 27. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分以及部分嵌入热带曲线 .

图27中的三角剖分只能通过形如（α，1）的线段连接 z 与 v 来完成。于是 $vz = yz$. 相反，我们注意到，连接 u，w的边的总长度取决于三角剖分如何完成。在图28中，我们给出一种三角剖分，其边长不满足任何附加方程。

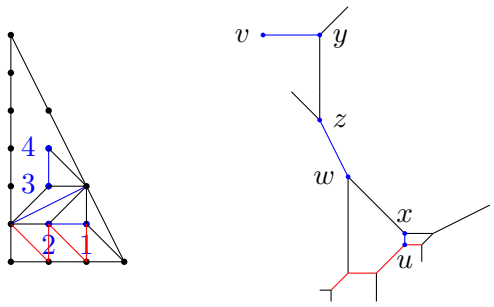


FIGURE 28. 一种可能的 $\mathbb{F}_2$ 三角剖分及其对应的嵌入曲线。

这就证明了以下引理。

引理 A.3. 设 Γ 为一条组合类型为（*021*）的亏格4 热带曲线 .

- 若 Γ 可在 $\mathbb{F}_0$中实现，则其边长在对称性意义下满足：

$$\begin{cases} ux + 2wx < uw; \\ vy + 2yz < vz. \end{cases} \tag{9}$$

- 若 Γ 可在 $\mathbb{F}_2$中实现，则其边长在对称性意义下满足：

$$\{yz = vz; \tag{10}$$

类型（*030*）。现在我们来考察组合类型（030）。描述在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入的三角剖分如图 29 所示。

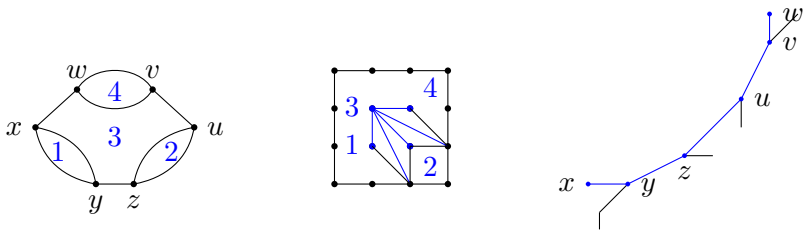


FIGURE 29. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线。

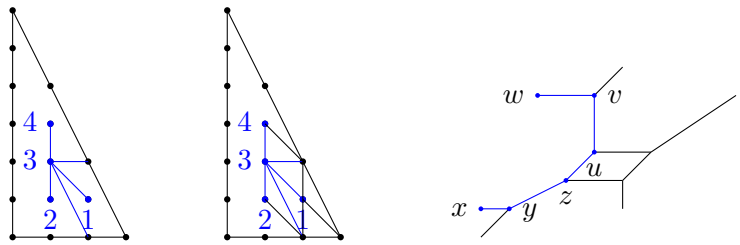


FIGURE 30. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线 .

再次比较这些点的 x坐标和 y坐标，可得如下结果。

引理 A.4。 设 Γ 是组合类型为 *(030)* 的亏格为4 的热带曲线。

- 如果 Γ 在 $\mathbb{F}_0$中可实现，则其边长满足：

$$\begin{cases} 2yz + uz + uv < xw; \\ yz + uz + 2uv < xw. \end{cases} \tag{11}$$

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_0$中实现，则其边长满足：

$$yz + uz + uv = xw. \tag{12}$$

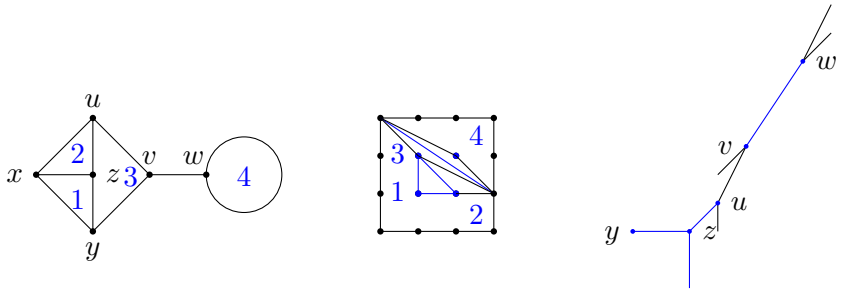


FIGURE 31. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分以及部分嵌入热带曲线。

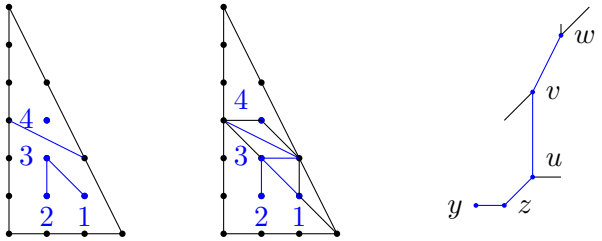


FIGURE 32. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分以及部分嵌入热带曲线 .

类型 *(101)*。现在考虑组合类型 (101)。描述在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入的三角剖分如图 31 所示。

图 31、32 中的两个部分三角剖分都可以通过连接 y 和 v 来补全：可以用一条线段为 (1，1) 的边、两条线段分别为 (1，1) 和 (0，1) 的边，或者三条边，其线段分别为 (−1，1)、(0，1) 和 (1，1)；这些边的 y 坐标均为 1。将点 u、z 的 y 坐标与之比较，分别得到 $\mathbb{F}_0$ 中的等式 $vy = uz + 2uv$ 和 $\mathbb{F}_2$ 中的等式 $vy = uv + uz$。

这证明了以下引理。

引理 A.5。设 Γ 是一条亏格为 4 、组合类型为 *(101)* 的热带曲线。

- 若 Γ 在 $\mathbb{F}_0$中可实现，则其边长满足：

$$\{2uv + uz = vy. \tag{13}$$

- 若 Γ 在 $\mathbb{F}_2$中可实现，则其边长满足：

$$\{uv + uz = vy. \tag{14}$$

类型 *(111)*。 现在来考虑组合类型 (111)。描述在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入的三角剖分如图33所示。

再次比较各点的 y坐标，可得以下结论。

引理 A.6。 设 Γ 是一条组合类型为 *(111)* 的亏格4 热带曲线。

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_0$中实现，那么其边长满足：

$$\{uy + 2uv = vy. \tag{15}$$

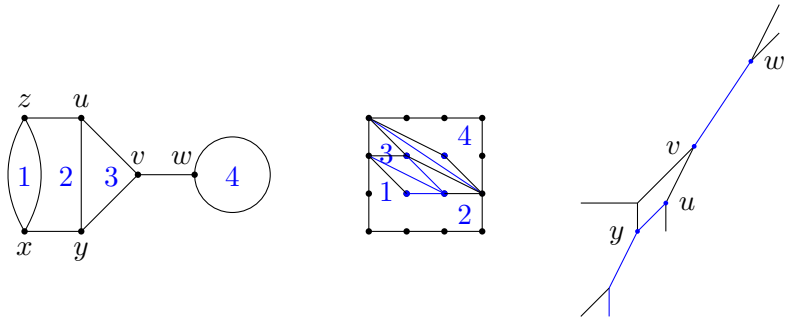


FIGURE 33. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线。

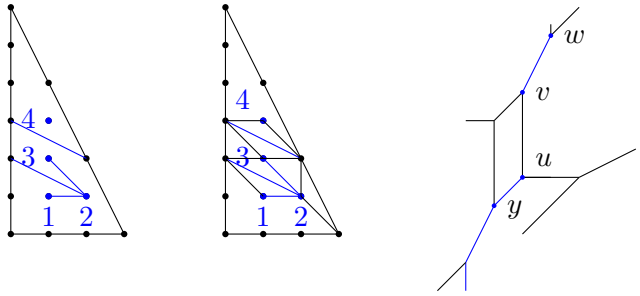


FIGURE 34. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线 .

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_2$中实现，那么其边长满足:

$$\begin{cases} uy + uv = vy. \end{cases} \tag{16}$$

类型（*121*）。现在我们来考虑组合类型（121）。描述 $\mathbb{F}_0$ 中嵌入的三角剖分见图35。

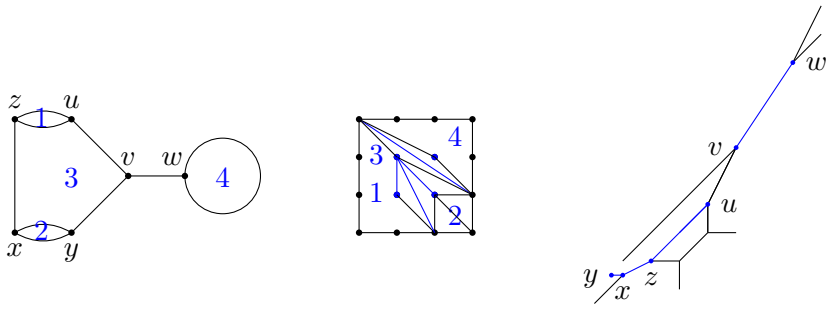


FIGURE 35. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线。

再次比较各点的 y坐标可得如下结论。

引理A.7. 设 Γ 是亏格为4 、组合类型为*(121)*的热带曲线。

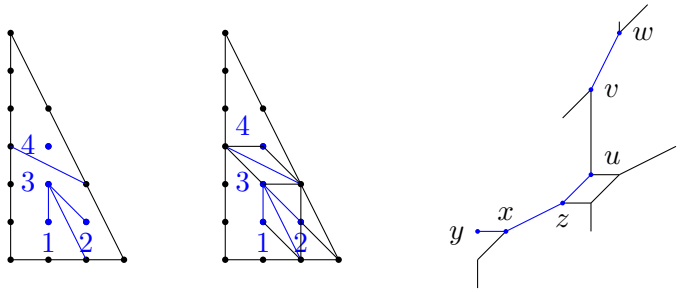


FIGURE 36. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线 .

- 若 Γ 在 $\mathbb{F}_0$中可实现，则其边长满足：

$$\{xz + zu + 2uv = vy. \tag{17}$$

如果 Γ 在 $\mathbb{F}_2$中可实现，那么其边长满足：

$$\{xz + zu + uv = vy. \tag{18}$$

类型（*122*）。现在来考虑组合类型（122）。描述在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入以及在 $\mathbb{F}_2$ 中的可能嵌入的三角剖分见图37、38和39。

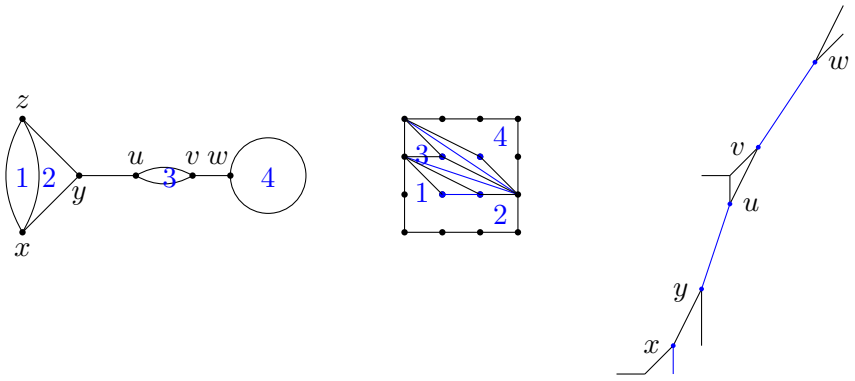


FIGURE 37. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分及部分嵌入热带曲线。

在图37中，比较点 u和v 的 y坐标，以及连接这两点的两条路径之一上另一个价数为3的点，可知，定义这两点之间一条路径的线段长度必须是另一条路径上其余线段长度总和的两倍。

相反，在图38中，我们看到 $l_1 = l_2$，其中 l_1, l_2 表示以 u, v 为端点的两条平行边。注意，该部分三角剖分不会产生其他边长方程。事实上，部分三角剖分的底部可以像图28中那样类似地完成，并且不会给出以 x, y, z.为端点的各边的边长之间的关系

在图39中，我们看到 $l_1 \neq l_2$. 此外，三角剖分的任何完备化都将用线段$(-1, 1)$和$(0, 1)$所对应的边，或用由$(-1,1)$定义的单条边，把 y 与 z连接起来。这些向量的 y-坐标相同，因此 $yz = xy$. 同样在此注意，该三角剖分不会产生其他方程。

这就证明了下面的引理。

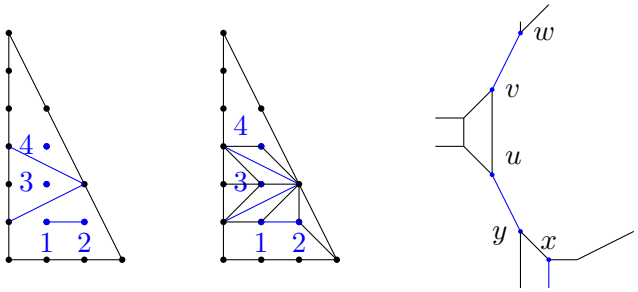


FIGURE 38. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线 .

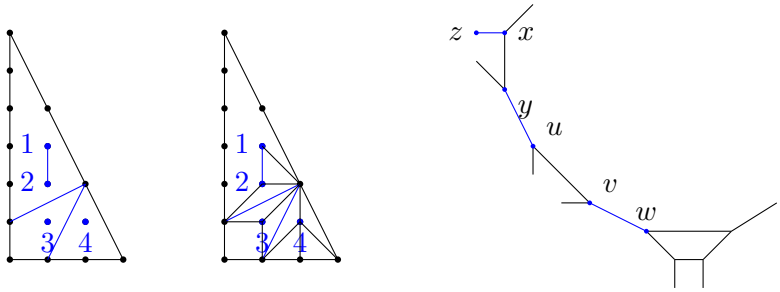


FIGURE 39. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线 .

引理 A.8. 设 Γ 是组合类型为（*122*）的亏格4 热带曲线。设 l_1、l_2 是两条端点为 u、v 的平行边的长度。

- 如果 Γ 在 $\mathbb{F}_0$中可实现，那么除对称性外，$l_1 = 2 \cdot l_2$。
- 如果 Γ 在 $\mathbb{F}_2$中可实现，那么除对称性外，其边长满足：

$$\begin{cases} l_1 = l_2; \quad or \quad \begin{cases} xy = yz. \end{cases} \end{cases} \tag{19}$$

类型（*202*）。现在考虑组合类型（202）。描述其在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入的三角剖分见图40。

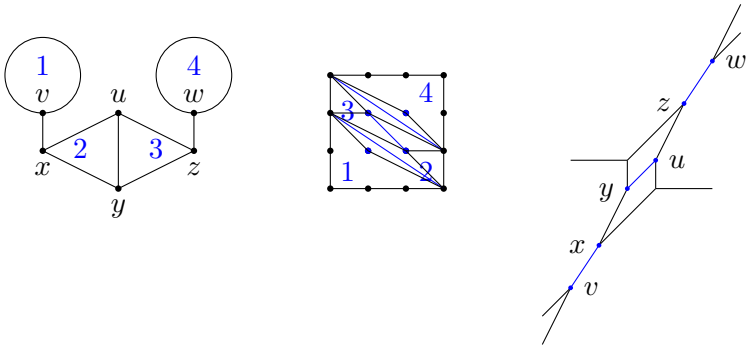


FIGURE 40. 组合类型，$\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分和部分嵌入热带曲线。

比较 x 坐标，分别比较 y 坐标，可得等式 $yz = 2uz + uy$，分别为 $ux = 2xy + uy$。

相反，嵌入在 $\mathbb{F}_2$，中的部分三角剖分如图41所示。所有可能的补全均得到关系式 $yz = uz$.

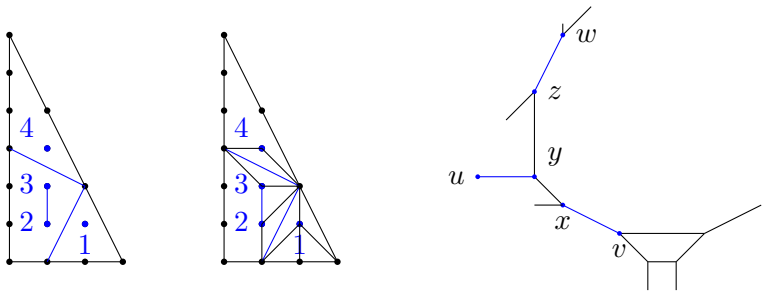


FIGURE 41. 部分三角剖分 $\mathbb{F}_2$ 和部分嵌入热带曲线。

我们还在图42中展示一个三角剖分，它表明 $xy + uy < ux < 2xy + uy$，但没有满足其他等式。

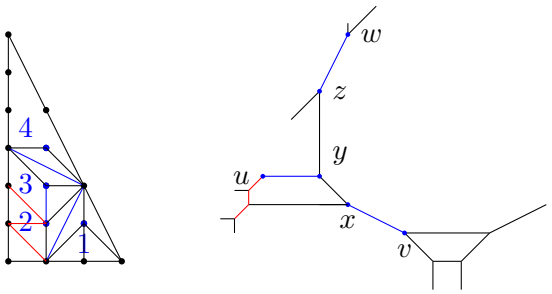


FIGURE 42. $\mathbb{F}_2$ 的一个三角剖分及其对应的嵌入热带曲线 .

以上所有内容证明了以下引理。

引理A.9。设 Γ 是一个亏格为4 、组合类型为*(202)*的热带曲线 .

- 若 Γ 可实现在 $\mathbb{F}_0$中，则其边长在对称性意义下满足：

$$\begin{cases} yz = 2uz + uy; \\ ux = 2xy + uy. \end{cases} \tag{20}$$

- 若 Γ 可实现在 $\mathbb{F}_2$中，则其边长在对称性意义下满足：

$$\begin{cases} uz = yz. \end{cases} \tag{21}$$

类型（*212*）。现在我们来考察组合类型（212）。描述其在 $\mathbb{F}_0$ 中的嵌入的三角剖分如图43所示。

再次比较各点的 x 或 y坐标可证明以下结论。

引理 A.10。设 Γ 是组合类型为（*212*）的亏格4 热带曲线。

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_0$中实现，那么其边长满足以下条件（忽略对称性）：

$$\begin{cases} xz + xy + 2uy = uz; \\ 2xz + xy + uy = uz; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 3uy = uz; \\ uy = xz. \end{cases} \tag{22}$$

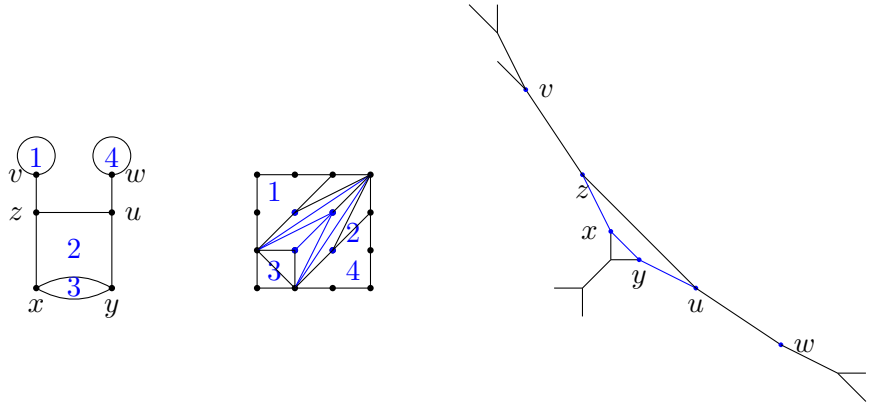


FIGURE 43. 组合类型、 $\mathbb{F}_0$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线。

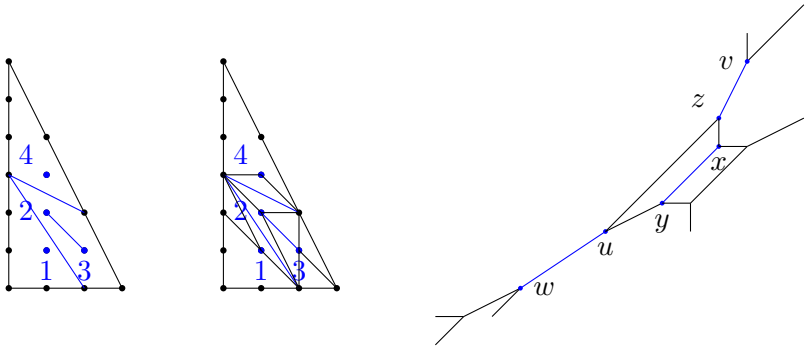


FIGURE 44. $\mathbb{F}_2$ 的部分三角剖分与部分嵌入热带曲线。

- 如果 Γ 可在 $\mathbb{F}_2$中实现，那么其边长满足以下条件（忽略对称性）：

$$\begin{cases} 2uy + xy = uz; \\ uy + xy + xz = uz; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 2uy = uz; \\ uy = xz. \end{cases} \tag{23}$$

REFERENCES

[1] Omid Amini、Matthew Baker、Erwan Brugall´e 和 Joseph Rabinoff。提升调和态射 I：度量复形与 Berkovich骨架。 *Res. Math. Sci.*，2：第 7 条，67，2015。[2] Omid Amini、Matthew Baker、Erwan Brugall´e 和 Joseph Rabinoff。提升调和态射 II：热带曲线与度量复形。 *Algebra Number Theory*，9(2):267–315，2015。[3] E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris。 *Geometry of algebraic curves. Vol. I*，*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 卷 267。Springer-Verlag，纽约，1985。[4] Matthew Baker。线性系从曲线到图的专门化。 *Algebra Number Theory* 2 6 613 653, , （）：–。2008
附录由 Brian Conrad 撰写。[5] Matthew Baker 和 Serguei Norine。有限图上的黎曼–罗赫定理与阿贝尔–雅可比理论。 *Adv. Math.*，215 2 766 788，2007（）：–。[6] Matthew Baker、Sam Payne 和 Joseph Rabinoff。非阿基米德几何、热带化与曲线上的度量。 *Algebr. Geom.*，3(1):63–105，2016。

[7] Silvia Brannetti、Margarida Melo 和 Filippo Viviani。关于热带 Torelli 映射。 *Adv. Math.*，226(3):2546–2586，2011。[8] Sarah Brodsky、Michael Joswig、Ralph Morrison 和 Bernd Sturmfels。热带平面曲线的模空间。

Res. , : 第 条。[9] Erwan

Math. Sci. 2 4, 31, 2015

Brugall´e、Ilia Itenberg、Grigory Mikhalkin 和 Kristin Shaw。热带几何简明导论。载于

Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014，第 1–75 页。G¨okova 几何/拓扑会议（GGT），G¨okova，2015。[10] Erwan Brugall´e 和 Lucia L´opez de Medrano。实平面曲线与热带平面曲线的拐点。 *J. Singul.*，4 74 103，2012：–。[11] Erwan Brugall´e 和 Kristin Shaw。热带几何浅谈。 *Amer. Math. Monthly*，121(7):563–589，2014。[12] Lucia Caporaso。代数曲线与热带曲线：比较它们的模空间。载于 *Handbook of moduli. Vol. I*， *Adv. Lect. Math. (ALM)* 卷 24，第 119–160 页。Int. Press，Somerville，MA，2013。[13] G. Casnati 和 T. Ekedahl。代数簇覆盖。I. 一般结构定理、3次、4次覆盖与 Enriques 曲面。 *J. Algebraic Geom.*，5(3):439–460，1996。[14] Renzo Cavalieri、Hannah Markwig 和 Dhruv Ranganathan。可容许覆盖空间的热带化。

Math. , (-) : –。[15] Renzo

Ann. 364 3 4 1275 1313, 2016

Cavalieri、Hannah Markwig 和 Dhruv Ranganathan。 *Tropical and logarithmic methods in enumerative geometry* 52 *Oberwolfach Seminars* ¨ 2023 10 1007 978 3 031 , [16] 卷。Birkhäuser, Cham, 。https://doi.org/ 。/ - - - 39401-0。 *Algebra Number Theory*Melody Chan。热带 Torelli 映射的组合学。[17] , 6(6):1133–1169, 2012。 *J. Algebraic Combin.*Melody Chan。热带超椭圆曲线。[18] , 37(2):331–359，2013。

¨ *Proceedings of* Melody Chan、

the CIEM workshop in tropical geometry 589 *AMS Contemporary Mathematics* 45 86, 2013

Margarida Melo 和 Filippo Viviani。热带 Teichm

¨ *Proceedings of* uller 空间与 Siegel 空间。

the CIEM workshop in tropical geometry 589 *AMS Contemporary Mathematics* 45 86, 2013

载于 , [19] 卷 , 第 – 页。arXiv:1207.2443。´Mar´ıa Ang´elica Cueto 和 Hannah Markwig。如何利用修改修复平面曲线的热带化。 *Exp. Math.*，25(2):130–164，2016。[20] Jan Draisma 和 Alejandro Vargas。通向树的卡塔兰多个热带态射；第一部分：构造。

J. Symbolic , : –。[21] Ilia It

Comput. 104 580 629, 2021

enberg、Grigory Mikhalkin 和 Eugenii Shustin。 *Tropical algebraic geometry* 35 *Oberwolfach* , [22] 卷。Birkhäuser *Seminars* ¨ 2009 Verlag，巴塞尔，第二版，。 *Preprint arXiv:2001.02710*David Jensen 和 Kalila Lehmann。热带曲线的卷曲不变量。[23] , 2024。 *Beitr. Algebra Geom.*Michael Joswig 和 Ayush Kumar Tewari。热带平面曲线中的禁型。[24] , 62 1 65 81，2021（）：–。¨Kai Phillipp Kr¨amer。热带五次曲线与非平面图。学士论文，萨尔州立大学，2013。[25] Diane Maclagan 和 Bernd Sturmfels。 *Introduction to tropical geometry* 161 *Graduate Studies in* , [26] 卷。AMS，。 *Mathematics* 2015 *to appear in Alegbraic Combinatorics*Margarida Melo 和 Angelina Zheng。热带三角曲线。[27] , 2025。 *arXiv:2509.09502* Margarida Melo 和 Angelina Zheng。热带三角曲线：一般情形。[28] , 2025。 *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference GGT 2006* 39 51, 2007 0704 0839 Grigory Mikhalkin。有理热带曲线的模空间。[29] , 第 – 页。arXiv: 。 *Amer. J. Math.*Rick Miranda。代数几何中的三重覆盖。[30] , 107(5):1123–1158，1985。 *J. Algebraic Combin.*Ralph Morrison。平面中的热带超椭圆曲线。[31] , 53(2):369–388，2021。

¨ *Idempotent* J

Mathematics and Mathematical Physics Proceedings Vienna 2003 0306366

¨ *Idempotent* urgen Richter-Gebert、

Mathematics and Mathematical Physics Proceedings Vienna 2003 0306366

Bernd Sturmfels 和 Thorsten Theobald。热带几何入门。 , , 。arXiv:math/ 。[32] Ilya Tyomkin。通过环面栈研究热带几何与对应定理。 *Math. Ann.*，353 995，2012 3 945（）：–。

Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, Germany

Email address: hannah@math.uni-tuebingen.de

Universität Tübingen、 Fachbereich Mathematik、 Auf der Morgenstelle 10、 72076 Tübingen、 Ger-many*Email address*: zheng@math.uni-tuebingen.de