arXiv:2602.02265v1 [stat.ME] 2 Feb 2026

可分离二元处理选择模型下利用工具变量进行非参数推断

Chan Park[a]，Eric J. Tchetgen Tchetgen[b]

[a]伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校统计学系，美国伊利诺伊州香槟市 61820[b]宾夕法尼亚大学统计学与数据科学系，美国宾夕法尼亚州费城 19104

摘要

工具变量（IV）方法广泛用于在存在未测量混杂时推断处理效应。本文研究可分离二元处理选择模型下利用工具变量进行非参数推断。该模型假设，在给定工具变量和无处理潜在结果的条件下，接受处理的概率优势可分解为各变量对应的可分离分量。尽管该模型下已实现对已治疗者中无处理潜在结果的平滑泛函（如已治疗者平均治疗效应）的非参数识别，但由于干扰参数以反事实量定义且彼此存在变分依赖，相应的非参数有效估计一直难以实现。为应对这一挑战，我们引入一种新的变分独立参数化，其基础是直接由观测数据定义的干扰函数。该参数化结合一种新颖的不动点论证，使得能够使用现代机器学习方法估计干扰函数。我们刻画已治疗者中无处理潜在结果任意平滑泛函的半参数效率界，并构造相应的半参数有效估计量，且不对干扰函数施加任何不必要的限制。此外，我们描述了一个直接明了的生成模型，以证明识别假设的合理性，并刻画该框架可通过经验检验的含义，从而在实际情境中评估这些假设。我们的方法可无缝扩展至非线性处理效应、总体层面效应和不可忽略的缺失数据设定。我们通过模拟研究以及对 Job Corps 研究的应用，展示了这些方法。

关键词：证伪；Job Corps；缺失数据；优势比；半参数效率

1 引言

近年来，因果推断为从观察性研究和未能完全遵守研究方案的随机试验中推断假设干预的影响，提供了若干严谨的方法。在这类研究中，因果推断的有效性取决于能否充分控制主要关注的治疗-结局关系中的潜在混杂因素。实践中，通常通过调整已测量的处理前协变量来处理混杂，期望这些协变量能够涵盖所有相关的混杂来源。然而，在观察性研究和存在方案违反的随机试验中，未观测混杂几乎总是令人担忧的问题，因为在这类情形下，可能无法排除处理变量与结果变量存在隐匿共同原因；真实案例见第8章。

迄今为止，学界还发展出了丰富的文献，以应对未测量混杂问题。其中，最具代表性的方法之一是工具变量（IV）方法，该方法已广泛应用于社会科学与健康科学领域（Imbens and Angrist，1994年；Angrist 等人，1996；Phibbs 等人，1996；Card，2001；Angrist and Krueger，2001；Abadie，2003；Vansteelandt and Goetghebeur，2003；Newey and Powell，2003；Hernán and Robins，2006；Tan，2006，2010；Vansteelandt 等人，2011；Tchetgen Tchetgen and Vansteelandt，2013；Ogburn 等人，2014；Wang and Tchetgen Tchetgen，2017；Kennedy 等人，2018年；Sun 等人，2018年；Kennedy 等人，2020年；Liu 等人，2020；Ye 等人，2021；Tchetgen Tchetgen，2024；Liu 等人，2025年；Sun 等人，2026）。形式上，工具变量框架依赖于存在一个满足三个核心条件的有效工具变量，即（IV1）：工具变量排除限制条件；（IV2）：工具变量独立性条件；以及（IV3）：工具变量相关性条件；关于这三个核心假设的形式化定义，参见第 2.2 节。此外，为了点识别某种治疗效应，通常还需要第四个工具变量假设。该假设的具体形式决定了能够识别哪一种因果估计目标。常见的目标估计量包括局部平均治疗效应（Imbens and Angrist，1994年；Angrist 等人，1996）、总体平均治疗效应（Wang and Tchetgen Tchetgen，2017）以及处理组平均治疗效应（ATT）（Robins，1994；Hernán and Robins，2006；Liu 等人，2020、2025年）；有关这些目标估计量及其相关工具变量假设的比较，参见 Levis 等人（2024）的最新综述。

本文研究满足以下条件的工具变量推断：(IV1)-(IV3)和(IV4)：一种特定的可分离二元处理选择模型，该模型假设扩展倾向得分（即给定工具变量和未接受处理时的潜在结果后接受处理的概率）的优势比可写成若干可分离因子的乘积，每个变量对应一个因子；其正式定义见章节2.2 。结合工具变量独立性条件(IV2)，该模型假设外生工具变量和内生隐藏混杂对处理优势比产生可分离的乘性影响。等价地，该模型意味着存在一种*logit* 可分离处理机制，即扩展倾向得分的 logit 值可表示为工具变量和隐藏混杂（由未接受处理时的潜在结果表示）的加性函数。因此，本文通篇交替使用“可分离二元处理选择模型”和“logit 可分离处理机制”这两个术语。据此，我们将

满足(IV1)-(IV4)的工具变量框架称为*logit*可分工具变量模型。

在近期相关研究中，Liu 等人(2020年在(IV1)-(IV4)条件下，建立了无处理潜在结果分布的非参数识别。因此，该反事实分布的任何光滑泛函（例如，平均处理效应（ATT））也都能非参数识别。Sun 等人(2018年也在不可忽略的缺失数据设定下建立了相关结果；详情见第2.4 节。重要的是，两项研究都指出，如果可分性条件不成立，通常就无法识别。例如，如果扩展倾向得分的 logit 无法表示为仅依赖于工具变量和潜在结果的分量之和——这意味着在 logit 尺度上不可分——那么模型通常就无法识别。即使没有 logit 可分性，仍有可能实现识别，但通常需要在其他尺度（如 probit 尺度）上满足可分性。这个例子说明了可分处理机制在实现非参数识别方面所发挥的独特且不可或缺的作用。

尽管已有研究取得了奠基性的识别结果，Sun 等人(2018年)、Liu 等人(2020年），以及较新的Sun 等人(2026）在估计和推断方面仍存在若干重要局限。首先，Sun 等人(2018年）和Liu 等人(2020年）提出的参数化并非变分独立，因为无限维干扰参数在函数层面相互制约。为解决这一局限，Sun 等人(2026）引入了一种变分独立参数化；然而，与早期方法类似，他们提出的重新参数化本质上依赖于无法从观测数据中直接获得的反事实量。变分独立性的缺失以及对反事实参数的依赖，共同增加了估计和推断的难度。以往论文试图通过对某些干扰函数作参数化设定来解决这些问题。然而，变分依赖使模型设定颇具挑战，且容易导致干扰参数之间不一致，进一步损害估计和推断的稳健性。因此，现有方法的理论保证在模型灵活性方面有所局限。第3.1节介绍了以往提出的 logit可分工具变量模型参数化。此外，以往研究缺少对 logit 可分离处理机制阐述清晰的生成模型，也没有提供在模型不成立时用于证伪该模型的经验条件。这些局限使研究者难以评估模型的合理性，也难以将现有方法应用于现实情境。因此，目前 logit可分工具变量模型仍缺乏一个用于规范开展非参数估计与推断的综合框架。

本文的总体目标是，在具有二元工具变量的 logit 可分离处理机制下，建立一个全面的非参数工具变量框架。具体而言，我们扩展并大幅推广了先前的工作（Sun 等人，2018年；Liu 等人，2020年；Sun 等人，2026），通过系统性地解决其根本局限。如下文所论证，我们对 logit可分工具变量模型的非参数处理为因果推断文献做出了多项新颖贡献，因为它需要发展若干新的方法学技术和技术论证，而这些难以轻易从现有文献中推导得出。我们的主要贡献是

总结如下。

（贡献 *1*：一种新的参数化）
在第 3 章中，我们提出了一种替代参数化，它在变分上独立，且仅依赖于观测数据中可直接获得的量。换言之，我们以一种避免依赖任何反事实量的方式定义模型参数。其构造涉及通过函数空间中的不动点方程引入一个中间量，这需要严谨且具有实质难度的分析。我们还证明，可以通过一种迭代程序高效地求解该方程；无论初始值如何，该程序都会收敛到唯一解。值得注意的是，本文所发展的代数方法具有创新性，其价值可能不限于现有的因果推断文献。

（贡献 *2*：半参数效率理论）
在第 4 章中，我们刻画了观测数据分布的非参数模型下平均处理效应（ATT）的全部影响函数；在该模型中，所有干扰函数均不受限制。这一结果与以往依赖于对某些模型参数作参数化设定的研究形成鲜明对比。此外，我们证明，平均处理效应（ATT）的影响函数是唯一的，因此达到了该模型的半参数效率界，并且可以用闭式表达式表示。值得注意的是，推导这一表达式面临若干技术挑战，我们对此进行了仔细处理，因为这一推导需要求解一个复杂的积分方程。

(贡献 *3*：半参数有效估计量)
在章节 5中，我们基于贡献 2 所引入的有效影响函数，构建了平均处理效应（ATT）的估计量。重要的是，所有干扰函数均非参数地估计，并利用了贡献 1 中引入的替代参数化。所提出的估计量是一致的、渐近正态的，并且是半参数有效的，前提是部分（但未必全部）干扰函数以足够快的速率得到估计。我们进一步将渐近正态性所需的条件与以往工作中的条件进行比较，同时考虑干扰函数被参数地和非参数地估计的两种情形。章节 7的模拟研究表明，所提出估计量的有限样本表现与已建立的渐近性质吻合良好。

(贡献 *4*：生成模型与可证伪性含义)
我们还提供了有助于解释和评估logit可分工具变量模型的结果。具体而言，在章节 2.3中，我们引入了一个logit可分工具变量模型的生成模型，其动机来自经济学及相关实证社会科学中被广泛研究的标准离散选择理论；在章节6中，我们考察工具变量假设的可证伪性含义。这些结果共同有助于论证并解释该工具变量模型，从而增强其实际相关性。生成模型与可证伪性含义均通过实际应用加以说明，见章节8。

（贡献 *5*：扩展）
最后，作为我们方法的衍生结果，我们将该方法扩展到非线性处理效应的推断，

例如受处理者分位数处理效应（QTT），以及针对整个总体定义的处理效应（如平均处理效应），从而超越对受处理个体因果效应的研究。我们还讨论了如何将我们的工具变量框架直接应用于存在非可忽略缺失机制的缺失数据情形。最后，我们补充了类别型或连续型工具变量情形下的结果；在这些情形中，模型不再是饱和的，因果参数也变得过度识别。例如，我们给出了类别型工具变量情形下影响函数集合的闭式刻画。此外，贡献 1 中引入的新参数化只需对不动点方程稍作修改，即可推广至一般 Z 情形。受篇幅限制，这些扩展内容见补充材料A.6。

2 预备知识

2.1 设定

假设我们观测到 N 个独立同分布（i.i.d.）个体，下标为 $i \in \{1, \ldots, N\}$。除非必要，我们省略下标 i。对于每个个体，观测数据为 $\boldsymbol{O} \equiv (Y, A, Z, \boldsymbol{X})$；其中，$\boldsymbol{X} \in \mathrm{R}^d$ 表示 d 维处理前协变量，$Z \in \{0, 1\}$ 是一个候选二元工具变量，$A \in \{0, 1\}$ 表示处理分配（$A = 1$ 表示接受处理，$A = 0$ 表示对照），而 $Y \in \mathrm{R}$ 是我们感兴趣的结果变量。令 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{R}^d$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的支撑集。令 $Y^{(a,z)} \in \mathrm{R}$ 表示在可能与事实相反的情况下，若将 (A, Z) 设为 (a, z)，本会观测到的潜在结果。类似地，令 $Y(a) \in \mathrm{R}$ 表示在可能与事实相反的情况下，若将 A 设为 a，无论 Z 如何，本会观测到的潜在结果。本文主要关注 ATT，定义为 $\tau^* = \mathrm{E}\{Y(1) - Y(0) \mid A = 1\}$。在补充材料 A.6 中，我们讨论如何使用本方法推断非线性处理效应（例如 QTT）、总体层面效应（例如平均处理效应），以及受不可忽略缺失机制影响的结果。

本文始终采用以下假设，这些假设在因果推断文献中十分常见：

(A1)（一致性） $Y = Y^{(A)}$ 几乎处处成立；(A2)（重叠）对于每个 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，$Y_{(0)} \mid (A = a, Z = z, \boldsymbol{X})$ 的支撑集对 $a \in \{0, 1\}$ 和 $z \in \{0,1\}$ 的所有取值均相同，记为 $\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}} \subseteq$ 实数集。

在这些假设下，平均处理效应（ATT）可表示为 $\tau^* = \mathbb{E}\{Y - Y_{(0)} \mid A = 1\}$。因此，平均处理效应（ATT）的识别取决于能否根据观测数据恢复 $Y_{(0)} \mid (A = 1)$ 的分布。

为便于推导识别结果并供后续使用，我们引入一些额外的符号。令 $f^*(\cdot \mid \cdot)$ 表示真实的（条件）密度函数；例如，$f^*(Z \mid \boldsymbol{X})$ 表示 Z 给定 $\boldsymbol{X}$ 时的真实条件密度。不带星号时，$f(\cdot \mid \cdot)$ 表示一个（条件）密度函数的工作模型。对于每个 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，令 $y_R \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$ 为一个固定的结果变量

参考值，并定义函数 π^*、 α^*、 β^*和 μ^* 如下

$$\pi^*(y,z,\boldsymbol{X}) = \frac{f^*(A=1\,|\,Y^{(0)}=y,Z=z,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}=y,Z=z,\boldsymbol{X})}\ , \tag{1}$$

$$\alpha^*(y,z,\boldsymbol{X}) = \frac{\pi^*(y,z,\boldsymbol{X})}{\pi^*(y_R,z,\boldsymbol{X})}\ , \qquad \beta^*(z,\boldsymbol{X}) = \pi^*(y_R,z,\boldsymbol{X})\ , \tag{2}$$

$$\mu^*(z,\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}\{Y^{(0)}\,|\,A=1,Z=z,\boldsymbol{X}\}\ . \tag{3}$$

换言之， π^* 是给定$(Y(0)\,Z,\boldsymbol{X})$时 A 的优势函数， α^* 是在给定$(Z,\boldsymbol{X})$时关联 A 与 $Y(0)$的（广义）优势比函数（Chen, 2007; Tchetgen Tchetgen et al., 2010），而 β^* 是基线优势函数。根据定义，我们有 $\pi^*=\alpha^*\beta^*$；此外，在(A2)下， α^* 与 β^* 的取值均位于$(0,\infty)$内。我们指出， α^* 可解释为量化 A与 $Y(0)$之间关联中混杂偏倚程度的尺度参数。特别地，若对所有给定$(Z,\boldsymbol{X})$下的 $y\in\mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}$，均有 $\alpha^*(y,Z,\boldsymbol{X})=1$，则 A与 $Y(0)$不存在关联，并且事实上在给定$(Z,\boldsymbol{X})$时条件独立；也就是说，在以$(Z,\boldsymbol{X})$为条件时不存在混杂偏倚。此外， α^* 满足边界条件，即对所有$(Z,\boldsymbol{X})$， $\alpha^*(y_R,Z,\boldsymbol{X})=1$。参照值 y_R的选择不影响下文所建立的结果。

接下来， μ^* 是给定（$A=1$、 Z、 $\boldsymbol{X}$）时， $Y_{(0)}$ 的反事实结果回归。对于任意可积函数 $g(Y_{(0)}\,Z$、 $\boldsymbol{X})$，我们定义 $\mu^*(Z$、 $\boldsymbol{X};\,g)=\mathbb{E}\{g(Y_{(0)}\,Z$、 $\boldsymbol{X})\,|\,A=1$、 Z、 $\boldsymbol{X}\}$。通过直接的代数运算，可得

$$\mu^*(Z,\boldsymbol{X};g) = \frac{\mathbb{E}\{g(Y,Z,\boldsymbol{X})\alpha^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\mathbb{E}\{\alpha^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}\ . \tag{4}$$

最后，我们引入全文通用的辅助记号。对于函数 $h(\boldsymbol{V})$，其中 $\boldsymbol{V}\subseteq\{Y(1)\,Y(0)\,A,\ Z,\ \boldsymbol{X}\}$，令 $\|h\|_\infty=\sup_{\boldsymbol{v}}|h(\boldsymbol{v})|$ 和$\|h\|_{P,2}=[\mathbb{E}\{h^2(\boldsymbol{V})\}]^{1/2}$分别表示 h 关于 $\boldsymbol{V}$分布的上确界范数和 $L^2(P)$范数。稍微滥用一下记号，将一般函数 $g(Y(a)\,A,\ Z,\ \boldsymbol{X})$关于结果变量 $Y(a)$的积分记作 $\int g(y,\ A,\ Z,\ \boldsymbol{X})\,dy$；它既可以解释为求和，也可以解释为关于适当支配测度的积分。对于一列随机变量 $\boldsymbol{V}_N$和一列数 r_N，若 $\boldsymbol{V}_N/r_N$随机有界，我们记作 $\boldsymbol{V}_N=O_P(r_N)$；若当 $N\to\infty$时， $\boldsymbol{V}_N/r_N$依概率收敛到零，则记作 $\boldsymbol{V}_N=o_P(r_N)$。令 $\boldsymbol{V}_N\xrightarrow{D}\boldsymbol{V}$表示当 $N\to\infty$时， $\boldsymbol{V}_N$ 弱收敛到 $\boldsymbol{V}$。最后， $\perp\!\!\!\perp$ 表示统计独立。

2.2 工具变量假设

接下来，我们介绍使候选工具变量 Z 有效且足以识别反事实分布 $Y_{(0)}|(A=1)$所需的条件：

(IV1)（排除限制） $Y_{(a,\ z)}=Y_{(a)}$ 对所有 $a\in\{0,\ 1\}$ 和 $z\in\{0,\ 1\}$几乎处处成立；**(IV2)**（独立性/无混杂性） $Y_{(0)}\perp\!\!\!\perp Z\,|\,\boldsymbol{X}$；**(IV3)**（相关性） $A\not\perp\!\!\!\perp Z\,|\,\boldsymbol{X}$；**(IV4)**（logit 可分离处理机制） $\alpha^*(y,\ Z=1,\ \boldsymbol{X})=\alpha^*(y,\ Z=0,\ \boldsymbol{X})$ 对所有 $y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$

以及 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$。因此，稍微滥用一下符号，我们记作 $\alpha^*(y, \boldsymbol{X})$，省略其对 Z 的依赖。

条件(IV1) 指出， Z 对 Y没有直接影响，因此我们可以只关注 $Y^{(a)}$而不考虑 Z。条件(IV2) 意味着 $\boldsymbol{X}$ 包含了 Z 和 $Y^{(0)}$的所有共同原因；尤其是，当 Z 经过随机化时，该条件自动成立。条件(IV3)要求 Z与 A在给定 $\boldsymbol{X}$的条件下相关，这种关联可以是因果性的，也可以是非因果性的。当(IV1)-(IV3) 成立时， Z 被称为有效工具变量。然而，仅凭这三个条件不足以点识别治疗效应。

条件（IV4）用于实现平均处理效应（ATT）的点识别，最早由 Sun 等（2018）和 Liu 等（2020）分别在缺失数据和因果推断背景下提出。具体而言，该条件要求优势比函数 α^* 不依赖于 IV 的水平。因此，在（IV4）下，优势函数可分解为 $\pi^*(y, z, \boldsymbol{X}) = \alpha^*(y, \boldsymbol{X})\beta^*(z, \boldsymbol{X})$，这意味着在 logit 尺度上，处理机制 $A \mid (Y(0)\, Z, \boldsymbol{X})$ 可分解为分别依赖于 $(Y(0)\boldsymbol{X})$ 和 $(Z, \boldsymbol{X})$ 的分量。因此，（IV4）可解释为 logit 可分离处理机制。此外，由于 α^* 是衡量混杂程度的尺度参数，（IV4）意味着这种以优势比尺度衡量的程度在 Z的所有水平上保持不变。因此，该条件也可视为优势比等混杂假设；该假设最早由 Park 和 Tchetgen Tchetgen（2022）提出，Tchetgen Tchetgen 等人随后在双重差分的分布推广中加以运用。

2.3 生成模型

考察一个满足四项工具变量假设的生成模型颇有启发，因为它有助于说明这些假设在现实应用中如何得到论证和解释。简而言之，该模型以基于二元选择模型的经典计量经济学框架为基础（McFadden，1973年；AtheyandImbens，2006；Imbens andNewey，2009年；Train，2009）。

具体而言，我们首先假设每个个体都有一个未观测特征 U、观测协变量 $\boldsymbol{X}$ 和一个候选工具变量 Z，且 $U \perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X}$，也就是说，该工具变量相对于未观测特征是外生的。遵循 Atheyand Imbens (2006)，令处理状态下的潜在结果 $A = a$ 为 $Y_{(a)} = h_a(U, \boldsymbol{X})$，其中 $h_a(u, \boldsymbol{X})$ 关于 u 严格单调；在计量经济学文献中， h_a 通常被称为生产函数。

我们进一步假设，个体在接受处理 $A = a$时的效用为 $\mathcal{U}_a = h_a(U, \boldsymbol{X}) - c_a(Z, \boldsymbol{X}) + \epsilon_a$。其中，$h_a$ 表示个体对其生产函数 h_a的主观信念。值得注意的是， h_a 可能不同于 h_a，这反映了个体对相应处理下潜在结果的了解并不完全。函数 c_a 表示在给定观测信息（Z， $\boldsymbol{X}$）的情况下，选择 $A = a$ 所涉及的成本。我们假设，对每个$\boldsymbol{X}$， $c_1(1, \boldsymbol{X}) - c_1(0, \boldsymbol{X}) \neq c_0(1, \boldsymbol{X}) - c_0(0, \boldsymbol{X})$ 均成立。换言之， Z 直接影响处理选择相关的成本，因此处理组和对照组的成本必须对 Z的变化作出不同反应。最后， ϵ_0 和 ϵ_1 是独立同分布的处理特定个体特异性误差项，服从位置参数为 0、尺度参数为 1 的 I 型极值分布（亦称 Gumbel 分布）；这是丰富的

离散选择文献（McFadden，1973年；Train，2009年）。

总之，个体在每种处理条件下的效用由感知到的产出h_a减去成本c_a，再加上个体特异性误差ϵ_a构成。个体通过比较两种效用来选择是否接受处理；具体而言，若处理下的效用高于对照下的效用，即$A = \mathbb{1}(\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_0)$，则选择接受处理。在该模型下，工具变量条件 (IV1)-(IV4) 均成立；技术细节见补充材料 A.1。图1 使用一幅世界干预图展示了二元选择生成模型（Richardsonand Robins,2013）。

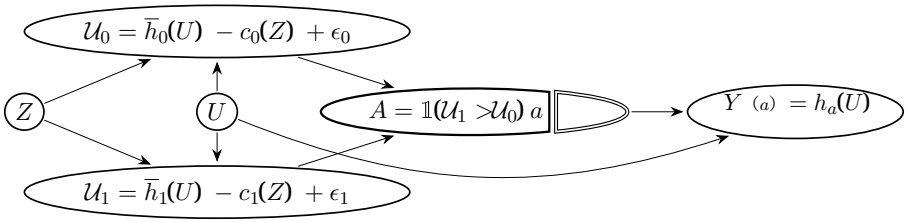

图 1：与(IV1)-(IV4)相容的所述生成模型的图示。为简洁起见，测量协变量 $\boldsymbol{X}$ 已省略。

尽管效用函数的可分离性看起来主要是出于分析上的便利——具体而言，是为了简化扩展倾向得分——但实际上，它是实现识别的必要条件。为说明这一点，假设效用差中包含 U 与 Z 之间的交互作用，例如 $\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0 = \{h_1(U, \boldsymbol{X}) - h_0(U, \boldsymbol{X})\} - \{c_1(Z, \boldsymbol{X}) - c_0(Z, \boldsymbol{X})\} + \imath(U, Z, \boldsymbol{X}) + (\epsilon_1 - \epsilon_0)$，其中 $\imath$ 捕捉了 U 与 Z 之间的交互作用。当 $\imath(U, Z, \boldsymbol{X}) \neq 0$ 时，反事实数据 $(Y(0)\, A, Z, X)$ 通常无法识别，前提是主效应均非零（即 $h_1(U, \boldsymbol{X}) - h_0(U, \boldsymbol{X}) \neq 0$ 且 $c_1(Z, \boldsymbol{X}) - c_0(Z, \boldsymbol{X}) \neq 0$）；补充材料 A.1 给出了一个具体示例，展示这种识别失败。鉴于可分离结构在实现识别方面发挥着根本作用，评估其在实践中的合理性十分重要。为此，我们在第 6 节提出一项经验证伪检验。第 8 节进一步展示了如何在实际应用中为该模型提供依据。

我们简要展示生成模型在若干领域中的应用，以进一步凸显其可解释性。社会科学领域的多项研究（例如（Card，2001））利用影响就学选择的变量（如与大学的地理距离）作为工具变量，考察教育对劳动力市场收入的因果效应。省略观测协变量，假设某人就读大学 $(a = 1)$ 或不就读大学 $(a = 0)$ 的效用由以下简单线性模型给出，该模型决定了此人的大学就读决策：

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_a = b_{\mathrm{int},a} + b_{h,a} U - b_{c,a} Z + \epsilon_a \ , && a \in \{0, 1\} \ , \\ \Rightarrow \quad & A = \mathbb{1}(b_{\mathrm{int}} + b_h U - b_c Z + \epsilon_1 - \epsilon_0 > 0) \ , && b_\star \equiv b_{\star,1} - b_{\star,0} \ , \quad \star \in \{\mathrm{int}, h, c\} \ , \end{aligned} \tag{5}$$

其中，U 反映内在自我驱动力的程度，Z 体现与大学的地理距离，$b_c \neq 0$ 则根据成本函数的要求设定。速率 $|b_c/b_h|$刻画了个体在大学就读决策中，动机与距离之间的边际替代

率。具体而言，它量化了在效用尺度上，自我激励每增加一个单位，个体愿意多走的距离。

作为卫生科学领域的另一个例子，Phibbs 等人(1996)研究了入住新生儿重症监护病房（NICU）与未入住相比对婴儿死亡率的因果效应。在这一情境下，设个体入住 NICU 所获得的效用遵循（5）中的同一线性模型，其中 U 和 Z 现在分别表示婴儿疾病的严重程度以及与最近 NICU 的地理接近程度。与前面的例子一样，$|b_c/b_h|$ 这一比率可以解释为：疾病严重程度每增加一个单位，个体愿意接受的距离增量。

尽管这种简单的线性效用模型便于解释，而且往往符合学科直觉，但它存在局限性，因为它假设边际替代率恒定，也未能恰当地纳入各种个人资本投资可能存在边际收益递减的情况。在大学就读的例子中，额外的自我激励对大学就读的边际影响可能会随着动机水平提高而减弱；而当大学已经足够近时，距离缩短带来的影响也可能较小。NICU 的例子中也可能存在类似的边际收益递减。这些考量凸显了为效用函数采用灵活函数形式的重要性——拟议的生成模型已纳入这一特征。灵活的函数形式对于捕捉边际收益递减规律等更细致的行为至关重要，也有助于确保模型保持现实性。

2.4 识别

在(A1)-(A2) 和 (IV1)-(IV4)的条件下，Liu 等人 (2020年) 和 Sun 等人 (2018年) 证明了可以从观测数据中识别$(Y_{(0)}\, A,\ Z,\ \boldsymbol{X})$ 的联合分布；有关其结果的简要回顾，请参见第 3.1 节。因此，（1)-（3）中的干扰函数也可以识别。进而，ATT 可以非参数地识别为：

$$\begin{aligned}\tau^* &= \mathbb{E}[\{A-(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\}Y]/\mathbb{E}(A) &(6)\\ &= \mathbb{E}[A\{Y-\mu^*(Z,\boldsymbol{X})\}]/\mathbb{E}(A) &(7)\\ &= \mathbb{E}[\{A-(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\}\{Y-\mu^*(Z,\boldsymbol{X})\}]/\mathbb{E}(A)\ . &(8)\end{aligned}$$

第一种表示仅涉及处理优势函数 $\pi^* = \alpha^*\beta^*$；第二种表示仅依赖于结果回归 μ^*；最后一种表示则结合了这两个函数。因此，我们将这些表示分别称为 ATT 的逆概率加权（IPW）表示、基于结果回归的表示以及增广逆概率加权（AIPW）表示。类似的表示也已在双重差分框架下推导得出（Park 和 Kang，2022年）。

在估计和推断中，可以选用其中一种表示（6）-（8）作为依据。特别是，Robins 等人(2000年8）表明，在优势比函数 α^* 事先已知、而观测数据分布的其他干扰函数不受限制，且不采用假设(IV1)-(IV4) 的半参数模型中，式（8）对应于 ATT 的有效影响函数（EIF）。这有助于构造具有稳健性质的估计量，适用于

该半参数模型，正如半参数效率理论所阐明的那样（Bickel 等人，1998；Tsiatis，2006；Robins 等人，2008）。然而在实践中，α^* 很少已知，必须进行估计；在这种情况下，当 α^* 已知时可实现的稳健推断，在将 α^* 视为未知并通过工具变量假设加以识别时，并无保证 (IV1)-(IV4)。

对于logit可分工具变量模型中的推断，Liu 等人(2020年)、Sun 等人(2018年)和Sun 等人(2026则假设 α^* 属于一个参数模型。他们推导了该半参数模型下ATT的影响函数（IF）集合，并提出了局部半参数有效估计量，其中所有干扰函数均通过参数方法估计。然而，由于其参数化选择固有的局限性，这些方法无法处理不受限制的 α^*，也无法对干扰函数进行完全非参数估计；详情请参见第3.1 节。

相比之下，我们提出的新参数化既适用于不受限制的 α^*，也支持对干扰函数进行非参数估计。在本文余下部分，我们首先在第3 节介绍这种新的参数化，然后在第 α^* 4节给出所提出模型在不受限制的 Z下ATT的影响函数集合。利用 Z的二元性，我们进一步证明ATT的影响函数是唯一的（因此也是有效影响函数），并给出其闭式表达式。基于该有效影响函数，我们在第5 节构造一个全局有效的ATT估计量，其中所有干扰函数均采用非参数方法估计。

3 参数化

在本章节中，我们考虑$(Y_{(0)}\, A, Z) \mid \boldsymbol{X}$ 的分布的各种候选选择参数化，这些参数化满足假设 (A1)-(A2) 和 (IV1)-(IV4)，包括现有方法和我们的新提议。不带星号 $(^*)$ 书写的干扰函数表示可能不同于真实函数的一般参数。

3.1 现有参数化

我们首先回顾以往工作中使用的参数化。Sun 等人 (2018年) 和 Liu 等人(2020年) 考虑了一种以参数 $\theta_{\mathrm{LS}} \equiv \{f_Z \equiv f(Z \mid \boldsymbol{X})\ f_Y \equiv f(Y \mid A = 0, Z, \boldsymbol{X})\ \alpha \equiv \alpha(Y_{(0)}\, \boldsymbol{X})\ \beta \equiv \beta(Z, \boldsymbol{X})\}$ 表示的参数化。具体而言，密度 $f(Y_{(0)}\, A, Z \mid \boldsymbol{X})$ 表示为

$$f(Y^{(0)} = y, A = a, Z \mid \boldsymbol{X}) = \frac{\{\alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X})\}^a f(Y = y \mid A = 0, Z, \boldsymbol{X}) f(Z \mid \boldsymbol{X})}{\int \{1 + \alpha(t, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X})\} f(Y = t \mid A = 0, Z, \boldsymbol{X})\, dt}. \tag{9}$$

该表示 是Chen (2007)的直接结果；另见Tchetgen Tchetgen 等人(2010) .

因此，$(Y_{(0)}\, A, Z) \mid \boldsymbol{X}$ 的分布的识别归结为确定θ_{LS} 能否从观测数据中被识别。参数 f_Y 和 f_Z 可以非参数地被识别：f_Y 通过对具有 $A = 0$的个体将 Y 对$(Z, \boldsymbol{X})$进行回归，以及 f_Z 通过将 Z 对$\boldsymbol{X}$ 进行回归。相比之下，如何从观测数据中识别 α 和 β 并不一目了然，因为它们的定义涉及反事实量。尽管如此，这些量可以

利用以下矩条件恢复（Sun 等人，2018年；Liu 等人，2020年）：

$$\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{LS}}}\left[\left\{\frac{1-A}{f(A=0\,|\,Y,Z,\boldsymbol{X};\alpha,\beta)}-1\right\}\times b_1(\boldsymbol{X})\right]=0\,,$$
$$\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{LS}}}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{(1-A)\{b_2(Y,\boldsymbol{X})-\mu(Z,\boldsymbol{X};b_2,\alpha,f_Y)\}}{f(A=0\,|\,Y,Z,\boldsymbol{X};\alpha,\beta)}\\ +\mu(Z,\boldsymbol{X};b_2,\alpha,f_Y)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_3(Z,\boldsymbol{X})\\ -\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{LS}}}\{b_3(Z,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}\end{bmatrix}\right]=0\,,$$

其中 $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 为任意函数，$\mathbb{E}^{\theta_{\mathrm{LS}}}$ 表示在由以下参数化的观测数据分布下的期望 θ_{LS}，且 $\mu(Z,\ \boldsymbol{X};\ b_2,\ \alpha,\ f_Y)$ 由表达式（4）给出。

遗憾的是，基于 θ_{LS} 的参数化存在重要缺陷。具体而言，这些参数并非变分独立，Sun 等人（2026）也指出了这一点。为说明这个问题，我们考虑二元 Y 和二元 Z 的情形，并为简便起见省略协变量。根据观测数据，可以识别与（$Y(0)\,A,\ Z$）相关的以下五个参数：{$f(Z=1)$ $f(A=1\,|\,Z=0)$ $f(A=1\,|\,Z=1)$ $f(Y=1\,|\,A=0,Z=0)$ $f(Y=1\,|\,A=0,Z=1)$}。然而，参数集 θ_{LS} 包含六个量：{$f(Z=1)$ $f(Y=1|A=0,Z=0)$ $f(Y=1|A=0,Z=1)$ $\alpha(1)$ $\beta(0)$ $\beta(1)$}，其中 $\alpha(0)$ 因由边界条件 $\alpha(0)=1$ 确定而被省略。这种差异意味着，必须对以 θ_{LS} 表示的模型施加限制。其中一种限制是（IV2），它要求将（9）对 A 边缘化后得到的条件密度$f(Y(0)\,|\,Z,\boldsymbol{X})$在给定 $\boldsymbol{X}$ 的条件下独立于 Z，即

$$f(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\overset{\text{(IV2) and (9)}}{=}\frac{\{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(Z,\boldsymbol{X})\}f(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})f(Z\,|\,\boldsymbol{X})}{\int\{1+\alpha(t,\boldsymbol{X})\beta(Z,\boldsymbol{X})\}f(Y=t\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\,dt}\,.$$

这一结果清楚地表明，θ_{LS}的各分量之间存在复杂关系，因为上述表达式的右侧必须与 Z无关。因此，θ_{LS} 包含一个冗余分量，从而使该参数化过度识别。

为解决这一变分依赖问题，Sun 等人（2026）提出了一种基于 $\theta_{\mathrm{SMW}}\equiv\{f_Z, f_{Y^{(0)}}\equiv f(Y_{(0)}|\,\boldsymbol{X})$ $\alpha,\beta\}$的替代参数化，其中密度 $f(Y_{(0)}\,A,Z\,|\,\boldsymbol{X})$由下式给出

$$f(Y^{(0)}=y,A=a,Z\,|\,\boldsymbol{X})=\underbrace{\frac{\{\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(Z,\boldsymbol{X})\}^a}{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(Z,\boldsymbol{X})}}_{=f(A=a\,|\,Y^{(0)}=y,Z,\boldsymbol{X};\alpha,\beta)}f(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})f(Z\,|\,\boldsymbol{X})\,.\qquad(10)$$

在 Y 与 Z 均为二元且不存在 $\boldsymbol{X}$ 的玩具示例中，θ_{SMW} 显然由五个量组成：{$f(Z=1)$ $f(Y_{(0)}=1)$ $\alpha(1)$ $\beta(0)$ $\beta(1)$}。这与可从观测数据中识别的（$Y_{(0)}\,A,Z$）的参数个数相匹配，从而证实 θ_{SMW} 下的参数化是变分独立的。

同样，识别 $(Y_{(0)}\,A,Z)\ |\boldsymbol{X}$ 的分布，可归结为确定能否从观测数据中恢复 θ_{SMW}。f_Z 分量可以非参数地识别，其余分量 $f_{Y^{(0)}}$、α 和 β 则可根据以下矩条件识别

条件（Sun 等人，2026）：

$$\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\left[\left\{\frac{1-A}{f(A=0\,|\,Y,Z,\boldsymbol{X};\alpha,\beta)}-1\right\}\times b_1(\boldsymbol{X})\right]=0\,, \tag{11}$$

$$\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\left[\frac{1-A}{f(A=0\,|\,Y,\ Z,\ \boldsymbol{X};\ \alpha,\ \beta)}\times\left[b_2(Y,\ \boldsymbol{X})\ -\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\{b_2(Y^{(0)}\,\boldsymbol{X})\ |\,\boldsymbol{X}\}\right]\right]=0\,, \tag{12}$$

$$\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\left[\frac{1-A}{f(A=0\,|\,Y,Z,\boldsymbol{X};\alpha,\beta)}\times\left[\begin{array}{l}[b_2(Y,\boldsymbol{X})-\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\{b_2(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}]\\ \times[b_3(Z,\boldsymbol{X})-\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\{b_3(Z,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}]\end{array}\right]\right]=0\,, \tag{13}$$

其中 (b_1, b_2, b_3) 是任意函数，$\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}$ 表示由参数 θ_{SMW}刻画的观测数据分布下的期望。

T为了估计 θ_{SMW}，Sun 等人（2026）提出了两种方法 s:

(i) 通过指定参数模型并使用（11）-（13）拟合，同时估计所有三个干扰函数；或者（ii）为 α 设定一个参数模型，例如 $\alpha(\cdot;\xi_\alpha)$，然后将 $\beta=\beta(\cdot;\,\xi_\alpha)$和$f_Y(0)\ =f_Y(0)(\cdot;\,\xi_\alpha)$定义为（11）和（12）的解（可以通过非参数地估计），最后根据（13）确定 ξ_α。这样得到的干扰函数能够同时满足（11）-（13）。

原则上，可以尝试采用与上述 (i) 和 (ii) 类似的策略，对这些干扰函数进行完全非参数估计，但这种方法颇具挑战性。首先，对于 (i) 的类似做法，从 (11)-(13) 中联合对所有三个组成部分进行非参数估计十分困难，因为它们以高度交织的方式进入方程。具体而言，α 和 β 以乘法形式耦合，而 $f_{Y^{(0)}}$必须通过均值嵌入 $\mathbb{E}_{\theta_{\mathrm{SMW}}}\{b_2(Y^{(0)}\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}$ 进行估计；对于 b_2 的任何可行取值，都必须验证这一点。其次，尽管可以设想采用与 (ii) 相仿的序贯策略，但这需要先为 α 指定一个非参数模型，以便启动这一过程。这种序贯方法的计算开销可能很大，而且即使尝试了许多候选 α模型，也可能无法得到 (11)-(13) 的解。

简言之，先前研究中的参数化（Sun 等人，2018年；Liu 等人，2020年；Sun 等人，2026）存在变分独立性不足的问题，且依赖于以反事实量定义的参数。为部分解决这些挑战，作者对各种干扰函数（包括优势比函数）施加了参数模型 α。因此，尽管原则上工具变量的存在允许 α 不受限制，现有研究仍假设其具有已知函数形式，但包含未知的有限维参数。因此，这些方法的理论保证和实际估计程序都局限于此类参数设定。至关重要的是，现有 ATT 估计量的一致性和渐近正态性要求 α的模型设定正确；参见第5.2节。然而，据我们所知，目前尚无用于评估 α可能存在模型设定错误的拟合优度检验。综上，这些问题限制了现有方法的实际适用性，并可能损害所得估计量的有效性。

3.2 一种新的参数化

为克服现有标准参数化的局限性，我们考虑一种基于 $\theta \equiv \{f_Z \equiv f(Z \mid \boldsymbol{X})\ f_A \equiv f(A \mid Z, \boldsymbol{X})\ f_Y \equiv f(Y \mid A=0, Z, \boldsymbol{X})\}$ 的替代参数化。与基于 θ_{LS} 和 θ_{SMW}的参数化相比，这种参数化有两个显著特点。首先，参数是变分独立的。举例而言，考虑当前玩具示例，其中 Y和 Z均为二元，且 $\boldsymbol{X}$不存在。此时，θ由五个量构成：$\{f(Z=1)\ f(A=1 \mid Z=0)\ f(A=1 \mid Z=1)\ f(Y=1 \mid A=0, Z=0)\ f(Y=1 \mid A=0, Z=1)\}$，这与从观测数据中可识别的 $(Y(0), A, Z)$ 的参数数量相符。其次，这些参数直接根据观测数据定义，不依赖任何反事实量。因此，θ 的所有组成部分都可以使用标准非参数方法以及高度自适应的现代机器学习方法轻松估计；详情参见第 5 节。

不难看出，θ刻画了分布 $(Y(0)A=0,\ Z) \mid \boldsymbol{X}$，其依据是$f(Y(0)=y,\ A=0,\ Z \mid \boldsymbol{X}) = f(Y=y \mid A=0,\ Z,\ \boldsymbol{X})f(A=0 \mid Z,\ \boldsymbol{X})f(Z \mid \boldsymbol{X})$。然而，如何用 θ 表示反事实分布 $(Y(0)\, A=1, Z) \mid \boldsymbol{X}$，则远没有那么显而易见，因为其中没有任何分量是直接根据反事实数据定义的。

我们给出本文的第一个主要结果，说明如何从 θ 刻画 α 和 β——它们是反事实量的函数，而 θ 完全根据观测数据定义。为使阐述简洁，我们引入以下符号。给定一个 $\boldsymbol{X}$，令$z_m = \arg\min_{z\in\{0,1\}} f(A=1 \mid Z=z, \boldsymbol{X})$ 和 $z_M = \arg\max_{z\in\{0,1\}} f(A=1 \mid Z=z, \boldsymbol{X})$；注意，在 (IV3) 下，$z_m \neq z_M$。尽管 z_m 和 z_M 依赖于 $\boldsymbol{X}$，为简化符号，我们省略这种依赖。此外，对于 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{X}$，定义 $\mathrm{L}_+^\infty(\mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}) = \{h \mid h(y, \boldsymbol{X}) \in [0,\infty)\ \ \forall y \in \mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}\}$。现在可以陈述该定理了。

定理 3.1。 假设 *(A1)-(A2)*和 *(IV1)-(IV4)* 对于 $(Y(0)\, A, Z, \boldsymbol{X})$成立，其对应参数为 $\theta = \{f_Z, f_A, f_Y\}$。对于固定的 $\boldsymbol{X} \in X$，定义映射 $\Psi : L_+^\infty(Y_{\boldsymbol{X}}) \to L_+^\infty(Y_{\boldsymbol{X}})$ 为

$$\Psi(g(y,\boldsymbol{X});\theta) = \frac{\left\{\begin{array}{l} f(A=1 \mid Z=z_m, \boldsymbol{X})g(y,\boldsymbol{X}) \\ +f(A=0 \mid Z=z_m, \boldsymbol{X})f(Y=y \mid A=0, Z=z_m, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=0 \mid Z=z_M, \boldsymbol{X})f(Y=y \mid A=0, Z=z_M, \boldsymbol{X}) \end{array}\right\} \int g(t,\boldsymbol{X})R_Y(t,\boldsymbol{X})\,dt}{f(A=1 \mid Z=z_M, \boldsymbol{X})R_Y(y,\boldsymbol{X})}, \tag{14}$$

其中

$$R_Y(y,\boldsymbol{X}) = \frac{f(Y=y \mid A=0, Z=z_M, \boldsymbol{X})}{f(Y=y \mid A=0, Z=z_m, \boldsymbol{X})}\ . \tag{15}$$

于是，以下结果成立：

(i) 令 $g^\star(y, \boldsymbol{X};\ \theta)$ 表示 Ψ 的不动点，即：

$$\Psi(g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta);\theta) = g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta)\ . \tag{16}$$

那么， $g^\star$ 唯一存在。 ***(ii)*** 优势比函数 α 和基准优势函数 β 在 （2）中可表示为关于$g^\star$ 的如下形式：

$$\alpha(y, \boldsymbol{X}; \theta) = \frac{g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta)}{g^\star(y_R, \boldsymbol{X}; \theta)} \frac{f(Y = y_R \,|\, A = 0, Z = z_m, \boldsymbol{X})}{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_m, \boldsymbol{X})} , \qquad y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}} , \tag{17}$$

$$\beta(z, \boldsymbol{X}; \theta) = \frac{f(A = 1 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X}) / f(A = 0 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X})}{\int \alpha(y, \boldsymbol{X}; \theta) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X})\, dy} , \qquad z \in \{0, 1\} . \tag{18}$$

定理 3.1证明，反事实量 α 和 β 由映射 Ψ的不动点唯一确定。该映射完全由 θ定义，而后者又仅由观测数据推导得出。因此， α 和 β 通过与可观测量之间的确定性关系得以唯一识别，无需直接涉及反事实数据。进而，反事实分布 $(Y(0)A = 1,\ Z) \,|\, \boldsymbol{X}$ 可通过（9），完全用 θ 表示，并利用由此得到的 α 和 β。

这种新的参数化与第 3.1 章节讨论的先前方法形成鲜明对比，后者将反事实量用作模型参数。这些参数化直接导致参数估计在实践中几乎不可避免，因为某些干扰函数，尤其是优势比函数 α，无法轻易从观测数据中以非参数方式估计；详情请参见第 3.1 章节。相比之下，我们的参数化完全基于观测数据中 readily available 的量，无需采用临时的参数限制。因此，所有干扰函数的估计都可归结为标准回归和密度学习任务；关于估计程序的详情，请参见第 5 章节。

尽管定理3.1 为用 α 和 β 表示 θ奠定了理论基础，但其实用性可能看起来有限，因为不动点方程（16）似乎难以直接求解。然而，以下定理表明，只要满足适当的有界性条件，就可以通过迭代更新高效地求解该方程。我们先介绍所需的假设，然后给出定理。

(A3)（ θ的有界性）存在常数 $0 < c_Z < 1$、 $0 < c_A < 1$、 $0 < c_Y \le C_Y < \infty$和 $0 < c_g \le C_g < \infty$，使得参数 $\theta = \{f_Y, f_A, f_Z\}$以及式（16）中对应的$g^\star(\cdot; \theta)$ 满足 $f(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}) \in [c_Z, 1 - c_Z]$、 $f(A = a \,|\, Z = z, \boldsymbol{X}) \in [c_A, 1 - c_A]$、 $f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}) \in [c_Y, C_Y]$ 和 $g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta) \in [c_g, C_g]$，对所有 $y \in \mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}$、 $a \in \{0, 1\}$、$z \in \{0, 1\}$和 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{X}$均成立。

假设（A3）要求所有干扰函数以及所得的 $g^\star$ 函数均一致有界，且远离 0 和无穷大。该条件保证下文介绍的迭代程序定义良好且数值稳定。

定理 3.2。 假设 *(A1)-(A2)*和 *(IV1)-(IV4)*对 $(Y(0)\, A,\ Z,\ \boldsymbol{X})$成立，其对应参数为 $\theta = \{f_Z,\ f_A, f_Y\}$。进一步假设 *(A3)*对 θ成立。对于固定的

$\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，定义映射 $\Psi : \mathcal{L}_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathcal{L}_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$ 为 Ψ 在 (14) 中的标准化版本：

$$\overline{\Psi}(g(y, \boldsymbol{X}); \theta) = \frac{\Psi(g(y, \boldsymbol{X}); \theta)}{\int \Psi(g(t, \boldsymbol{X}); \theta)\, dt} .$$

考虑如下定义的迭代更新

$$\overline{h}^{(j+1)}(y, \boldsymbol{X}; \theta) = \overline{\Psi}(\overline{h}^{(j)}(y, \boldsymbol{X}; \theta); \theta) , \quad j \in \{0, 1, \ldots\} , \tag{19}$$

其中初始函数 $h^{(0)} \in L_+^\infty(\boldsymbol{Y_X})$ 可任意选取，但需满足 $\int h^{(0)}(y, \boldsymbol{X})\, dy = 1$。那么，当 $j \to \infty$ 时，对于所有 $y \in \boldsymbol{Y_X}$，$h^{(j)}(y, \boldsymbol{X}; \theta)$ 将收敛至式（16）中的 $g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta)$，即：

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}} |\overline{h}^{(j)}(y, \boldsymbol{X}; \theta) - g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta)| \to 0 \quad as \quad j \to \infty .$$

此外，迭代更新 (19) 相对于某个散度函数呈指数快速收敛；详情请参见补充材料 C.4 。

定理 3.2 表明，可以通过迭代更新（19）求解不动点方程（16），且该序列以指数速率收敛至解。这种指数收敛速率的出现，是因为映射 Ψ 全局压缩至 $g^\star$，我们在补充材料 C.4 中对此给出了形式化证明。因此，只要有界性条件（A3）成立，对于任意给定的 θ，用户指定任意（$y, \boldsymbol{X}$）后，都可以高效地计算 $g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta)$。进而，可以根据式（17）和（18）计算 α 和 β 。这些结果对于构造下一章节的 ATT估计量至关重要，因为该估计量不仅依赖于 θ 的估计值，也依赖于相应的 α 和 β估计值。

4 半参数效率理论

本章节将刻画模型$\mathcal{M}$中平均处理效应（ATT）的影响函数。该模型是满足假设(A1)-(A2) 和 (IV1)-(IV4)的观测数据分布的半参数模型，且不对干扰函数施加任何限制。以下定理给出了这一结果：

定理 4.1。 假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 成立。设 $\omega(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$ 是满足以下条件的函数：*(ω-i)* $\omega = \nu - \mathbb{E}\{\nu \,|\, Y_{(0)}\, \boldsymbol{X}\} - \mathbb{E}(\nu \,|\, Z, \boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(\nu \,|\, \boldsymbol{X})$，其中某个函数为 $\nu(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$；*(ω-ii)* ω 满足以下积分方程：

$$\mathbb{E}\big[\{Y^{(0)} - \mu^*(Z, \boldsymbol{X})\} - \{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \omega)\} \,|\, A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big] = 0 . \tag{20}$$

那么，以下函数是模型 M 中 τ^* 的影响函数：

$$IF^*(\boldsymbol{O}) = \frac{\left[\begin{array}{l}\{A-(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\}\{Y-\mu^*(Z,\boldsymbol{X})\}-A\tau^* \\ +(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{\omega(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)\} \\ +A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)+(1-A)\omega(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]}{\mathbb{E}(A)}. \tag{21}$$

此外，在模型 τ^* 中，关于 $\mathcal{M}$ 的每个影响函数都具有以下形式：(21)。

(21) 中的影响函数包含两组项。右侧第一行恰好是 (8) 中的增广逆概率加权表示。这对应于一个半参数模型中 ATT 的有效影响函数：在该模型中，优势比函数 α^* 先验已知，而观测数据分布的所有其他组成部分均不受限制（Robins 等人，2000年）。第二行和第三行则反映了允许 α^* 不受限制所带来的额外变异。据我们所知，这一结果在工具变量文献中完全是新的，并显著改进了以往要求 α^* 已知或已知至多依赖于有限维参数的研究（Robins 等人，2000年；Sun 等人，2018年；Liu 等人，2020年；Sun 等人，2026）。

我们注意到，在实践中直接求解 (20) 中的积分方程可能颇具挑战，因为反事实数据分布中涉及多个嵌套依赖关系。然而，利用 Z的二元性，我们可以强化定理4.1的结论，正如定理4.2所述。

定理 4.2。 假设假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 成立。令 $\omega^*(Y(0)\,Z,\boldsymbol{X}) = [L^*(Y(0)\,\boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\{L^*(Y(0)\,\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{X}\}]\{Z - \mathbb{E}(Z \mid \boldsymbol{X})\}$,其中 L^* 由下式给出

$$L^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) = \frac{Y^{(0)} + \mathbb{E}\{Z \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\}B^*(\boldsymbol{X}) + C^*(\boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\{Z \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} - \mathbb{E}(Z \mid \boldsymbol{X})}.$$

下列给出了 B^* 和 C^* 的闭式表达式，见补充材料(S.132) *C.6*。那么， ω^* 是满足定理*(ω-i)* 和*(ω-ii)* 中条件的唯一函数*4.1*。因此，在 (21) 处取值为 ω^* 的影响函数是模型 τ^* 中$\mathcal{M}$的有效影响函数。

定理4.2 利用了4.1 相比于定理的两项额外结果，原因在于 Z具有二元性质。首先，它为 ω^* 提供了满足条件(ω-i)和(ω-ii)的闭式表达式。其次，它证明了 ω^*的唯一性，这进而意味着 ATT 的影响函数唯一，因此确实是有效影响函数。直观而言，这一结果源于当 Z 为二元变量时，式（20）中的积分方程可写成具有可分离核的第二类弗雷德霍姆积分方程，进而可化为线性系统求解（Kress，2014年）。此外，该线性系统在相关性假设(IV3)下是适定的，而函数 B^* 和C^* 可作为其解求得。尽管这一简化降低了问题的复杂性，代数推导步骤仍然并非易事，最终表达式的复杂程度便反映了这一点。相关推导见补充材料C.6。

5 估计

5.1 平均处理效应（ATT）的半参数有效估计量

本章节着重于根据定理4.2中的有效影响函数构造 ATT 估计量。所提出的估计量采用交叉拟合方法（Schick，1986；Chernozhukov等人，2018年）。具体而言，我们将 N 个体随机划分为$\mathcal{I} = \{1, \ldots\ldots, N\}$，再将其分为 K 个互不重叠的折$\{\mathcal{I}_1, \ldots\ldots, \mathcal{I}_K\}$，并将每一折的补集定义为$\mathcal{I}_k^c = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_k$，其中 $k \in \{1, \ldots\ldots, K\}$。对于每一折 k，我们按如下步骤进行：

（步骤 1）使用 $\mathcal{I}_k^c$中的个体估计干扰函数 $\theta^* \equiv \{f_Z^* \equiv f^*(Z \mid \boldsymbol{X})\ f_A^* \equiv f^*(A \mid Z, \boldsymbol{X})\ f_Y^* \equiv f^*(Y \mid A = 0, Z, \boldsymbol{X})\}$，这些函数定义于第 3.2 节；（步骤 2）基于步骤 1 的估计值，获得优势比函数 α^* 和基线优势函数 β^* 的估计值；（步骤 3）利用步骤 1 和步骤 2 的估计值，获得定理 4.2 中有效影响函数（EIF）的估计值。

最后，我们汇总步骤 3 中针对 K 折的有效影响函数（EIF）估计值，得到平均处理效应（ATT）的估计值。下文将进一步详细介绍该流程。

（步骤 *1*：干扰函数的估计）
对于每个 $k \in \{1, \ldots, K\}$，我们使用 I_k^c 中的观测值估计干扰函数。首先，为了估计条件概率 f_Z^*，我们将 Z 作为响应变量、 $\boldsymbol{X}$ 作为回归变量，采用概率机器学习方法及其通过 Super Learner 方法（van der Laan 等人，2007）形成的集成。条件概率 f_A^* 的估计方式类似，其中 A 为响应变量，$(Z, \boldsymbol{X})$ 为回归变量。对于结果密度 f_Y^*，估计方法取决于 Y 的类型。对于分类的 Y，也可以再次采用基于超级学习器的方法，与其他干扰函数的估计类似，将 Y 作为响应变量、$(Z, \boldsymbol{X})$ 作为回归变量，并且仅使用满足 $A = 0$ 的个体。对于连续型 Y，我们采用非参数条件密度估计方法，包括核回归（Hall 等人，2004）、平滑样条（Gu，2014）以及这些方法的集成，同样仅使用满足 $A = 0$ 的个体。补充材料 A.2 提供了超级学习器库中基础机器学习算法以及条件密度估计软件的更多细节。我们将所得估计值分别记为 $\widehat{\theta}^{(-k)} \equiv \{\widehat{f}_{(-k)Z}, \widehat{f}_A^{(-k)}, \widehat{f}_{(-k)Y}\}$，其中上标 $(-k)$ 表示估计时排除了第 k 折 I_k。

这些讨厌参数估计将在后续步骤中使用。具体而言，结果回归的密度比 R_Y^*（15）在估计 α^* 和 β^*方面发挥着核心作用。然而，对于连续型 Y，通过两个密度估计的比值获得的朴素密度比估计往往会产生不稳定的结果，因为它关注的是单个密度，而非它们的比值。为克服这一难题，可以采用直接针对密度比的方法，从而得到更稳定、可靠的估计。一些常用的非参数密度比估计方法包括无约束最小二乘重要性拟合 和库尔贝克-莱布勒重要性估计

程序（Kanamori 等人，2009年；Nguyen 等人，2007；Sugiyama 等人，2007）。本质上，这些方法将密度比嵌入再生核希尔伯特空间，并通过最小化均方误差或 Kullback-Leibler 散度来估计密度比。有关这些直接估计方法的更多技术细节，请参见补充材料A.2。

（步骤 *2*：通过迭代更新估计 α^* 和 β^* ）
给定估计值 $\widehat{\theta}^{(-k)}$，我们现在得到优势比函数 α^* 和基线优势函数 β^*的估计值。简言之，一旦获得 $\widehat{\theta}^{(-k)}$ ，只要 $\widehat{\theta}^{(-k)}$ 满足有界性条件 (A3)，就可以直接根据定理 3.1 和 3.2 得到相应的 α^* 和 β^* 的估计值；我们将在后文正式将其作为一个假设引入，见下文定理 5.1。具体而言，对于每个 $\boldsymbol{X}_i$ 且 $i \in \mathrm{I}_k^{(-k)}$ ，我们将 $\widehat{\theta}^{(-k)}$ 代入，以实施迭代更新 (19)。根据定理 3.2，所得序列收敛于不动点。随后，通过 (17) 和 (18) 得到 α^*和 β^* 的估计值，分别记为 $\widehat{\alpha}^{(-k)} \equiv \alpha(\cdot; \widehat{\theta}^{(-k)})$和 $\widehat{\beta}^{(-k)} \equiv \beta(\cdot; \widehat{\theta}^{(-k)})$。对于二元或多类别 Y， α^* 和 β^* 的估计很直接，因为迭代更新只需针对每个 $\boldsymbol{X}_i$在有限个结果变量取值上进行计算。然而，对于连续型 Y，直接实施迭代更新是不可行的，因为 Y 的支撑集不可数。在这种情况下，我们建议在结果变量取值的足够细的网格上进行迭代更新，以数值近似 $\widehat{\alpha}^{(-k)}$ 和 $\widehat{\beta}^{(-k)}$。

(步骤 *3*：有效影响函数的估计)
根据前面步骤得到的 $\widehat{\theta}^{(-k)}$、 $\widehat{\alpha}^{(-k)}$ 和 $\widehat{\beta}^{(-k)}$ ，我们现在可以利用式（9）中的关系构造密度 $f^*(Y_{(0)}\, A,\ Z \mid \boldsymbol{X})$ 的估计值。我们将该估计值记为 $\widehat{f}^{(-k)}(Y_{(0)}\, A,\ Z \mid \boldsymbol{X}) \equiv f(Y_{(0)}\, A,\ Z \mid \boldsymbol{X};\, \widehat{\theta}^{(-k)})$。将 $\widehat{f}^{(-k)}$ 代入式（21）中有效影响函数的干扰函数，即可得到代入估计量。例如，对于一般函数 $b(Y_{(0)}\boldsymbol{X})$， $\mu^*(Z,\ \boldsymbol{X}; b)$ 可估计为

$$\widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}; b) = \int b(y, \boldsymbol{X}) \widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)} = y \mid A = 1, Z, \boldsymbol{X})\, dy \ .$$

有效影响函数的其他组成部分可通过类似的代入步骤得到，其估计量也采用类似的符号表示，例如 $\widehat{\omega}^{(-k)}$。利用这些估计值，我们定义 $\widehat{\phi}^{(-k)}$ 作为式（21）中有效影响函数关键部分的估计值：

$$\begin{aligned}
&\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) \\
&= \begin{bmatrix}
\{A - (1-A)\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y, \boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X})\}\{Y - \widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X})\} \\
+(1-A)\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y, \boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X})\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y, Z, \boldsymbol{X}) - \widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}; \widehat{\omega}^{(-k)})\} \\
+A\widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}; \widehat{\omega}^{(-k)}) + (1-A)\widehat{\omega}^{(-k)}(Y, Z, \boldsymbol{X})
\end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

最后，给定 $\widehat{\phi}^{(-k)}$ 对于 $k \in \{1, \ldots, K\}$，可以基于有效影响函数构造平均处理效应（ATT）的估计值，如下所示：

$$\widehat{\tau} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i)}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \ . \tag{22}$$

接下来需要确立 $\widehat{\tau}$ 的统计性质。为此，我们引入额外条件并定义以下符号。对于 $k \in \{1, \ldots, K\}$，令 $r_Y^{(-k)}$、$r_A^{(-k)}$ 和 $r_Z^{(-k)}$ 表示干扰函数的估计误差，并以 $L^2(P)$-范数度量，即

$$
\begin{aligned}
r_Y^{(-k)} &= \|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)} \mid A=0, Z, \boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)} \mid A=0, Z, \boldsymbol{X})\|_{P,2} \ , \\
r_A^{(-k)} &= \|\widehat{f}^{(-k)}(A=1 \mid Z, \boldsymbol{X}) - f^*(A=1 \mid Z, \boldsymbol{X})\|_{P,2} \ , \\
r_Z^{(-k)} &= \|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1 \mid \boldsymbol{X}) - f^*(Z=1 \mid \boldsymbol{X})\|_{P,2} \ .
\end{aligned} \tag{23}
$$

有了这些符号后，我们现在陈述建立 $\widehat{\tau}$ 渐近正态性所需的假设：

(A4)（Y 有界）存在常数 $B_Y > 0$，使得 $|Y| \leq B_Y$ 几乎处处成立。**(A5)**（强相关性）对于 $k \in \{1, \ldots, K\}$ 以及二元 Z，存在常数 $B_\beta > 0$，使得 $|\beta^*(1, \boldsymbol{X}) - \beta^*(0, \boldsymbol{X})| \geq B_\beta$，并且 $|\widehat{\beta}^{(-k)}(1, \boldsymbol{X}) - \widehat{\beta}^{(-k)}(0, \boldsymbol{X})| \geq B_\beta$ 对所有 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$ 均成立。**(A6)**（一致估计）对于 $k \in \{1, \ldots, K\}$，我们有 $r_Y^{(-k)} + r_A^{(-k)} + r_Z^{(-k)} = o_P(1)$。**(A7)**（二阶估计误差）对于 $k \in \{1, \ldots, K\}$，我们有

$$
\{r_Y^{(-k)}\}^2 + \{r_A^{(-k)}\}^2 + r_Y^{(-k)} r_A^{(-k)} + r_Y^{(-k)} r_Z^{(-k)} + r_A^{(-k)} r_Z^{(-k)} = o_P(N^{-1/2}) \ . \tag{24}
$$

假设（A4）指出，结果变量一致有界。结合有界性条件（A3），假设（A5）保证扩展倾向得分之差，$|f^*(A=1 \mid Y(0)\, Z=1, \boldsymbol{X}) - f^*(A=1 \mid Y(0)\, Z=0, \boldsymbol{X})|$，远离零，这可解释为对工具变量相关性条件（即（IV3））的强化。对估计得到的扩展倾向得分也施加了类似要求。假设（A6）指出，干扰函数在 $L^2(P)$范数下得到一致估计。假设（A7）进一步要求某些干扰函数以足够快的速率估计。具体而言，（A7）要求结果模型 f_Y^*和倾向得分模型 f_A^*以 $o_P(N^{-1/4})$速率估计，这通常需要满足适当的光滑性条件。相比之下，工具变量模型f_Z^* 可以以显著较慢的速率估计，前提是其与结果模型和倾向得分模型的交叉乘积估计误差（即 $r_Z^{(-k)} r_Y^{(-k)}$ 和 $r_Z^{(-k)} r_A^{(-k)}$ ）在两种情况下均保持$o_P(N^{-1/2})$。如果所有干扰函数均采用参数化设定，假设（A7）相当于要求工作模型 f_Y 和 f_A 设定正确，而f_Z 则可以设定错误。我们注意到，假设（A7）不同于以往研究中的条件（Sun 等人，2018年；Liu 等人，2020年；Sun 等人，2026），这反映了参数化方式的差异；详细讨论见第 5.2 节。

以下定理表明，在模型 $\mathcal{M}$ 中，$\widehat{\tau}$ 是 τ^* 的渐近正态且半参数有效估计量：

定理 5.1。 假设 *(A1)-(A2)*、*(A4)-(A7)*以及*(IV1)-(IV4)*均成立。此外，假设 *(A3)*对真实干扰函数 θ^* 和估计的干扰函数 $\widehat{\theta}^{(-k)}$ 在 $k \in \{1, \ldots, K\}$ 上成立。那么，式 (22) 中的 ***ATT*** 估计量在 $\sqrt{N}(\widehat{\tau} - \tau^*) \xrightarrow{D}$

$N(0,\sigma^2)$，其中 $\sigma^2 \equiv Var\{IF^*(\boldsymbol{O})\}$ 是模型 M 中 τ^* 的半参数效率界。此外，$\widehat{\tau}$ 的渐近方差的一致估计量为

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in\mathcal{I}_k}\left\{\frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}}{\sum_{i=1}^{N} A_i/N}\right\}^2 .$$

定理 5.1 还意味着，可以为 τ^* 构造Wald型置信区间。具体而言，令 z_c 表示标准正态分布的第 $100c$ 百分位数。于是，$100(1-c)$%置信区间（针对 τ^*）由 $(\widehat{\tau} + z_{c/2}\widehat{\sigma}/N^{1/2},$ $\widehat{\tau} + z_{1-c/2}\widehat{\sigma}/N^{1/2})$ 给出。

5.2 不同参数化下所需估计误差的比较

我们在结束本章节之际，详细说明假设(A7)与以往工作中的条件有何不同（Sun 等人，2018年; Liu 等人，2020年; Sun 等人，2026）；我们提醒读者，这些参数化已在章节 3.1 中回顾。在 Sun 等人（2018年）和Liu 等人（2020年）的参数化下，与(A7)相对应的条件可以表示为

$$\begin{aligned}\{r_\alpha^{(-k)}\}^2 + r_\alpha^{(-k)}r_\beta^{(-k)} + r_\alpha^{(-k)}r_Y^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}r_Y^{(-k)} \\ + r_\alpha^{(-k)}r_Z^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}r_Z^{(-k)} + r_Y^{(-k)}r_Z^{(-k)} = o_P(N^{-1/2}) .\end{aligned} \tag{25}$$

这里，$r_\alpha^{(-k)}$和 $r_\beta^{(-k)}$ 分别表示 α^* 和 β^*的 L^2（P）范数估计误差，其定义与（23）中的估计误差类似。（25）的推导见补充材料A.3。在此参数化下，要求 $r_\alpha^{(-k)}$达到 o_P（$N^{-1/4}$）速率，而对另外三个误差项 $r_\beta^{(-k)}$、$r_Y^{(-k)}$ 和 $r_Z^{(-k)}$ 的要求较弱。具体而言，只需（25）中的六个交叉乘积误差为 o_P（$N^{-1/2}$），而不必要求$r_\beta^{(-k)}$、$r_Y^{(-k)}$ 和 $r_Z^{(-k)}$ 各自都为 o_P（$N^{-1/4}$）。当所有干扰函数均为参数化设定时，（25）意味着 α 的工作模型必须设定正确，而另外三个工作模型（β、f_Y和 f_Z）中只需两个设定正确。值得注意的是，为了保证估计量的渐近正态性，Sun 等（2018）和 Liu等（2020）要求 α 和 f_Z 均设定正确，而 β 或 f_Y 中只需一个设定正确；然而，实际上可以放宽对 f_Z 设定正确的要求。

相比之下，在Sun 等人（2026）的参数化下，与(A7)平行的条件采取如下形式

$$\begin{aligned}\{r_\alpha^{(-k)}\}^2 + \{r_\beta^{(-k)}\}^2 + r_\alpha^{(-k)}r_\beta^{(-k)} + r_\alpha^{(-k)}r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}r_{Y^{(0)}}^{(-k)} \\ + r_\alpha^{(-k)}r_Z^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}r_Z^{(-k)} + r_{Y^{(0)}}^{(-k)}r_Z^{(-k)} = o_P(N^{-1/2}) ,\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $r_{Y^{(0)}}^{(-k)}$ 表示 $L^2(P)$ 的 $f_{Y^{(0)}}^*$ 估计误差；详见补充材料 A.3，其中对式（26）进行了详细推导。与前一种情况不同，该条件要求 $r_\alpha^{(-k)}$和 $r_\beta^{(-k)}$ 均达到 $o_P(N^{-1/4})$ 速率，而对 $r_{Y^{(0)}}^{(-k)}$和 $r_Z^{(-k)}$ 的要求则较弱。具体而言，只需式（26）中的六个交叉乘积项以 $o_P(N^{-1/2})$速率收敛，无需

$r_{Y^{(0)}}^{(-k)}$ 和 $r_Z^{(-k)}$ 本身达到 $o_P(N^{-1/4})$ 速率。因此，采用参数估计时，工作模型 α 和 β（以及由此得到的扩展倾向得分模型 π，见式（1））必须正确设定，而 $f_{Y^{(0)}}$ 或 f_Z 只需其中一个正确设定。

尽管这三种参数化所需的条件存在显著差异并不令人意外，但在实证评估必要条件时，我们的方法具有显著的实践优势。为说明这一点，考虑所有干扰函数均以参数方式估计的情形。其他研究者提出的参数化要求 α被正确设定；然而， α 是一个无法直接观测的反事实量，因此很难实证评估拟合优度。相比之下，我们的参数化仅依赖于由观测数据推导出的密度作为模型参数，从而避免了这一问题。原则上，这使得拟合优度可以通过标准方法直接评估，也便于完全依据观测数据选择合适的参数模型。此外，在采用自适应非参数方法或机器学习方法时，我们的方法允许对干扰函数进行标准的调参和正则化。这些特点共同凸显了我们参数化方法的实践优势。

6 证伪含义

尽管许多关键的工具变量假设（例如单调性（Angrist 等人，1996））无法直接验证，但它们往往会导出可被观测数据证伪的条件（Huber 和 Mellace，2015；Kitagawa，2015；Mourifié 和 Wan，2017；Keele 等人，2019；Danieli 等人，2025年）。换言之，这些假设虽无法被证明为真，却可以通过实证检验予以证伪。这些可证伪含义提供了一种实用的诊断工具；具体而言，如果发现可证伪含义遭到违反，那么对于手头的数据，工具变量方法很可能无效，因为其背后的工具变量假设已被证伪。反之，如果这些含义成立，则工具变量方法并未受到有力反驳，这为工具变量模型的可信度提供了支持性证据。因此，研究者通过关注可证伪含义，可以系统地评估工具变量假设的合理性，并增强分析的稳健性。

受这一原则的启发，我们研究在假设 (IV1)-(IV4)下，logit可分工具变量模型的可证伪性。这是此前依赖相同工具变量假设的研究大多忽视的一个重要方面（Sun等，2018年；Liu 等，2020年；Sun等，2026）。值得注意的是，logit可分工具变量模型蕴含可证伪的推论，具体形式化如下定理：

定理 6.1. 假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 均成立。那么，对于所有 $y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$ 和 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，以下结果成立：

$$\frac{f^*(Y=y, A=0 \,|\, Z=1, \boldsymbol{X}) - f^*(Y=y, A=0 \,|\, Z=0, \boldsymbol{X})}{f^*(A=0 \,|\, Z=1, \boldsymbol{X}) - f^*(A=0 \,|\, Z=0, \boldsymbol{X})} \geq 0 \ . \tag{27}$$

定理6.1 为构造工具变量模型的证伪检验提供了依据。具体而言，如果对于某个 $(y, \boldsymbol{X})$，条件（27）不成立，那么至少有一项工具变量假设必定不成立

在假设 (A1) 和 (A2)成立的条件下。关于证伪检验实施细节的说明见补充材料A.5。

条件（27）与 Kitagawa （2015）的研究结果密切相关。该研究考察了在 Angrist 等人 （1996）的单调性假设下，工具变量模型可被证伪的推论。为简洁起见，省略协变量后，（27）可表示为

$$\begin{aligned} &\text{if } f^*(A=1\,|\,Z=0) > f^*(A=1\,|\,Z=1), \\ &\qquad \text{then } f^*(Y=y, A=0\,|\,Z=1) \geq f^*(Y=y, A=0\,|\,Z=0)\ ; \\ &\text{if } f^*(A=1\,|\,Z=0) < f^*(A=1\,|\,Z=1), \\ &\qquad \text{then } f^*(Y=y, A=0\,|\,Z=0) \geq f^*(Y=y, A=0\,|\,Z=1)\ . \end{aligned} \tag{28}$$

相比之下，Kitagawa （2015）中的条件可写为

$$\begin{aligned} &f^*(Y=y, A=1\,|\,Z=1) \geq f^*(Y=y, A=1\,|\,Z=0)\ , \\ &f^*(Y=y, A=0\,|\,Z=0) \geq f^*(Y=y, A=0\,|\,Z=1)\ . \end{aligned} \tag{29}$$

（28）和（29）都对给定 Z 时（Y， A）的联合分布施加了限制。然而，（28）仅涉及 $A=0$ 情形，而（29）则对 $A=0$ 和 $A=1$ 两种情形都施加了约束。此外，在（28）中，f（Y，$A=0\,|\,Z$）的不等式方向取决于观测到的 A 与 Z 之间的关联。相比之下，在（29）中，对于 $A=0$ 情形，只有 f^*（$Y=y$， $A=0\,|\,Z=0$） $\geq f^*$（$Y=y$， $A=0\,|\,Z=1$）这一情形是可能的。这种差异源于我们的工具变量框架并未对 A 与 Z 之间的关系施加方向性限制，而单调性假设则施加了这种限制。

7 模拟

我们进行了模拟研究，以评估所提出估计量的有限样本表现。我们考虑了两个数据生成过程（DGP），一个具有连续型结局，另一个具有二元结局。对于每个个体，我们生成一个三维的处理前协变量向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ X_3,\ X_3)^\intercal$，其中每个分量均独立地从标准正态分布中抽取。令 $W=\sum_{j=1}^{3} X_j$。随后根据$Z \sim \mathsf{Ber}(\mathsf{expit}(0.1W))$生成工具变量 Z，其中 $\mathsf{expit}(v)=\{1+\exp(-v)\}^{-1}$。连续型和二元潜在结局的生成方式如下：

$$\begin{aligned} &\text{Continuous } Y\text{:} && Y^{(0)} \sim N(0.1W, 1)\ , && Y^{(1)} \sim N(1+0.1W, 0.25^2)\ , \\ &\text{Binary } Y\text{:} && Y^{(0)} \sim \mathrm{Ber}(\mathrm{expit}(0.2W-0.25))\ , && Y^{(1)} \sim \mathrm{Ber}(\mathrm{expit}(0.2W+0.25))\ . \end{aligned}$$

最后，处理 A 由 $A\,|\,\{Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X}\} \sim \mathsf{Ber}(\mathsf{expit}(\log\ \alpha^*(Y_{(0)}\, \boldsymbol{X}) + \log\ \beta^*(Z, \boldsymbol{X})))$; 此处，$\log\ \beta^*(z, \boldsymbol{X}) = -2+4z+0.1W$，且 $\log\ \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) = (0.4+0.05W)\mathfrak{a}^*(y)$。函数 $\mathfrak{a}^*$ 为

根据结果变量类型指定如下：

$$\begin{aligned} &\text{Continuous } Y\text{:} && \mathfrak{a}^*(y) = \{1-(y-1)^{-2}\}\mathbb{1}\{y \notin (0,2)\} + y(y-2)\mathbb{1}\{y \in [0,2]\}\ , \\ &\text{Binary } Y\text{:} && \mathfrak{a}^*(y) = 2y\ . \end{aligned}$$

连续型和二元结局数据生成过程对应的平均处理效应（ATT）分别为 1 和 0.082。

对于每个数据生成过程，我们生成了 $N \in \{1000、2000、4000\}$ 个研究单位。基于这些个体，按照章节 $\hat{\tau}$ 5 中所述的程序，得到所提出的估计量。对于推断，我们利用定理 5.1 的结果构造了 95% Wald型置信区间。针对每个 N 值，基于 1000 次重复评估所提出的估计量及相应置信区间的表现。为减轻随机样本拆分导致的变异，我们采用了基于三次交叉拟合程序重复的中位数调整；详情见补充材料 A.4。

作为竞争估计量，我们考虑了以下三种：

(i) $\hat{\tau}_{\text{2SLS}}$：A 在将 Y 对（A，$\boldsymbol{X}$）进行线性回归时的系数，其中 A 由将 A 对（Z，$\boldsymbol{X}$）进行回归得到。(ii) $\hat{\tau}_{\text{lgn}}$：在无未测量混杂假设下，基于 ATT 的有效影响函数（EIF）的估计量（Hahn，1998），并将（Z，$\boldsymbol{X}$）视为处理前协变量。(iii) $\hat{\tau}_{\text{LM}}$：在线性回归模型中，将 Y对（A，Z，$\boldsymbol{X}$）进行回归所得的 A 系数，同样将（Z，$\boldsymbol{X}$）视为处理前协变量。

第一种竞争方法 $\hat{\tau}_{\text{2SLS}}$通常称为两阶段最小二乘法（2SLS）估计量。之所以纳入该方法，是因为它是一种应用广泛的工具变量方法，能够处理潜在的未测量混杂。然而，该方法依赖线性假设才能保证一致性，因此在我们的数据生成过程中，可能会产生有偏的平均处理效应（ATT）估计值。另两种竞争方法 $\hat{\tau}_{\text{lgn}}$ 和 $\hat{\tau}_{\text{LM}}$无法处理潜在的未测量混杂，因此预期表现较差。对于 $\hat{\tau}_{\text{lgn}}$，我们还实施了一个交叉拟合程序，其做法与拟议估计量所用的程序类似$\hat{\tau}$；有关实施细节，请参见补充材料A.7 。

图 2 的上方面板总结了估计量的经验分布。在连续型和二元 Y 设定下，所提出的估计量 $\hat{\tau}$ 在所有样本量 N下均表现出可忽略的偏差，且变异性随 N 增大而减小。相比之下，竞争估计量显示出明显偏差，这要么源于模型设定错误，要么源于未能考虑潜在的未测量混杂。下方面板给出了 $\hat{\tau}$的数值摘要。与图形结果一致，两项标准误估计均随 N 增大而减小，且量级相当。经验覆盖率接近名义95%水平。总体而言，模拟结果表明，所提出估计量 $\hat{\tau}$ 的有限样本表现与定理 5.1 所确立的渐近性质相一致。

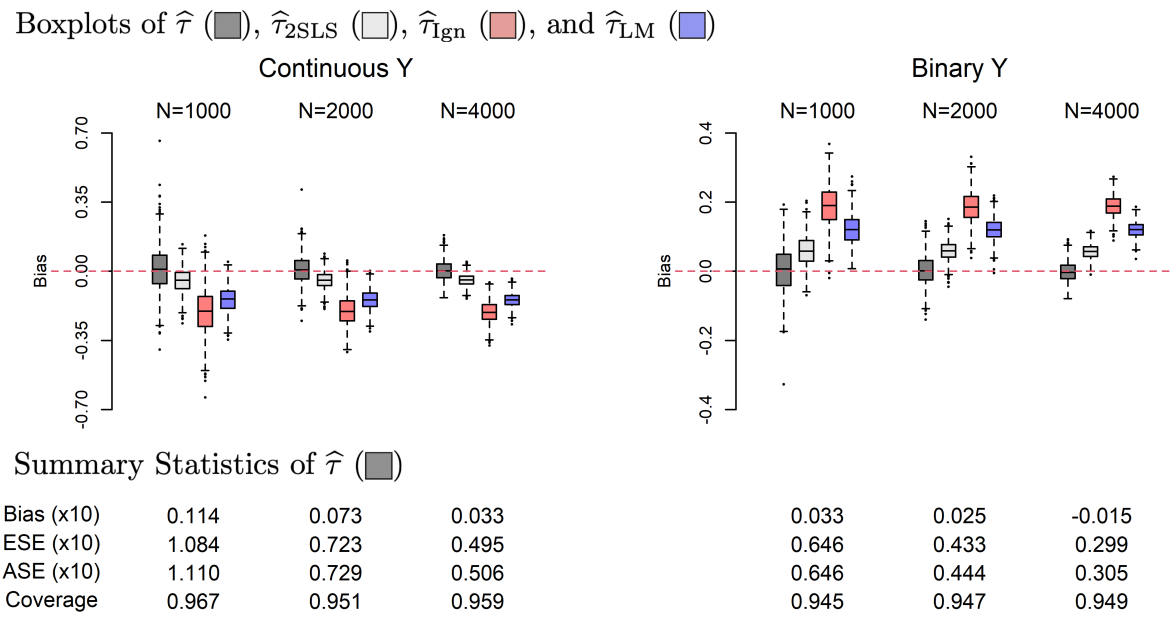

图2： 模拟结果的图形摘要。左、右面板分别对应具有连续型和二元 Y 的数据生成过程。上方面板中的箱线图展示了各估计量在样本量为 $N \in \{1000, 2000, 4000\}$ 时的偏差。下方面板给出了 $\hat{\tau}$ 的数值摘要。每行依次展示经验偏差、经验标准误（ESE）、基于所提出的方差估计量计算的渐近标准误（ASE），以及使用 ASE 计算的 95% 置信区间的经验覆盖率。偏差和标准误均放大 10 倍。

8 应用

我们将所提出的方法应用于一项基于 Job Corps 研究（Scho- chet 等人，2001，2008）的实际应用。Job Corps 由美国劳工部管理，是美国面向弱势青年规模最大的职业培训项目。截至2023年，该项目已服务超过两百万名参与者，并继续每年在全国各地的中心为四万多名年轻人提供支持（就业与培训管理局，2025年；Job Corps，2025年）。该项目提供强化职业培训、学术教育以及一系列旨在改善就业结果的支持服务。鉴于其规模和政策重要性，人们一直持续关注 Job Corps 参与与随后劳动力市场结果之间的关系。这方面最突出的努力是全国 Job Corps 研究，这是一项于2001年开展的具有全国代表性的随机实验（Schochet 等人，2001，2008）。尽管该研究提供了丰富的人口统计数据，但人格特质和潜在特征等未观测因素很可能同时影响项目参与和结果，从而充当未测量的混杂因素。为解决这一问题，许多研究将项目组的随机分配用作工具变量（Schochet 等人，2001，2008；Blanco 等人，2013；Strittmatter，2019；Liu 等人，2025年）。我们下文详述的分析可视为这些工作的扩展，是在不同的工具变量假设下进行的，具体为（IV4）。

我们使用了来自 `causalweight`R程序包（Bodory 等人，2024）的数据集，其中包含

$N = 9240$ 名个体。治疗前协变量 $\boldsymbol{X}$ 包括性别、年龄、种族、族裔、教育、英语母语、同居或婚姻状况、子女状况以及既往工作经验。候选工具变量 $Z \in \{0, 1\}$表示随机分配至项目组（$Z = 1$）或对照组（$Z = 0$）。分配至项目组的个体有资格参与 Job Corps 项目，而对照组个体在三年内不得参加 Job Corps，但可以参加其他教育或职业培训项目。治疗接受 $A \in \{0, 1\}$定义为在随机分配后的两年内实际参与任何教育或职业培训项目（Job Corps 或其他项目），其中 $A = 1$表示参与，$A = 0$ 表示未参与。结果变量 $Y \in [0, 52]$为随机分配四年后测量的工作周数。

在这一背景下，候选工具变量的有效性 Z 可以如下论证。首先，(IV1)似乎是合理的，因为随机分配 Job Corps 资格对工作周数的影响，预计只会通过项目参与间接产生。其次，(IV2) 成立，因为 Z是随机分配的。最后，(IV3) 有充分依据，因为根据研究设计，被分配至项目组会大幅提高 Job Corps 入学的可能性，且这一点得到了实证验证；详情见补充材料 A.8。因此，Z 可以合理地用作本分析的有效工具变量。

我们框架的关键假设(IV4)可依据第2.3节所述的生成模型加以论证。具体而言，如果每个人通过比较净效用——感知结果减去成本再加上个体特异性误差——来决定是否参与教育或职业培训，那么这一选择机制便与(IV4)一致。因此，要证明(IV4) 的合理性，只需说明生成模型的结构性假设是合理的，具体如下。

首先，在 Job Corps 的背景下，未观测特征 U 可能代表内在动机、职业抱负或学习能力等潜在特质。给定 U，模型将潜在结果定义为 $Y(a) = h_a(U, \boldsymbol{X})$，并假设其关于 U 严格单调。这一假设是合理的，因为动机或能力倾向较高通常会带来更高的劳动力市场回报。模型还纳入了 $h_a(U, \boldsymbol{X})$，表示个人对自身潜在结果的主观信念。关键的是，h_a 可以与真实生产函数 h_a 不同，且不要求单调性，这反映了自我评估可能并不准确。进一步而言，$\bar{}$ 假设随机分配 Job Corps 资格不会影响潜在结果或个人的自我评估也是合理的，这支持 h_a 和 $\bar{h}_a$ 均独立于 Z。

$\bar{}$

模型的另一个关键组成部分是成本函数 $c_a(Z, \boldsymbol{X})$，它表示在给定 $(Z, \boldsymbol{X})$ 的条件下，参与 ($a = 1$) 或不参与 ($a = 0$) 教育或职业培训项目的成本。在 Job Corps 的背景下，该成本可以解释为参与项目的结构性障碍，例如行政要求、资格规则或项目认知。基于这一解释，对于 Job Corps 研究而言，c_a 与 U 独立是合理的，因为个人的内在动机或能力倾向可能不会直接改变这些结构性成本。该模型还假设这一成本对工具变量的反应存在差异，即 $c_1(1, \boldsymbol{X}) - c_1(0, \boldsymbol{X}) \neq c_0(1, \boldsymbol{X})$

$\bar{}$

$c_0(0, \boldsymbol{X})$。这一条件与研究设计一致。请注意，被分配到项目组 ($Z = 1$) 显著降低了参与成本，因为这些人有资格参加 Job Corps。相反，被分配到对照组 ($Z = 0$) 会对 Job Corps 入学施加三年禁令，迫使个人在希望参与时选择替代项目，因此面临额外障碍。因此，Job Corps 资格分配很可能大幅降低了参与成本，即 $c_1(1, \boldsymbol{X}) \ll c_1(0, \boldsymbol{X})$，而不参与的成本对两组而言保持相近，即 $c_0(1, \boldsymbol{X}) \approx c_0(0, \boldsymbol{X})$。这种不对称性为对成本函数施加所要求的限制提供了依据。

在线性效用模型（5）下，合理的假设是，若个人参与教育或职业培训项目，他们预期会获得更好的劳动力市场结果，这意味着，$_1 - b_{h,\ 0} > 0$。与此同时，成本部分的系数预计满足 $b_c \equiv b_{c,\ 1} - b_{c,\ 0} \ll 0$，这反映了上述参与成本的不对称性。因此，比例 $|b_h/b_c|$可解释为：为抵消缺乏 Job Corps 资格的影响、达到相同的项目参与可能性，所需增加的动机或能力倾向。尽管如此，线性效用模型排除了边际收益递减：在动机水平较高时，额外自我激励对参与的边际影响可能会减弱。由于我们的生成模型允许采用非线性效用函数，因此可以考虑更灵活的设定来刻画这些细致的行为反应，不过本文不讨论此类扩展。综合来看，这些要素为生成模型提供了清晰的依据和解释。

我们使用 Job Corps 研究的数据，估计了随机分配后两年内参与教育或职业培训对四年后工作周数的平均处理效应（ATT）。与模拟研究的做法一致，我们比较了四种估计量：$\hat{\tau}$，$\hat{\tau}_{\text{2SLS}}$，$\hat{\tau}_{\text{Ign}}$和 $\hat{\tau}_{\text{LM}}$。对于 $\hat{\tau}$ 和 $\hat{\tau}_{\text{Ign}}$，我们通过重复进行 200 次交叉拟合来应用中位数调整；详情见补充材料A.4。我们还对支持条件(A2) 以及定理6.1中的证伪含义进行了实证评估。两项条件似乎都成立，这为下文所示基于 $\hat{\tau}$ 的结果的有效性提供了进一步支持。更多信息见补充材料A.8。

表1 报告了基于四种竞争估计量的 ATT 估计值。首先，我们的估计量 $\hat{\tau}$表明，接受教育或职业培训使参与者的年工作时间增加了 15.49 周，且该效应在 5% 的水平上具有统计显著性。与另一种工具变量估计量 $\hat{\tau}_{\text{2SLS}}$相比，我们的估计量得出的效应略大。这一差异可能是因为这两种估计量依赖于不同的工具变量假设，而两阶段最小二乘法要求满足线性假设和同质效应。尽管如此，这些估计值之间并无显著差异，因为每个估计值都落在另一个估计值的 95% 置信区间内。我们还发现，在无未测量混杂假设下构建的两种估计量 $\hat{\tau}_{\text{Ign}}$ 和 $\hat{\tau}_{\text{LM}}$，其效应大小明显小于两种基于工具变量的估计量。这一巨大差异表明，未测量混杂导致的偏差可能相当显著。

在补充材料 A.8中，我们进一步使用工具变量方法，分析了工作周分布第一、第二和第三四分位数处的参与分位数处理效应。结果显示，这三个分位数处理效应在 5% 的显著性水平上均显著为正，表明参与

估计量	$\widehat{\tau}$	$\widehat{\tau}_{\text{2SLS}}$	$\widehat{\tau}_{\text{Ign}}$	$\widehat{\tau}_{\text{LM}}$
估计值	15.49	11.23	2.58	2.44
ASE	4.88	2.62	0.44	0.43
95%置信区间	(5.92,25.05)	(6.09,16.36)	(1.71,3.45)	(1.61,3.28)

表 1：Job Corps 研究的分析结果。数值以每年周数为单位。

提高了整个分布范围内的工作时间。结合平均处理效应（ATT）的结果，这些发现表明，教育或职业培训对参与者的工作时间具有持续的正向影响，无论是从平均水平来看，还是从整个分布来看。

9 结语

本文聚焦于满足 logit 可分离处理机制假设(IV4)的工具变量框架，也称为可分离二元处理选择模型。我们首先提出了一种变分独立参数化，该参数化仅依赖于可从观测数据中直接获得的量，不涉及反事实量。随后，我们刻画了模型$\mathcal{M}$中平均处理效应（ATT）的全部影响函数，其中所有干扰函数先验上不受限制；并证明，由于工具变量为二元变量，该模型存在唯一的闭式表示，因此该影响函数就是有效影响函数。基于这一结果，我们构造了一个基于 EIF 的估计量；只要部分（但不一定是全部）干扰函数以足够快的速率估计，该估计量便是一致、渐近正态且半参数有效的。我们还为所研究的工具变量框架提出了一个生成模型，并推导出其可证伪性含义。最后，我们通过模拟研究验证了所提出估计量的理论性质，并将该方法应用于一项真实世界分析，评估教育或职业培训对劳动力市场结果的影响。

尽管本文关注的目标估计量是平均处理效应（ATT），但我们的框架可以无缝扩展到更广泛的目标估计量类别和其他情形，而无需施加参数假设。首先，我们的方法可以通过扩展 Berger 和 Boos (1994 年) 以及 Lee 等人 (2025 年) 的方法，适用于推断非线性效应，例如分位数处理效应（QTT）。其次，logit可分工具变量模型可以推广到推断定义于全体个体的处理效应，例如平均处理效应，而不局限于受处理个体的因果效应。第三，该模型可以适用于存在非随机缺失机制的缺失数据情形，从而能够对受不可忽略缺失影响的结果进行推断。有关这些扩展的详细说明，请参阅补充材料 A.6。

尽管本文主要聚焦于典型的二元工具变量情形，但若干结果很容易推广到一般工具变量。具体而言，定理4.1 适用于一般 Z；然而，由于闭式解并不唯一，且反事实分布中包含多层嵌套依赖关系，实际求解（20）中的积分方程以处理一般 Z 颇具挑战。尽管如此，对于类别型工具变量，我们给出了影响函数的闭式表达式。此外，只需对不动点方程作少量修改，我们在章节3.2 中提出的新参数化仍适用于一般 Z 。

这些结果详见补充材料A.6。尽管如此，要对一般 Z 进行有效的统计推断，仍需进一步的技术开发，这远超本文的讨论范围。

当前工具变量框架下仍有若干未解决的问题。首先，本文仅关注二元处理；将这些方法扩展到更一般的处理形式，是未来研究的一个重要方向。其次，将该框架扩展到观察时变协变量、工具变量、处理和结果变量的纵向情境，也值得探讨。最后，开发更多诊断程序，例如用于评估 logit 可分离处理机制违反情况的敏感性分析方法（IV4），也是未来研究的一个重要方向。我们将在其他研究中继续探索这些方向。

补充材料

本文档包含论文《可分离二元处理选择模型下基于工具变量的非参数推断》的补充材料。章节A 提供了补充主文的更多细节和结果。章节B 列出了本文档中使用的引理。章节C 包含主文中各定理的证明。

A 主文的详细内容

A.1 生成模型的详细内容

A.1.1 验证 (IV1)-(IV4) 在生成模型下

我们提供代数细节，以说明主文第 2.3 章节中的生成模型满足(IV1)-(IV4)。

首先，(IV1) 显然成立，因为 $Y^{(a)}$ 不依赖于 Z的取值。
其次，(IV2)可证明如下：

$$U \perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X} \quad \Rightarrow \quad h_a(U, \boldsymbol{X}) \perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X} \quad \Rightarrow \quad Y^{(a)} \perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X} \ .$$

第三，我们验证 (IV4)。令 $c(Z, \boldsymbol{X}) = c_1(Z, \boldsymbol{X}) - c_0(Z, \boldsymbol{X})$ 和 $h(\overline{U}, \boldsymbol{X}) = h_1(\overline{U}, \boldsymbol{X}) - h_0(\overline{U}, \boldsymbol{X})$，且 $\epsilon = \epsilon_0 - \epsilon_1$。众所周知，$\epsilon \sim$ 服从 Logistic(0, 1)，其中 Logistic(m, s) 表示位置参数为 m 、尺度参数为 s 的逻辑斯蒂分布。由于对于每个 $\boldsymbol{X}$，$h_a(U, \boldsymbol{X})$ 关于 U 单调，因此存在逆函数$h_a^{-1}(\cdot\ \boldsymbol{X})$，使得 $U = h_a^{-1}($ $Y(a)\boldsymbol{X})$。因此，处理分配可表示为

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{1}(\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_0) \\ &= \mathbb{1}\{\overline{h}_1(U, \boldsymbol{X}) - c_1(Z, \boldsymbol{X}) + \epsilon_1 \geq \overline{h}_0(U, \boldsymbol{X}) - c_0(Z, \boldsymbol{X}) + \epsilon_0\} \\ &= \mathbb{1}\{\overline{h}(U, \boldsymbol{X}) - c(Z, \boldsymbol{X}) \geq \epsilon\} \\ &= \mathbb{1}\{\underbrace{\overline{h}(h_0^{-1}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}), \boldsymbol{X})}_{\equiv \lambda(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})} - c(Z, \boldsymbol{X}) \geq \epsilon\} \ . \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} & \Pr\{A = 1 \mid Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}\} = \frac{\exp\{\lambda(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - c(Z, \boldsymbol{X})\}}{1 + \exp\{\lambda(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - c(Z, \boldsymbol{X})\}} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\Pr\{A = 1 \mid Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}\}}{\Pr\{A = 0 \mid Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}\}} = \exp\{\lambda(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\} \exp\{-c(Z, \boldsymbol{X})\} \ . \end{aligned}$$

因此，取 $\exp\{\lambda(Y(0)\,\boldsymbol{X})\}$ 和 $\exp\{-c(Z, \boldsymbol{X})\}$ 为 $\alpha(Y(0)\,\boldsymbol{X})$ 和 $\beta(Z, \boldsymbol{X})$，分别可得 (IV4) 成立。

最后，我们证明 (IV3) 得以满足。根据假设，对于某个 $z \neq z'$，$c(z, \boldsymbol{X}) \neq c(z', \boldsymbol{X})$，这进一步意味着 $\beta(z, \boldsymbol{X}) \neq \beta(z', \boldsymbol{X})$。然后，根据引理 B.2 可知，对于每个 $\boldsymbol{X}$，存在某个 $z \neq z'$，使得 $\Pr(A = 1 \mid Z = z, \boldsymbol{X}) \neq \Pr(A = 1 \mid Z = z', \boldsymbol{X})$，因此 $A \not\perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X}$。
因此，第 2.3 节中的生成模型 (IV1)-(IV4) 均成立。

A.1.2 存在交互项时的不可识别性

本节将详细说明，为什么生成模型中存在交互项通常会使模型无法识别。Liu 等人Liu 等人(2020年)的附录B中可以找到类似的论证；为求完整，我们在此重述。假设 $\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0$ 等于 $\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0 = h(U, \boldsymbol{X}) - c(Z, \boldsymbol{X}) + \imath(U, Z, \boldsymbol{X}) - \epsilon$。于是，我们得到

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbb{1}(\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0 > 0) \\
&= \mathbb{1}\big\{\overline{h}(U, \boldsymbol{X}) - c(Z, \boldsymbol{X}) + \imath(U, Z, \boldsymbol{X}) \geq \epsilon\big\} \\
&= \mathbb{1}\big\{\underbrace{\overline{h}(h_0^{-1}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}), \boldsymbol{X})}_{\equiv \lambda(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})} - c(Z, \boldsymbol{X}) + \underbrace{\imath(h_0^{-1}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}), Z, \boldsymbol{X})}_{\equiv \jmath(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} \geq \epsilon\big\} \ .
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\log \frac{\Pr\left\{A = 1 \,|\, Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}\right\}}{\Pr\left\{A = 0 \,|\, Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}\right\}} = \lambda(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - c(Z, \boldsymbol{X}) + \jmath(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \ .
$$

为简便起见，假设 $Y^{(0)}$ 是二元变量，并省略 $\boldsymbol{X}$ 。那么，存在一组参数 $\theta \equiv (\theta_1, \ldots\ldots, \theta_5)$，使得

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left\{A = 0 \,|\, Y^{(0)}, Z; \theta\right\} = \frac{1}{1 + \exp\{\theta_1 + \theta_2 Z + \theta_3 Y^{(0)} + \theta_4 Z Y^{(0)}\}} \ , \\
&\Pr\left\{Y^{(0)} = 1; \theta\right\} = \exp(\theta_5) \ .
\end{aligned}
$$

条件 1：Liu 等人（2020年）指出，联合分布 $(Y_{(0)} A, Z)$ 可识别，当且仅当

$$
\frac{\Pr\{A = 0 \,|\, Y^{(0)}, Z; \theta\}}{\Pr\{A = 0 \,|\, Y^{(0)}, Z; \theta'\}} \neq \frac{\Pr\{Y^{(0)}; \theta'\}}{\Pr\{Y^{(0)}; \theta\}} \ , \quad \forall \theta \neq \theta' \ . \tag{S.1}
$$

为说明识别失败，我们给出不同的参数向量 θ 和 θ'，它们违反了（S.1）。考虑：

$$
\theta = (0, \log 6, \log 11, 0, \log 0.4), \qquad \theta' = (\log(5/3), \log 5, \log 3, \log 1.3, \log 0.2).
$$

直接的代数运算证实，这些设定会产生相同的观测数据分布，从而违反了（S.1）中的条件。这个例子表明，非可分扩展倾向评分模型使联合分布（$Y_{(0)} A$, Z）不可识别。

A.2 干扰函数估计的详细内容

我们补充介绍第5节中省略的细节。首先，我们介绍 Super Learner 方法（van der Laan等人，2007年）中包含的基础机器学习算法。我们的实现包括以下方法及其对应的 R 包：通过 `glm` 进行线性回归，通过 `glmnet` 进行 Lasso／弹性网络（Friedman等人，2010），通过 `earth` （Friedman，1991）和 `polspline` （Kooperberg，2020年）进行样条拟合，通过 `gam` （Hastie和Tibshirani，1986）进行广义可加模型拟合，通过 `xgboost` （Chen和Guestrin，2016）和`gbm` （Greenwell等人，2019）进行提升法，通过 `ranger` （Wright和Ziegler，2017）进行随机森林拟合，以及通过`RSNNS`（Bergmeir和Benítez，2012）进行神经网络拟合。

接下来，对于固定的 $z \in \{0, 1\}$，使用核估计条件密度 $Y \,|\, (A = 0, Z = z, \boldsymbol{X})$

回归（Hall等人，2004）使用 npR程序包（Hayfield 和 Racine，2008），平滑样条（Gu，2014）使用 gss R程序包（Gu，2014），以及这两种方法的集成。下文将详细介绍集成过程。

令 $\widehat{f}_{\mathrm{np}|z}$ 和 $\widehat{f}_{\mathrm{gss}|z}$ 分别表示通过核回归和平滑样条获得的条件密度估计。对于权重 $w \in [0,1]$，集成密度估计定义为 $\widehat{f}_{w|z} = w\widehat{f}_{\mathrm{np}|z} + (1-w)\widehat{f}_{\mathrm{gss}|z}$。集成权重通过交叉验证选取，详情如下。令$\mathcal{I}_{\mathrm{val}}$表示一个验证集。在该验证集上，考虑以下两种评价指标：

(i) 均方预测误差（MSPE）：令 MSPE(w) 定义为

$$\mathrm{MSPE}(w) = \frac{1}{|\mathcal{I}_{\mathrm{val}}|} \sum_{i \in \mathcal{I}_{\mathrm{val}}} \mathbb{1}(A_i = 0, Z_i = z) \left\{ \begin{array}{l} \int \widehat{f}^2_{w|z}(Y = y \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}_i)\, dy \\ -2\widehat{f}_{w|z}(Y_i \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}_i) \end{array} \right\}.$$

该指标的依据是积分平方误差的一个著名近似。具体而言，对于真实密度 $f^*(V = v)$ 的一个$\widehat{\ }$密度估计 $\widehat{f}(V = v)$，有

$$\begin{aligned} &\int \left\{\widehat{f}(V = v) - f^*(V = v)\right\}^2 dv \\ &= \int \widehat{f}^2(V = v)\, dv - 2\int \widehat{f}(V = v) f^*(V = v)\, dv + \text{constant} \\ &\simeq \int \widehat{f}^2(V = v)\, dv - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \widehat{f}(V_i) + \text{constant} \quad \text{for } V_1, \ldots, V_N \overset{i.i.d.}{\sim} f^*(V = v) \end{aligned}$$

(ii) Kullback-Leibler 散度（KL）：令 KL(w) 定义为

$$\mathrm{KL}(w) = -\frac{1}{|\mathcal{I}_{\mathrm{val}}|} \sum_{i \in \mathcal{I}_{\mathrm{val}}} \mathbb{1}(A_i = 0, Z_i = z) \log \widehat{f}_{w|z}(Y_i \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}_i)\,.$$

令 w_{MSPE} 和 w_{KL} 分别表示在验证集上使 MSPE 和 KL 准则最小化的权重。在模拟研究和数据分析中，我们将最终的集成权重选为 $w_{\mathrm{ens}} = \widehat{\ }(w_{\mathrm{MSPE}} + w_{\mathrm{KL}})/2$。最终的集成密度估计为 $\widehat{f}_{\mathrm{ens}|z} = w_{\mathrm{ens}}\widehat{f}_{\mathrm{np}|z} + (1 - w_{\mathrm{ens}})\widehat{f}_{\mathrm{gss}|z}$。

最后，我们介绍密度比估计程序。我们采用无约束最小二乘重要性拟合（uLSIF）和 Kullback-Leibler 重要性估计程序（KLIEP）（Kanamori 等人，2009年；Nguyen 等人，2007；Sugiyama 等人，2007），这些方法已在 densratio 和densityratioR 包中实现（Makiyama，2019；Volker，2023）。下面简要回顾 uLSIF 和 KLIEP 方法。

首先，固定 $z \in \{0, 1\}$。相应地，定义 r^*_Y 为

$$r^*_Y(y, \boldsymbol{x}) = \frac{f^*(Y = y, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \,|\, A = 0, Z = 1 - z)}{f^*(Y = y, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \,|\, A = 0, Z = z)}\,.$$

注意，$r^*_Y(y, \boldsymbol{X})$ 与 $R^*_Y(y, \boldsymbol{x}) = f^*(Y = y \,|\, A = 0, Z = 1 - z, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})/f^*(Y = y \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$ 成比例，因此只需估计 r^*_Y。令 $\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}$ 表示用于估计的数据集，其中包含满足 $A = 0$ 的观测值；令 $\mathcal{I}_{\mathrm{Est},\, z}$ 表示其中满足 $(A = 0, Z = z)$ 的观测值构成的子集。

(i) KLIEP：KL 重要性估计程序的核心思想是，将 r^*_Y 定义为分子密度 $f^*(Y = y, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \,|\, A = 0, Z = 1 - z)$ 与以下密度之间 KL 散度的最小化者：

该密度由分母和密度比诱导，即 $f^*(Y=y,\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\,|\,A=0,\ Z=z)\cdot r_Y^*(y,\ \boldsymbol{x})$。因此，可以通过求解以下约束优化问题，得到 r_Y^* 的估计量，记为 $\widehat{r}_Y$：

$$\begin{aligned}\widehat{r}_Y &= \arg\max_{r\in\mathcal{H}} \mathbb{E}\big[\log\{r(Y,\boldsymbol{X})\}\,|\,A=0,Z=1-z\big]\\ &\text{subject to } \mathbb{E}\big\{r(Y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z=z\big\}=1\ ,\end{aligned}\tag{S.2}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是与高斯核 $(Y,\boldsymbol{X})$ 相关联的再生核希尔伯特空间（RKHS）$\mathcal{K}$。然后，KLIEP估计量 $\widehat{r}_{Y,\mathrm{KL}}$ 由（S.2）的经验对应形式得到，其形式为

$$\widehat{r}_{Y,\mathrm{KL}}(y,\boldsymbol{x})=\sum_{j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}}\widehat{\delta}_j\mathcal{K}\big((y,\boldsymbol{x}),(y_j,\boldsymbol{x}_j)\big)\ ;$$

其中，非负系数 $\widehat{\boldsymbol{\delta}}=\big\{\widehat{\delta}_j\big\}_{j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}}$ 由下式求得

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}=\arg\max_{\boldsymbol{\delta}}\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{\mathrm{Est},1-z}}\big\{\log\big(K_{11}\boldsymbol{\delta}\big)\big\}\ \text{subject to}\ \mathbb{P}_{\mathcal{I}_{\mathrm{Est},z}}\big(K_{01}\boldsymbol{\delta}\big)=1\ ,\quad \boldsymbol{\delta}\geq 0\ .$$

这里，$K_{zz'}$ 是 Gram 矩阵，其 (i,j)项为 $\mathcal{K}\big((y_i,\boldsymbol{x}_i),\ (y_j,\boldsymbol{x}_j)\big)$ 适用于 $i\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est},\ z}$ 以及 $j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est},\ z'\circ}$ （ii）uLSIF：我们可以使用平方损失代替 KL 散度。此时，（S.2）可表示为

$$\widehat{r}_Y=\arg\min_{r\in\mathcal{H}}\iint\big\{r(y,\boldsymbol{x})-r_Y^*(y,\boldsymbol{x})\big\}^2 f^*(Y=y,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\,|\,A=0,Z=z)\,d(y,\boldsymbol{x})\ .$$

该方程解的经验对应形式为

$$\widehat{r}_{Y,\mathrm{MSE}}(y,\boldsymbol{x})=\sum_{j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}}\widehat{\delta}_j\mathcal{K}\big((y,\boldsymbol{x}),(y_j,\boldsymbol{x}_j)\big)\ ;$$

其中，非负系数 $\widehat{\boldsymbol{\delta}}=\big\{\widehat{\delta}_j\big\}_{j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}}$ 通过求解以下包含 L_2-正则化项的优化问题得到：

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\delta}}&=\arg\min_{\boldsymbol{\delta}}\Big[\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{\mathrm{Est},z}}\big\{\big(K_{z\circ}\boldsymbol{\delta}\big)^2\big\}-2\mathbb{P}_{\mathcal{I}_{\mathrm{Est},1-z}}\big\{\big(K_{1-z\circ}\boldsymbol{\delta}\big)^2\big\}+\lambda\boldsymbol{\delta}^{\intercal}K_{\circ\circ}\boldsymbol{\delta}\Big]\ ,\\ K_{z\circ}&=\Big[\mathcal{K}\big((y_i,\boldsymbol{x}_i),(y_j,\boldsymbol{x}_j)\big)\Big]_{i\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est},z},\ j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}}\ ,K_{\circ\circ}=\Big[\mathcal{K}\big((y_i,\boldsymbol{x}_i),(y_j,\boldsymbol{x}_j)\big)\Big]_{i,j\in\mathcal{I}_{\mathrm{Est}}}\ ,\end{aligned}$$

其中，λ 是可通过交叉验证选取的正则化参数。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$一旦获得$\widehat{r}_{Y,\ \star}$对于 $\star\in\{\mathrm{KL},\ \mathrm{MSE}\}$，定义 $f_{\star|1-z}\equiv f_{\star|1-z}(Y=y\,|\,A=0,\ Z=1-z,\ \boldsymbol{X})$，其$\widehat{\ }$构造为与$\widehat{r}_{Y,\ \star}(y,\ \boldsymbol{X})f_{\mathrm{ens}|z}(Y=y\,|\,A=0,\ Z=z,\ \boldsymbol{X})$成比例的函数，并满足归一化约束 $\int\widehat{f}_{\star|1-z}(Y=y\,|\,A=0,\ Z=1-z,\ \boldsymbol{X})\,dy=1$。还可以进一步考虑这些$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$估计值的集成，例如 $f_{\mathrm{ens}|1-z}=w'_{\mathrm{ens}}f_{\mathrm{KL}|1-z}+(1-w'_{\mathrm{ens}})f_{\mathrm{MSE}|1-z}$，其中最优权重 w'_{ens}可用与 w_{ens}类似的方法确定。因此，条件密度比估计量可构造为

$$\widehat{R}_Y(y,\boldsymbol{x})=\frac{\widehat{f}_{\mathrm{ens}|1-z}(Y=y\,|\,A=0,Z=1-z,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})}{\widehat{f}_{\mathrm{ens}|z}(Y=y\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})}\ .$$

所有干扰函数估计量都需要选择超参数，包括机器学习算法中的调优参数、核回归和基于再生核希尔伯特空间的估计量中的带宽，以及正则化

参数。我们建议通过交叉验证来选择这些超参数。

A.3 不同参数化下的偏差结构

在本章节中，我们考察 Sun 等人(2018年)、Liu 等人(2020年) 以及 Sun 等人(2026) 提出的参数化下，ATT估计量的偏差结构。全文中，我们令 $\gamma(Z,\boldsymbol{X}) = f(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})/f(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})$ 表示给定 $(Z,\boldsymbol{X})$时的处理优势比。

我们的分析基于第 C.7 章中介绍的中间结果和符号，该章包含定理 5.1 的证明。如式（S.138）-（S.141）所示，ATT估计量的偏差可表征如下:

$$
\begin{aligned}
&N^{-1/2}\|\text{Bias of } \widehat{\tau}\| \\
&\lesssim \left\| \begin{array}{c} \widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) \\ -\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) \end{array} \right\|_{P,2} \times \left\| \mathbb{E}\left[\begin{array}{c} \{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\} \\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)}) \end{array} \middle| A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X} \right] \right\|_{P,2} \\
&\quad + \left\| \begin{array}{c} \widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) \\ -\beta^*(Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\|_{P,2} \times \left\| \mathbb{E}\left[\begin{array}{c} \{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\} \\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)}) \end{array} \middle| A=1,Z,\boldsymbol{X} \right] \right\|_{P,2} \\
&\quad + \left\| \begin{array}{c} \widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) \\ -\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) \end{array} \right\|_{P,2} \left\| \begin{array}{c} \widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) \\ -\beta^*(Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\|_{P,2} \\
&\quad + \left[\begin{array}{l} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{array} \right] \\
&\qquad \times \left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X}) - f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}. \qquad \text{(S.3)}
\end{aligned}
$$

注意，在式（S.139）中，我们将式（S.40）定义的归一化常数设为 $\mathcal{N}=1$。因此，只需在各自的参数化下表征上述 $L^2(P)$ 误差。全文中，我们施加标准的正则性条件，例如干扰函数及其估计值一致有界，以避免不必要的技术复杂性。

我们首先考虑Sun 等人 (2018年)和Liu 等人(2020年)的参数化，其中模型参数为 $\theta_{\text{LS}} \equiv \{f_Z \equiv f(Z\,|\,\boldsymbol{X})$ $f_Y \equiv f(Y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})$ $\alpha \equiv \alpha(Y_{(0)}\,\boldsymbol{X})\}$。

由（S.29），我们发现 $\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\ \boldsymbol{X})$ 等于

$$
\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) = \widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) \int \widehat{\alpha}^{(-k)}(y,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\,dy\,.
$$

因此，我们发现 γ^* 的估计误差的 $L^2(P)$-范数满足

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) - \gamma^*(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\
&\lesssim \left[\begin{array}{l} \left\|\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) - \beta^*(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) - \alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{array} \right]. \qquad \text{(S.4)}
\end{aligned}
$$

此外，（S.37）表明

$$
\|\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) - \gamma^*(Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2} \asymp \|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\,. \qquad \text{(S.5)}
$$

因此，结合（S.4）和（S.5），我们得到

$$\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\lesssim r_\alpha^{(-k)}+r_\beta^{(-k)}+r_Y^{(-k)}\ . \tag{S.6}$$

因此，式（S.48）中的收敛速率有界于

$$\begin{aligned}
&\left\|\ \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\ \middle|\ A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right\|_{P,2}\\
&\lesssim\left[\begin{array}{l}\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\end{array}\right]\\
&\overset{(S.6)}{\lesssim} r_\alpha^{(-k)}+r_\beta^{(-k)}+r_Y^{(-k)}\ .
\end{aligned}\tag{S.7}$$

此外，对于一致有界函数 v，我们有：

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};v)-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};v)\\
&=\frac{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{v\times\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}-\frac{\mathbb{E}\{v\times\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\mathbb{E}\{\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}\\
\Rightarrow\quad&\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};v)-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};v)\right\|_{P,2}\\
&\lesssim\left\|\begin{array}{l}\mathbb{E}\{v\times\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\\ -\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{v\times\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\mathbb{E}\{\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\end{array}\right\|_{P,2}\\
&\lesssim\left[\begin{array}{l}\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\end{array}\right]\ .
\end{aligned}$$

令 $v=\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}$，可得

$$\left\|\ \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\ \middle|\ A=1,Z,\boldsymbol{X}\right]\ \right\|_{P,2}\lesssim r_\alpha^{(-k)}+r_Y^{(-k)}\ . \tag{S.8}$$

结合式（S.3）-（S.8），可得

$$\begin{aligned}
&N^{-1/2}\|\text{Bias of }\widehat{\tau}\|\\
&\lesssim r_\alpha^{(-k)}\{r_\alpha^{(-k)}+r_\beta^{(-k)}+r_Y^{(-k)}\}+r_\beta^{(-k)}\{r_\alpha^{(-k)}+r_Y^{(-k)}\}\\
&\quad+\{r_\alpha^{(-k)}+r_\beta^{(-k)}+r_Y^{(-k)}\}r_Z^{(-k)}\\
&\lesssim\{r_\alpha^{(-k)}\}^2+r_\alpha^{(-k)}r_\beta^{(-k)}+r_\alpha^{(-k)}r_Y^{(-k)}+r_\beta^{(-k)}r_Y^{(-k)}\\
&\quad+r_\alpha^{(-k)}r_Z^{(-k)}+r_\beta^{(-k)}r_Z^{(-k)}+r_Y^{(-k)}r_Z^{(-k)}\ .
\end{aligned}$$

这证明了主文中的式（25）所述结果。

接下来，我们考虑 Sun 等人(2026) 的参数化，其中模型参数为 $\theta_{\text{SMW}}\equiv\{f_Z\equiv f(Z\,|\,\boldsymbol{X})\ f_{Y^{(0)}}\equiv f(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\ \alpha\equiv\alpha(Y^{(0)}\,\boldsymbol{X})\ \beta\equiv\beta(Z,\boldsymbol{X})\}$.

由（S.31），我们得到

$$f^*(Y=y,A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})=\frac{f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})}{1+\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})}$$

$$\Rightarrow \quad f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X}) = \int \frac{f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})}{1+\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})}\,dy\ .$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|^2 \\
&= \Big\| \int \frac{\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})}{1+\widehat{\alpha}^{(-k)}(y,\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})} - \frac{f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})}{1+\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})}\,dy \Big\|^2 \\
&\lesssim \int \left\| \begin{array}{l} \widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\{1+\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\} \\ -f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\{1+\widehat{\alpha}^{(-k)}(y,\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})\} \end{array} \right\|^2 dy \\
&\lesssim \int \left[\begin{array}{l} \big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\big\|^2 \\ +\big\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(y,\boldsymbol{X}) - \alpha^*(y,\boldsymbol{X})\big\|^2 \end{array} \right] f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\,dy \\
&\qquad + \big\|\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) - \beta^*(Z,\boldsymbol{X})\big\|^2\ .
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \lesssim r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_\alpha^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}\ . \tag{S.9}$$

同样，由（S.31），我们得到

$$\begin{aligned}
& f^*(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) = \frac{1}{f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})}\frac{f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})}{1+\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})} \\
\Rightarrow \quad & \big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\
& \lesssim \left[\begin{array}{l} \big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) - \alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X}) - \beta^*(Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \end{array} \right] \\
& \overset{\text{(S.9)}}{\lesssim} r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_\alpha^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}\ .
\end{aligned} \tag{S.10}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
& \Big\| \mathbb{E}\Big[\begin{array}{l} \{\mathcal{G}^{(0)} - \widehat{\omega}^{(-k)}\} \\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)}) \end{array} \Big| A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X} \Big] \Big\|_{P,2} \\
& \lesssim \left[\begin{array}{l} \big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \end{array} \right] \\
& \overset{\text{(S.9),(S.10)}}{\lesssim} r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_\alpha^{(-k)} + r_\beta^{(-k)}\ ,
\end{aligned} \tag{S.11}$$

and

$$\begin{aligned}
& \Big\| \mathbb{E}\Big[\begin{array}{l} \{\mathcal{G}^{(0)} - \widehat{\omega}^{(-k)}\} \\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)}) \end{array} \Big| A=1,Z,\boldsymbol{X} \Big] \Big\|_{P,2} \\
& \overset{\text{(S.8)}}{\lesssim} r_\alpha^{(-k)} + r_Y^{(-k)}
\end{aligned}$$

$$\overset{(S.10)}{\lesssim} r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_{\alpha}^{(-k)} + r_{\beta}^{(-k)} \ . \tag{S.12}$$

结合（S.3）、（S.9）-（S.12），我们得到

$$\begin{aligned}
&N^{-1/2}\big\|\text{Bias of } \widehat{\tau}\big\| \\
&\lesssim r_{\alpha}^{(-k)}\big\{r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_{\alpha}^{(-k)} + r_{\beta}^{(-k)}\big\} + r_{\beta}^{(-k)}\big\{r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_{\alpha}^{(-k)} + r_{\beta}^{(-k)}\big\} \\
&\quad + \big\{r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_{\alpha}^{(-k)} + r_{\beta}^{(-k)}\big\} r_{Z}^{(-k)} \\
&\lesssim \big\{r_{\alpha}^{(-k)}\big\}^2 + \big\{r_{\beta}^{(-k)}\big\}^2 \\
&\quad + r_{\alpha}^{(-k)} r_{\beta}^{(-k)} + r_{\alpha}^{(-k)} r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_{\beta}^{(-k)} r_{Y^{(0)}}^{(-k)} + r_{\alpha}^{(-k)} r_{Z}^{(-k)} + r_{\beta}^{(-k)} r_{Z}^{(-k)} + r_{Y^{(0)}}^{(-k)} r_{Z}^{(-k)} \ .
\end{aligned}$$

这证明了主文中的（26）式结果。

A.4 交叉拟合估计量的中位数调整

交叉拟合估计量取决于特定的样本分割，因此，如果某些分割样本不能代表整个数据集，就可能产生异常估计值。为解决这一问题，Chernozhukov等人(2018年) 提出对多个交叉拟合估计进行中位数调整。首先，对于 $s \in \{1, \ldots, S\}$，令$\widehat{\tau}_s$ 为第 s个交叉拟合估计，其对应的方差估计为 $\widehat{\sigma}_s^2$。那么，经中位数调整的交叉拟合估计及其方差估计定义如下：

$$\widehat{\tau}_{\text{median}} := \underset{s=1,\ldots,S}{\text{median}}\, \widehat{\tau}_s \ , \quad \widehat{\sigma}^2_{\text{median}} := \underset{s=1,\ldots,S}{\text{median}} \big\{\sigma_s^2 + (\widehat{\tau}_s - \widehat{\tau}_{\text{median}})^2\big\} \ .$$

这些估计对样本划分的具体实现更具稳健性。

A.5 证伪检验的详细内容

本节详细介绍第 6 节中提出的证伪检验。为简单起见，我们仅考虑二元 Z 的情况。证伪检验的构造与 Kitagawa(2015）的方法基本一致。

首先，定义

$$\begin{aligned}
&\kappa_0^*(A, Z, \boldsymbol{X}) \\
&= \frac{1 - A}{f^*(A = 0 \,|\, Z = 1, \boldsymbol{X}) - f^*(A = 0 \,|\, Z = 0, \boldsymbol{X})} \frac{Z - f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X})}{f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X})} \ .
\end{aligned}$$

对于一般函数 g，考虑表达式 $\mathbb{E}\big\{g(Y, \boldsymbol{X})\kappa_0^*(A, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}$。通过直接代数运算，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{ g(Y, \boldsymbol{X}) \frac{(1 - A)\mathbb{1}(Z = z)}{f^*(Z = z \,|\, \boldsymbol{X})} \,\middle|\, \boldsymbol{X} \right\} &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big\{g(Y, \boldsymbol{X})(1 - A) \,|\, Z = z, \boldsymbol{X}\big\} \,\big|\, \boldsymbol{X}\big] \\
&= \int g(y, \boldsymbol{X}) f^*(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X})\, dy \ .
\end{aligned}$$

因此，对于一般函数 g，我们有

$$\mathbb{E}\big\{g(Y, \boldsymbol{X})\kappa_0^*(A, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left\{ \frac{g(Y,\boldsymbol{X})(1-A)}{f^*(A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})} \frac{Z - f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})}{f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X}) f^*(Z=0\,|\,\boldsymbol{X})} \,\middle|\, \boldsymbol{X} \right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{ g(Y,\boldsymbol{X})(1-A) \frac{Z/f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X}) - (1-Z)/f^*(Z=0\,|\,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})} \,\middle|\, \boldsymbol{X} \right\} \\
&= \int g(y,\boldsymbol{X}) \frac{f^*(Y=y,A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(Y=y,A=0\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})}\, dy \ .
\end{aligned}
$$

因此，遵循Kitagawa (2015)，可以证明

$$
\begin{aligned}
&\frac{f^*(Y=y,A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(Y=y,A=0\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})} \geq 0 \\
&\text{if and only if} \quad \mathbb{E}\big\{ g(Y,\boldsymbol{X}) \kappa_0^*(A,Z,\boldsymbol{X}) \big\} \geq 0 \ , \quad \forall g \in \mathcal{G}_{\text{ind}} \ ,
\end{aligned}
$$

其中，$\mathcal{G}_{\text{ind}}$ 表示由$(Y,\boldsymbol{X})$支撑集内矩形集合的指示函数构成的类。

为检验原假设

$$
H_0 : \mathbb{E}\big\{ g(Y,\boldsymbol{X}) \kappa_0^*(A,Z,\boldsymbol{X}) \big\} \geq 0 \ , \quad \forall g \in \mathcal{G}_{\text{ind}} \ ,
$$

我们考虑一种方差加权的柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫型统计量，这是对 Kitagawa (2015提出的检验方法的修正。检验统计量定义如下:

$$
T_N = -\frac{1}{\sqrt{N}} \inf_{g \in \mathcal{G}_{\text{ind}}} \frac{\sum_{i=1}^N g(Y_i,\boldsymbol{X}_i) \widehat{\kappa}_0(A_i,Z_i,\boldsymbol{X}_i)}{\max(\xi, \widehat{\sigma}_0)} \ . \tag{S.13}
$$

这里，$\widehat{\kappa}_0$ 是 κ_0^*的估计值，$\widehat{\sigma}_0^2$ 是 $g(Y_i,\boldsymbol{X}_i)\widehat{\kappa}_0(A_i,Z_i,\boldsymbol{X}_i)$的样本方差，$\xi$ 是由研究者指定的正常数。按照 Kitagawa（2015）的做法，临界值通过自助法获得，并将$\widehat{\kappa}_0$ 视为固定值。具体而言，对于 $b \in \{1,\ldots,B\}$，其中 B 表示自助法重复次数，令 $\mathrm{I}^{(b)}$为从 $\mathrm{I} = \{1,\ldots,N\}$中抽取的第 b个自助法样本的索引集。 T_N的自助法对应量定义为

$$
T_N^{(b)} = -\frac{1}{\sqrt{N}} \inf_{g \in \mathcal{G}_{\text{ind}}} \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}^{(b)}} g(Y_i,\boldsymbol{X}_i)\widehat{\kappa}_0(A_i,Z_i,\boldsymbol{X}_i) - \sum_{i=1}^N g(Y_i,\boldsymbol{X}_i)\widehat{\kappa}_0(A_i,Z_i,\boldsymbol{X}_i)}{\max(\xi, \widehat{\sigma}_0^{(b)})} \ .
$$

若 T_N 超过 $T_{(1)N},\ldots,T_N^{(B)}$ 的经验分布的第 $100(1-c)$百分位数，则在显著性水平 c下拒绝原假设。

在实际应用中实施这一检验可能面临实际挑战。首先，计算$\mathcal{G}_{\text{ind}}$ 上的下确界颇具挑战，尤其当 Y 为连续型时。一种实用的解决方法是用有限子类近似$\mathcal{G}_{\text{ind}}$ 。此外，可使用章节A.2中介绍的非参数方法来获得 $\widehat{\kappa}_0$ ，但这些估计量不一定满足经验矩约束。具体而言，对于任意函数 $g(\boldsymbol{X})$， κ_0^*必须满足$\mathbb{E}[g(\boldsymbol{X})\{\kappa_0^*(A, Z,\boldsymbol{X}) - 1\}] = 0$。然而，由于 $\widehat{\kappa}_0$并非通过强制满足这一矩约束来估计，而是通过代入相应干扰参数的估计值构造而成，因此经验矩 $N^{-1}\sum_{i=1}^N g(\boldsymbol{X}_i)\{\widehat{\kappa}_0(A_i,Z_i,\boldsymbol{X}_i) - 1\}$ 可能显著偏离零。在这种情况下，基于 T_N 的证伪检验在有限样本中可能表现不佳。

作为替代方案，可以直接评估条件（27），针对 $\boldsymbol{X}$ 的每个取值，利用估计的联合$\widehat{\ }$密度 $f(Y=y, A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})$，在 $y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$的细网格上加以评估。当$Y$ 为离散时，这种方法尤其更为实用。

A.6 扩展

A.6.1 向一般 Z 情形的扩展

在本章节中，我们将结果推广到一般的 Z 情形。具体而言，我们给出对应于定理3.1 和3.2 的定理，适用于一般的 Z。

为使论述更加简洁，我们引入以下符号。令 $\mathrm{Z} \subset \mathbb{R}$ 为 Z的支撑集。对于每个 $z \in \mathrm{Z}$ 和 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{X}$，定义 $\mathrm{Z}^c_{z,\boldsymbol{x}} = \{z' \mid f(A=1 \mid Z=z', \boldsymbol{X}) \neq f(A=1 \mid Z=z, \boldsymbol{X})\}$。注意，根据 (IV3)，对于每个 $z \in \mathrm{Z}$，$\mathrm{Z}^c_{z,\boldsymbol{x}}$均非空。此外，对于 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{X}$，定义 $\mathrm{L}^\infty_+(\mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}) = \{h \mid h(y, \boldsymbol{X}) \in [0,\infty) \ \ \forall y \in \mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}\}$。现在可以陈述定理了。

定理 A.1. 假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 对 $(Y_{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X})$成立，相应的参数为 $\theta = \{f_Z, f_A, f_Y\}$。对于固定的 $z_0 \in Z$ 和 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}$，任取 $z_1 \in Z^c_{z_0,\boldsymbol{X}}$。定义映射 $\Psi : L^\infty_+(Y_{\boldsymbol{X}}) \to L^\infty_+(Y_{\boldsymbol{X}})$ 为

$$\begin{aligned}
&\Psi\big(g(y,\boldsymbol{X});\theta,z_1,z_0\big) \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{l} f(A=1 \mid Z=z_0,\boldsymbol{X})g(y,\boldsymbol{X}) \\ +f(A=0 \mid Z=z_0,\boldsymbol{X})f(Y=y \mid A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \\ -f(A=0 \mid Z=z_1,\boldsymbol{X})f(Y=y \mid A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \end{array}\right\} \int g(t,\boldsymbol{X}) R_Y(t,\boldsymbol{X})\,dt}{f(A=1 \mid Z=z_1,\boldsymbol{X}) R_Y(y,\boldsymbol{X})},
\end{aligned} \tag{S.14}$$

其中

$$R_Y(y,\boldsymbol{X}) = \frac{f(Y=y \mid A=0, Z=z_1, \boldsymbol{X})}{f(Y=y \mid A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X})} \ . \tag{S.15}$$

于是，以下结果成立：

(i) 令 $g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_1,z_0)$ 表示 Ψ 的不动点，即

$$\Psi\big(g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_1,z_0);\theta,z_1,z_0\big) = g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_1,z_0) \ . \tag{S.16}$$

于是，$g^\star$ 唯一存在，且不取决于 $z_1 \in Z^c_{z_0,\boldsymbol{X}}$ 的选择，即

$$g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_1,z_0) = g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_1',z_0) \ , \quad \forall (z_1,z_1') \in \mathcal{Z}^c_{z_0,\boldsymbol{X}} \ .$$

因此，我们将不动点记为 $g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_0)$，省略其对 z 的依赖[1]。

(ii) 优势比函数 α 和基准优势函数 β 在(2) 可表示为 $g^\star$ 的形式如下：

$$\alpha(y,\boldsymbol{X};\theta,z_0) = \frac{g^\star(y,\boldsymbol{X};\theta,z_0)}{g^\star(y_R,\boldsymbol{X};\theta,z_0)} \frac{f(Y=y_R \mid A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(Y=y \mid A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})} \ , \ y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}} \ , \tag{S.17}$$

$$\beta(z,\boldsymbol{X};\theta,z_0) = \frac{f(A=1 \mid Z=z,\boldsymbol{X})/f(A=0 \mid Z=z,\boldsymbol{X})}{\int \alpha(y,\boldsymbol{X};\theta,z_0) f(Y=y \mid A=0,Z=z,\boldsymbol{X})\,dy} \ , \ z \in \mathcal{Z} \ . \tag{S.18}$$

此外，α 和 β 不依赖于 $z_0 \in Z$的选择，即，

$$\alpha(y,\boldsymbol{X};\theta,z_0) = \alpha(y,\boldsymbol{X};\theta,z_0') \ , \quad \beta(z,\boldsymbol{X};\theta,z_0) = \beta(z,\boldsymbol{X};\theta,z_0') \ , \quad \forall (z_0,z_0') \in \mathcal{Z} \ .$$

因此，我们记 $\alpha(y,\boldsymbol{X};\theta)$ 和 $\beta(z,\boldsymbol{X};\theta)$，并略去对 z_0的依赖。

接下来，我们修改假设(A3) 以便适应 Z的一般形式：

(A3-一般 Z)（ θ的有界性）

存在常数 $0 < c_Z < C_Z < \infty$、 $0 < c_A < 1$、 $0 < c_Y \le C_Y < \infty$，以及 $0 < c_g \le C_g < \infty$，使得参数 $\theta = \{f_Y, f_A, f_Z\}$ 和式（16）中对应的 $g^\star(\cdot;\theta)$ 满足$f(Z = z \mid \boldsymbol{X}) \in [c_Z, C_Z]$, $f(A = a \mid Z = z, \boldsymbol{X}) \in [c_A, 1 - c_A]$, $f(Y = y \mid A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}) \in [c_Y, C_Y]$, 且 $g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta) \in [c_g, C_g]$，对所有 $y \in \mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}$、 $a \in \{0, 1\}$、 $z \in \{0, 1\}$ 以及 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{X}$ 均成立。

定理 *A.2.* 假设对于 $(Y(0), A, Z, \boldsymbol{X})$，假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 成立，对应的参数为 $\theta = \{f_Z, f_A, f_Y\}$。进一步假设 *(A3-General Z)* 对 θ 成立。对于固定的 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$ 和 $z_0 \in \mathcal{Z}_{\inf, \boldsymbol{X}} \equiv \arg\inf_{z \in \mathcal{Z}} f(A = 1 \mid Z = z, \boldsymbol{X})$，将映射 $\Psi : L_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}) \to L_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$ 定义为 *(S.14)* 中 Ψ 的归一化版本：

$$\overline{\Psi}\big(g(y, \boldsymbol{X}); \theta, z_0\big) = \frac{\Psi\big(g(y, \boldsymbol{X}); \theta, z_0\big)}{\int \Psi\big(g(t, \boldsymbol{X}); \theta, z_0\big)\, dt} \,.$$

考虑由下式定义的迭代更新

$$\overline{h}^{(j+1)}(y, \boldsymbol{X}; \theta, z_0) = \overline{\Psi}(\overline{h}^{(j)}(y, \boldsymbol{X}; \theta, z_0); \theta, z_0) \,, \quad j \in \{0, 1, \ldots\} \,, \tag{S.19}$$

其中，任意初始函数 $h^{(0)} \in L_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$ 满足 $\int h^{(0)}(y, \boldsymbol{X})\, dy = 1$。那么，当 $j \to \infty$ 时，对于所有 $y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$，$h^{(j)}(y, \boldsymbol{X}; \theta, z_0)$ 收敛到 *(S.16)* 中的 $g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta, z_0)$，即，

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}} \big|\overline{h}^{(j)}(y, \boldsymbol{X}; \theta, z_0) - g^\star(y, \boldsymbol{X}; \theta, z_0)\big| \to 0 \quad as \quad j \to \infty \,.$$

此外，迭代更新的收敛(S.19)相对于某个散度函数呈指数级快速；详情见第 *C.4* 节。

注意，定理3.1 和3.2 是A.1 和A.2 在$\mathcal{Z} = \{0, 1\}$ 以及 $z_0 = \arg\min_{z \in \{0,1\}} f(A = 1 \mid Z = z, \boldsymbol{X})$ 和 $z_1 = 1 - z_0$的特殊情形。

此外，定理4.1 对于一般的 Z仍然成立。因此，我们在此省略其完整表述，仅说明函数 ω 的定义：

(ω-i) $\omega = \nu - \mathbb{E}\{\nu \mid Y(0)\, \boldsymbol{X}\} - \mathbb{E}(\nu \mid Z, \boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(\nu \mid \boldsymbol{X})$ 对于某个函数 $\nu(Y(0)\, Z, \boldsymbol{X})$；($\omega$-ii) ω 满足以下积分方程：

$$\mathbb{E}\big[\{Y^{(0)} - \mu^*(Z, \boldsymbol{X})\} - \{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \omega)\} \mid A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big] = 0 \,. \tag{20}$$

对于一般的 Z，在实践中直接求解（20）中的积分方程可能颇具挑战，因为反事实数据分布中存在多个嵌套依赖关系。如果 Z 是具有有限支撑集的分类变量，则该积分方程存在闭式解。然而，当 Z 具有两个以上的取值时，该方程通常有多个解；我们将在下一章节讨论这些解。当 Z 为连续型变量时，情况则更加复杂，因为该积分方程有多个解，且似乎不存在闭式表示。这类特殊挑战可视为工具变量过度识别的一个实例，其中 Z 的复杂性超过了二元处理 A （Wooldridge，2016，第15章）。

A.6.2 在分类的 Z 下积分方程 (20)的闭式解 Z

本章节将详细说明当Z为分类变量时，如何构造积分方程（20）的闭式解。为简化符号，令 $\mathfrak{p}_z(y) = f^*(Z = z \,|\, A = 1,\ Y^{(0)} = y,\ \boldsymbol{X})$。不失一般性，令 $\mathcal{Z} = \{0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ m\}$。

根据（S.31），我们可以得到 $\mathfrak{p}_z$ 关于 $z \in \mathcal{Z}$ 的替代表达:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) &= f^*(Z = z \,|\, A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \\ &= \frac{\frac{\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(z,\boldsymbol{X})}{1+\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(z,\boldsymbol{X})} f^*(Y^{(0)} \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = z \,|\, \boldsymbol{X})}{\sum_{c=0}^{m} \frac{\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(c,\boldsymbol{X})}{1+\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(c,\boldsymbol{X})} f^*(Y^{(0)} \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = c \,|\, \boldsymbol{X})} \\ &\propto \frac{\beta^*(z, \boldsymbol{X}) f^*(Z = z \,|\, \boldsymbol{X})}{1 + \alpha^*(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\beta^*(z, \boldsymbol{X})} \ . \end{aligned} \tag{S.20}$$

由引理 B.2 的证明，具体而言，由（S.36）中的推导可知，$\omega = \widetilde{\nu} = \nu - \nu^\dagger$ 可以表示为:

$$\begin{aligned}&\omega(Y^{(0)}, Z = z, \boldsymbol{X}) \\ &= \big[L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\big\{L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}\big]\big\{\mathbb{1}(Z = z) - \Pr\big(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}\big)\big\} \ , \end{aligned} \tag{S.21}$$

对于函数 $L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \in \mathcal{L}^2(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})$，其中 $z \in \{0, 1, \ldots, m\}$。注意，一旦$\{L_1, \ldots, L_m\}$固定，由于约束 $\mathbb{E}\{\nu^\dagger \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} = 0$，$L_0$便唯一确定。

方程（S.21）意味着，对于 $z \in \mathcal{Z}$，以下表达式成立:

$$\begin{aligned}&\mu^*(z, \boldsymbol{X}; \omega) \\ &= \mathbb{E}\big\{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 1, Z = z, \boldsymbol{X}\big\} \\ &= \big\{\mathbb{1}(Z = z) - \Pr\big(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}\big)\big\}\big[\mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z) - \mathbb{E}\{L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\}\big] \ , \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&A\big\{\omega(Y^{(0)}, Z = z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(z, \boldsymbol{X}; \omega)\big\} \\ &= A\big\{\mathbb{1}(Z = z) - \Pr\big(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}\big)\big\}\big[L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z)\big] \ . \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big\{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(z, \boldsymbol{X}; \omega) \,|\, A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big\} \\ &= \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z \neq z \,|\, \boldsymbol{X})\big\{L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z)\big\} \ . \end{aligned}$$

同样地，我们有

$$\mathbb{E}\big\{Y^{(0)} - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big\} = \mathcal{G}^{(0)} - \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z) \ .$$

因此， ω满足(ω-ii)当且仅当$\{L_0, \ldots, L_m\}$满足以下条件：

$$
\begin{aligned}
& Y^{(0)} - \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z) \\
& = \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z \neq z \,|\, \boldsymbol{X}) \big\{ L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z) \big\} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z \neq z \,|\, \boldsymbol{X}) L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \\
& = Y^{(0)} - \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}) \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z)
\end{aligned} \tag{S.22}
$$

注意，（S.22）可以表示为如下具有可分离核的第二类弗雷德霍姆积分方程；关于弗雷德霍姆积分方程的技术细节，参见Kress （2014）。为明确起见，令 $\boldsymbol{L}(Y^{(0)}\, \boldsymbol{X}) = (L_0(Y^{(0)}\, \boldsymbol{X}) \ldots, L_m(Y^{(0)}\, \boldsymbol{X}))^\intercal \in$ 实数集$^{m+1}$。于是，我们得到

$$
\sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z \neq z \,|\, \boldsymbol{X}) L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}^\intercal(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \boldsymbol{L}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \ ,
$$

and

$$
\begin{aligned}
& \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}) \mu^*(z, \boldsymbol{X}; L_z) \\
& = \sum_{z=0}^{m} \mathfrak{p}_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z = z \,|\, \boldsymbol{X}) \int L_z(t, \boldsymbol{X}) f^*(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, Z = z, \boldsymbol{X}) \, dt \\
& = \boldsymbol{Q}^\intercal(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \int \boldsymbol{L}(t, \boldsymbol{X}) \circ \boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X}) \, dt \ ,
\end{aligned}
$$

其中$\circ$ 表示逐元素（阿达马）乘积，且

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) &\equiv \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_0(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z \neq 0 \,|\, \boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_m(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z \neq m \,|\, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \ , \\
\boldsymbol{Q}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) &\equiv \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_0(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_m(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z = m \,|\, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \ , \\
\boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X}) &= \begin{bmatrix} f^*(Y^{(0)} = y \,|\, A = 1, Z = 0, \boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ f^*(Y^{(0)} = y \,|\, A = 1, Z = m, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \ .
\end{aligned}
$$

因此，我们建立如下第二类弗雷德霍姆积分方程：

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{P}^\intercal(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \boldsymbol{L}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \\
& = Y^{(0)} - \boldsymbol{Q}^\intercal(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \underbrace{\int \boldsymbol{L}(t, \boldsymbol{X}) \circ \boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X}) \, dt}_{\equiv \boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L})} \ .
\end{aligned} \tag{S.23}
$$

注意，(S.23)定义了一个线性系统，因此存在闭式解。然而，该系统是欠定的。具体而言，它包含 $m+1$ 个未知数，但只有两个限制条件——一个来自恒等式(S.23)，另一个来自关于 $\boldsymbol{L}$ 的约束，由$\mathbb{E}\{\nu^\dagger \,|\, Y_{(0)}\boldsymbol{X}\} = 0$给出。因此，当 $m > 1$，即 $\mathcal{Z}$为非二元时，解通常并不唯一。

在多个解中，我们可以考虑最小范数解。假设 $\boldsymbol{L}$ 具有以下形式：

$$\boldsymbol{L}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) = \frac{Y^{(0)} - \boldsymbol{Q}^\intercal(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L})}{\left\|\boldsymbol{P}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\right\|_2^2}\boldsymbol{P}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,.$$

那么，$\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}\ \boldsymbol{X};\ \boldsymbol{L})$必须满足以下关系：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L}) \\
&= \int \boldsymbol{L}(t, \boldsymbol{X}) \circ \boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X})\, dt \\
&= \int \frac{t - \boldsymbol{Q}^\intercal(t, \boldsymbol{X})\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L})}{\left\|\boldsymbol{P}(t, \boldsymbol{X})\right\|_2^2}\boldsymbol{P}(t, \boldsymbol{X}) \circ \boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X})\, dt \\
&= \underbrace{\int \frac{t\boldsymbol{P}(t, \boldsymbol{X}) \circ \boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X})}{\left\|\boldsymbol{P}(t, \boldsymbol{X})\right\|_2^2}\, dt}_{\equiv \boldsymbol{b}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X})} \\
&\quad - \underbrace{\left\{\int \frac{\boldsymbol{P}(t, \boldsymbol{X}) \circ \boldsymbol{f}(Y^{(0)} = t \,|\, A = 1, \mathcal{Z}, \boldsymbol{X})}{\left\|\boldsymbol{P}(t, \boldsymbol{X})\right\|_2^2}\boldsymbol{Q}^\intercal(t, \boldsymbol{X})\, dt\right\}}_{\equiv \boldsymbol{\Omega}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X})}\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L}) \\
&\equiv \boldsymbol{b}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{\Omega}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X})\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L}) \,.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\boldsymbol{\mu}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}; \boldsymbol{L}) = \left\{I + \boldsymbol{\Omega}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X})\right\}^+ \boldsymbol{b}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X}) \,,$$

其中，B^+ 是矩阵 B的摩尔－彭若斯伪逆，用于处理由约束$\mathbb{E}\{\nu^\dagger \,|\, Y_{(0)}\boldsymbol{X}\} = 0$导致的秩亏。这给出了$\boldsymbol{L}(Y_{(0)}\boldsymbol{X})$的闭式表示：

$$\boldsymbol{L}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) = \frac{Y^{(0)} - \boldsymbol{Q}^\intercal(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\left\{I + \boldsymbol{\Omega}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X})\right\}^+ \boldsymbol{b}(\mathcal{Z}, \boldsymbol{X})}{\left\|\boldsymbol{P}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\right\|_2^2}\boldsymbol{P}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,.$$

A.6.3 受试者分位数处理效应的推断

本章节中，我们给出一种推断受试者分位数处理效应（QTT）的简便方法。请注意，QTT定义为$\tau_q^* = \tau_{1,q}^* - \tau_{0,q}^*$其中$\tau_{a,q}^* = F_{Y^{a}{}^{(}{}^{)}|A=1}^{*-1}(q)$，对于 $a \in \{0,1\}$；此处，$F_{Y^{(a)}\,|\,A=1}^*$是 $Y_{(a)}|\,(A=1)$的累积分布函数（CDF），而 $q \in (0,1)$是预先指定的关注分位数。我们假设CDF的逆函数有定义，至少在真实分位数周围的局部邻域内如此。当结果变量为连续型时，该条件会自动满足。

所提出的推断程序受到Berger 和 Boos (1994年)和Lee 等人 (2025年)的启发。最终目标是针对给定的$100(1-c)$%置信区间，用于τ_q^*，在给定 $c > 0$的情况下。我们首先选择一个常数

$c_1 < c$；Berger 和 Boos (1994年)建议选择一个较小的值，例如 $c_1 = 10^{-3}$ 或 $c_1 = 10^{-4}$。然后，由标准自助法可以得到$\tau_{1,\,q}^{*}$的100(1 − c_1)%置信区间，记为$\widehat{\mathcal{C}}_{1,\,c_1}$。

接下来请注意，定理 5.1 可以推广，以构造 $\rho^{*} \equiv \mathbb{E}\{\mathcal{G}(Y_{(0)}\boldsymbol{X}) \,|\, A = 1\}$ 的渐近正态估计量，其中 $\mathcal{G}(\cdot)$ 是一个固定的一致有界函数；有关这一放宽条件，请参见章节 C.7 。就本文而言，我们选择一个专门设计的函数 $\mathcal{G}$。具体而言，对于候选 QTT 值（记为 $\tau_q \in \mathbb{R}$）以及 $Y\,|(A = 1)$ 的候选分位数（记为 $\tau_{1,q} \in \mathbb{R}$），定义

$$\mathcal{G}(Y^{(0)}; \tau_q, \tau_{1,q}, q) \equiv \mathbb{1}\{Y^{(0)} \le \tau_{1,q} - \tau_q\} - q \;,$$
$$\rho^{*}(\tau_q, \tau_{1,q}, q) \equiv \mathbb{E}\big\{\mathcal{G}(Y^{(0)}; \tau_q, \tau_{1,q}, q) \,|\, A = 1\big\} \;.$$

请注意，$\tau_{1,q} - \tau_q$ 对应于 $\tau_{0,q}$，即 $Y(0)\,|\,(A = 1)$ 的候选反事实分位数。因此，给定 $(\tau_q,\tau_{1,q}, q)$，可以通过对定理 5.1 得到的置信区间求逆，获得用于检验 H_0：$\rho^{*}(\tau_q, \tau_{1,q}, q) = 0$ 的 p 值。该 p 值可表示为

$$p(\tau_q, \tau_{1,q}, q) = 2\overline{\Phi}\left(\sqrt{N}\left|\frac{\widehat{\rho}(\tau_q, \tau_{1,q}, q)}{\widehat{\sigma}_{\rho}(\tau_q, \tau_{1,q}, q)}\right|\right) \;,$$

其中，$\overline{\Phi}$ 是标准正态分布的生存函数（互补累积分布函数），$\widehat{\rho}(\tau_q,\tau_{1,q}, q)$是 $\rho^{*}(\tau_q, \tau_{1,q}, q)$的估计量，而 $\widehat{\sigma}_{\rho}^{2}(\tau_q, \tau_{1,q}, q)$是相应的方差估计量；我们指出，$\widehat{\rho}(\tau_q,\tau_{1,q}, q)$和 $\widehat{\sigma}_{\rho}^{2}(\tau_q, \tau_{1,q}, q)$可以按照第5节中的步骤构造。

接下来，我们考虑以下调整后的 p 值:

$$\overline{p}(\tau_q, q) \equiv \sup\left\{p(\tau_q, \tau_{1,q}, q) \,|\, \tau_{1,q} \in \widehat{\mathcal{C}}_{1,c_1}\right\} + c_1 \;.$$

该量可解释为用于检验假设 H_0：$\rho^{*}(\tau_q, \tau_{1,q}^{*}, q) = 0$的 p 值，其中$\tau_{1,q}$取其真实值$\tau_{1,q}^{*}$。因此，可以对该 p 值求反演，从而得到 τ_q^{*}的 100(1 − c)% 置信区间，即

$$\widehat{\mathcal{C}}_c \equiv \left\{\tau_q \,|\, \overline{p}(\tau_q, q) > c\right\} \;.$$

在定理5.1的条件下，可以证明

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(\tau_q^{*} \in \widehat{\mathcal{C}}_c\right) = 1 - c \;.$$

证明类似于Lee 等人（2025年）中的证明，此处省略。

A.6.4 平均处理效应的推断

在主文中，所有工具变量假设均针对 $Y^{(0)}$陈述。假设对于 $Y^{(1)}$也成立一组类似的假设，此外还满足 $Y_{(0)}$。具体而言，（A2）、（IV2）和（IV4）分别替换为以下（A2’）、（IV2’）和（IV4’）：

(A2’)（重叠）对每个 $a \in \{0, 1\}$ 与 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，$Y(a)\,|\,(A = a', Z = z, \boldsymbol{X})$ 的支撑集对所有 $a' \in \{0, 1\}$ 与 $z \in \mathcal{Z}$ 均相同，记为 $\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}^{(a)}$；(IV2’)（无混杂性）$Y(a) \perp\!\!\!\perp Z \,|\, \boldsymbol{X}$ 对 $a \in \{0, 1\}$ 两者均成立；(IV4’)（logit 可分离处理机制）对所有 $y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}^{(a)}$、$a \in \{0, 1\}$、$(z, z') \in \mathcal{Z}$ 以及 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，我们

have

$$\frac{\Pr(A=1-a\,|\,Y^{(a)}=y,Z=z,\boldsymbol{X})}{\Pr(A=a\,|\,Y^{(a)}=y,Z=z,\boldsymbol{X})}=\alpha_a^*(y,\boldsymbol{X})\beta_a^*(z,\boldsymbol{X})\ .$$

请注意，在章节2.3 中所述的生成模型已与 (A1)、(A2')、(IV1)、(IV2')、(IV3)以及 (IV4')相容。因此，它也可以作为论证这些假设的说明性示例。

在这些假设下，可以针对整个总体定义因果效应，并建立一组平行的结果，例如平均处理效应（ATE），其定义为 $\tau^*_{\mathrm{ATE}}=\mathbb{E}\{Y_{(1)}-Y_{(0)}\}$。例如，以下结果是定理 4.1 关于平均处理效应的对应结果：

定理 A.3. 假设 *(A1)*、*(A2')*、*(IV1)*、*(IV2')*、*(IV3)*和*(IV4')*对于$(Y_{(a)}\,A,Z,\boldsymbol{X})$在 $a\in\{0、1\}$ 的情况下成立，并且令 M_{ATE}为在这些假设下，关于 $\boldsymbol{O}=(Y,A,Z,\boldsymbol{X})$ 的观测数据分布的半参数模型。进一步假设存在函数 ω_a $(Y_{(a)}\,Z,\boldsymbol{X})$，对于 $a\in\{0、1\}$ 满足以下条件：

(ω-i-ATE) $\omega_a=\nu_a-\mathbb{E}\{\nu_a\,|\,Y^{(a)},\boldsymbol{X}\}-\mathbb{E}(\nu_a\,|\,Z,\boldsymbol{X})+\mathbb{E}(\nu_a\,|\,\boldsymbol{X})$
for some function $\nu_a(Y^{(a)},Z,\boldsymbol{X})$;

(ω-ii-ATE) ω_a 满足以下积分方程：

$$\mathbb{E}\big[\{Y^{(a)}-\mu_a^*(Z,\boldsymbol{X})\}-\{\omega_a(Y^{(a)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_a^*(Z,\boldsymbol{X};\omega_a)\}\,\big|\,A=1-a,Y^{(a)},\boldsymbol{X}\big]=0\ ,$$

其中 $\mu_a^*(Z,\ \boldsymbol{X};\ h_a)=\mathbb{E}\{h_a(Y_{(a)}\,Z,\ \boldsymbol{X})\,|\,A=1-a,\ Z,\ \boldsymbol{X}\}$。

那么，以下函数是模型 M_{ATE}中 τ^*_{ATE} 的一个影响函数，

$$\begin{aligned}&IF^*_{ATE}(\boldsymbol{O})\\&=\begin{bmatrix}\{A\alpha_1^*(Y,\boldsymbol{X})\beta_1^*(Z,\boldsymbol{X})-(1-A)\}\{\mu_1^*(Z,\boldsymbol{X})-Y\}\\-A\alpha_1^*(Y,\boldsymbol{X})\beta_1^*(Z,\boldsymbol{X})\{\mu_1^*(Z,\boldsymbol{X};\omega_1)-\omega_1(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\\-A\omega_1(Y,Z,\boldsymbol{X})-(1-A)\mu_1^*(Z,\boldsymbol{X};\omega_1)\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}\{A-(1-A)\alpha_0^*(Y,\boldsymbol{X})\beta_0^*(Z,\boldsymbol{X})\}\{Y-\mu_0^*(Z,\boldsymbol{X})\}\\+(1-A)\alpha_0^*(Y,\boldsymbol{X})\beta_0^*(Z,\boldsymbol{X})\{\omega_0(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_0^*(Z,\boldsymbol{X};\omega_0)\}\\+A\mu_0^*(Z,\boldsymbol{X};\omega_0)+(1-A)\omega_0(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{bmatrix}-\tau^*_{ATE}\ .\end{aligned}\tag{S.24}$$

此外，模型 τ^*_{ATE} 中的每个 $\mathcal{M}_{ATE}$ 影响函数均具有 (S.24)的形式。

其余结果可类似地得出。特别是，按照第 5 节在二元 Z下所采用的方法，可以构造一个一致、渐近正态且半参数有效的估计量；总体 $\tau^*_{q,\ \mathrm{QTE}}\equiv F^{*-1}_{Y^{(1)}}(q)-F^{*-1}_{Y^{(0)}}(q)$的总体分位数处理效应的推断，也可仿照第 A.6.3节类似地进行。由于推导 straightforward，这些结果从略。

A.6.5 缺失数据设定

我们将工具变量框架重新诠释为一个非可忽略缺失数据模型。考虑如下数据结构$\{(1-A)W,\ A,\ Z,\ \boldsymbol{X}\}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 是一组基线协变量，W是感兴趣的结果变量，Z是工具变量，而 A 是一个指示变量，用于表明 W 是缺失（$A=1$）还是已测量（$A=0$）。请注意，A 的定义方式旨在与主文中使用的符号保持一致。

为简单起见，令 $\tau^*_W\equiv\mathbb{E}(W)$ 表示目标估计量；更一般地，也可以考虑将 $\mathbb{E}\{\mathcal{G}(W,\ \boldsymbol{X})\}$ 作为目标，其中 $\mathcal{G}(\cdot)$ 是一个固定的一致有界函数。注意，$\mathbb{E}(W)=\mathbb{E}(W\,|\,A=$

0) $\Pr(A=0)+\mathbb{E}(W\mid A=1)\Pr(A=1)$，且 $\mathbb{E}(W\mid A=0)$ 和 $\Pr(A=1)$ 可识别，并可根据其有效影响函数，利用观测数据进行估计。因此，要识别并构造基于影响函数的估计量，只需关注 $\mathbb{E}(W\mid A=1)$。

为此，我们对完整数据$(W,\ A,\ Z,\ \boldsymbol{X})$作出假设，其中 W替代了主文中的 $Y(0)$。在这些假设下，主文中的所有结果都可推广到缺失数据设定。例如，以下结果是定理4.1 在缺失数据设定下的对应结果。

定理A.4。假设*(A1)-(A2)*和*(IV1)-(IV4)*对于$(W, A, Z, \boldsymbol{X})$成立，其中 W替代 $Y(0)$，并令 $\boldsymbol{M}_W$为在这些假设下，针对$\{(1-A)W, A, Z, \boldsymbol{X}\}$的观测数据分布的半参数模型。进一步假设存在函数 $\omega(W, Z, \boldsymbol{X})$ 满足以下条件：

(ω-i-缺失) $\omega=\nu-\mathbb{E}(\nu\mid W, \boldsymbol{X})\ -\mathbb{E}(\nu\mid Z, \boldsymbol{X})\ +\mathbb{E}(\nu\mid \boldsymbol{X})$ 对于某个函数 $\nu(W, Z, \boldsymbol{X})$成立；*($\omega$-ii-缺失)* ω 满足以下积分方程：

$$\mathbb{E}\big[\{W-\mu^*(Z,\boldsymbol{X})\}-\{\omega(W,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)\}\mid A=1,W,\boldsymbol{X}\big]=0\ .$$

那么，以下函数是模型 $\boldsymbol{M}_W$ 中 τ^*_W的一个影响函数，

$$IF^*_W(\boldsymbol{O})=\begin{bmatrix}(1-A)W+(1-A)\alpha^*(W,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{W-\mu^*(Z,\boldsymbol{X})\}\\ +A\mu^*(Z,\boldsymbol{X})-\tau^*_W\\ -(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{\omega(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)\}\\ -A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)-(1-A)\omega(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{bmatrix}\ . \tag{S.25}$$

此外，模型 τ^*_W 中的$\mathcal{M}_W$ 的每个影响函数都具有(S.25)的形式。

其余结果可类似地推出。最后，可使用A.6.3章节中所述的方法，对存在缺失性的结果变量分位数进行推断。由于这些结果很容易推导，故此处省略。

A.7 模拟细节

我们提供另外三个估计量的构造细节。首先，$\widehat{\tau}_{\text{2SLS}}$ 和 $\widehat{\tau}_{\text{LS}}$ 是根据以下 R 代码得到的：

- $\widehat{\tau}_{\text{2SLS}}$: `ivreg::ivreg(Y ~ A + X | Z + X)`;
- $\widehat{\tau}_{\text{LM}}$: `lm(Y ~ A + Z + X)`。

在此，两阶段最小二乘法（2SLS）估计量通过 `ivreg` R程序包（Fox 等人，2025年）实现。其次，$\widehat{\tau}_{\text{Ign}}$ 构造如下。Hahn (1998) 表明，在无未测量混杂假设下，ATT 的有效影响函数（EIF） τ^* 为

$$\frac{\{A-(1-A)\frac{\Pr(A=1\mid \boldsymbol{L})}{\Pr(A=0\mid \boldsymbol{L})}\}\{Y-\mathbb{E}(Y\mid A=1,\boldsymbol{L})\}-A\tau^*}{\mathbb{E}(A)}\ ,$$

其中，$\boldsymbol{L}$ 是 A 和 Y的混杂因素集合。因此，可以利用第5节中描述的交叉拟合方法构造基于 EIF 的估计量。按照主文的做法，我们将N个体随机划分为 K 个互不重叠的折，记为$\mathcal{I}=\{1,\ldots,N\}$，并记作$\{\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_K\}$，并定义其补集

每一折的补集定义为$\mathcal{I}_k^c = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_k$，其中 $k \in \{1, \ldots, K\}$。然后，基于 EIF 的估计量 $\widehat{\tau}_{\text{lgn}}$ 定义为

$$\widehat{\tau}_{\text{lgn}} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \left\{ A_i - (1 - A_i) \frac{\widehat{\Pr}^{(-k)}(A_i = 1 \mid \boldsymbol{L}_i)}{\widehat{\Pr}^{(-k)}(A_i = 0 \mid \boldsymbol{L}_i)} \right\} \{ Y_i - \widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}(Y_i \mid A_i = 1, \boldsymbol{L}_i) \}}{\sum_{i=1}^{N} A_i},$$

其中 $\widehat{\Pr}^{(-k)}$ 和 $\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}$ 是使用章节$\mathcal{I}_k^c$ 中介绍的机器学习方法估计得到的。A.2。对于模拟和数据分析，我们均设定 $\boldsymbol{L} = (Z, \boldsymbol{X})$，并将 Z 视为常规混杂因素。

A.8 应用详述

本章节将补充介绍章节8中讨论的实际应用。

A.8.1 相关性假设评估(IV3)

我们报告 t统计量，该统计量来自以 A 为因变量、以$(Z, \boldsymbol{X})$为自变量（仅包含主效应），用于评估 Z 的系数是否显著异于零。在 $A \perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X}$的原假设下，该回归中 Z 的系数应为零。用于检验该系数的 t统计量服从自由度为9,228的 t分布。在我们的分析中，观测到的 t统计量为15.98，对应的 p 值小于机器精度。因此，我们得出结论，(IV3)似乎并未被违背。

A.8.2 重叠假设的评估(A2)

我们间接评估了重叠假设(A2) 在数据中是否似乎得到满足。我们注意到，(A2) 涉及反事实数据（$Y_{(0)}$ $A = 1$, Z, $\boldsymbol{X}$），因此无法仅凭观测数据加以验证。因此，以下结果应被解释为指示性证据，而非对(A2)的直接评估。

我们首先固定一个观测 $i \in \{1, \ldots\ldots, N\}$，其中 $N = 9240$。然后，对于每个交叉拟合索引 $s \in \{1, \ldots\ldots, 200\}$，令$\mathcal{I}_s^{(-i)}$表示不包含观测 i的拆分样本折，并令 $\widehat{f}_s^{(-i)}$表示使用$\mathcal{I}_s^{(-i)}$构建的相应密度估计量。对于 $y \in \{0, 1, \ldots\ldots, 52\}$， $a \in \{0, 1\}$，以及 $z \in \{0, 1\}$，我们考虑了200个交叉拟合密度估计的中位数，记为 f_{med}，即

$$\widehat{f}_{\text{med}}(Y_i = y \mid A_i = a, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i) = \underset{s=1,\ldots,200}{\text{median}} \, \widehat{f}_s^{(-i)}(Y_i = y \mid A_i = a, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i) \, .$$

对于每个观测值 i，我们随后将 $r_i(y, a, z)$ 定义为

$$r_i(y, a, z) = \frac{\widehat{f}_{\text{med}}(Y_i = y \mid A_i = a, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i)}{\widehat{f}_{\text{med}}(Y_i = y \mid A_i = 0, Z_i = 0, \boldsymbol{X}_i)} \, ,$$

它表示给定 $(A = a, Z = z, \boldsymbol{X})$ 时 Y 的条件密度与其基准值 $(A = 0, Z = 0, \boldsymbol{X})$ 之比。

表 S2 报告了以下变量的汇总统计量：$r_i(y, a, z)$ 在 $y \in \{0, \ldots, 52\}$ 和 $i \in \{1, \ldots, N\}$范围内。我们观察到，$r_i(y, a, z)$ 的分布接近于 1，这表明估计的密度与(A2)一致。

$(a,\ z)$	Min	Q1	Q2	Q3	Max
$(0,0)$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$(0,1)$	0.9993	1.0000	1.0001	1.0002	1.0004
$(1,\ 0)$	0.9833	0.9987	0.9992	1.0002	1.0222
$(1,1)$	0.9835	0.9989	0.9993	1.0001	1.0217

表 S2：$r_i(y,\ a,\ z)$ 在 $y \in \{0,\ldots,52\}$ 和 $i \in \{1,\ldots,N\}$范围内的汇总统计量，按每一对 $(a,\ z)$ 分别报告。

A.8.3 对定理6.1中证伪含义的评估

我们评估了工具变量模型是否如定理6.1所述被证伪。与上文对(A2) 的评估类似，我们考察了 200 个交叉拟合密度估计的中位数。具体而言，我们为 $y \in \{0,1,\ldots,52\}$ 和 $z \in \{0,1\}$定义了以下量：

$$\widehat{f}_{\text{med}}(Y_i = y, A_i = 0 \,|\, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i) = \underset{s=1,\ldots,200}{\text{median}}\, \widehat{f}_s^{(-i)}(Y_i = y, A_i = 0 \,|\, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i)\ ,$$
$$\widehat{f}_{\text{med}}(A_i = 0 \,|\, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i) = \underset{s=1,\ldots,200}{\text{median}}\, \widehat{f}_s^{(-i)}(A_i = 0 \,|\, Z_i = z, \boldsymbol{X}_i)\ ,$$
$$\widehat{f}_{\text{med}}(Z_i = z \,|\, \boldsymbol{X}_i) = \underset{s=1,\ldots,200}{\text{median}}\, \widehat{f}_s^{(-i)}(Z_i = z \,|\, \boldsymbol{X}_i)\ .$$

我们的第一种方法是实施第 A.5 节所述的 KS 型证伪检验。为了近似 $\mathcal{G}_{\text{ind}}$，我们考虑了以下函数类：

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{\text{ind}} = \left\{ \mathbb{1}\{Y = y, X_j = x_j\} \,|\, y \in \{0,1,\ldots,52\},\ x_j \in \text{supp}(X_j),\ j \in \{1,\ldots,d\} \right\}\ .$$

~换言之，$\mathcal{G}_{\text{ind}}$ 由以下指示函数构成：这些函数由 Y 和第 j 个协变量定义。由于 Y 和所有协变量都是离散的，这些函数均有明确定义。此外，我们使用 $\mathcal{G}_{\text{ind}}$ 以及通过中位数调整估计值 f_{med}得到的估计 $\widehat{\kappa}_0$ ，计算了式（S.13）~ ^中的检验统计量。我们得到的检验统计量为$T_N = -0.5485$，而 5% 水平下的自助法临界值为 3.198。由于 T_N 小于临界值，KS 型证伪检验未能提供足够证据来否定工具变量假设。

第二种方法是直接评估证伪含义（主文中的条件（27））。对于每个观测值 i，我们通过检验以下标准来判断条件（27）是否被违反：

$$\frac{\widehat{f}_{\text{med}}(Y_i = y, A_i = 0 \mid Z_i = 1, \boldsymbol{X}_i) - \widehat{f}_{\text{med}}(Y_i = y, A_i = 0 \mid Z_i = 0, \boldsymbol{X}_i)}{\widehat{f}_{\text{med}}(A_i = 0 \mid Z_i = 1, \boldsymbol{X}_i) - \widehat{f}_{\text{med}}(A_i = 0 \mid Z_i = 0, \boldsymbol{X}_i)} \geq 0\ . \tag{S.26}$$

最后，我们计算了满足该不等式的观测值的经验比例。我们验证了对于所有 $i \in \{1,\ \ldots\ldots,\ 9240\}$ 以及 $s \in \{1,\ \ldots\ldots,\ 200\}$，条件（S.26）均成立，这表明没有任何观测值提供了反对工具变量假设的显著证据。

基于这两种方法，我们得出结论：在本应用中，工具变量假设并未被证伪。

A.8.4 受试者分位数处理效应的推断

我们应用了A.6.3节中概述的推断程序。具体而言，我们考虑了 $q \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$，以研究第一、第二和第三四分位数处的处理组处理效应。对于 c_1，我们选择了$c_1 \in \{0.001, 0.005, 0.010, 0.025\}$。对于每个交叉拟合索引 $s \in \{1, \ldots, 200\}$，我们得到了 τ_q^*的95%置信区间，并得到了这200个置信区间的中位数。

表 S3 总结了结果。所有三项分位数处理效应估计在 5% 的显著性水平上均显著，表明参与教育或职业培训提高了这些分位数上的工作时间。结合平均处理效应分析，我们得出结论：参与教育或职业培训对参与者的工作时间产生了正向且总体一致的影响，无论是平均而言还是在整个分布上。

		q		
		0.25	0.50	0.75
c_1	0.001	$[1, 16]$	$[10, 40]$	$[1, 39]$
	0.005	$[2, 16]$	$[11, 40]$	$[1, 39]$
	0.010	$[2, 16]$	$[11, 40]$	$[1, 39]$
	0.025	$[1, 15]$	$[11, 39]$	$[1, 40]$

表 S3：QTT 的 95% 置信区间，$q \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$.

B 有用引理

本章节介绍一些引理，这些引理将在章节 C 中用于证明主文和本补充材料中的定理。我们考虑支撑集为 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$ 的一般 Z，除非明确要求满足二元工具变量条件。我们还确立了一些将在全文中使用的记号约定。对于非负量（Q_0、Q_1、……、Q_J），我们用 $Q_0 \lesssim \sum_{j=1}^{J} Q_j$ 表示 $Q_0 \leq \sum_{j=1}^{J} C_j Q_j$，其中某些非负常数为 C_1、……、C_J。令 $Q_1 \asymp Q_2$ 表示 $Q_1 \lesssim Q_2$ 和 $Q_2 \lesssim Q_1$。最后，我们令 $\gamma(Z, \boldsymbol{X}) = f(A=1 \mid Z, \boldsymbol{X}) / f(A=0 \mid Z, \boldsymbol{X})$ 表示给定 $(Z, \boldsymbol{X})$ 时的处理优势比。

B.1 干扰函数之间的关系

引理 B.1. 假设假设 *(A1)*-*(A2)* 与 *(IV1)*-*(IV4)* 对 $(Y_{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X})$ 成立，相应参数为 $\theta = \{f_Z, f_A, f_Y\}$。则干扰函数满足以下关系：

(i)

$$\frac{f(Y^{(0)}=y, A=1, Z, \boldsymbol{X})}{f(Y=y, A=0, Z, \boldsymbol{X})} = \alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X}) \,, \tag{S.27}$$

$$\frac{f(Y^{(0)}=y \mid A=1, Z, \boldsymbol{X})}{f(Y=y \mid A=0, Z, \boldsymbol{X})} = \frac{\alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X})}{\gamma(Z, \boldsymbol{X})} \,. \tag{S.28}$$

(ii)

$$\gamma(Z, \boldsymbol{X}) = \mathbb{E}\{\alpha(Y, \boldsymbol{X}) \mid A=0, Z, \boldsymbol{X}; f_Y\}\beta(Z, \boldsymbol{X}) \,. \tag{S.29}$$

(iii)

$$\begin{aligned} & f(Y^{(0)}=y \mid \boldsymbol{X}) \\ &= f(Y^{(0)}=y \mid Z, \boldsymbol{X}) \\ &= \big\{1+\alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X})\big\} f(Y=y \mid A=0, Z, \boldsymbol{X}) f(A=0 \mid Z, \boldsymbol{X}) \\ &= \left[1+\frac{\alpha(y, \boldsymbol{X})\gamma(Z, \boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\big\{\alpha(Y, X) \mid A=0, Z, \boldsymbol{X}; f_Y\big\}}\right] \frac{f(Y=y \mid A=0, Z, \boldsymbol{X})}{1+\gamma(Z, \boldsymbol{X})} \,. \end{aligned} \tag{S.30}$$

(iv)

$$f(Y=y, A=0 \mid Z, \boldsymbol{X}) = \frac{f(Y^{(0)}=y \mid \boldsymbol{X})}{1+\alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X})} \,, \tag{S.31}$$

$$f(Y^{(0)}=y, A=1 \mid Z, \boldsymbol{X}) = \frac{\alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X}) f(Y^{(0)}=y \mid \boldsymbol{X})}{1+\alpha(y, \boldsymbol{X})\beta(Z, \boldsymbol{X})} \,.$$

证明。

(i) 这些结果可直接由 (α, β, γ) 的定义得出。**(ii)** 根据 (S.28)，可将等式两边乘以 $f(Y=y \mid A=0, Z, \boldsymbol{X})$，然后对 y 积分。**(iii)** 第一行由 (IV2) 得出：$Y_{(0)} \perp\!\!\!\perp Z \mid \boldsymbol{X}$。第二行由

$$\begin{aligned} & f(Y^{(0)}=y \mid Z, \boldsymbol{X}) \\ &= f(Y^{(0)}=y, A=1 \mid \boldsymbol{X}) + f(Y^{(0)}=y, A=0 \mid \boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

$$\overset{(S.27)}{=} \{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z,\boldsymbol{X})\}f(Y=y,A=0\,|\,Z=z,\boldsymbol{X})\ .$$

最后一行由 (S.29) 及 $f(A=0\,|\,Z,\ \boldsymbol{X})=\{1+\gamma(Z,\ \boldsymbol{X})\}^{-1}$。
(iv) 该结论直接由 (S.27) 和 (IV2) 得出：$Y_{(0)} \perp\!\!\!\perp Z\,|\,\boldsymbol{X}$。

□

B.2 Mon关于干扰函数相对于 Z 的单调性关系

引理 B.2. 假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 对 $(Y_{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X})$成立，其对应的参数为 $\theta=\{f_Z, f_A, f_Y\}$。那么，对于 $(z_0, z_1)\in\mathcal{Z}$，有

$$\begin{aligned}
&\beta(z_1,\boldsymbol{X})>\beta(z_0,\boldsymbol{X})\\
\Leftrightarrow\ & f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})>f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\ ,\quad \forall y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}} \qquad (S.32)\\
\Leftrightarrow\ & f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})>f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\\
\Leftrightarrow\ & \gamma(z_1,\boldsymbol{X})>\gamma(z_0,\boldsymbol{X})\ .
\end{aligned}$$

证明。由（S.31），可得

$$\frac{f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}\overset{(S.31)}{=}\frac{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\ .$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\beta(z_1,\boldsymbol{X})>\beta(z_0,\boldsymbol{X})\\
\Leftrightarrow\ & f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})<f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\ ,\quad \forall y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}\ , \qquad (S.33)\\
\Rightarrow\ & f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})<f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \qquad (S.34)\\
\Leftrightarrow\ & f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})>f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\\
\Leftrightarrow\ & \gamma(z_1,\boldsymbol{X})>\gamma(z_0,\boldsymbol{X})\ .
\end{aligned}$$

尚需证明（S.34）蕴含（S.33），证明如下：

$$\begin{aligned}
&f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})<f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\\
\Rightarrow\ & f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})<f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \quad \text{for some } y\\
\overset{(S.31)}{\Rightarrow}\ & \frac{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z_1,\boldsymbol{X})}>1 \quad \text{for some } y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}\\
\Rightarrow\ & \beta(z_1,\boldsymbol{X})>\beta(z_0,\boldsymbol{X})\ .
\end{aligned}$$

证明至此完成。

□

B.3 有界性

引理 B.3. 假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 对于 $Y_{(0)}$ A，Z，$\boldsymbol{X}$)成立，且对应的参数为 $\theta=\{f_Z,\ f_A,\ f_Y\}$。进一步假设 θ 满足假设 *(A3-General Z)*。那么，

存在常数 $0 < c_\alpha \le C_\alpha < \infty$ 和 $0 < c_\beta \le C_\beta < \infty$，使得以下结果成立：

$$\alpha(y, \boldsymbol{X}; \theta) \in [c_\alpha, C_\alpha] , \qquad \beta(z, \boldsymbol{X}; \theta) \in [c_\beta, C_\beta] , \qquad \forall y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}} , \quad \forall z \in \mathcal{Z} , \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{X} .$$

此外，根据主文中的 (10) 、(S.30)和 (S.31)，存在常数 $0 < c_O \le C_O < \infty$ 使得

$$f(Y_{(0)} = y, A = a, Z = z \,|\, \boldsymbol{X}) \in [c_O, C_O] , \qquad \forall y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}} , \ \forall a \in \{0,1\} , \ \forall z \in \mathcal{Z} , \ \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{X} .$$

证明。为简洁起见，我们在符号中省略对 θ 的依赖。令 $z_0 =$ 的下确界$_{z \in \mathcal{Z}} f(A = 1 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X})$。根据主文中的 (S.17)，我们有

$$\begin{aligned} \alpha(y, \boldsymbol{X}) &= \frac{g^\star(y, \boldsymbol{X})}{g^\star(y_R, \boldsymbol{X})} \frac{f(Y = y_R \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})} \\ &\in \left[\frac{c_g c_Y}{C_g C_Y}, \frac{C_g C_Y}{c_g c_Y} \right] \equiv [c_\alpha, C_\alpha] . \end{aligned}$$

这进一步意味着 $\mathbb{E}\{\alpha(Y, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}; f_Y\} \in [c_\alpha, C_\alpha]$。因此，根据主文中的 (S.18)，我们有

$$\begin{aligned} \beta(z, \boldsymbol{X}) &= \frac{f(A = 1 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X}) / f(A = 0 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\{\alpha(Y, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}; f_Y\}} \\ &\in \left[\frac{c_A}{(1 - c_A) C_\alpha} , \frac{1 - c_A}{c_A c_\alpha} \right] \equiv [c_\beta, C_\beta] . \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

B.4 二元 Z 的积分方程解的唯一性

引理 B.4. 假设 *(A1)-(A2)* 和 *(IV1)-(IV4)* 成立。进一步假设 $Z = \{0,1\}$。对于函数 $v(Y_{(0)}, Z, \boldsymbol{X})$，令 $\widetilde{v} = v - v^\dagger$，其中 $v^\dagger \equiv \mathbb{E}\{v \,|\, Y_{(0)}, \boldsymbol{X}\} + \mathbb{E}(v \,|\, Z, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}(v \,|\, \boldsymbol{X})$。那么，$\widetilde{v}(Y_{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = 0$ 是满足以下条件的唯一函数

$$\mathbb{E}\{\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v}) \,|\, A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} = 0 .$$

证明。我们首先证明，当 Z 为二元变量时，$\widetilde{v}$ 具有简化的结构。注意，任意函数$v(Y_{(0)}, Z, \boldsymbol{X})$都可以写成

$$v(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = v_1(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) Z + v_2(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})(1 - Z) ,$$

表明

$$\begin{aligned} & v^\dagger(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \\ &= v_1(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X}) + v_0(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \{1 - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\} \\ &\quad + Z \mathbb{E}\{\nu_1(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\} + (1 - Z) \mathbb{E}\{\nu_0(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\} \\ &\quad - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}\{v_1(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\} + \{1 - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\} \mathbb{E}\{v_0(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\} . \end{aligned}$$

因此， $\widetilde{v} = v - v^{\dagger}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) &= \big\{v_1 - v_0 - \mathbb{E}\big(v_1 - v_0 \,|\, \boldsymbol{X}\big)\big\}\big\{Z - \mathbb{E}\big(Z \,|\, \boldsymbol{X}\big)\big\} \\ &= \big[L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\big\{L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}\big]\big\{Z - \mathbb{E}\big(Z \,|\, \boldsymbol{X}\big)\big\}\,, \end{aligned} \tag{S.35}$$

其中 $L(Y_{(0)}\boldsymbol{X}) \equiv v_1(Y_{(0)}\boldsymbol{X}) - v_0(Y_{(0)}\,\boldsymbol{X})$。

这一结构可以推广到分类的 Z。不失一般性，令 $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, m\}$。那么，任意函数 $v(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$ 都可以写成

$$v(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \sum_{z=0}^{m} v_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{1}(Z = z)\,,$$

并且 $v^{\dagger}$ 表示为

$$\begin{aligned}&v^{\dagger}(Y^{(0)}, Z = z, \boldsymbol{X}) \\ &= \left\{v_z - \sum_{c \neq z} v_c - \mathbb{E}\left(v_z - \sum_{c \neq z} v_c \,\middle|\, \boldsymbol{X}\right)\right\}\big\{\mathbb{1}(Z = z) - \Pr(Z = z \,|\, \boldsymbol{X})\big\} \\ &= \big[L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\big\{L_z(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}\big]\big\{\mathbb{1}(Z = z) - \Pr(Z = z \,|\, \boldsymbol{X})\big\}\,. \end{aligned} \tag{S.36}$$

注意，我们有一个约束 $\mathbb{E}\{v^{\dagger} \,|\, Y_{(0)}\, \boldsymbol{X}\} = 0$。因此，一旦固定 $\{L_c \,|\, c \in \mathcal{Z} \setminus \{z\}\}$， L_z 就确定了。

由于 Z 是二元的，我们得到

$$\begin{aligned}&\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \big[L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\big\{L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}\big]\big\{Z - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\big\}\,, \\ &\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v}) = \big[L - \mathbb{E}(L \,|\, A = 1, Z, \boldsymbol{X})\big]\big\{Z - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\big\}\,. \end{aligned}$$

这表明

$$\mathbb{E}\{\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v}) \,|\, A = 1, Y^{(0)} = y, X\} = 0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & L(y, \boldsymbol{X}) \begin{bmatrix} f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, A = 1, Y^{(0)} = y, \boldsymbol{X}) \\ -f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, A = 1, Y^{(0)} = y, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mu^*(1, \boldsymbol{X}; L) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, A = 1, Y^{(0)} = y, \boldsymbol{X}) \\ -\mu^*(0, \boldsymbol{X}; L) f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, A = 1, Y^{(0)} = y, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{(S.31)}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{L(y, \boldsymbol{X})\{\beta^*(1, \boldsymbol{X}) - \beta^*(0, \boldsymbol{X})\} f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X})}{\beta^*(1, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) + \beta^*(0, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X}) + \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) \beta^*(0, \boldsymbol{X}) \beta^*(1, \boldsymbol{X})} \\ & = \frac{\mu^*(1, \boldsymbol{X}; L)\big\{1 + \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) \beta^*(0, \boldsymbol{X})\big\} \beta^*(1, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, X) f^*(Z = 0 \,|\, X)}{\beta^*(1, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) + \beta^*(0, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X}) + \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) \beta^*(0, \boldsymbol{X}) \beta^*(1, \boldsymbol{X})} \\ & \quad - \frac{\mu^*(0, \boldsymbol{X}; L)\big\{1 + \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) \beta^*(1, \boldsymbol{X})\big\} \beta^*(0, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X})}{\beta^*(1, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 1 \,|\, \boldsymbol{X}) + \beta^*(0, \boldsymbol{X}) f^*(Z = 0 \,|\, \boldsymbol{X}) + \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) \beta^*(0, \boldsymbol{X}) \beta^*(1, \boldsymbol{X})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & L(y, \boldsymbol{X})\{\beta^*(1, \boldsymbol{X}) - \beta^*(0, \boldsymbol{X})\} \\ & = \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) \beta^*(0, \boldsymbol{X}) \beta^*(1, \boldsymbol{X})\big\{\mu^*(1, \boldsymbol{X}; L) - \mu^*(0, \boldsymbol{X}; L)\big\} \end{aligned}$$

$$+\mu^*(1,\boldsymbol{X};L)\beta^*(1,\boldsymbol{X})-\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)\beta^*(0,\boldsymbol{X})$$

$$\Leftrightarrow\quad L(y,\boldsymbol{X})$$
$$=\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)+\frac{\{\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(0,\boldsymbol{X})+1\}\{\mu^*(1,\boldsymbol{X};L)-\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)\}\beta^*(1,\boldsymbol{X})}{\beta^*(1,\boldsymbol{X})-\beta^*(0,\boldsymbol{X})}\ .$$

假设在 $\boldsymbol{X}\in\mathcal{X}$ 处，$\mu^*(1,\boldsymbol{X};L)\neq\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)$。根据引理 B.2，$\beta^*(1,\boldsymbol{X})-\beta^*(0,\boldsymbol{X})$ 始终为正（或负），且对于所有 $y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$，$\alpha^*(y,\boldsymbol{X})>0$。这两个结果意味着

$$L(y,\boldsymbol{X})-\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)$$
$$=\underbrace{\{\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(0,\boldsymbol{X})+1\}\beta^*(1,\boldsymbol{X})}_{>0}\underbrace{\frac{\mu^*(1,\boldsymbol{X};L)-\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)}{\beta^*(1,\boldsymbol{X})-\beta^*(0,\boldsymbol{X})}}_{\neq 0}\ ,$$

这反过来表明，对于所有 $y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$，$L(y,\boldsymbol{X})>\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)$ 或 $L(y,\boldsymbol{X})<\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)$。因此，我们得到

$$\mathbb{E}\{L(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=1,Z=0,X\}>\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)\quad\text{ or}$$
$$\mathbb{E}\{L(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=1,Z=0,X\}<\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)\ .$$

然而，这与 μ^* 的定义矛盾，即 $\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)\equiv\mathrm{E}\{L(Y(0)\,\boldsymbol{X})\,|\,A=1,Z=0,\boldsymbol{X}\}$。因此，我们必有 $\mu^*(1,\boldsymbol{X};L)=\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)$，这反过来意味着 $L(y,\boldsymbol{X})=\mu^*(0,\boldsymbol{X};L)$。换言之，$L$ 不依赖于 $Y(0)$。因此，我们如下建立 $\tilde{v}(Y(0)\,Z,\boldsymbol{X})=0$：

$$\begin{aligned}\tilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})&\overset{(S.35)}{=}\big[L(Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\mathbb{E}\big\{L(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\big\}\big]\big\{Z-\mathbb{E}\big(Z\,|\,\boldsymbol{X}\big)\big\}\\&=\big[L(\boldsymbol{X})-\mathbb{E}\big\{L(\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\big\}\big]\big\{Z-\mathbb{E}\big(Z\,|\,\boldsymbol{X}\big)\big\}\\&=0\ .\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

B.5 估计误差的收敛速率

在陈述引理之前，我们先引入一些符号。回忆一下，$\pi(Y_{(0)}\,Z,\boldsymbol{X})=\alpha(Y_{(0)}\,\boldsymbol{X})\beta(Z,\boldsymbol{X})$。对于一般函数 g，将 $g(Y_{(0)}\,Z,\boldsymbol{X})$ 的 $L^2(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$- 范数定义为

$$\|g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}=\Big\{\int_{\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}}g^2(y,Z,\boldsymbol{X})\,dy\Big\}^{1/2}\ .$$

对于来自估计折 $\widehat{g}^{(-k)}$ $\mathcal{I}_k(k\in\{1,\ldots,K\})$ 的估计函数，以及固定函数 g，令

$$\mathbb{E}^{(-k)}\{\widehat{g}^{(-k)}(V)\,|\,W\}=\int\widehat{g}^{(-k)}(v)f^*(V=v\,|\,W)\,dv\ ,$$
$$\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{g(V)\,|\,W\}=\int g(v)\widehat{f}^{(-k)}(V=v\,|\,W)\,dv\ .$$

引理 B.5. 假设定理 *5.1* 中的假设成立。则对于$k\in\{1,\ldots,K\}$，我们有如下结果：

(i) 对于 $z \in \{0,\ 1\}$，我们有

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\gamma^*(Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\&\asymp\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\ .\end{aligned}\tag{S.37}$$

(ii) 对于 $z \in \{0,1\}$，我们有

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}\\&\lesssim\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})\|\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})\|\end{array}\right].\end{aligned}\tag{S.38}$$

(iii)

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\&\lesssim\left[\begin{array}{l}\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\+\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\end{array}\right].\end{aligned}\tag{S.39}$$

(iv) 令 $\mathcal{N}^*(Z,\boldsymbol{X})$ 和 $\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})$ 分别表示归一化常数及其估计量，定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^*(Z,\boldsymbol{X})&=\mathbb{E}\big\{\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\big\}\ ,\\\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})&=\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\big\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\big\}\ .\end{aligned}$$

那么，我们有

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\mathcal{N}^*(Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\&\lesssim\left[\begin{array}{l}\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\+\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\end{array}\right].\end{aligned}\tag{S.40}$$

(v) 令 $\alpha^*_{\mathcal{N}}$, $\beta_{\mathcal{N}}$, $\widehat{\alpha}^{(-k)}{}_{\mathcal{N}}$ 和 $\widehat{\beta}^{(-k)}{}_{\mathcal{N}}$ 为：

$$\begin{aligned}\alpha^*_{\mathcal{N}}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})&=\frac{\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{\mathcal{N}^*(Z,\boldsymbol{X})}\ ,&\qquad\beta^*_{\mathcal{N}}(Z,\boldsymbol{X})&=\frac{\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{\alpha^*_{\mathcal{N}}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}\ ,\\\widehat{\alpha}^{(-k)}_{\mathcal{N}}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})&=\frac{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}\ ,&\qquad\widehat{\beta}^{(-k)}_{\mathcal{N}}(Z,\boldsymbol{X})&=\frac{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{\widehat{\alpha}^{(-k)}_{\mathcal{N}}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}\ .\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\alpha}^{(-k)}_{\mathcal{N}}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\alpha^*_{\mathcal{N}}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\&\lesssim\left[\begin{array}{l}\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\+\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\end{array}\right],\\&\big\|\widehat{\beta}^{(-k)}_{\mathcal{N}}(Z,\boldsymbol{X})-\beta^*_{\mathcal{N}}(Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\end{aligned}\tag{S.41}$$

$$\lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} . \tag{S.42}$$

(vi) 对于一致有界函数 $v(Y_{(0)}\,Z,\boldsymbol{X})$，我们有

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};v)-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};v)\right\|_{P,2} \\ &\lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{S.43}$$

(vii) 对于 $a\in\{0,1\}$，我们有

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,A=a,Y^{(0)},\boldsymbol{X})-f^*(Z=1\,|\,A=a,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ &\lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{S.44}$$

(viii)

$$\begin{aligned} &\left\|f^*(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ &\lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{S.45}$$

(ix)

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ &\lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{S.46}$$

and

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\right\|_{P,2} \\ &\lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{S.47}$$

(x) 对于一致有界函数 $\mathcal{G}^{(0)}\equiv\mathcal{G}(Y_{(0)}\boldsymbol{X})$，令 $\widehat{\omega}^{(-k)}$ 为一个满足定理 *4.1*和 *4.2*关于估计密度的条件的函数，即：

$$\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\left[\begin{array}{l} \left\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\right\} \\ -\left\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\right\} \end{array}\,\middle|\, A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]=0 .$$

于是，我们有

$$\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l} \left\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right\} \\ -\left\{\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\right\} \end{array}\,\middle|\, A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right\|_{P,2}$$

$$\lesssim \left[\begin{array}{l} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{array} \right], \tag{S.48}$$

and

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l} \{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\} \\ -\{\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\} \end{array} \middle| A=1,Z,\boldsymbol{X}\right]\right\|_{P,2} \\ &\lesssim \left[\begin{array}{l} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{array} \right], \end{aligned} \tag{S.49}$$

(*xi*) 对于一致有界函数 ν，令 $\widetilde{\nu}^{(-k)}$ 为

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nu}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \\ &=\nu(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\nu(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,Z,\boldsymbol{X}\} \\ &\qquad -\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\nu(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\}+\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\nu(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}\,. \end{aligned}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} &\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}\right\| \\ &\lesssim \left[\begin{array}{l} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{array} \right] \\ &\qquad \times\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\,. \end{aligned} \tag{S.50}$$

证明。 为记号简略起见，所有关于 y 的积分均在 $\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$ 上取。也就是说，我们记 $\int g(y,a,z,\boldsymbol{X})\,dy \equiv \int_{\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}} g(y,a,z,\boldsymbol{X})\,dy$。

(i)由直接的代数运算，我们得到

$$\begin{aligned} &\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\gamma^*(Z,\boldsymbol{X}) \\ &=\frac{\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})}{\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})}-\frac{f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})} \\ &=\frac{\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})}{\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})} \\ &=\frac{\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})}{\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})}\,. \end{aligned}$$

由此可得

$$\left\|\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\gamma^*(Z,\boldsymbol{X})\right\| \asymp \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|\,.$$

取期望，我们得到

$$\left\|\widehat{\gamma}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\gamma^*(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \asymp \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\,.$$

(ii) 我们首先固定 $z_0 \in \mathcal{Z}$ 和 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$，以考察映射 Ψ 及其对应的不动点。对于

为简化符号，我们省略对 z_0的依赖。令 $\Psi(g;\ \vartheta)$ 表示主文中参数为 $\vartheta \equiv \{f_Y,\ f_A\}$的（S.14）中的映射：

$$\Psi(g;\vartheta) = \frac{\{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X}) + \mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)\}R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)} ,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta) &= \frac{f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})} ,\\
\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta) &= \frac{\left\{\begin{array}{l} f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \\ -f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \end{array}\right\}}{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})} ,\\
R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta) &= \int g(t,\boldsymbol{X})R_Y(t,\boldsymbol{X};\vartheta)\,dt ,\\
R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta) &= \frac{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})} .
\end{aligned}$$

令 $g^\star(\vartheta)$为 $\Psi(\cdot;\ \vartheta)$的不动点，即 $g(\vartheta) = \Psi(g;\vartheta)$。令 Ψ^* 和 $\widehat{\Psi}^{(-k)}$ 分别表示在真实参数 ϑ^* 和估计参数 $\widehat{\vartheta}^{(-k)}$ 处取值的映射。因此，令 $g^\star$ 和 $\widehat{g}^{(-k)\star}$分别表示 Ψ^* 和 $\widehat{\Psi}^{(-k)}$对应的不动点。

由 (S.29)、(S.63)、(S.65)，可得

$$\begin{aligned}
g^\star(y,\boldsymbol{X}) &= \frac{\alpha^*(y,\boldsymbol{X})f^*(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\{\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X}\}}\\
&= \frac{\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(z_0,\boldsymbol{X})f^*(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{\gamma^*(z_0,\boldsymbol{X})} ,
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\alpha^*(y,\boldsymbol{X})\beta^*(z,\boldsymbol{X}) &= \frac{g^\star(y,\boldsymbol{X})\gamma^*(z,\boldsymbol{X})}{f^*(Y=y\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})} ,\\
\widehat{\alpha}^{(-k)}(y,\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X}) &= \frac{\widehat{g}^{(-k)\star}(y,\boldsymbol{X})\widehat{\gamma}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X})}{\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})} .
\end{aligned}$$

因此，我们得到关于 $z \in \{0,\ 1\}$的以下结果：

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X}) - \alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(z,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}\\
&\lesssim \left\|\widehat{g}^{(-k)\star}(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) - g^\star(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|\\
&\quad + \underbrace{\left[\begin{array}{l} \|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2} \\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2} \\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})\| \\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})\| \end{array}\right]}_{\equiv\mathfrak{R}(\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*)} .
\end{aligned} \tag{S.51}$$

因此，要刻画 $\widehat{\alpha}^{(-k)}\widehat{\beta}^{(-k)}$的收敛速率，必须先确定 $\widehat{g}^{(-k)\star}$的收敛速率。

我们首先证明 at $g^\star(\vartheta)$ 关于 ϑ 是一个光滑映射。为此，我们建立 Ψ i s

关于 ϑ 和 g Fréchet 可微。我们首先考察关于 ϑ 的可微性。令 $D_\vartheta\Psi(g;\vartheta)[\delta]$ 表示对于固定的 g， $\Psi(g;\vartheta)$ 关于 ϑ 沿 $\delta \equiv \{\mathtt{f}_Y,\ \mathtt{f}_A\}$ 方向的路径导数，即，

$$
\begin{aligned}
&D_\vartheta\Psi(g;\vartheta)[\delta] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Psi(g;\vartheta+t\delta)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{D_\vartheta\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]g(y,\boldsymbol{X}) + D_\vartheta\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta) \\
&\quad + \frac{\{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X}) + \mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)\}}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}\int g(t,\boldsymbol{X})D_\vartheta R_Y(t,\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]\,dt \\
&\quad - \frac{\{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X}) + \mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)\}R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}\frac{D_\vartheta R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)} \\
&= \Psi(g;\vartheta)\left[\begin{array}{l}
\dfrac{D_\vartheta\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]g(y,\boldsymbol{X}) + D_\vartheta\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]}{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X}) + \mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)} \\
+\dfrac{\int g(t,\boldsymbol{X})D_\vartheta R_Y(t,\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]\,dt}{\int g(t,\boldsymbol{X})R_Y(t,\boldsymbol{X};\vartheta)\,dt} - \dfrac{D_\vartheta R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}
\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

因此，若$\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$, 与 R_Y关于 ϑ是 Fréchet 可微的，则由标准泛函演算，Ψ也是 Fréchet 可微的，因为在参数空间上所有分母均远离零。

我们详细给出$\mathcal{C}_1$的弗雷歇可微性证明。$\mathcal{C}_2$ 与 R_Y 的证明遵循相同论证，故略去。$\mathcal{C}_1$ 的路径导数由下式给出

$$
D_\vartheta\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta] = \frac{\left[\begin{array}{l}
\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\
-f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})
\end{array}\right]}{f_A^2(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}.
$$

因此，我们求得

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta+\delta) - \mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta) - D_\vartheta\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta] \\
&= \frac{\left[\begin{array}{l}
\{f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) + \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\}f^2(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\
-\{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) + \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\}f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \\
-\{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) + \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\}\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\
+\{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) + \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\}f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})
\end{array}\right]}{\{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) + \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\}f^2(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})} \\
&= \frac{\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\left\{\begin{array}{l}
f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\
-f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})
\end{array}\right\}}{\{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) + \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})\}f^2(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}.
\end{aligned}
$$

从而，我们得到

$$
\lim_{t\to 0}\frac{\left|\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta+t\delta) - \mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta) - D_\vartheta\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)[t\delta]\right|}{t} = 0\ ,\quad \forall\delta\ ,
$$

这表明$\mathcal{C}_1$ 关于 ϑ是 Fréchet 可微的。

同样，我们还发现

$$\begin{aligned}\left|D_\vartheta \mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)[\delta]\right| &= \frac{\left|\begin{array}{l} \mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\ -f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \end{array}\right|}{f^2(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})} \\ &\lesssim |\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})| + |\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})|\ .\end{aligned}$$

该不等式直接由有界性假设得出。

同理，$\mathcal{C}_2$ 和 R_Y 也是 Fréchet 可微的。这进一步表明，Ψ 关于 ϑ是 Fréchet 可微的。我们将关于 ϑ 的 Fréchet 导数算子记为 $D_\vartheta\Psi(g;\vartheta):\delta \mapsto D_\vartheta\Psi(g;\vartheta)[\delta]$ 其中 δ 是 ϑ中的扰动方向。此外，我们有以下界

$$\begin{aligned}&\left\|D_\vartheta\Psi^*(g^\star)[\delta]\right\|_{Y,2} \\ &\lesssim \left[\begin{array}{l} \|\mathtt{f}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2} + \|\mathtt{f}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2} \\ +\|\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})\| + \|\mathtt{f}(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})\| \end{array}\right] \\ &\equiv \mathfrak{R}(\delta)\ ,\end{aligned} \tag{S.52}$$

其中，不等式由有界性条件得出。

接下来，对于固定的 ϑ，令 $D_g\Psi(g;\vartheta)[h]$ 表示 $\Psi(g;\vartheta)$关于 g在 h方向上的路径导数，即，

$$\begin{aligned}&D_g\Psi(g;\vartheta)[h] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Psi(g+th;\vartheta)\bigg|_{t=0} \\ &= \underbrace{\frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}}_{\equiv\mathcal{A}(y,\boldsymbol{X};g,\vartheta)} h(y,\boldsymbol{X}) + \underbrace{\frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}}_{\equiv\mathcal{B}(y,\boldsymbol{X};g,\vartheta)} R_D(\boldsymbol{X};h,\vartheta)\ .\end{aligned}$$

定义 $\Delta(g;\vartheta)[h] \equiv \Psi(g+h;\vartheta) - \Psi(g;\vartheta) - D_g\Psi(g;\vartheta)[h]$，其表达式为

$$\begin{aligned}&\Delta(g;\vartheta)[h] \\ &= \Psi(g+h;\vartheta) - \Psi(g;\vartheta) - D_g\Psi(g;\vartheta)[h] \\ &= \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)\{g(y,\boldsymbol{X})+h(y,\boldsymbol{X})\}+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}R_D(\boldsymbol{X};g+h,\vartheta) \\ &\quad - \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta) \\ &\quad - \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)h(y,\boldsymbol{X})}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}R_D(\boldsymbol{X};g,\vartheta) - \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)g(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}R_D(\boldsymbol{X};h,\vartheta) \\ &= \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)h(y,\boldsymbol{X})}{R_Y(y,\boldsymbol{X};\vartheta)}R_D(\boldsymbol{X};h,\vartheta)\ .\end{aligned}$$

注意，

$$R_D(\boldsymbol{X};h,\vartheta) \lesssim \left\|h(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}\ .$$

因此，我们建立了

$$\left|\Delta(g;\vartheta)[h]\right| \lesssim \left\|h(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2} \times \left|h(y,\boldsymbol{X})\right| ,$$

这进而意味着

$$\left\|\Delta(g;\vartheta)[h]\right\|_{Y,2} \lesssim \left\|h(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}^2 .$$

因此，我们得到

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left\|\Delta(g;\vartheta)[th]\right\|_{Y,2}}{|t|} = 0 , \quad \forall h ,$$

这证明了 Ψ 关于 g 是 Fréchet 可微的。我们将关于 g 的 Fréchet 导数算子记为 $D_g\Psi(g;\vartheta): h \mapsto D_g\Psi(g;\vartheta)[h]$，其中 h 是 g 中的扰动方向。

现在，考虑映射 $\Lambda(g,\vartheta) = g - \Psi(g;\vartheta)$。$\Lambda$ 关于 ϑ 在 $(g^\star,\vartheta^*)$ 处的 Fréchet 导数算子由算子 $D_\vartheta\Lambda(g,\vartheta) = -D_\vartheta\Psi^*(g^\star): \delta \mapsto -D_\vartheta\Psi^*(g^\star)[\delta]$ 给出。同样，Λ 关于 g 在 $(g^\star,\vartheta^*)$ 处的 Fréchet 导数算子由算子 $D_g\Lambda(g,\vartheta) = I - D_g\Psi^*(g^\star): h \mapsto h - D_g\Psi^*(g^\star)[h]$ 给出。我们将证明第二个 Fréchet 导数算子是可逆的。注意

$$\begin{aligned}
&D_g\Lambda(g^\star,\vartheta^*)[h] \\
&= h(y,\boldsymbol{X}) - D_g\Psi^*(g^\star)[h] \\
&= \left\{1 - \mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)\right\}h(y,\boldsymbol{X}) - \mathcal{B}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)R_D^*(\boldsymbol{X};h) \\
&\equiv b(y,\boldsymbol{X}) .
\end{aligned} \tag{S.53}$$

结合 (S.76) 和 (S.77)，再结合 $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X};\vartheta)$ 的定义，可得与 (S.78) 类似的结果：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star) \\
&\in \begin{cases}
\left[\frac{1/\beta^*(z_1,\boldsymbol{X})+c_\alpha}{1/\beta^*(z_0,\boldsymbol{X})+c_\alpha}, \frac{1/\beta^*(z_1,\boldsymbol{X})+C_\alpha}{1/\beta^*(z_0,\boldsymbol{X})+C_\alpha}\right] \subseteq (0,1) & \text{if } \beta^*(z_1,\boldsymbol{X}) > \beta^*(z_0,\boldsymbol{X}) \\
\left[\frac{1/\beta^*(z_1,\boldsymbol{X})+C_\alpha}{1/\beta^*(z_0,\boldsymbol{X})+C_\alpha}, \frac{1/\beta^*(z_1,\boldsymbol{X})+c_\alpha}{1/\beta^*(z_0,\boldsymbol{X})+c_\alpha}\right] \subseteq (1,\infty) & \text{if } \beta^*(z_1,\boldsymbol{X}) < \beta^*(z_0,\boldsymbol{X})
\end{cases} .
\end{aligned} \tag{S.54}$$

这意味着，对所有 $y \in \mathcal{X}$，均有 $\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star) \neq 1$。

由 (S.54)，下列表达式定义良好，且其分母远离零：

$$h(y,\boldsymbol{X}) = \frac{b(y,\boldsymbol{X}) + \mathcal{B}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)R_D^*(\boldsymbol{X};h)}{1 - \mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)} . \tag{S.55}$$

两边同时乘以 R_Y^*，并对 y 积分，得到

$$\begin{aligned}
&R_D^*(\boldsymbol{X};h) \\
&= \int \frac{b(y,\boldsymbol{X})}{1 - \mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)} R_Y^*(y,\boldsymbol{X})\,dy + R_D^*(\boldsymbol{X};h)\int \frac{\mathcal{B}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}{1 - \mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)} R_Y^*(y,\boldsymbol{X})\,dy ,
\end{aligned}$$

这意味着

$$\underbrace{\left\{1-\int \frac{\mathcal{B}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}R_Y^*(y,\boldsymbol{X})\,dy\right\}}_{\equiv \mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X})} R_D^*(\boldsymbol{X};h)$$
$$= \left\{\int \frac{b(y,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}R_Y^*(y,\boldsymbol{X})\,dy\right\}. \tag{S.56}$$

根据 $g^\star$的定义，我们得到

$$\frac{\mathcal{B}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}R_Y^*(y,\boldsymbol{X}) = \frac{\mathcal{C}_1^*(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2^*(y,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}$$
$$= \frac{g^\star(y,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}\frac{R_Y^*(y,\boldsymbol{X})}{R_D^*(\boldsymbol{X};g^\star)}.$$

对 y积分，我们得到

$$\mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X}) = 1-\frac{1}{R_D^*(\boldsymbol{X};g^\star)}\int \frac{g^\star(y,\boldsymbol{X})R_Y^*(y,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}\,dy. \tag{S.57}$$

若 $z_0=\arg\min_{z\in\{0,1\}} f(A=1\,|\,Z=z,\ \boldsymbol{X})$，则有 $\mathcal{A}^*(y,\ \boldsymbol{X};\ g^\star)\in(0,\ 1)$ 根据（S.54）。于是，（S.57）的右端变为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X}) &= 1-\frac{1}{R_D^*(\boldsymbol{X};g^\star)}\int \frac{g^\star(y,\boldsymbol{X})R_Y^*(y,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}\,dy\\ &< 1-\frac{1}{R_D^*(\boldsymbol{X};g^\star)}\int g^\star(y,\boldsymbol{X})R_Y^*(y,\boldsymbol{X})\,dy\\ &= 0.\end{aligned}$$

若 $z_0=\arg\max_{z\in\{0,1\}} f(A=1\,|\,Z=z,\ \boldsymbol{X})$，则有 $\mathcal{A}^*(y,\ \boldsymbol{X};\ g^\star)\in(1,\ \infty)$ 根据（S.54）。于是，（S.57）的右端变为

$$\mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X}) = 1-\frac{1}{R_D^*(\boldsymbol{X};g^\star)}\int \underbrace{\frac{g^\star(y,\boldsymbol{X})R_Y^*(y,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}}_{<0}\,dy > 1.$$

因此，我们得到$\mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X})\neq 0$。特别地，$1/\mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X})$ 一致有界。

结合（S.55）和（S.56），以及 $\mathcal{C}_3^*\neq 0$，可知

$$h(y,\boldsymbol{X}) = \frac{b(y,\boldsymbol{X})+\frac{\mathcal{B}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}{\mathcal{C}_3^*(\boldsymbol{X})}\int \frac{b(t,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(t,\boldsymbol{X};g^\star)}R_Y^*(t,\boldsymbol{X})\,dt}{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)}.$$

因此，映射 $D_g\Lambda(g^\star,\vartheta^*)\colon h\mapsto D_g\Lambda(g^\star,\vartheta^*)[h]$ 在 (S.53) 中是可逆的，具体而言：对于任意给定的函数 b，都存在一个方向 h 使得 $D_g\Lambda(g^\star,\vartheta^*)[h]=b$。此外，我们还可以得到

$$\left|\int \frac{b(t,\boldsymbol{X})}{1-\mathcal{A}^*(t,\boldsymbol{X};g^\star)}R_Y^*(t,\boldsymbol{X})\,dt\right| \lesssim \int |b(t,\boldsymbol{X})|\,dt \le \left\{\int b^2(t,\boldsymbol{X})\,dt\right\}^{1/2}.$$

因此， $L^2(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$-范数由 b 的 $L^2(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$-范数界定如下：

$$\begin{aligned}\big\|h(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}^2 &\lesssim \int \frac{b^2(y,\boldsymbol{X})+\int b^2(t,\boldsymbol{X})\,dt}{\{1-\mathcal{A}^*(y,\boldsymbol{X};g^\star)\}^2}\,dy \\ &\lesssim \int b^2(y,\boldsymbol{X})\,dy = \big\|b(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}^2 . \end{aligned} \tag{S.58}$$

根据已确立的结果，具体而言， Λ 的弗雷歇可微性以及可逆导数算子$D_g\Lambda(g^\star,\ \vartheta^*)$，可应用隐函数定理。因此，我们可以写作

$$\begin{aligned}&g^\star(\widehat{\vartheta}^{(-k)})-g^\star(\vartheta^*)\\ &= D_\vartheta g^\star(\vartheta^*)[\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*]+o_P\big(\|\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*\|_{Y,2}\big)\\ &= -\big\{D_g\Lambda(g^\star,\vartheta^*)\big\}^{-1}\circ D_\vartheta\Lambda(g^\star,\vartheta^*)[\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*]+o_P\big(\|\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*\|_{Y,2}\big)\ .\end{aligned}$$

Let $\widehat{b}^{(-k)}\equiv D_\vartheta\Lambda(g^\star,\ \vartheta^*)[\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*]$，以及 $\widehat{h}^{(-k)}=\big\{D_g\Lambda(g^\star,\ \vartheta^*)\big\}^{-1}[\widehat{b}^{(-k)}]$。于是，我们得到

$$\begin{aligned}&\big\|g^\star(\widehat{\vartheta}^{(-k)})-g^\star(\vartheta^*)\big\|_{Y,2}\\ &\lesssim \big\|\widehat{h}^{(-k)}\big\|+o_P\big(\|\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*\|_{Y,2}\big)\\ &\overset{(S.58)}{\lesssim} \big\|\widehat{b}^{(-k)}\big\|+o_P\big(\|\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*\|_{Y,2}\big)\\ &\overset{(S.52)}{\lesssim} \mathfrak{R}(\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*)+o_P\big(\|\widehat{\vartheta}^{(-k)}-\vartheta^*\|_{Y,2}\big)\ .\end{aligned} \tag{S.59}$$

结合（S.51）和（S.59），我们得到关于 $z\in\{0,\ 1\}$的以下结果：

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X})-\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(z,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}\\ &\lesssim \begin{bmatrix} \|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})\|\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})\| \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(iii) 在有界性条件下，根据引理B.3， $f^*(Y_{(0)}|\,\boldsymbol{X})$一致有界。因此，对于函数 $g(Y_{(0)}\,Z,\ \boldsymbol{X})$，我们有

$$\big\|g(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}^2=\int g^2(y,z,\boldsymbol{X})\,dy\asymp\int g^2(y,z,\boldsymbol{X})f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\,dy\ .$$

这进而导致

$$\begin{aligned}&\big\|g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}^2\\ &=\iint g^2(y,z,\boldsymbol{X})f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})f^*(\boldsymbol{X})\,d(y,z,\boldsymbol{X})\\ &\asymp\int\big\|g(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}^2 f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})f^*(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X}\\ &\le\int\{\big\|g(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}^2+\big\|g(Y^{(0)},0,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}^2\}f^*(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X}\ .\end{aligned}$$

我们还发现

$$
\begin{aligned}
&\int \left\{\|g(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}+\|g(Y^{(0)},0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\right\}^2 f^*(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X}\\
&\lesssim \int \left\{\|g(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}^2+\|g(Y^{(0)},0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}^2\right\} f^*(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X}\\
&\lesssim \int \left\{\|g(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}^2 f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})+\|g(Y^{(0)},0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}^2 f^*(Z=0\,|\,\boldsymbol{X})\right\} f^*(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X}\\
&\lesssim \int \|g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}^2 f^*(Z\,|\,\boldsymbol{X}) f^*(\boldsymbol{X})\,d(Z,\boldsymbol{X})\\
&\asymp \int \|g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\|^2 f^*(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X}) f^*(Z\,|\,\boldsymbol{X}) f^*(\boldsymbol{X})\,d(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\\
&= \left\|g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}^2 .
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
\left\|g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}^2 \asymp \int \left\{\left\|g(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}^2+\left\|g(Y^{(0)},0,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}^2\right\} f^*(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X} . \tag{S.60}
$$

现在取 $g=\widehat{\alpha}^{(-k)}\widehat{\beta}^{(-k)}-\alpha^*\beta^*$。由（S.38），可得

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(1,\boldsymbol{X})-\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(1,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}\\
+\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(0,\boldsymbol{X})-\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(0,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}
\end{bmatrix}\\
&\lesssim \begin{bmatrix}
\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\\
+\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=0,\boldsymbol{X})\|_{Y,2}\\
+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})\|\\
+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=0,\boldsymbol{X})\|
\end{bmatrix} .
\end{aligned}
$$

Mu将 $f^*(\boldsymbol{X})$ 两边相乘，并在 $\boldsymbol{X}$上积分，再利用（S.60），可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\alpha^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\
&\lesssim \begin{bmatrix}
\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\
+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}
\end{bmatrix} .
\end{aligned}
$$

（iv）注意

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\mathcal{N}^*(Z,\boldsymbol{X})\right\|^2\\
&=\left\|\int \widehat{\pi}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(y,Z,\boldsymbol{X})f^*(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\,dy\right\|^2\\
&\lesssim \int \begin{bmatrix}
\|\widehat{\pi}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(y,Z,\boldsymbol{X})\|^2\\
+\|\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|^2
\end{bmatrix} f^*(Y^{(0)}=y\,|\,Z,\boldsymbol{X})\,dy .
\end{aligned}
$$

将两边同乘以 $f^*(Z,\boldsymbol{X})$，并对 $(Z,\boldsymbol{X})$ 积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\mathcal{N}^*(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\
&\lesssim \begin{bmatrix}
\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\
+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}
\end{bmatrix} .
\end{aligned}
$$

(v) 我们首先给出 α的结果:

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\alpha_{\mathcal{N}}^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\
&\lesssim\|\widehat{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\mathcal{N}^{*}(Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}+\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\pi^{*}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\
&\overset{\text{(S.39),(S.40)}}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

进而， β 的结果可如下确立:

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\beta_{\mathcal{N}}^{*}(Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\
&\lesssim\|\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\alpha_{\mathcal{N}}^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\|_{P,2}+\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\pi^{*}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\
&\overset{\text{(S.40),(S.41)}}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

(vi) 根据 μ^{*} 和 $\widehat{\mu}^{(-k)}$的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};v)-\mu^{*}(Z,\boldsymbol{X};v)\\
&=\frac{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{v\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}-\frac{\mathbb{E}\{v\alpha^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\mathbb{E}\{\alpha^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}\\
&=\frac{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{v\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}-\frac{\mathbb{E}\{v\pi^{*}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}{\mathbb{E}\{\pi^{*}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}}.
\end{aligned}$$

然后，我们得到关于 $Z\in\{0,1\}$的以下结果:

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};v)-\mu^{*}(Z,\boldsymbol{X};v)\right\|\\
&\lesssim\left\|\begin{array}{l}\mathbb{E}\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\pi^{*}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\\-\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\mathbb{E}\{\pi^{*}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}\}\end{array}\right\|\\
&\lesssim\left\|\int v(y,Z,\boldsymbol{X})\left\{\begin{array}{l}\widehat{\pi}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\\-\pi^{*}(y,Z,\boldsymbol{X})f^{*}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right\}dy\right\|\\
&\quad+\left\|\int\left\{\begin{array}{l}\widehat{\pi}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\\-\pi^{*}(y,Z,\boldsymbol{X})f^{*}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right\}dy\right\|\\
&\lesssim\int\left\|\widehat{\pi}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-\pi^{*}(y,Z,\boldsymbol{X})f^{*}(Y=y\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|dy\\
&\lesssim\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\alpha^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^{*}(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}\\
&\quad+\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{Y,2}.
\end{aligned}$$

由（S.60），我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};v)-\mu^{*}(Z,\boldsymbol{X};v)\right\|_{P,2}\\
&\leq\left\|\widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})-\alpha^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta^{*}(Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\
&\quad+\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}
\end{aligned}$$

$$\overset{(S.39)}{\lesssim} \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix}.$$

（vii）我们首先证明 $A=0$的情形。显然可以证明

$$\begin{aligned} & f(Z=1\,|\,A=0,Y^{(0)},\boldsymbol{X}) \\ &= \frac{f(Y,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})}{\sum_{z=0}^{1} f(Y,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})} \\ &= \frac{f(Y\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})f(A=0\,|\,Z=1,\boldsymbol{X})}{\sum_{z=0}^{1} f(Y\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})f(A=0\,|\,Z=z,\boldsymbol{X})}. \end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\begin{aligned} & \left\|f^*(Z=1\,|\,A=0,Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,A=0,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\| \\ & \lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

接下来，我们证明 $A=1$ 的情形。注意， $f(Z=1\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})$ 表示为 as

$$\begin{aligned} & f(Z=1\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}) \\ &= \frac{f(Y^{(0)},A=1,Z=1,\boldsymbol{X})}{\sum_{z=0}^{1} f(Y^{(0)},A=1,Z=z,\boldsymbol{X})} \\ &\overset{(S.28)}{=} \frac{\pi(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})f(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})/\gamma(1,\boldsymbol{X})}{\sum_{z=0}^{1}\pi(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})f(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})/\gamma(z,\boldsymbol{X})}. \end{aligned}$$

由此，我们证明

$$\begin{aligned} & \left\|f^*(Z=1\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\| \\ & \lesssim \left\| \sum_{z=0}^{1} \left\{ \begin{array}{l} \pi^*(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})/\gamma^*(z,\boldsymbol{X}) \\ -\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})/\widehat{\gamma}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\} \right\| \\ & \quad + \left\| \begin{array}{l} \pi^*(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})/\gamma^*(1,\boldsymbol{X}) \\ -\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},1,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=1,\boldsymbol{X})/\widehat{\gamma}^{(-k)}(1,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\| \\ & \lesssim \sum_{z=0}^{1} \begin{bmatrix} \left\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\right\| \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z=z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z=z,\boldsymbol{X})\right\| \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z=z,\boldsymbol{X})\right\| \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将两边同乘以 $f^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})$ 并积分，我们得到

$$\begin{aligned} & \left\|f^*(Z=1\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ & \lesssim \begin{bmatrix} \left\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{(S.39)}}{\lesssim} \begin{bmatrix} \big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \end{bmatrix}.$$

(viii) 由（S.30），我们得到

$$\begin{aligned}
&\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\
&\overset{\text{(S.30)}}{=} \left\| \begin{array}{c} \big\{1+\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) \\ -\big\{1+\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\|_{P,2} \\
&\lesssim \begin{bmatrix} \big\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=0\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{(S.39)}}{\lesssim} \begin{bmatrix} \big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(ix) 在定理 4.2 的证明中，具体地，在（S.133）中，我们发现 $\omega(\cdot;\,\theta)$ 是关于其他干扰函数 $\theta=\{f_Y$、f_A、$f_Z\}$ 的可微泛函。因此，对于某个 $\theta' \equiv q\widehat{\theta}^{(-k)} + (1-q)\,\theta^*$，存在$q\in(0,1)$ 满足

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) &= \omega(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X};\widehat{\theta}^{(-k)}) \\
&= \omega(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X};\theta^*) + \nabla_\theta{}^{\intercal}\omega(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X};\theta')\big\{\widehat{\theta}^{(-k)}-\theta^*\big\} \\
&= \omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) + \nabla_\theta{}^{\intercal}\omega(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X};\theta')\big\{\widehat{\theta}^{(-k)}-\theta^*\big\}\,.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\big\|\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|^2 &= \big\|\nabla_\theta\omega(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X};\theta')\big\|^2\big\|\widehat{\theta}^{(-k)}-\theta^*\big\|^2 \\
&\lesssim \big\|\widehat{\theta}^{(-k)}-\theta^*\big\|^2\,,
\end{aligned}$$

其中我们使用了以下事实：在假设下，$\sup_{\theta'}\big\|\nabla_\theta\omega(Y^{(0)}Z,X;\theta')\big\|^2$ 有界。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\big\|\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\
&\lesssim \begin{bmatrix} \big\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X}) - f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

我们还证明了

$$\begin{aligned}
&\big\|\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)}) - \mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\big\| \\
&\le \int \big\|\widehat{\omega}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X}) - \omega^*(y,Z,\boldsymbol{X})\big\| f^*(Y^{(0)}=y\,|\,A=1,Z,\boldsymbol{X})\,dy \\
&\lesssim \big\|\widehat{\omega}^{(-k)}(y,1,\boldsymbol{X}) - \omega^*(y,1,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2} + \big\|\widehat{\omega}^{(-k)}(y,0,\boldsymbol{X}) - \omega^*(y,0,\boldsymbol{X})\big\|_{Y,2}\,.
\end{aligned}$$

由（S.60），我们得到

$$\left\|\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\right\|_{P,2}\lesssim\left\|\widehat{\omega}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})-\omega^*(y,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}. \tag{S.61}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\right\|_{P,2}\\
&\le\left\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\right\|_{P,2}+\left\|\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\right\|_{P,2}\\
&\overset{\text{(S.43),(S.61)}}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\+\left\|\widehat{\omega}^{(-k)}(y,Z,\boldsymbol{X})-\omega^*(y,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\end{array}\right]\\
&\overset{\text{(S.46)}}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\+\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\+\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

(x) 令 $\widehat{G}^{(-k)}(Y_{(0)}\,Z,\ \boldsymbol{X})=\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\ \boldsymbol{X};\ \mathcal{G})$。那么，通过直接运用代数，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(-k)}\left\{\widehat{G}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\,\middle|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right\}\\
&=\sum_{z=0}^{1}\left\{\widehat{G}^{(-k)}(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\right\}f^*(Z=z\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\\
&=\sum_{z=0}^{1}\left\{\widehat{G}^{(-k)}(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\right\}f^*(Z=z\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\\
&\quad-\underbrace{\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\left\{\widehat{G}^{(-k)}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right\}}_{=0}\\
&=\sum_{z=0}^{1}\left[\begin{array}{l}\left\{\widehat{G}^{(-k)}(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\right\}\\\quad\times\left\{f^*(Z=z\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Z=z\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

反过来，这意味着

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\left\{\widehat{G}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\,\middle|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right\}\right\|_{P,2}\\
&\lesssim\sum_{z=0}^{1}\left\|f^*(Z=z\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Z=z\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\
&\overset{\text{(S.44)}}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\+\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

这证明了（S.48）。

接下来，我们证明（S.49）。注意

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\left\{\widehat{G}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\,|\,A=1,Z,\boldsymbol{X}\right\}\right\|_{P,2}\\
&=\left\|\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{G}^{(-k)})\right\|_{P,2}\\
&\overset{\text{(S.43)}}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\+\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

(xi) 由 $\widetilde{\nu}^{(-k)}$的形式，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(-k)}\big\{\widetilde{\nu}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\big[\mathbb{E}^{(-k)}\big\{\widetilde{\nu}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\big\}\big]\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l}\mathbb{E}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,\boldsymbol{X}\big\}-\mathbb{E}^{(-k)}\big[\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\}\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big]\\ -\mathbb{E}^{(-k)}\big[\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big]+\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,\boldsymbol{X}\big\}\end{array}\right].
\end{aligned}\tag{S.62}$$

我们证明

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,\boldsymbol{X}\big\}&=\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\,f^*(Y^{(0)}=y,Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\\
&=\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\,f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\,.
\end{aligned}$$

同样，其他表示等于

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(-k)}\big[\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\}\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big]\\
&=\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\,,\\
&\mathbb{E}^{(-k)}\big[\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\big\{\nu\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big]\\
&=\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\,.
\end{aligned}$$

因此，（S.62）等于

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(-k)}\big\{\widetilde{\nu}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l}\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\,f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\\ -\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\,\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})d(yz)\\ -\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\,f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\\ +\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\,\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\widehat{f}^{(-k)}(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\,d(yz)\end{array}\right]\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\left[\iint\nu(y,z,\boldsymbol{X})\left[\begin{array}{l}\big\{f^*(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}=y\,|\,\boldsymbol{X})\big\}\\ \times\big\{f^*(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})-\widehat{f}^{(-k)}(Z=z\,|\,\boldsymbol{X})\big\}\end{array}\right]d(yz)\right].
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbb{E}^{(-k)}\big\{\widetilde{\nu}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\big\|\\
&\lesssim\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Z\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Z\,|\,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\
&\overset{(S.45)}{\lesssim}\left[\begin{array}{l}\big\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\\ +\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^*(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\end{array}\right]\\
&\quad\times\big\|\widehat{f}^{(-k)}(Z\,|\,\boldsymbol{X})-f^*(Z\,|\,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}\,.
\end{aligned}$$

□

C 定理的证明

除非特别要求满足二元工具变量条件，否则我们考虑支撑集为$\mathcal{Z}$ $\subset$ 实数集的一般 Z 。我们先约定一些记号。对于非负量（Q_0， Q_1，……， Q_J），我们用 $Q_0 \lesssim \sum_{j=1}^{J} Q_j$表示：对于某些非负常数 C_1，……， C_J，有 $Q_0 \leq \sum_{j=1}^{J} C_j Q_j$。令 $Q_1 \asymp Q_2$表示 $Q_1 \lesssim Q_2$和 $Q_2 \lesssim Q_1$。最后，我们将给定（Z， $\boldsymbol{X}$）时的处理优势比记为 γ（Z， $\boldsymbol{X}$） $= f$（$A = 1 \,|\, Z$， $\boldsymbol{X}$）$/f$（$A = 0 \,|\, Z$， $\boldsymbol{X}$）。

C.1 定理3.1的证明

定理3.1 直接由定理A.1得出，因为它对应于 Z 为二元的特殊情形。定理A.1的证明将在下一章节给出。

C.2 定理A.1的证明

我们固定 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}$的一个任意取值。为简洁起见，我们省略符号中对 θ 的依赖。根据引理B.2，我们发现，如果 $z_1 \in \mathcal{Z}^c_{z_0,\boldsymbol{X}}$，则 $\beta(z_1, \boldsymbol{X}) \neq \beta(z_0, \boldsymbol{X})$。

我们首先证明不动点方程存在一个解。给定完整数据的分布 $(Y_{(0)}\, A, Z \mid \boldsymbol{X})$，我们引入以下简写符号：

$$D(Z, \boldsymbol{X}) = \mathbb{E}\big\{\alpha(Y, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 0, Z, \boldsymbol{X}; f_Y\big\}\,, \tag{S.63}$$

$$R_Y(y, \boldsymbol{X}) = \frac{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}\,,$$

$$R_D(\boldsymbol{X}) = \frac{D(z_1, \boldsymbol{X})}{D(z_0, \boldsymbol{X})}\,, \tag{S.64}$$

$$g_{z_0}(y, \boldsymbol{X}) = \frac{\alpha(y, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}{D(z_0, \boldsymbol{X})}\,, \tag{S.65}$$

$$g_{z_1}(y, \boldsymbol{X}) = \frac{\alpha(y, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{D(z_1, \boldsymbol{X})} = \frac{g_{z_0}(y, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X})}{R_D(\boldsymbol{X})}\,.$$

对于 $g_z(y,\ \boldsymbol{X})$，我们发现

$$g_z(y, \boldsymbol{X}) > 0\,, \quad \forall y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}},\ z \in \{z_0, z_1\} \tag{S.66}$$

$$\int g_z(y, \boldsymbol{X})\, dy = 1\,, \quad z \in \{z_0, z_1\}\,, \tag{S.67}$$

$$\int g_{z_0}(y, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X})\, dy = R_D(\boldsymbol{X})\,. \tag{S.68}$$

值得注意的是， $g_z(y,\ \boldsymbol{X})$ 的构造对边界条件 $\alpha(y_R,\ \boldsymbol{X}) = 1$ 并不敏感。具体而言，若对某个函数 $c(\boldsymbol{X})$，我们取 $\alpha'(y,\ \boldsymbol{X}) = \alpha(y,\ \boldsymbol{X})c(\boldsymbol{X})$，则可得

$$\begin{aligned} g_z(y, \boldsymbol{X}; \alpha', f_Y) &= \frac{\alpha'(y, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\big\{\alpha'(Y, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 0, Z, \boldsymbol{X}; f_Y\big\}} \\ &= \frac{\alpha(y, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X})}{D(z, \boldsymbol{X})} = g_z(y, \boldsymbol{X}; \alpha, f_Y)\,. \end{aligned}$$

因此，可以不失一般性地施加边界条件 $\alpha(y_R, \boldsymbol{X}) = 1$ ，并且在构造 g_z 时可以忽略该条件。

我们发现， $\alpha(y, \boldsymbol{X})$ 可以表示为与 $g_{z_0}(y, \boldsymbol{X})/f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})$ 成正比的函数，其中 $\alpha(y_R, \boldsymbol{X}) = 1$，这意味着

$$\alpha(y, \boldsymbol{X}) = \frac{g_{z_0}(y, \boldsymbol{X})}{g_{z_0}(y_R, \boldsymbol{X})} \frac{f(Y = y_R \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}, \quad y \in \mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}. \tag{S.69}$$

此外， $\beta(z, \boldsymbol{X})$ 由（S.29）可表示如下：

$$\beta(z, \boldsymbol{X}) = \frac{f(A = 1 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X})/f(A = 0 \,|\, Z = z, \boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\{\alpha(Y, \boldsymbol{X}) \,|\, A = 0, Z = z, \boldsymbol{X}; f_Y\}}, \quad z \in \mathcal{Z}. \tag{S.70}$$

因此，现在只需证明 g_{z_0} 是映射 Ψ的不动点，且该不动点唯一。

我们首先证明 g_{z_0} 是 Ψ的不动点，从而证明不动点方程存在解。由（S.30），可得

$$\begin{aligned}
1 &\overset{\text{(IV2)}}{=} \frac{f(Y^{(0)} = y \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{f(Y^{(0)} = y \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X})} \\
&\overset{\text{(S.30)}}{=} \frac{\left\{1 + \dfrac{\alpha(y, \boldsymbol{X})\gamma(z_1, \boldsymbol{X})}{D(z_1, \boldsymbol{X})}\right\} \dfrac{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{1 + \gamma(z_1, \boldsymbol{X})}}{\left\{1 + \dfrac{\alpha(y, \boldsymbol{X})\gamma(z_0, \boldsymbol{X})}{D(z_0, \boldsymbol{X})}\right\} \dfrac{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}{1 + \gamma(z_0, \boldsymbol{X})}} \\
&= \frac{D(z_0, \boldsymbol{X})\big\{D(z_1, \boldsymbol{X}) + \alpha(y, \boldsymbol{X})\gamma(z_1, \boldsymbol{X})\big\} f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{D(z_1, \boldsymbol{X})\big\{D(z_0, \boldsymbol{X}) + \alpha(y, \boldsymbol{X})\gamma(z_0, \boldsymbol{X})\big\} f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X})}.
\end{aligned}$$

最后一行意味着

$$\begin{aligned}
& \alpha(y, \boldsymbol{X}) \left\{ \begin{array}{l} D(z_0, \boldsymbol{X})\gamma(z_1, \boldsymbol{X}) f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \\ -D(z_1, \boldsymbol{X})\gamma(z_0, \boldsymbol{X}) f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) \\ -f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} D(z_1, \boldsymbol{X}) D(z_0, \boldsymbol{X}) \\
\Rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} \gamma(z_1, \boldsymbol{X}) \dfrac{f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{D(z_1, \boldsymbol{X})} \\ -\gamma(z_0, \boldsymbol{X}) \dfrac{f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X})}{D(z_0, \boldsymbol{X})} \end{array} \right\} \alpha(y, \boldsymbol{X}) \\
&= f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) - f(Y = y, A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \\
\Rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} f(A = 1 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \dfrac{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_1, \boldsymbol{X})}{D(z_1, \boldsymbol{X})} \\ -f(A = 1 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) \dfrac{f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X})}{D(z_0, \boldsymbol{X})} \end{array} \right\} \alpha(y, \boldsymbol{X}) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} f(A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X}) \\ -f(A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} \\
\Rightarrow \quad & \left\{ f(A = 1 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \frac{R_Y(y, \boldsymbol{X})}{R_D(\boldsymbol{X})} - f(A = 1 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) \right\} g_{z_0}(y, \boldsymbol{X}) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} f(A = 0 \,|\, Z = z_0, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_0, \boldsymbol{X}) \\ -f(A = 0 \,|\, Z = z_1, \boldsymbol{X}) f(Y = y \,|\, A = 0, Z = z_1, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} f(A=1 \,|\, Z=1, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=1 \,|\, Z=0, \boldsymbol{X}) R_D(\boldsymbol{X}) \end{array} \right\} g_{z_0}(y, \boldsymbol{X}) \\
& = \left\{ \begin{array}{l} f(A=0 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=0 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_1, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} R_D(\boldsymbol{X}) \ . \qquad \text{(S.71)}
\end{aligned}
$$

最后一行（S.71）可表示为

$$
g_{z_0}(y, \boldsymbol{X}) = \Psi\big(g_{z_0}(y, \boldsymbol{X})\big) \ , \qquad \text{(S.72)}
$$

其中， Ψ是定理陈述中定义的映射，即:

$$
\begin{aligned}
& \Psi\big(g(y, \boldsymbol{X})\big) \\
& = \frac{\left\{ \begin{array}{l} f(A=1 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) g(y, \boldsymbol{X}) \\ +f(A=0 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=0 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_1, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} \int g(t, \boldsymbol{X}) R_Y(t, \boldsymbol{X}) \, dt}{f(A=1 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X})} \ .
\end{aligned}
$$

因此， g_{z_0} 在（S.65）中是映射 Ψ的不动点。

现在，我们通过反证法证明不动点方程 (S.72) 有唯一解。假设存在两个不同的解 $g' \equiv g_{z_0}$ 和 $g^\dagger$ ，它们均属于 (S.65) 并满足 (S.72)。相应地，设 (α', β') 和 $(\alpha^\dagger, \beta^\dagger)$ 分别为由 (S.69) 和 (S.70) 定义、与 g' 和 $g^\dagger$ 相关联的函数。首先注意到， Ψ 的不动点必须满足方程 (S.67)，即 $\int g(y, \boldsymbol{X}) \, dy = 1$，如下所示:

$$
\begin{aligned}
& g = \Psi(g) \\
\Rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} f(A=1 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=1 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \int g(t, \boldsymbol{X}) R_Y(t, \boldsymbol{X}) \, dt \end{array} \right\} g(y, \boldsymbol{X}) \\
& = \left\{ \begin{array}{l} f(A=0 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=0 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_1, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} \int g(t, \boldsymbol{X}) R_Y(t, \boldsymbol{X}) \, dt \\
\Rightarrow \quad & \left\{ f(A=1 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) - f(A=1 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \int g(y, \boldsymbol{X}) \, dy \right\} \int g(t, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \, dt \\
& = \big\{ f(A=0 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) - f(A=0 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) \big\} \int g(t, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \, dt \\
\Rightarrow \quad & f(A=1 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \int g(y, \boldsymbol{X}) \, dy = f(A=1 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) \\
\Rightarrow \quad & \int g(y, \boldsymbol{X}) \, dy = 1 \ .
\end{aligned}
$$

Unde在假设存在多个解的情况下，我们考虑以下两种可能的情形 s:

(情形 1): 假设 R_D 在（S.68）中的值对 g' 和 $g^\dagger$相同，即

$$
R_D(\boldsymbol{X}) = \int g'(y, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \, dy = \int g^\dagger(y, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \, dy \ .
$$

由于 g' 和 $g^\dagger$ 均满足（S.72），因此它们也都必须满足（S.71），即:

$$
\left\{ \begin{array}{l} f(A=1 \,|\, Z=z_1, \boldsymbol{X}) R_Y(y, \boldsymbol{X}) \\ -f(A=1 \,|\, Z=z_0, \boldsymbol{X}) R_D(\boldsymbol{X}) \end{array} \right\} g'(y, \boldsymbol{X})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \\ -f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\} R_D(\boldsymbol{X}) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) R_Y(y,\boldsymbol{X}) \\ -f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) R_D(\boldsymbol{X}) \end{array} \right\} g^\dagger(y,\boldsymbol{X}) \ . \qquad \text{(S.73)}
\end{aligned}
$$

注意， g' 和 $g^\dagger$ 的共同系数为

$$
\begin{aligned}
& f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) R_Y(y,\boldsymbol{X}) - f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) R_D(\boldsymbol{X}) \\
&= f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \frac{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})} \\
&\quad - f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \frac{\mathbb{E}\{\alpha'(Y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X};f_Y\}}{\mathbb{E}\{\alpha'(Y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X};f_Y\}} \\
&\overset{\text{(S.29)}}{=} f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \frac{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})} \\
&\quad - f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \frac{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})/f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})/f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})} \frac{\beta'(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta'(z_1,\boldsymbol{X})} \\
&= f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \left\{ \frac{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})} - \frac{f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})} \frac{\beta'(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta'(z_1,\boldsymbol{X})} \right\} \\
&= f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \left\{ \frac{f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})} - \frac{\beta'(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta'(z_1,\boldsymbol{X})} \right\} \\
&\overset{\text{(S.31)}}{=} f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \left\{ \frac{1+\alpha'(y,\boldsymbol{X})\beta'(z_0,\boldsymbol{X})}{1+\alpha'(y,\boldsymbol{X})\beta'(z_1,\boldsymbol{X})} - \frac{\beta'(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta'(z_1,\boldsymbol{X})} \right\} \\
&= f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \frac{\beta'(z_1,\boldsymbol{X}) - \beta'(z_0,\boldsymbol{X})}{\{1+\alpha'(y,\boldsymbol{X})\beta'(z_1,\boldsymbol{X})\}\beta'(z_1,\boldsymbol{X})} \neq 0 \ .
\end{aligned}
$$

最后一个等式由引理 B.2得出，这意味着 $\beta'(z_1,\boldsymbol{X}) \neq \beta'(z_0,\boldsymbol{X})$ 满足相关性假设(IV3)。因此，(S.73) 意味着 $g' = g^\dagger$，这与两个解互不相同的假设矛盾。因此， g' 和 $g^\dagger$ 得到相同 R_D 的情形不可能成立。因此，与 g' 相关的和 $g^\dagger$必定不同。

(情形2)：根据情形 1 中的观察，只需考虑 R_D 在 (S.68) 中对于g'和 $g^\dagger$的取值不同时的情况，分别记为 $R'_D(\boldsymbol{X})$ 和 $R^\dagger_D(\boldsymbol{X})$。此外，令 $D'(Z,\boldsymbol{X})$ 和 $D^\dagger(Z,\boldsymbol{X})$ 分别表示 (S.63) 中优势比函数的期望值，即:

$$
\begin{aligned}
D'(Z,\boldsymbol{X}) &= \mathbb{E}\{\alpha'(y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X};f_Y\} \\
D^\dagger(Z,\boldsymbol{X}) &= \mathbb{E}\{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X};f_Y\}
\end{aligned}
$$

注意， $R'_D(\boldsymbol{X}) = D'(z_1,\boldsymbol{X})/D'(z_0,\boldsymbol{X})$，且 $R^\dagger_D(\boldsymbol{X}) = D^\dagger(z_1,\boldsymbol{X})/D^\dagger(z_0,\boldsymbol{X})$。

根据（S.30）和 （IV2），我们得到 $Y^{(0)}$ |（Z， $\boldsymbol{X}$）的诱导密度为

$$
\begin{aligned}
& \left\{ 1 + \frac{\alpha^\#(y,\boldsymbol{X})}{D^\#(z_1,\boldsymbol{X})} \frac{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})} \right\} f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\
&\overset{\text{(S.30)}}{=} f^\#(Y^{(0)}=y\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X}) \\
&\overset{\text{(IV2)}}{=} f^\#(Y^{(0)}=y\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \\
&\overset{\text{(S.30)}}{=} \left\{ 1 + \frac{\alpha^\#(y,\boldsymbol{X})}{D^\#(z_0,\boldsymbol{X})} \frac{f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})} \right\} f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \ , \quad \# \in \{',\dagger\} \ .
\end{aligned}
$$

令 $\gamma_z = f\left(A=1 \,|\, Z=z,\ \boldsymbol{X}\right) / f\left(A=0 \,|\, Z=z,\ \boldsymbol{X}\right)$，则有

$$
\begin{aligned}
& \frac{1+\dfrac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1}}{1+\dfrac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}} = \frac{f(Y=y, A=0 \,|\, Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(Y=y, A=0 \,|\, Z=z_1,\boldsymbol{X})} = \frac{1+\dfrac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1}}{1+\dfrac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}} \\
\Rightarrow\ & \left\{1+\frac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1}\right\}\left\{1+\frac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}\right\} = \left\{1+\frac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}\right\}\left\{1+\frac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1}\right\} \\
\Rightarrow\ & \frac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1} + \frac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0} + \frac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_1,\boldsymbol{X})}\frac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_1\gamma_0 \\
& \qquad = \frac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1} + \frac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_0,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0} + \frac{\alpha'(y,\boldsymbol{X})}{D'(z_0,\boldsymbol{X})}\frac{\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{D^\dagger(z_1,\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}\gamma_{z_1}\ . \qquad \text{(S.74)}
\end{aligned}
$$

令 $\bar{\alpha}^{\#}$ for $\# \in \{\prime,\dagger\}$ 为

$$
\bar{\alpha}^{\#}(y,\boldsymbol{X}) = \frac{\alpha^{\#}(y,\boldsymbol{X})}{D^{\#}(z_0,\boldsymbol{X})}\ ,
$$

满足 $\mathbb{E}\{\bar{\alpha}^{\#}(y,\boldsymbol{X}) \,|\, A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X};\ f_Y\} = 1$。然后，注意到 $R_D^{\#}(\boldsymbol{X}) = D^{\#}(z_1,\boldsymbol{X})/D^{\#}(z_0,\boldsymbol{X})$，表达式（S.74）变为

$$
\begin{aligned}
& \frac{\bar{\alpha}'(y,\boldsymbol{X})}{R'_D(\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1} + \bar{\alpha}^\dagger(y,\boldsymbol{X})\gamma_{z_0} + \frac{\bar{\alpha}'(y,\boldsymbol{X})\bar{\alpha}^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{R'_D(\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}\gamma_{z_1} \\
& = \frac{\bar{\alpha}^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{R^\dagger_D(\boldsymbol{X})}\gamma_{z_1} + \bar{\alpha}'(y,\boldsymbol{X})\gamma_{z_0} + \frac{\bar{\alpha}'(y,\boldsymbol{X})\bar{\alpha}^\dagger(y,\boldsymbol{X})}{R^\dagger_D(\boldsymbol{X})}\gamma_{z_0}\gamma_{z_1}\ .
\end{aligned}
$$

We 两边乘以 $f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X})$ 后积分，得到

$$
\begin{aligned}
& \frac{\gamma_{z_1}}{R'_D(\boldsymbol{X})} + \frac{M_{12}\gamma_{z_1}\gamma_{z_0}}{R'_D(\boldsymbol{X})} = \frac{\gamma_{z_1}}{R^\dagger_D(\boldsymbol{X})} + \frac{M_{12}\gamma_{z_0}\gamma_{z_1}}{R^\dagger_D(\boldsymbol{X})} \\
\Rightarrow\ & \gamma_{z_1}\left(M_{12}\gamma_{z_0}+1\right)\left\{\frac{1}{R'_D(\boldsymbol{X})} - \frac{1}{R^\dagger_D(\boldsymbol{X})}\right\} = 0\ . \qquad \text{(S.75)}
\end{aligned}
$$

其中 $M_{12} = \mathrm{E}\{\bar{\alpha}'(y,\boldsymbol{X})\bar{\alpha}^\dagger(y,\boldsymbol{X}) \,|\, A=0, Z=z_0, \boldsymbol{X};\ f_Y\}$。由于根据假设，$R'_D(\boldsymbol{X}) \neq R^\dagger_D(\boldsymbol{X})$，(S.75) 意味着 $M_{12} = -1/\gamma_{z_0} < 0$。进而，这意味着对于某个 y，$\alpha'(y,\boldsymbol{X})$ 和 $\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})$ 必须异号。不失一般性，假设对于某个 y，$\alpha^\dagger(y,\boldsymbol{X})$ 为负。根据 (S.69)，这意味着 $g^\dagger(y,\boldsymbol{X})$ 和 $g^\dagger(y_R,\boldsymbol{X})$ 异号，因此它们中至少有一个为负。这违反了 g 的正性条件，即 (S.66)，从而违反了 g 的定义性质。因此，不可能存在多个非负解满足不动点方程 (S.72)。

最后，我们证明，分别选择不同的 $z_1 \in \mathcal{Z}^c_{z_0,\boldsymbol{x}}$ 和 $z_0 \in \mathcal{Z}$ 不会影响定理的结果 (i) 和 (ii)。考虑两个映射 $\Psi(g; z_1^{(1)})$和 $\Psi(g; z_1^{(2)})$，它们分别对应于不同的$(z_1^{(1)},\ z_1^{(2)}) \in \mathcal{Z}^c_{z_0,\boldsymbol{x}}$选取。由于相应的不动点唯一，记为 $g^{(1)}_{z_0} = \Psi(g^{(1)}_{z_0}; z_1^{(1)})$和$g^{(2)}_{z_0} = \Psi(g^{(2)}_{z_0}; z_1^{(2)})$，因此有

$$
g^{(1)}_{z_0}(y,\boldsymbol{X}) \overset{\text{(S.65)}}{=} \frac{\alpha(y,\boldsymbol{X})f(Y=y \,|\, A=0, Z=z_0,\boldsymbol{X})}{D(z_0,\boldsymbol{X})} \overset{\text{(S.65)}}{=} g^{(2)}_{z_0}(y,\boldsymbol{X})\ .
$$

这意味着，选择 z_1 不会影响结果（i）。同样，由（S.65）可知，$\alpha(y,\ \boldsymbol{X})$ 始终

与 $g_{z_0}(y,\ \boldsymbol{X})/f(Y=y\,|\,A=0,\ Z=z_0,\ \boldsymbol{X})$ 成正比，无论如何选择 z_0，即，

$$\alpha(y,\boldsymbol{X}) \overset{(S.65)}{=} \frac{g_{z_0}(y,\boldsymbol{X})}{g_{z_0}(y_R,\boldsymbol{X})}\frac{f(Y=y_R\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X})}\ ,\quad \forall z_0\in\mathcal{Z}\ .$$

这意味着对 z_0 的选择不会影响结果（ii）。

证明到此结束。

C.3 定理的证明3.2

定理 3.2 直接由定理 A.2得出，因为它对应于 Z 为二元的特殊情形。定理 A.2 的证明将在下一章节中给出。

C.4 定理的证明A.2

我们固定 $\boldsymbol{X}\in\mathcal{X}$ 的任意取值。为简洁起见，我们省略符号中对 θ 的依赖。根据引理B.2，我们得到：当 $z_0\in\mathcal{Z}_{\inf,\boldsymbol{X}}$ 时，$z_0\in\arg\inf_{z\in\mathcal{Z}}\beta(z,\boldsymbol{X})$。此外，根据同一引理，我们还得到：当 $z_1\in\mathcal{Z}^c_{\inf,\boldsymbol{X}}$ 时，$\beta(z_1,\boldsymbol{X})>\beta(z_0,\boldsymbol{X})$。

我们引入以下简写符号：

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X}) &= \frac{f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}\ ,\\
\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X}) &= \frac{\left\{\begin{array}{l} f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X}) \\ -f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})f(Y=y\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X})\end{array}\right\}}{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}\\
&= \frac{f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})-f(Y=y,A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}\ ,\\
\lambda(y,\boldsymbol{X}) &= \frac{R_D(\boldsymbol{X})\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})}{R_Y(y,\boldsymbol{X})}\ .
\end{aligned}$$

注意，$\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})>0$ 和$\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X})>0$ 对来自（$y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$ 的所有值均成立S.32）。我们还指出，根据引理 α 和 β 是一致有界的，即存在某些常数B.3，使得 $0<c_\alpha\le C_\alpha<\infty$ 和 $0<c_\beta\le C_\beta<\infty$，有

$$\alpha(y,\boldsymbol{X})\in[c_\alpha,C_\alpha]\ ,\quad \beta(z,\boldsymbol{X})\in[c_\beta,C_\beta]\ ,\quad \forall(y,z,\boldsymbol{X})\ .$$

为后续使用，我们推导 λ的一个界。由（S.31），可得

$$\begin{aligned}
&R_Y(y,\boldsymbol{X}) \qquad\qquad (S.76)\\
&= \frac{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{1+\alpha(y,\boldsymbol{X})\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\frac{f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}\\
&\in \left[\frac{1+C_\alpha\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{1+C_\alpha\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\frac{f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})},\frac{1+c_\alpha\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{1+c_\alpha\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\frac{f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}\right]\ .
\end{aligned}$$

根据 R_D 在（S.64）中的定义，并结合（S.29），可得

$$R_D(\boldsymbol{X})=\frac{\mathbb{E}\{\alpha(Y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z=z_1,\boldsymbol{X};f_Y\}}{\mathbb{E}\{\alpha(Y,\boldsymbol{X})\,|\,A=0,Z=z_0,\boldsymbol{X};f_Y\}}=\frac{\gamma(z_1,\boldsymbol{X})}{\gamma(z_0,\boldsymbol{X})}\frac{\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\ . \qquad (S.77)$$

因此，结合（S.76）和（S.77），再根据$\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})$的定义，可得

$$\begin{aligned}
&\lambda(y,\boldsymbol{X})\\
&\le \frac{1+C_\alpha\beta(z_1,\boldsymbol{X})}{1+C_\alpha\beta(z_0,\boldsymbol{X})}\frac{f(A=0\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}{f(A=0\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}\frac{\gamma(z_1,\boldsymbol{X})}{\gamma(z_0,\boldsymbol{X})}\frac{\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\frac{f(A=1\,|\,Z=z_0,\boldsymbol{X})}{f(A=1\,|\,Z=z_1,\boldsymbol{X})}\\
&\overset{(*)}{=} \frac{1+C_\alpha\beta(z_1,\boldsymbol{X})}{1+C_\alpha\beta(z_0,\boldsymbol{X})}\frac{\beta(z_0,\boldsymbol{X})}{\beta(z_1,\boldsymbol{X})}\\
&= \frac{1/\beta(z_1,\boldsymbol{X})+C_\alpha}{1/\beta(z_0,\boldsymbol{X})+C_\alpha} \qquad (\equiv \kappa(\boldsymbol{X}))\\
&< 1\,.
\end{aligned} \tag{S.78}$$

等式$(*)$ 由 γ的定义得出。最后一行成立是因为 $\beta(z_1,\boldsymbol{X}) > \beta(z_0,\boldsymbol{X})$。我们定义 $\kappa(\boldsymbol{X})$ 为式（S.78）中的量，后文将用到。

定义算子 $\Phi\colon \mathcal{L}_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathcal{L}_+^\infty(\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}})$，其定义如下：

$$\Phi(h(y,\boldsymbol{X})) \equiv \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})h(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X})}{R_Y(y,\boldsymbol{X})}\,.$$

由式（S.14），$g^\star$ 满足

$$\begin{aligned}
&g^\star(y,\boldsymbol{X}) = \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X})}{R_Y(y,\boldsymbol{X})}R_D(\boldsymbol{X})\\
\Leftrightarrow\quad &\Phi\big(g^\star(y,\boldsymbol{X})\big) = R_D(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})\,.
\end{aligned} \tag{S.79}$$

令算子 h 为归一化步骤，即

$$\overline{h}(y,\boldsymbol{X}) = \frac{h(y,\boldsymbol{X})}{\int h(t,\boldsymbol{X})\,dt}\,.$$

给定满足 $\int h^{(0)}(y,\boldsymbol{X})\,dy = 1$ 的初始值 $h^{(0)}$，考虑以下迭代更新：

$$h^{(j+1)} \leftarrow \Phi(\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X}))\,, \qquad \overline{h}^{(j+1)} \leftarrow \text{normalization of } h^{(j+1)}\,. \tag{S.80}$$

注意到 $h^{(j)}$ 与由 Ψ生成的迭代相一致。特别地，更新 $h^{(j+1)} = \Psi(h^{(j)})$ 等价于两步过程：先应用 Φ，然后进行归一化，如（S.80）中所述。给定第 j 次迭代 $h^{(j)}$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{h^{(j+1)}(y,\boldsymbol{X})}{R_D(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})} &= \frac{\Phi(\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X}))}{\Phi(g^\star(y,\boldsymbol{X}))}\\
&= \frac{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X})}{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X})}\\
&= 1+\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})\frac{\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})-g^\star(y,\boldsymbol{X})}{\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})+\mathcal{C}_2(y,\boldsymbol{X})}\\
&\overset{\text{(S.79)}}{=} 1+\frac{1}{g^\star(y,\boldsymbol{X})}\underbrace{\frac{R_D(\boldsymbol{X})\mathcal{C}_1(\boldsymbol{X})}{R_Y(y,\boldsymbol{X})}}_{=\lambda(y,\boldsymbol{X})}\big\{\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})-g^\star(y,\boldsymbol{X})\big\}\,.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{h^{(j+1)}(y,\boldsymbol{X})}{R_D(\boldsymbol{X})g^\star(y,\boldsymbol{X})}-1=\lambda(y,\boldsymbol{X})\left\{\frac{\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})}{g^\star(y,\boldsymbol{X})}-1\right\}. \tag{S.81}$$

我们定义 $h^{(j)}$ 与 $g^\star$之间的相对比率,以及 $h^{(j)}$的归一化常数：

$$r^{(j)}(y,\boldsymbol{X})=\frac{\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})}{g^\star(y,\boldsymbol{X})}, \qquad N^{(j)}(\boldsymbol{X})=\int h^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\,dy .$$

那么，(S.81)可表示为

$$r^{(j+1)}(y,\boldsymbol{X})=\frac{R_D(\boldsymbol{X})}{N^{(j+1)}(\boldsymbol{X})}\{\lambda(y,\boldsymbol{X})r^{(j)}(y,\boldsymbol{X})+1-\lambda(y,\boldsymbol{X})\}$$

令 $M^{(j)}=\sup_y r^{(j)}(y,\boldsymbol{X})$ 和 $m^{(j)}=\inf_y r^{(j)}(y,\boldsymbol{X})$。那么，我们注意到

$$\frac{M^{(j+1)}}{m^{(j+1)}}=\frac{\sup_y r^{(j+1)}(y,\boldsymbol{X})}{\inf_y r^{(j+1)}(y,\boldsymbol{X})}=\frac{\sup_y\{\lambda(y,\boldsymbol{X})r^{(j)}(y,\boldsymbol{X})+1-\lambda(y,\boldsymbol{X})\}}{\inf_y\{\lambda(y,\boldsymbol{X})r^{(j)}(y,\boldsymbol{X})+1-\lambda(y,\boldsymbol{X})\}}. \tag{S.82}$$

假设 $M^{(j)}=m^{(j)}$成立。该条件意味着 $h^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\propto g^\star(y,\boldsymbol{X})$。此外，由于$\int h^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\,dy=\int g^\star(y,\boldsymbol{X})\,dy=1$，可知 $h^{(j)}=g^\star$。因此，只需证明 $M_{(j)}/m^{(j)}$ 随 $j\to\infty$ 增大而收敛至 1，这将意味着对于所有 $y\in\mathcal{Y}_{\boldsymbol{X}}$，$h^{(\infty)}(y,\boldsymbol{X})=g^\star(y,\boldsymbol{X})$。

为继续证明，我们根据 $M^{(j)}$ 和 $m^{(j)}$的取值分三种情况讨论：

（情形 1）： $M^{(j)}\le 1$

如果 $M_{(j)}\le 1$，那么必然有 $M^{(j)}=1$，因为：

$$\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\le M^{(j)}g^\star(y,\boldsymbol{X}) \quad\Rightarrow\quad 1=\int\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\,dy\le M^{(j)}\int g^\star(y,\boldsymbol{X})\,dy=M^{(j)} .$$

因此，我们有

$$g^\star(y,\boldsymbol{X})-\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\ge 0 , \quad \int\{g^\star(y,\boldsymbol{X})-\overline{h}^{(j)}(y,\boldsymbol{X})\}\,dy=0 .$$

积分为零的非负函数必须几乎处处为零；因此，这意味着 $g^\star=h^{(j)}$，表明在第 j 次迭代时已实现收敛。

（情形2）： $m^{(j)}\ge 1$

类似于（情形 1），可以证明 $m^{(j)}\ge 1$ 意味着 $g^\star=h^{(j)}$，表明在第 j次迭代时已实现收敛。

（情形 3）： $m^{(j)}<1<M^{(j)}$

对于非负函数 h_1和 h_2，可得 $\sup(h_1h_2)\le(\sup h_1)(\sup h_2)$且 $\inf(h_1h_2)\ge(\inf h_1)(\inf h_2)$。因此，（S.82）的一个上界可表示如下：

$$\frac{M^{(j+1)}}{m^{(j+1)}}\le\frac{\sup_y\{\lambda(y,\boldsymbol{X})M^{(j)}+1-\lambda(y,\boldsymbol{X})\}}{\inf_y\{\lambda(y,\boldsymbol{X})m^{(j)}+1-\lambda(y,\boldsymbol{X})\}}\le\frac{\kappa(\boldsymbol{X})M^{(j)}+1-\kappa(\boldsymbol{X})}{\kappa(\boldsymbol{X})m^{(j)}+1-\kappa(\boldsymbol{X})},$$

其中第二个不等式由 $m^{(j)}<1<M^{(j)}$ 以及 $\kappa(\boldsymbol{X})$ 在（S.78）中的定义得出。通过代数运算

我们得到

$$\frac{M^{(j+1)}}{m^{(j+1)}}-1 \leq \frac{\kappa(\boldsymbol{X})m^{(j)}}{\kappa(\boldsymbol{X})m^{(j)}+1-\kappa(\boldsymbol{X})}\left\{\frac{M^{(j)}}{m^{(j)}}-1\right\} \leq \kappa(\boldsymbol{X})\left\{\frac{M^{(j)}}{m^{(j)}}-1\right\} . \tag{S.83}$$

第二个不等式源于映射 $m \mapsto (\kappa m)/(\kappa m+1-\kappa)$ 的取值位于区间 $[0,\kappa]$ 对于 $m \in [0,1]$。因此，（S.83）意味着

$$\left\{\frac{M^{(j+1)}}{m^{(j+1)}}-1\right\} \leq \{\kappa(\boldsymbol{X})\}^j\left\{\frac{M^{(0)}}{m^{(0)}}-1\right\} \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty , \tag{S.84}$$

其中我们使用了 $\kappa(\boldsymbol{X}) < 1$。这意味着极限函数 $h^{(\infty)}(y,\boldsymbol{X})$ 满足 $M(\infty)/m^{(\infty)} = 1$，也就是说，对于所有 $y \in \mathrm{Y}_{\boldsymbol{X}}$，$h^{(\infty)}(y,\boldsymbol{X}) = g^{\star}(y,\boldsymbol{X})$。此外，（S.84）意味着迭代更新相对于散度函数 $\mathfrak{d}$ 的收敛速度是指数级的，该散度函数定义如下：

$$\mathfrak{d}(h) = \frac{\sup_y h(y,\boldsymbol{X})/g^{\star}(y,\boldsymbol{X})}{\inf_y h(y,\boldsymbol{X})/g^{\star}(y,\boldsymbol{X})} - 1 .$$

注意，$\mathfrak{d}(h) = 0$ 意味着 h 和 $g^{\star}$ 彼此成比例。特别地，对于归一化函数（即，$\int h(y,\boldsymbol{X})\, dy = 1$），$\mathfrak{d}(h) = 0$ 意味着 h 和 $g^{\star}$ 完全相同。

证明至此结束。

C.5 定理4.1 的证明

在证明中，我们通过刻画 $\tau^* \equiv \tau_1^* - \tau_0^*$ 的影响函数，得到一个更一般的结果，其中 $\tau_a^* \equiv \mathbb{E}\{\mathcal{G}(Y_{(a)}\boldsymbol{X}) \mid A = 1\}$；这里，$\mathcal{G}(\cdot)$ 是一个固定的一致有界函数。为方便起见，我们记$\mathcal{G}^{(a)} = \mathcal{G}(Y_{(a)}\boldsymbol{X})$ 和 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(Y,\boldsymbol{X})$。

在继续之前，我们先引入一些额外的符号。令 $\boldsymbol{O}^F = (Y_{(1)}\, Y_{(0)}\, A, Z, \boldsymbol{X})$ 和 $\boldsymbol{O} = (Y, A, Z, \boldsymbol{X})$ 分别表示完整数据和观测数据。全文中，我们假设正值性假设 $f(A = 0 \mid Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X}) \geq c_A > 0$ 对某个常数 c_A 成立。令 $\mathcal{M}^F$ 和 $\mathcal{M}$ 分别表示 $\boldsymbol{O}^F$ 和 $\boldsymbol{O}$ 的正则模型，其形式如下：

$$\mathcal{M}^F = \left\{P(\boldsymbol{O}^F) \mid \text{(A1)-(A2) and (IV1)-(IV4) hold}\right\} ,$$
$$\mathcal{M} = \left\{P(\boldsymbol{O}) \mid \text{(A1)-(A2) and (IV1)-(IV4) hold}\right\} .$$

考虑由一维参数 η 参数化的$\mathcal{M}^F$ 和$\mathcal{M}$ 的参数子模型：

$$\mathcal{M}_\eta^F = \left\{P_\eta(\boldsymbol{O}^F) \mid \text{(A1)-(A2) and (IV1)-(IV4) hold}\right\} ,$$
$$\mathcal{M}_\eta = \left\{P_\eta(\boldsymbol{O}) \mid \text{(A1)-(A2) and (IV1)-(IV4) hold}\right\} .$$

令 $\mathrm{E}\eta\{h(\boldsymbol{O}^F)\}$ 和 $\mathrm{E}\eta\{h(\boldsymbol{O})\}$ 分别表示相对于分布 $P_\eta(\boldsymbol{O}^F)$ 和 $P_\eta(\boldsymbol{O})$ 的期望。类似地，令 $f_\eta(\boldsymbol{O})$ 表示参数子模型 $P_\eta(\boldsymbol{O})$ 的密度，其中 $f_\eta(\boldsymbol{O}^F)$ 的定义类似。我们假设完整数据和观测数据分布 $P^*(\boldsymbol{O}^F)$ 与 $P^*(\boldsymbol{O})$ 在 η^* 处取得，即 $P^*(\boldsymbol{O}^F) = P_{\eta^*}(\boldsymbol{O}^F)$ 且 $P^*(\boldsymbol{O}) = P_{\eta^*}(\boldsymbol{O})$。令 α_η、β_η 和 ω_η 为子模型 P_η 下式 (21) 中影响函数的干扰函数。对于任意函数 h_η，令 $\nabla_\eta h_\eta$ 表示其关于 η 的导数。于是，P_η 的得分函数记为 $s_\eta = \nabla_\eta f_\eta / f_\eta$，其在 η^* 处的值记为 s^*。按照与得分函数相同的符号，令 $s_\eta(\cdot;\alpha) = \nabla_\eta \alpha_\eta / \alpha_\eta$ 且 $s_\eta(\cdot;\beta) = \nabla_\eta \beta_\eta / \beta_\eta$。最后，对于随机变量 $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{O}^F$或 $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{O}$，定义 $\mathrm{L}^2(\boldsymbol{V}) \equiv \{f \mid \mathrm{E}\{f^2(\boldsymbol{V})\} < \infty\}$ 为关于 $\boldsymbol{V}$ 的平方可积函数构成的希尔伯特空间，其内积为 $\langle f_1, f_2 \rangle = \mathrm{E}\{f_1(\boldsymbol{V}) f_2(\boldsymbol{V})\}$。类似地，定义 $\mathrm{L}_0^2(\boldsymbol{V}) \subseteq \mathrm{L}^2(\boldsymbol{V})$ 为希尔伯特

空间，由关于 $\boldsymbol{V}$ 的平方可积、均值为零函数构成。

At 子模型 P_η中，我们定义平均处理效应（ATT）和函数 $\texttt{uIF}$，它是（21）的一部分，如下所示：

$$\begin{aligned}
&\tau_\eta = \mathbb{E}_\eta\big\{\texttt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O})\big\} \ , \\
&\texttt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O}) = \frac{\Big[\ \{A-(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\ \Big]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \ .
\end{aligned}$$

我们还定义由 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$ 索引的函数 $\texttt{Aug}$，如下所示:

$$\begin{aligned}
&\texttt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O}; v) \\
&= \frac{\left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta) + (1-A)\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&= \frac{(1-A)\big\{1+\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\}\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\} + \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)}{\mathbb{E}_\eta(A)} \ ,
\end{aligned}$$

其中，$\widetilde{v}_\eta$ 由以下函数 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$ 的算子定义:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = v(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - v^\dagger_\eta(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \ , \\
&v^\dagger_\eta(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \mathbb{E}_\eta(v \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) + \mathbb{E}_\eta(v \,|\, Z, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}_\eta(v \,|\, \boldsymbol{X}) \ .
\end{aligned} \tag{S.85}$$

根据 $\widetilde{v}_\eta$ 的构造，我们发现，对于任意 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$，都有 $\mathbb{E}_\eta\{\texttt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O};\, v)\} = 0$，如下所示:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\{\texttt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O}; v)\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta) + (1-A)\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array}\right] \\
&= \mathbb{E}_\eta\Big[A\big\{\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\} + \widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\Big] \\
&= \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - v^\dagger_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\big[\mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - v^\dagger_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\}\big] \\
&= \mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\} - \mathbb{E}_\eta\big[\mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\} \,|\, \boldsymbol{X}\big] \\ -\mathbb{E}_\eta\big[\mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, Z,\boldsymbol{X}\big\} \,|\, \boldsymbol{X}\big] + \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\} \end{array}\right] \\
&= \mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\} - \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\} \\ -\mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\} + \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\big\} \end{array}\right] \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

对于固定的 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\, Z, \boldsymbol{X})$，我们定义 $\texttt{IF}$ 如下:

$$\texttt{IF}_\eta(\boldsymbol{O}; \tau, v) = \texttt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O}) - \frac{A\tau}{\mathbb{E}_\eta(A)} + \texttt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O}; v) \ .$$

因此，对于任意 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\, Z,\ \boldsymbol{X})$，$\tau_\eta$ 满足以下矩条件:

$$\mathbb{E}_\eta\big\{\texttt{IF}_\eta(\boldsymbol{O}; \tau_\eta, v)\big\} = 0 \ . \tag{S.86}$$

对（S.86）关于 η 求梯度，得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_\eta \mathbb{E}_\eta\big\{\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v)\big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(\boldsymbol{O})\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v)\big\} + \mathbb{E}_\eta\big\{\nabla_\eta \mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v)\big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(\boldsymbol{O})\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v)\big\} \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E}_\eta\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau,v)\right\}}_{=-1}\nabla_\eta\tau_\eta + \mathbb{E}_\eta\big\{\nabla_\eta \mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau,v)|_{\tau=\tau_\eta}\big\}\,.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta\tau_\eta \\
&= \mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(\boldsymbol{O})\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v) + \nabla_\eta \mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau,v)|_{\tau=\tau_\eta}\big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\left[s_\eta(\boldsymbol{O})\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v) + \nabla_\eta\left\{\mathtt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O}) - \frac{A\tau}{\mathbb{E}_\eta(A)} + \mathtt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O};v)\right\}\Big|_{\tau=\tau_\eta}\right]. \qquad \text{(S.87)}
\end{aligned}
$$

我们现在推导出（S.87）的一个表示，以证明 τ^* 是一个可微参数（Newey，1990）。为便于推导，我们先介绍一些有用的预备结果。

$$
\mathbb{E}_\eta\big\{\mathcal{G} - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\,|\,A=1\big\} = \tau_\eta, \qquad \text{(S.88)}
$$

$$
\mathbb{E}_\eta\big\{\mathcal{G}^{(0)} - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\,|\,A=1,\ Z,\boldsymbol{X}\big\} = 0\,, \qquad \text{(S.89)}
$$

$$
\mathbb{E}_\eta\big\{(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X}) - A\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big\} = 0\,, \qquad \text{(S.90)}
$$

$$
\mathbb{E}_\eta\big[(1-A)\big\{1+\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\}v(Y,Z,\boldsymbol{X})\big] = \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\,, \qquad \text{(S.91)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta\mathbb{E}_\eta\big\{\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} = 0 \\
\Rightarrow\quad &\mathbb{E}_\eta\big\{\nabla_\eta\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} + \mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} = 0 \\
\Rightarrow\quad &\mathbb{E}_\eta\big\{\nabla_\eta\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} = -\mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} = 0\,, \\
&\mathbb{E}_\eta\big[\mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big]
\end{aligned} \qquad \text{(S.92)}
$$

$$
= \mathbb{E}_\eta\big[\mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,Z,\boldsymbol{X}\big\}\,|\,\boldsymbol{X}\big] = \mathbb{E}_\eta\big\{v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\big\}\,. \qquad \text{(S.93)}
$$

除了（S.92）之外，其他结果均可通过直接的代数运算得出。结果（S.92）由以下分解式推出

$$
\begin{aligned}
&s_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) = s_\eta(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X}) + s_\eta(Z\,|\,\boldsymbol{X}) + s_\eta(\boldsymbol{X})\,, \\
&\mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\big\} = \mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(Z\,|\,\boldsymbol{X})\big\} = \mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(\boldsymbol{X})\big\} = 0\,,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\big[\big\{\ s_\eta(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X}) + s_\eta(Z\,|\,\boldsymbol{X}) + s_\eta(\boldsymbol{X})\ \big\}\big\{\ v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - v_\eta^\dagger(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\ \big\}\big] \\
&= \mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} s_\eta(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\mathbb{E}_\eta\{v - v_\eta^\dagger\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\} \\ +s_\eta(Z\,|\,\boldsymbol{X})\mathbb{E}_\eta\{v - v_\eta^\dagger\,|\,Z,\boldsymbol{X}\} + s_\eta(\boldsymbol{X})\mathbb{E}_\eta\{v - v_\eta^\dagger\,|\,\boldsymbol{X}\} \end{array}\right] \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

最后一个等式成立，是因为对于所有 $v \in \mathcal{L}^2(Y(0)\, Z, \boldsymbol{X})$，我们由（$\mathbb{E}\eta\{v - v_\eta^\dagger \,|\, Y(0)\, \boldsymbol{X}\} = \mathbb{E}\eta\{v - v_\eta^\dagger \,|\, Z, \boldsymbol{X}\} = \mathbb{E}\eta\{v - v_\eta^\dagger \,|\, \boldsymbol{X}\} = 0$ 可得 S.92 ）。

现在我们继续推导（S.87）的另一种表示。通过直接计算，（S.87）的第一项可表示为：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\big\{s_\eta(\boldsymbol{O})\mathtt{IF}_\eta(\boldsymbol{O};\tau_\eta,v)\big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\left[s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\big\} \\ +A\big\{\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\tau_\eta\big\} \\ +(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\} \\ +(1-A)\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})+A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\end{array}\right]\right] \\
&= \frac{}{\mathbb{E}_\eta(A)}.
\end{aligned}
\tag{S.94}
$$

通过直接代数运算，（S.87）的第二项可表示如下：

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta\left\{\mathtt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O})-\frac{A\tau}{\mathbb{E}_\eta(A)}\right\} \\
&= -\frac{(1-A)\nabla_\eta\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\big\}}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\quad -\frac{(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\nabla_\eta\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\big\}}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\quad -\frac{\big\{A-(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\}\nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\quad -\frac{\big\{A-(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\}\big\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\big\}-A\tau}{\mathbb{E}_\eta(A)}\frac{\nabla_\eta\mathbb{E}_\eta(A)}{\mathbb{E}_\eta(A)}.
\end{aligned}
$$

由（S.88）-（S.90），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\left[\nabla_\eta\left\{\mathtt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O})-\frac{A\tau}{\mathbb{E}_\eta(A)}\right\}\Big|_{\tau=\tau_\eta}\right] \\
&= -\frac{\mathbb{E}_\eta\big[s_\eta(Y,\boldsymbol{X};\alpha)(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\big\}\big]}{\mathbb{E}_\eta(A)}.
\end{aligned}
\tag{S.95}
$$

(S.87) 的最后一项为

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta\mathtt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O};v) \\
&= \frac{\left[\begin{array}{l}(1-A)\nabla_\eta\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\} \\ \quad +(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\nabla_\eta\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\} \\ \quad +(1-A)\big\{1+\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\}\big\{\nabla_\eta\widetilde{v}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v})\big\} \\ \quad +\nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v})\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\quad -\frac{\left[\begin{array}{l}(1-A)\big\{1+\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\}\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\} \\ \quad +\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)}\frac{\nabla_\eta\mathbb{E}_\eta(A)}{\mathbb{E}_\eta(A)}.
\end{aligned}
$$

经过一些代数运算，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\big\{(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\nabla_\eta\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\big\}\\
&=\mathbb{E}_\eta\big\{(1-A)s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\big\}\\
&=\mathbb{E}_\eta\big\{As_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\\
&=\mathbb{E}_\eta\big[As_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)\mathbb{E}_\eta\big\{\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,\big|\,A=1,Z,\boldsymbol{X}\big\}\big]\\
&=\mathbb{E}_\eta\big\{As_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\}\\
&=\mathbb{E}_\eta\big\{(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\nabla_\eta\beta(Z,\boldsymbol{X})\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\}\ .
\end{aligned}
$$

由（S.91）、（S.92）及上述恒等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\big\{\nabla_\eta\mathtt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O};v)\big\}\\
&=\frac{\mathbb{E}_\eta\big[(1-A)\nabla_\eta\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\}\big]}{\mathbb{E}_\eta(A)}\\
&=\frac{\mathbb{E}_\eta\big[s_\eta(Y,\boldsymbol{X};\alpha)(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\}\big]}{\mathbb{E}_\eta(A)}\ .
\end{aligned}
\tag{S.96}
$$

结合（S.95）和（S.96），可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\left[\nabla_\eta\left\{\mathtt{uIF}_\eta(\boldsymbol{O})-\frac{A\tau}{\mathbb{E}_\eta(A)}+\mathtt{Aug}_\eta(\boldsymbol{O};v)\right\}\Big|_{\tau=\tau_\eta}\right]\\
&=-\frac{\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l}s_\eta(Y,\boldsymbol{X};\alpha)(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\\ \times\big\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})+\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\big\}\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)}\ .
\end{aligned}
\tag{S.97}
$$

现在推导 $s_\eta(Y,\boldsymbol{X};\alpha)$。由（S.90）和（S.93），对于任意 $u\in\mathcal{L}^2(Y_{(0)}Z,\boldsymbol{X},$ 我们得到以下结果 ）:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\big\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\big\}\\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)+(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\ \Big|\ Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\\
&=\mathbb{E}\left\{\begin{array}{l}A\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)+(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\ \Big|\ Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right\}\\
&=\mathbb{E}\big\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,\big|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\}\\
&=0\ ,
\end{aligned}
\tag{S.98}
$$

其中 $\widetilde{u}_\eta$ 的定义与（S.85）类似。

我们对（S.98）关于 η 求路径导数。为简化推导，我们首先建立一个中间结果。对于任意 $g(Y_{(0)}Z,\boldsymbol{X})$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta\mathbb{E}_\eta\big\{(1-A)g(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\}\\
&=\iint(1-a)g(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\nabla_\eta f_\eta(A=a,Z=z\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,d(a,z)\\
&=\iint\left\{\begin{array}{l}(1-a)g(Y^{(0)},z,\boldsymbol{X})\\ \times s_\eta(A=a,Z=z\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\end{array}\right\}f_\eta(A=a,Z=z\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\,d(a,z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint \left\{ \begin{array}{l} (1-a)g(Y^{(0)}, z, \boldsymbol{X}) \\ \times s_\eta(Y, A=a, Z=z, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \iint (1-a) g(Y^{(0)}, z, \boldsymbol{X}) f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&= \mathbb{E}_\eta\big\{ s_\eta(\boldsymbol{O})(1-A) g(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\} \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}_\eta\big\{ (1-A) g(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\}\,. \qquad \text{(S.99)}
\end{aligned}
$$

同样地，对于任意 $h(Z, \boldsymbol{X})$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta \mathbb{E}_\eta\big\{ A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\} \\
&= \iint a h(z, \boldsymbol{X}) \nabla_\eta f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&= \iint a h(z, \boldsymbol{X}) s_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&= \iint a h(z, \boldsymbol{X}) s_\eta(Y^{(0)}, A=a, Z=z, \boldsymbol{X}) f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \iint a h(z, \boldsymbol{X}) f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&= \iint a h(z, \boldsymbol{X}) s_\eta(A=a, Z=z, \boldsymbol{X}) f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}_\eta\big\{ A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\} \\
&= \iint a h(z, \boldsymbol{X}) s_\eta(Y, A=a, Z=z, \boldsymbol{X}) f_\eta(A=a, Z=z \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\, d(a,z) \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}_\eta\big\{ A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\big\{ s_\eta(\boldsymbol{O}) A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\} - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}_\eta\big\{ A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\}\,. \qquad \text{(S.100)}
\end{aligned}
$$

结合（S.99）和（S.100），可得

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta \mathbb{E}_\eta\big\{ (1-A) g(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) + A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\} \\
&= \mathbb{E}_\eta\big[s_\eta(\boldsymbol{O}) \{ (1-A) g(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) + A h(Z, \boldsymbol{X}) \} \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big] \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mathbb{E}_\eta\big\{ (1-A) g(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) + A h(Z, \boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \big\}\,. \qquad \text{(S.101)}
\end{aligned}
$$

将 $(1-A)\, g(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) + A h(Z, \boldsymbol{X})$ 在（S.101）中替换为（S.98）中的函数，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta \mathbb{E}_\eta \left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_t(Y, \boldsymbol{X}) \beta_t(Z, \boldsymbol{X}) \big\{ \widetilde{u}_t(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu_t(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_t) \big\} \\ + A \mu_t(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_t) + (1-A) \widetilde{u}_t(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \end{array} \,\middle|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \right] \Bigg|_{t=\eta} \\
&= \mathbb{E}_\eta \left[s_\eta(\boldsymbol{O}) \left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y, \boldsymbol{X}) \beta_\eta(Z, \boldsymbol{X}) \big\{ \widetilde{u}_\eta(Y, Z, \boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_\eta) \big\} \\ + A \mu_\eta(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_\eta) + (1-A) \widetilde{u}_\eta(Y, Z, \boldsymbol{X}) \end{array} \right] \,\middle|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \right] \\
&\quad - s_\eta(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \underbrace{\mathbb{E}_\eta \left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y, \boldsymbol{X}) \beta_\eta(Z, \boldsymbol{X}) \big\{ \widetilde{u}_\eta(Y, Z, \boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_\eta) \big\} \\ + A \mu_\eta(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_\eta) + (1-A) \widetilde{u}_\eta(Y, Z, \boldsymbol{X}) \end{array} \,\middle|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \right]}_{=0 \text{ from (S.98)}} \\
&= \mathbb{E}_\eta \left[s_\eta(\boldsymbol{O}) \left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y, \boldsymbol{X}) \beta_\eta(Z, \boldsymbol{X}) \big\{ \widetilde{u}_\eta(Y, Z, \boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_\eta) \big\} \\ + A \mu_\eta(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{u}_\eta) + (1-A) \widetilde{u}_\eta(Y, Z, \boldsymbol{X}) \end{array} \right] \,\middle|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \right]. \qquad \text{(S.102)}
\end{aligned}
$$

现在，我们对（S.98）关于 η求路径导数，得到

$$
\begin{aligned}
0 = \nabla_\eta \mathbb{E}_\eta \Bigg[& \begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta) + (1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] && \text{(S.103)} \\
\overset{\text{(S.102)}}{=} \mathbb{E}_\eta \Bigg[& s_\eta(\boldsymbol{O}) \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta) + (1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \Bigg] \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] \\
& + \mathbb{E}_\eta \Bigg[s_\eta(Y,\boldsymbol{X};\alpha) \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X}) \\ \times\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \end{array} \Bigg] \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] \\
& + \mathbb{E}_\eta \Bigg[s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta) \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X}) \\ \times\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \end{array} \Bigg] \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] && \text{(S.104)} \\
& + \mathbb{E}_\eta \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X}) \\ \quad \times\{\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +\{A\nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta) + (1-A)\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\} \end{array} \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] . && \text{(S.105)}
\end{aligned}
$$

注意（S.104）和（S.105）由下式给出：

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\eta \Big[s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \Big| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Big] \\
& = \mathbb{E}_\eta \Bigg[s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta) \mathbb{E}_\eta \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X}) \\ \times\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \end{array} \Bigg| Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X} \Bigg] \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] \\
& = \mathbb{E}_\eta \Big[s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta) \mathbb{E}_\eta \Big[A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \Big| Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X} \Big] \Big| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Big] \\
& = \mathbb{E}_\eta \Big[s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta) A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \Big| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Big] ,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\eta \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +\{A\nabla_\eta\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta) + (1-A)\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\} \end{array} \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg] \\
& = \mathbb{E}_\eta \{\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} .
\end{aligned}
$$

利用上述恒等式对（S.103）进行整理，我们得到 $s_\eta(Y^{(0)}\,\boldsymbol{X};\alpha)$ 的如下表示：

$$
\begin{aligned}
& s_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X};\alpha) && \text{(S.106)} \\
& = -\frac{\mathbb{E}_\eta \Bigg[\begin{array}{l} s_\eta(\boldsymbol{O}) \Bigg[\begin{array}{l} (1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta) + (1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \Bigg] \\ +s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} + \nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \Bigg| Y^{(0)}, \boldsymbol{X} \Bigg]}{\mathbb{E}\big[(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big]} .
\end{aligned}
$$

在（S.97）中，我们在取$s_\eta(Y^{(0)}\,\boldsymbol{X};\alpha)$ 后，使用（S.106）中的表达式进行代入，其中 $u = \nu - v$ 满足 ν 条件(ω-i)和(ω-ii)，即：

$$
\begin{aligned}
& u(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) = \nu(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - v(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) , && \text{(S.107)} \\
& \mathbb{E}_\eta\big[A\{\mathcal{G}^{(0)} - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\} \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big] \\
& = \mathbb{E}_\eta\big[A\{\widetilde{\nu}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) - \mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{\nu}_\eta)\} \,|\, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\big] . && \text{(S.108)}
\end{aligned}
$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{(S.97)} \\
&= -\frac{\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} s_\eta(Y,\boldsymbol{X};\alpha)(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X}) \\ \times\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})+\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\}\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&= -\frac{\mathbb{E}_\eta\big[s_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X};\alpha)A\{\mathcal{G}^{(0)}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})+\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\}\big]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&= -\frac{\mathbb{E}_\eta\left[s_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X};\alpha)\mathbb{E}_\eta\left[A\left\{\begin{array}{l}\mathcal{G}^{(0)}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \\ -\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\end{array}\right\}\,\middle|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\overset{\text{(S.108)}}{=} -\frac{\mathbb{E}_\eta\left[s_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X};\alpha)\mathbb{E}_\eta\left[A\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\nu}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widetilde{v}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \\ -\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{\nu}_\eta)+\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\end{array}\right\}\,\middle|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\overset{\text{(S.107)}}{=} -\frac{\mathbb{E}_\eta\big[s_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X};\alpha)\mathbb{E}_\eta\big[A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big]\big]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&= -\frac{\mathbb{E}_\eta\big[s_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X};\alpha)\mathbb{E}_\eta\big[(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big]\big]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\overset{\text{(S.106)}}{=} \frac{\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l}\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)+(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right] \\ +s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}+\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\,\middle|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right] \\ \hline \mathbb{E}\big[(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big] \\ \times\mathbb{E}_\eta\big[(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big]\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_\eta\left[\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)+(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right] \\ +s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}+\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\,\middle|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)+(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right] \\ +s_\eta(Z,\boldsymbol{X};\beta)A\{\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}+\nabla_\eta\widetilde{u}_\eta(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)} \\
&\overset{\text{(S.90),(S.92)}}{=} \frac{\mathbb{E}_\eta\left[\begin{array}{l} s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\} \\ +A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)+(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]\end{array}\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)}\,. \qquad \text{(S.109)}
\end{aligned}
$$

结合（S.94）与（S.109），我们得到（S.87）的表示：

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\eta\tau_\eta \\
&= \text{(S.94)} + \text{(S.109)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\eta\left[s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,X)\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\ +A\{\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\tau_\eta\}\\ +(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\}\\ +(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\}\\ +(1-A)\widetilde{v}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})+A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}_\eta)\\ +(1-A)\widetilde{u}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})+A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{u}_\eta)\end{array}\right]\right]\\
&=\frac{}{\mathbb{E}_\eta(A)}\\
&\overset{(S.107)}{=}\frac{\mathbb{E}_\eta\left[s_\eta(\boldsymbol{O})\left[\begin{array}{l}(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,X)\{\mathcal{G}-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\ +A\{\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\tau_\eta\}\\ +(1-A)\alpha_\eta(Y,\boldsymbol{X})\beta_\eta(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{\nu}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{\nu}_\eta)\}\\ +(1-A)\widetilde{\nu}_\eta(Y,Z,\boldsymbol{X})+A\mu_\eta(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{\nu}_\eta)\end{array}\right]\right]}{\mathbb{E}_\eta(A)}.
\end{aligned}
\tag{S.110}
$$

由于$\widetilde{\nu}_{\eta^*}=\nu-\nu^\dagger_{\eta^*}=\omega$在定理4.1中所定义，（S.110）意味着

$$
\nabla_\eta\tau_\eta\big|_{\eta=\eta^*}=\mathbb{E}\{s^*(\boldsymbol{O})\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O})\},
$$

其中 $\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O})$由式（21）给出，其中$\mathcal{G}^{(0)}$用于 τ^*的定义。因此， τ^*是一个可微参数（Newey，1990），而 $\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O})$是其影响函数。

最后，我们发现，模型 τ^* 中 $\mathcal{M}$ 的任何影响函数都必须具有式（21）所给出的形式。根据半参数效率理论，模型 τ^* 中 $\mathcal{M}$ 的全部影响函数可表示为

$$
\left\{\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O})+t(\boldsymbol{O})\,\middle|\,t(\boldsymbol{O})\in\mathcal{T}^\perp\right\},
\tag{S.111}
$$

其中 $\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O})$ 是模型 τ^* 中 $\mathcal{M}$ 的一个影响函数，而 $\mathcal{T}^\perp$ 表示模型 $\mathcal{T}$的切空间 $\mathcal{M}$的正交补。因此，接下来需要刻画 $\mathcal{T}^\perp$，我们将采用 Rotnitzky 和 Robins (1997）以及 Robins 等人 (2000)

令 T^F 表示完整数据 $\boldsymbol{O}^F$模型的切空间。该空间可分解为 $\mathrm{T}^F=\mathrm{T}_1^F\oplus\mathrm{T}_2^F\oplus\mathrm{T}_3^F$，其中 T_1^F、T_2^F和 T_3^F 分别是 $(Y(0)\,Z,\boldsymbol{X})$、 $A\,|(Y(0)\,Z,\boldsymbol{X})$ 以及 $Y(1)\,|\,(Y(0)\,A,Z,\boldsymbol{X})$ 的切空间。我们首先给出 $j\in\{1,2,3\}$ 对应的 T_j^F 的闭式表示。根据（IV2），我们有

$$
\mathcal{T}_1^F=\left\{S(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})+S(Z\,|\,\boldsymbol{X})+S(\boldsymbol{X})\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathbb{E}\{S(Y^{(0)}\,|\,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}\\ =\mathbb{E}\{S(Z\,|\,\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}\}\\ =\mathbb{E}\{S(\boldsymbol{X})\}=0\end{array}\right\}\cap\mathcal{L}_0^2(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}).
$$

接下来，我们对 $\mathcal{T}_2^F$ 进行刻画。根据 (IV4)，子模型P_η 中的条件概率 $f_\eta(A=1\,|\,Y_{(0)}\,Z,\ \boldsymbol{X})$ 表示为:

$$
f_\eta(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})=\frac{\exp\{\mathfrak{a}_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X})+\mathfrak{b}_\eta(Z,\boldsymbol{X})\}}{1+\exp\{\mathfrak{a}_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X})+\mathfrak{b}_\eta(Z,\boldsymbol{X})\}},
$$

其中 $\mathfrak{a}_\eta=\log(\alpha_\eta)$ 和 $\mathfrak{b}_\eta=\log(\beta_\eta)$。这意味着相应的得分函数为

$$
s_\eta(A\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})=\{A-f_\eta(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}\{\nabla_\eta\mathfrak{a}_\eta(Y^{(0)},\boldsymbol{X})+\nabla_\eta\mathfrak{b}_\eta(Z,\boldsymbol{X})\}.
$$

因此，对该集合取闭线性包，可得到 $\mathcal{T}_2^F$ 的闭式表示：

$$\mathcal{T}_2^F = \left\{ \begin{array}{l} \{A - f^*(A=1 \,|\, Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})\} \\ \times \{\mathfrak{a}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) + \mathfrak{b}(Z, \boldsymbol{X})\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \forall \mathfrak{a} \in \mathcal{L}^2(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \\ \text{s.t. } \mathfrak{a}(y_R, \boldsymbol{X}) = 0 \\ \forall \mathfrak{b} \in \mathcal{L}^2(Z, \boldsymbol{X}) \end{array} \right\} \cap \mathcal{L}_0^2(Y^{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X}) \ . \tag{S.112}$$

最后，$\mathcal{T}_3^F$可以表示为

$$\mathcal{T}_3^F = \left\{ S(\boldsymbol{O}^F) \,\middle|\, \mathbb{E}\{S(\boldsymbol{O}^F) \,|\, Y^{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X}\} = 0 \right\} \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}^F) \ .$$

容易证明，$\mathcal{T}_3^F$的正交补（记为$\mathcal{T}_3^{F\perp}$）等于

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3^{F,\perp} &= \left\{ b(\boldsymbol{O}^F) \,\middle|\, \mathbb{E}\{b(\boldsymbol{O}^F) S(\boldsymbol{O}^F)\} = 0 \ , \ \forall S \in \mathcal{T}_3^F \right\} \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}^F) \\ &= \left\{ b(Y^{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X}) \,\middle|\, \forall b \in \mathcal{L}_0^2(Y^{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X}) \right\} \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}^F) \ . \end{aligned} \tag{S.113}$$

根据Rotnitzky 和 Robins(1997，观测数据切空间 $\mathcal{T}$可写为 s

$$\mathcal{T} = \text{closure}\big(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\big) \ , \quad \mathcal{T}_j = \text{closure}\big(\mathcal{R}(\varphi \circ \Pi_j)\big) \ .$$

此处，R(·) 表示算子 $\varphi: \mathrm{L}_0^2(\boldsymbol{O}^F) \to \mathrm{L}_0^2(\boldsymbol{O})$ 的值域，其中 $\varphi(f(\boldsymbol{O}^F)) = \mathrm{E}\{f(\boldsymbol{O}^F) \,|\, \boldsymbol{O}\}$,$\Pi_j: \mathrm{L}_0^2(\boldsymbol{O}^F) \to \mathrm{T}_j^F$ 对于 $j \in \{1, 2, 3\}$ 是希尔伯特空间投影，而 closure(S) 表示集合 S 的闭线性包。我们还用 $\boldsymbol{O}_1$ 和 $\boldsymbol{O}_0$ 分别表示与 $Y^{(1)}$ 和 $Y(0)$ 相关的观测数据分量，即 $\boldsymbol{O}_1 = (AY, A, Z, \boldsymbol{X})$ 和 $\boldsymbol{O}_0 = ((1-A)Y, A, Z, \boldsymbol{X})$。

如 Bickel 等人 (1998年所示，$\mathcal{T}$的正交补由 $\mathcal{T}^\perp = \mathcal{T}_1^\perp \cap \mathcal{T}_2^\perp \cap \mathcal{T}_3^\perp$给出。我们首先刻画 $\mathcal{T}_3^\perp$。根据 Robins 等人 (2000年) 的方程（4.6），我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3^\perp &= \left\{ b(\boldsymbol{O}) \,\middle|\, b(\boldsymbol{O}) \in \mathcal{T}_3^{F,\perp} \right\} \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}) \\ &\overset{(S.113)}{=} \left\{ b(\boldsymbol{O}) \,\middle|\, b(\boldsymbol{O}) = b(Y^{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X}) \right\} \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}) \\ &= \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0) \ . \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\perp &= \{\mathcal{T}_1^\perp \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0)\} \cap \{\mathcal{T}_2^\perp \cap \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0)\} \\ &= \underbrace{\{\mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0) \setminus \mathcal{T}_1\}}_{\equiv \mathcal{T}_1^\perp|_0} \cap \underbrace{\{\mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0) \setminus \mathcal{T}_2\}}_{\equiv \mathcal{T}_2^\perp|_0} \\ &= \mathcal{T}_1^\perp|_0 \cap \mathcal{T}_2^\perp|_0 \ . \end{aligned} \tag{S.114}$$

根据 Bickel 等人 (1998年) 和 Tchetgen Tchetgen 等人 (2010)，$\mathcal{T}_1^F$在 $\mathcal{L}_0^2(Y_{(0)} Z, \boldsymbol{X})$ 中的正交补由

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^{F,\perp}|_0 &\equiv \mathcal{L}_0^2(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \setminus \mathcal{T}_1^F \\ &= \left\{ \widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, \forall v \in \mathcal{L}^2(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}), \ \widetilde{v} = v - v^\dagger \right\} \ , \end{aligned} \tag{S.115}$$

其中，$v^\dagger = \mathbb{E}(v \,|\, Z, \boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(v \,|\, Y_{(0)} \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}(v \,|\, \boldsymbol{X})$。

命题 A1。 3 和 A2.3由 Rotnitzky 和 Robins(1997) 确立，$\mathcal{T}$的正交补 1

在 $\mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0)$ 中由下式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1^{\perp}|_0 &\equiv \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0) \setminus \mathcal{T}_1 \\ &= \left\{ \frac{(1-A)m(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} + T_{car} \,\middle|\, m(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \in \mathcal{T}_1^{F,\perp}|_0,\ T_{car} \in \mathcal{T}_{car} \right\}, \\ \mathcal{T}_{car} &= \left\{ \left\{ \frac{1-A}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1 \right\} k(Z,\boldsymbol{X}) \,\middle|\, \forall k \in \mathcal{L}_0^2(Z,\boldsymbol{X}) \right\}.\end{aligned}$$

由（S.115），我们得到

$$\mathcal{T}_1^{\perp}|_0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} \\ -\left\{ \frac{1-A}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1 \right\} k(Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall v \in \mathcal{L}^2(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) : \widetilde{v} = v - v^{\dagger} \\ \forall k \in \mathcal{L}_0^2(Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \right\}.$$

此外，Robins 等人 （2000年）的方程（4.6）证明了

$$\mathcal{T}_2^{\perp}|_0 \equiv \mathcal{L}_0^2(\boldsymbol{O}_0) \setminus \mathcal{T}_2 = \left\{ b(\boldsymbol{O}_0) \,\middle|\, b(\boldsymbol{O}_0) \in \mathcal{T}_2^{F,\perp} \right\}.$$

根据（S.114），我们得到

$$\mathcal{T}^{\perp} = \left\{ T_1 \in \mathcal{T}_1^{\perp}|_0 \,\middle|\, \mathbb{E}(T_1 S_2) = 0\ ,\ S_2 \in \mathcal{T}_2^F \right\}. \tag{S.116}$$

接下来需要找到$\mathcal{T}^{\perp}$的一个表示。

考虑一个由 v 和 k刻画的一般 $T_1 \in \mathcal{T}_1^{\perp}|_0$ 。下文中，我们将刻画在 T_1 中使用的 v 与 k 之间的关系，使得 T_1 属于（S.116）中的$\mathcal{T}^{\perp}$ 。为此，我们固定一个任意的 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\,Z,\boldsymbol{X})$，然后确定 k的一种特定形式，使得由此得到的 $T_1 \in \mathcal{T}_1^{\perp}|_0$与每个 $S_2 \in \mathcal{T}_2^F$正交。由于任意 $S_2 \in \mathcal{T}_2^F$都由 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$这一对完全刻画，因此只需考虑以下两种情形：（情形 1）： $\mathfrak{a}=0$ 且 $\mathfrak{b}$ 任意；以及（情形2）： $\mathfrak{a}$ 任意且 $\mathfrak{b}=0$。

我们首先考虑（情形 1）。令 $S_{2,\ \mathfrak{a}=0}$ 表示 $\mathcal{T}_2^F$中的一个元素，其中 $\mathfrak{a}=0$ 属于（S.112），而 $\mathfrak{b}$任意，即

$$S_{2,\mathfrak{a}=0}(Y^{(0)},A,Z,\boldsymbol{X}) \equiv \left\{ A - f^*(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \right\} \mathfrak{b}(Z,\boldsymbol{X}).$$

然后，我们得到

$$\begin{aligned} & 0 = \mathbb{E}\left(T_1 S_{2,\mathfrak{a}=0}\right), \quad \forall S_{2,\mathfrak{a}=0} \in \mathcal{T}_2^F \text{ with } \mathfrak{a}=0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l} \left[\frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,X)}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - \left\{ \frac{1-A}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1 \right\} k(Z,\boldsymbol{X}) \right] \\ \times \left\{ A - f(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \right\} \mathfrak{b}(Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \right], \ \forall \mathfrak{b} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l} \left[\frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,X)}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - \left\{ \frac{1-A}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1 \right\} k(Z,\boldsymbol{X}) \right] \\ \times \left\{ A - f^*(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \right\} \end{array} \,\middle|\, Z,\boldsymbol{X} \right] \\ & = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l} -\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) f^*(A=1|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \\ +k(Z,\boldsymbol{X}) f^*(A=1|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \end{array} \,\middle|\, Z,\boldsymbol{X} \right] \\ & = \mathbb{E}\left[A\left\{ k(Z,\boldsymbol{X}) - \widetilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \right\} \,\middle|\, Z,\boldsymbol{X} \right] \\ & = f^*(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X}) \left\{ k(Z,\boldsymbol{X}) - \mu(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}) \right\}. \end{aligned}$$

这意味着 $k(Z,\ \boldsymbol{X}) = \mu(Z,\ \boldsymbol{X};\ \widetilde{v})$ 对所有满足 $\mathfrak{a} = 0$ 的 $S_{2,\ \mathfrak{a}=0} \in \mathcal{T}_2^F$ 都有 $\mathbb{E}(T_1 S_{2,\ \mathfrak{a}=0}) = 0$。换句话说，任何 $T_1 \in \mathcal{T}^\perp$ 都必须具有以下形式：

$$T_1(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} - \left\{\frac{1-A}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} - 1\right\}\mu(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v})\ .$$

接下来，我们考虑（情形2）。设 $S_{2,\ \mathfrak{b}=0}$ 表示 $\mathcal{T}_2^F$中的一个元素，其中 $\mathfrak{b} = 0$ 属于（S.112），且 $\mathfrak{a}$任意，即

$$S_{2,\mathfrak{b}=0}(Y^{(0)}, A, Z, \boldsymbol{X}) \equiv \big\{A - f^*(A=1\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})\big\}\mathfrak{a}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\ .$$

与前面的推导类似，我们得到

$$\begin{aligned}
& 0 = \mathbb{E}\big(T_1 S_{2,\mathfrak{b}=0}\big)\ ,\quad \forall S_{2,\mathfrak{b}=0} \in \mathcal{T}_2^F \text{ with } \mathfrak{b}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\big[\frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,X)}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - \big\{\frac{1-A}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1\big\}k(Z,\boldsymbol{X})\big] \\ \times\big\{A - f(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\mathfrak{a}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\end{array}\right]\ ,\ \forall \mathfrak{a}:\mathfrak{a}(0,\boldsymbol{X})=0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\big[\frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,X)}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - \big\{\frac{1-A}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1\big\}k(Z,\boldsymbol{X})\big] \\ \times\big\{A - f(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\big\{\mathfrak{a}(Y^{(0)},\boldsymbol{X}) + \mathfrak{c}(\boldsymbol{X})\big\}\end{array}\right]\ ,\ \forall \mathfrak{a}:\mathfrak{a}(0,\boldsymbol{X})=0, \forall \mathfrak{c} \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\big[\frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,X)}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - \big\{\frac{1-A}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1\big\}k(Z,\boldsymbol{X})\big] \\ \times\big\{A - f(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\mathfrak{a}'(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\end{array}\right]\ ,\ \forall \mathfrak{a}' \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\big[\frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,X)}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - \big\{\frac{1-A}{f^*(A=0|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})} - 1\big\}k(Z,\boldsymbol{X})\big] \\ \times\big\{A - f(A=1\,|\,Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\end{array}\ \middle|\ Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\right] \\
& = \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}-\widetilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})f(A=1|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X}) \\ +\mu(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v})f(A=1|Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\ \middle|\ Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\right] \\
& = \mathbb{E}\Big[A\big\{\mu(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}) - \widetilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\}\ \Big|\ Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\Big] \\
& = f(A=1\,|\,Y^{(0)},\boldsymbol{X})\mathbb{E}\big\{\mu(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}) - \widetilde{v}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=1, Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\}\ .
\end{aligned}$$

这意味着 $\widetilde{v}$ 必须满足

$$\mathbb{E}\big\{\widetilde{v} - \mu(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v})\,|\,A=1, Y^{(0)},\boldsymbol{X}\big\} = 0\ . \tag{S.117}$$

换言之，任意 $T_1 \in \mathcal{T}^\perp$ 都必须具有以下形式：

$$T_1(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \frac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} - \left\{\frac{1-A}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} - 1\right\}\mu(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v})\ ,$$

其中，$\widetilde{v}$ 满足（S.117）。因此，$\mathcal{T}^\perp$ （S.116）可表示为：

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}^\perp \\
& = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{(1-A)\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} \\ -\left\{\dfrac{1-A}{f^*(A=0\,|\,Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X})} - 1\right\}\mu(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v})\end{array}\ \middle|\ \begin{array}{l}v \in \mathcal{L}^2(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \text{ satisfies (S.117)} \\ \text{where} \\ \widetilde{v} = v - v^\dagger \text{ and} \\ \mu(Z, \boldsymbol{X}; \widetilde{v}) = \mathbb{E}\big\{\widetilde{v}\,|\,A=1, Z, \boldsymbol{X}\big\}\end{array}\right\}\ .
\end{aligned} \tag{S.118}$$

现在，令 $t_v \in \mathcal{T}^{\perp}$ 为满足（S.117）且对应于函数 v的任意元素。那么，（S.111）中的集合可表示为

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O}) + t_v(\boldsymbol{O}) \\
&= \frac{\left[\begin{array}{l} \{A-(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\} - A\tau^* \\ +(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{\omega(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)\} \\ +A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega)+(1-A)\omega(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array}\right]}{\mathbb{E}(A)} \\
&\quad + \frac{\mathbb{E}(A)\left[\begin{array}{l} (1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{\widetilde{v}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v})\} \\ +A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v})+(1-A)\widetilde{v}(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array}\right]}{\mathbb{E}(A)} \\
&= \frac{\left[\begin{array}{l} \{A-(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\} - A\tau^* \\ +(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{\omega'(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega')\} \\ +A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega')+(1-A)\omega'(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{array}\right]}{\mathbb{E}(A)},
\end{aligned}
$$

其中 $\omega' = \omega + \mathbb{E}(A)\widetilde{v}$。由于 ω' 满足条件 (ω-i) 和 (ω-ii)，因此（S.111）中的每个元素确实都具有（21）中的形式。

证明至此完成。

C.6 定理4.2的证明

在证明中，我们通过刻画 $\tau^* \equiv \tau_1^* - \tau_0^*$ 的有效影响函数，证明一个更一般的结果，其中 $\tau_a^* \equiv \mathbb{E}\{\mathcal{G}(Y_{(a)}\boldsymbol{X}) \mid A = 1\}$；这里，$\mathcal{G}(\cdot)$ 是一个固定的一致有界函数。为方便起见，我们记$\mathcal{G}^{(a)} = \mathcal{G}(Y_{(a)}\,\boldsymbol{X})$ 和 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(Y, \boldsymbol{X})$。

我们采用与章节C.5中相同的符号。此外，我们引入以下干扰函数的简写符号：

$$
\begin{aligned}
&p_z = f^*(Z = z \mid \boldsymbol{X}) , \\
&\mathfrak{p}_z(y) = f^*(Z = z \mid A = 1, Y^{(0)} = y, \boldsymbol{X}) , \\
&\alpha(y) = \alpha^*(y, \boldsymbol{X}) , \\
&\beta_z = \beta^*(z, \boldsymbol{X}) , \\
&\mu_z = \mathbb{E}\{\mathcal{G}^{(0)} \mid A = 1, Z = z, \boldsymbol{X}\} , \\
&\mu_z(v) = \mathbb{E}\{v(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \mid A = 1, Z = z, \boldsymbol{X}\} , \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) .
\end{aligned}
$$

根据（S.31），我们可以得到 $\mathfrak{p}_z$的一个替代表达：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1(Y^{(0)}) &= f^*(Z = 1 \mid A = 1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \\
&= \frac{\frac{\alpha(Y^{(0)})\beta_1}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1} f^*(Y^{(0)} \mid \boldsymbol{X}) p_1}{\sum_{z=0}^{1} \frac{\alpha(Y^{(0)})\beta_z}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_z} f^*(Y^{(0)} \mid \boldsymbol{X}) p_z} \\
&= \left[\frac{\beta_1 p_1}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1} + \frac{\beta_0 p_0}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0}\right]^{-1} \left[\frac{\beta_1 p_1}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1}\right] \\
&= \frac{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}\beta_1 p_1}{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}\beta_1 p_1 + \{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}\beta_0 p_0}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}\beta_1 p_1}{\beta_1 p_1 + \beta_0 p_0 + \alpha(Y^{(0)})\beta_0\beta_1} , \tag{S.119}$$

and

$$\mathfrak{p}_0(Y^{(0)}) = \frac{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}\beta_0 p_0}{\beta_1 p_1 + \beta_0 p_0 + \alpha(Y^{(0)})\beta_0\beta_1} .$$

由引理B.4的证明，具体而言，由（S.35）中的推导可知， $\omega = \widetilde{\nu} = \nu - \nu^{\dagger}$ 可以表示为:

$$\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \big[L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\{L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\}\big]\{Z - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\} , \tag{S.120}$$

对于函数 $L(Y_{(0)}\boldsymbol{X}) \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)}\boldsymbol{X})$。

接下来，我们证明存在唯一的 L^* 满足 (ω-ii)。方程（S.120）意味着

$$\begin{aligned}\mu_Z(\omega) &= \mathbb{E}\{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) \,|\, A=1, Z, \boldsymbol{X}\} \\ &= \{Z - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\}\big[\mu_Z(L) - \mathbb{E}\{L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \,|\, \boldsymbol{X}\}\big] .\end{aligned}$$

and

$$A\{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu_Z(\omega)\} = A\{Z - \mathbb{E}(Z \,|\, \boldsymbol{X})\}\{L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mu_Z(L)\} .$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{\omega(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu_Z(\omega) \,|\, A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} \\ &= \begin{bmatrix} -f^*(Z=0 \,|\, A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z=1 \,|\, \boldsymbol{X})\{L - \mu_0(L)\} \\ +f^*(Z=1 \,|\, A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) f^*(Z=0 \,|\, \boldsymbol{X})\{L - \mu_1(L)\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})p_0 - \mathfrak{p}_0(Y^{(0)})p_1\}L \\ -\{\ \mathfrak{p}_1(Y^{(0)})p_0\mu_1(L) - \mathfrak{p}_0(Y^{(0)})p_1\mu_0(L)\ \} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_1(Y^{(0)})L - p_1 L - p_1\mu_0(L) \\ +\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})\{p_1\mu_0(L) - p_0\mu_1(L)\} \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

同样，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{\mathcal{G}^{(0)} - \mu_Z \,|\, A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} \\ &= \mathcal{G}^{(0)} - \mathfrak{p}_1(Y^{(0)})\mu_1 - \mathfrak{p}_0(Y^{(0)})\mu_0 \\ &= \mathcal{G}^{(0)} - \mu_0 + \mathfrak{p}_1(Y^{(0)})(\mu_0 - \mu_1) .\end{aligned}$$

因此， ω 满足 (ω-ii) 当且仅当 L 满足以下条件:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}^{(0)} - \mu_0 \\ +\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})(\mu_0 - \mu_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_1(Y^{(0)})L - p_1 L - p_1\mu_0(L) \\ +\mathfrak{p}(Y^{(0)})\{p_1\mu_0(L) - p_0\mu_1(L)\} \end{bmatrix} . \tag{S.121}$$

如章节 A.6.2所述， （S.121）可以表示为具有可分离核的第二类弗雷德霍姆积分方程。此外，当 Z 为二元时，它成为恰好识别方程，因此存在唯一解。

为了求出实际的闭式表示，我们对 L假定如下形式，其中 $B \equiv B(\boldsymbol{X})$与 $C \equiv C(\boldsymbol{X})$:

$$L(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) = \frac{\mathcal{G}^{(0)} + \mathfrak{p}_1(Y^{(0)})B + C}{\mathfrak{p}_1(Y^{(0)}) - p_1} \ . \tag{S.122}$$

在此设定下，(S.121) 可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}^{(0)} - \mu_0 \\ +\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})(\mu_0 - \mu_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^{(0)} - p_1\mu_0(L) + C \\ +\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})\{B + p_1\mu_0(L) - p_0\mu_1(L)\} \end{bmatrix} \ . \tag{S.123}$$

通过比较 (S.123) 两边的函数形式，我们得到

$$\begin{cases} p_1\mu_0(L) - C - \mu_0 = 0 \\ B + p_1\mu_0(L) - p_0\mu_1(L) = \mu_0 - \mu_1 \end{cases} \tag{S.124}$$

$$\Rightarrow \quad B + C + \mu_0 - p_0\mu_1(L) = \mu_0 - \mu_1$$

$$\Rightarrow \quad p_0\mu_1(L) - B - C - \mu_1 = 0 \ . \tag{S.125}$$

因此，只需找到满足 (B 和 C (S.124) 以及 (S.125) 的

我们首先求出 $\mathfrak{p}_1(Y_{(0)}) - p_1$ 的表达式:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p}_1(Y^{(0)}) - p_1 \\
&= f^*(Z=1|A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - f^*(Z=1|\boldsymbol{X}) \\
&= \frac{f^*(Y^{(0)}, A=1, Z=1 \,|\, \boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}, A=1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z=1 \,|\, \boldsymbol{X})}{f^*(Y^{(0)}, A=1 \,|\, \boldsymbol{X})} \\
&= \frac{f^*(Y^{(0)}, A=1, Z=1 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z=0 \,|\, \boldsymbol{X}) - f^*(Y^{(0)}, A=1, Z=0 \,|\, \boldsymbol{X}) f^*(Z=1 \,|\, \boldsymbol{X})}{f^*(Y^{(0)}, A=1 \,|\, \boldsymbol{X})} \\
&= \frac{\left\{ \frac{\alpha(Y^{(0)})\beta_1}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1} - \frac{\alpha(Y^{(0)})\beta_0}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0} \right\} f^*(Y^{(0)} \,|\, \boldsymbol{X}) p_1 p_0}{f^*(Y^{(0)}, A=1 \,|\, \boldsymbol{X})} \\
&= \frac{\alpha(Y^{(0)})(\beta_1 - \beta_0)}{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}} \frac{f^*(Y^{(0)} \,|\, \boldsymbol{X}) p_1 p_0}{f^*(Y^{(0)}, A=1 \,|\, \boldsymbol{X})} \\
&\overset{\text{(S.31)}}{=} \frac{\dfrac{\alpha(Y^{(0)})(\beta_1 - \beta_0)}{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}} f^*(Y^{(0)} \,|\, \boldsymbol{X}) p_1 p_0}{\displaystyle\sum_{z=0}^{1} \frac{\alpha(Y^{(0)})\beta_z}{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_z} f^*(Y^{(0)} \,|\, \boldsymbol{X}) p_z} \\
&= \frac{\dfrac{\alpha(Y^{(0)})(\beta_1 - \beta_0)}{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}} p_1 p_0}{\dfrac{\alpha(Y^{(0)})\beta_1\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}p_1 + \alpha(Y^{(0)})\beta_0\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}p_0}{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}}} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_0)p_1 p_0}{\beta_1\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}p_1 + \beta_0\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_1\}p_0} \\
&= \frac{(\beta_1 - \beta_0)p_1 p_0}{\beta_1 p_1 + \beta_0 p_0 + \alpha(Y^{(0)})\beta_0\beta_1} \ .
\end{aligned} \tag{S.126}$$

结合（S.119）和（S.126），我们得到

$$\frac{\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})}{\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})-p_1}=\frac{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}\beta_1 p_1}{(\beta_1-\beta_0)p_1p_0}\ . \tag{S.127}$$

将（S.127）代入（S.122），可得

$$\begin{aligned}
&L(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\\
&=\frac{\mathcal{G}^{(0)}+\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})B+C}{\mathfrak{p}_1(Y^{(0)})-p_1}\\
&=\frac{\beta_1p_1+\beta_0p_0+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\beta_1}{(\beta_1-\beta_0)p_1p_0}\{\mathcal{G}^{(0)}+C\}+\frac{\{1+\alpha(Y^{(0)})\beta_0\}\beta_1p_1}{(\beta_1-\beta_0)p_1p_0}B\\
&=\frac{\begin{bmatrix}\{\sum_{z=0}^1\beta_zp_z\}\mathcal{G}^{(0)} & + & \beta_0\beta_1\mathcal{G}^{(0)}\alpha(Y^{(0)})\\ +\{\sum_{z=0}^1\beta_zp_z\}C & + & \beta_0\beta_1\alpha(Y^{(0)})C\\ +\beta_1p_1B & + & \beta_0\beta_1p_1\alpha(Y^{(0)})B\end{bmatrix}}{(\beta_1-\beta_0)p_1p_0}\ .
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mu_z(L)=\frac{\begin{bmatrix}\{\sum_{z=0}^1\beta_zp_z\}\mu_z & + & \beta_0\beta_1\mu_z(\alpha\mathcal{G})\\ +\{\sum_{z=0}^1\beta_zp_z\}C & + & \beta_0\beta_1C\mu_z(\alpha)\\ +\beta_1p_1B & + & \beta_0\beta_1p_1B\mu_z(\alpha)\end{bmatrix}}{(\beta_1-\beta_0)p_1p_0}\ . \tag{S.128}$$

由（S.124）和（S.128），可知

$$\begin{aligned}
0&=p_1\mu_0(L)-C-\mu_0\\
&=\frac{\begin{bmatrix}\{\sum_{z=0}^1\beta_zp_z\}\mu_0 & + & \beta_0\beta_1\mu_0(\alpha\mathcal{G})\\ +\{\sum_{z=0}^1\beta_zp_z\}C & + & \beta_0\beta_1C\mu_0(\alpha)\\ +\beta_1p_1B & + & \beta_0\beta_1p_1B\mu_0(\alpha)\end{bmatrix}-(\beta_1-\beta_0)p_0\big(C+\mu_0\big)}{(\beta_1-\beta_0)p_0}\\
&=\frac{\begin{bmatrix}\{2\beta_0p_0+\beta_1p_1-\beta_1p_0\}\mu_0 & + & \beta_0\beta_1\mu_0(\alpha\mathcal{G})\\ +\{2\beta_0p_0+\beta_1p_1-\beta_1p_0\}C & + & \beta_0\beta_1C\mu_0(\alpha)\\ +\beta_1p_1B & + & \beta_0\beta_1p_1B\mu_0(\alpha)\end{bmatrix}}{(\beta_1-\beta_0)p_0}\ .
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&B\cdot\{\beta_1p_1+\beta_0\beta_1p_1\mu_0(\alpha)\}+C\cdot\{\beta_1p_1+2\beta_0p_0-\beta_1p_0+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha)\}\\
&=-\{\beta_1p_1\mu_0+2\beta_0p_0\mu_0-\beta_1p_0\mu_0+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha\mathcal{G})\}\ .
\end{aligned} \tag{S.129}$$

由（S.124）和（S.128可得

$$0=p_0\mu_1(L)-B-C-\mu_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\begin{bmatrix} \{\sum_{z=0}^{1}\beta_z p_z\}\mu_1 & + & \beta_0\beta_1\mu_1(\alpha\mathcal{G}) \\ +\{\sum_{z=0}^{1}\beta_z p_z\}C & + & \beta_0\beta_1 C\mu_1(\alpha) \\ +\beta_1 p_1 B & + & \beta_0\beta_1 p_1 B\mu_1(\alpha) \end{bmatrix} - (\beta_1-\beta_0)p_1\big(B+C+\mu_1\big)}{(\beta_1-\beta_0)p_1} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} \{\beta_0 p_0+\beta_0 p_1\}\mu_1 & + & \beta_0\beta_1\mu_1(\alpha\mathcal{G}) \\ +\{\beta_0 p_0+\beta_0 p_1\}C & + & \beta_0\beta_1 C\mu_1(\alpha) \\ +\beta_0 p_1 B & + & \beta_0\beta_1 p_1 B\mu_1(\alpha) \end{bmatrix}}{(\beta_1-\beta_0)p_1} \\
&= \beta_0\frac{\begin{bmatrix} \mu_1 & + & \beta_1\mu_1(\alpha\mathcal{G}) \\ +C & + & \beta_1 C\mu_1(\alpha) \\ +p_1 B & + & \beta_1 p_1 B\mu_1(\alpha) \end{bmatrix}}{(\beta_1-\beta_0)p_1} ,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
B\cdot\{p_1+\beta_1 p_1\mu_1(\alpha)\}+C\cdot\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\} = -\{\mu_1+\beta_1\mu_1(\alpha\mathcal{G})\} . \tag{S.130}
$$

结果（S.129）和（S.130）可归结为以下线性系统:

$$
\mathcal{A}\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \mathcal{B} \tag{S.131}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} \beta_1 p_1+\beta_0\beta_1 p_1\mu_0(\alpha) & \beta_1 p_1+2\beta_0 p_0-\beta_1 p_0+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha) \\ p_1+\beta_1 p_1\mu_1(\alpha) & 1+\beta_1\mu_1(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} , \\
\mathcal{B} &= -\begin{bmatrix} \beta_1 p_1\mu_0+2\beta_0 p_0\mu_0-\beta_1 p_0\mu_0+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha\mathcal{G}) \\ \mu_1+\beta_1\mu_1(\alpha\mathcal{G}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} .
\end{aligned}
$$

注意，$\mathcal{A}$可逆，如下所示:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathcal{A}) &= p_1\begin{bmatrix} \{\beta_1+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha)\}\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\} \\ -\{\beta_1 p_1+2\beta_0 p_0-\beta_1 p_0+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha)\}\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\} \end{bmatrix} \\
&= p_1\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\}\begin{bmatrix} \beta_1+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha) \\ -\{\beta_1 p_1+2\beta_0 p_0-\beta_1 p_0+\beta_0\beta_1\mu_0(\alpha)\} \end{bmatrix} \\
&= p_1\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\}(\beta_1-\beta_1 p_1-2\beta_0 p_0+\beta_1 p_0) \\
&= 2p_1 p_0\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\}(\beta_1-\beta_0) \\
&\neq 0 .
\end{aligned}
$$

需要注意的是，$\beta_1\neq\beta_0$ 由（工具变量3）和引理 B.2保证。因此，（B，C）的闭式表达式可通过求解（S.131）得到:

$$
\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} \tag{S.132}
$$

$$= -\frac{\begin{bmatrix} 1+\beta_1\mu_1(\alpha) & -\{\beta_1 p_1 + 2\beta_0 p_0 - \beta_1 p_0 + \beta_0\beta_1\mu_0(\alpha)\} \\ -\{p_1 + \beta_1 p_1 \mu_1(\alpha)\} & \beta_1 p_1 + \beta_0\beta_1 p_1 \mu_0(\alpha) \end{bmatrix}}{2p_1 p_0\{1+\beta_1\mu_1(\alpha)\}(\beta_1-\beta_0)}$$
$$\times \begin{bmatrix} \beta_1\mu_0 + 2\beta_0 p_0\mu_0 - \beta_1 p_0\mu_0 + \beta_0\beta_1\mu_0(\alpha\mathcal{G}) \\ \mu_1 + \beta_1\mu_1(\alpha\mathcal{G}) \end{bmatrix} .$$

因此， ω^*（$Y^{(0)}$, Z, $\boldsymbol{X}$）满足（ω-i）和（ω-ii）可表示为

$$\omega^*(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \big[L^*(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) - \mathbb{E}\{L^*(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{X}\}\big]\{Z - \mathbb{E}(Z \mid \boldsymbol{X})\} \tag{S.133}$$

其中

$$L^*(Y^{(0)}, \boldsymbol{X}) = \frac{Y^{(0)} + \mathbb{E}\{Z \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\}B^*(\boldsymbol{X}) + C^*(\boldsymbol{X})}{\mathbb{E}\{Z \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} - \mathbb{E}(Z \mid \boldsymbol{X})} ,$$

其中 B^* 与 C^* 定义于（S.132）。针对 τ^* 在模型 $\mathcal{M}$ 中的对应影响函数由下式给出

$$\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O}) = \frac{\begin{bmatrix} \{A-(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G} - \mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\} - A\tau^* \\ +(1-A)\alpha^*(Y,\boldsymbol{X})\beta^*(Z,\boldsymbol{X})\{\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X}) - \mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\} \\ +A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*) + (1-A)\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X}) \end{bmatrix}}{\mathbb{E}(A)} . \tag{S.134}$$

N接下来，我们证明 ω^* 在（S.133）中是满足（ω-i）和（ω-ii）的唯一函数，即 e.,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{G}^{(0)} - \mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\}$$
$$= \mathbb{E}\{\omega^*(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*) \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} .$$

这样的 ω^* 是唯一的，只要下列条件对 $\widetilde{v} = v - v^\dagger$ 成立，其中 $v \in \mathcal{L}^2(Y_{(0)} Z, \boldsymbol{X}$):

$$\mathbb{E}\{\widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z,\boldsymbol{X};\widetilde{v}) \mid A=1, Y^{(0)}, \boldsymbol{X}\} = 0 \quad \text{implies} \quad \widetilde{v}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = 0 .$$

引理 B.4 保证该条件成立，从而确立 ω^* 在（S.133）中的唯一性。由于 τ^*的影响函数是唯一的，因此它就是 τ^*在模型 $\mathcal{M}$中的有效影响函数。

(S.134) 中的影响函数是模型 M 中 τ^* 的有效影响函数，这一事实可进一步论证如下。只需验证 (S.134) 中的影响函数位于模型 M 的切空间 T 中。在二元 Z 下，引理 B.4 表明 (S.117) 的唯一解为 $\widetilde{v} = 0$。因此，T 的正交补（在 (S.118) 中记为 T $^\perp$）仅包含 0，即 T $^\perp$ = {0}，这意味着 T $= \mathrm{L}_0^2(\boldsymbol{O})$。因此，(S.134) 中的影响函数属于 T，即它是模型 M 中 τ^* 的有效影响函数。

至此证明完毕。

C.7 定理的证明5.1

在证明中，我们通过考虑 $\tau^* \equiv \mathbb{E}\{\mathcal{G}(Y_{(1)}\,\boldsymbol{X})$–$\mathcal{G}(Y_{(0)}\,\boldsymbol{X}) \mid A=1\}$ 的估计量来证明一个更一般的结果，其中 $\mathcal{G}(\cdot)$ 是一个固定的一致有界函数。为方便起见，我们将 $\mathcal{G}^{(a)} = \mathcal{G}(Y_{(a)}\boldsymbol{X})$ 和$\mathcal{G} = \mathcal{G}(Y, \boldsymbol{X})$ 记为。

我们使用以下简写符号:

$$
\begin{aligned}
&\pi^*(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \alpha^*(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\beta^*(Z, \boldsymbol{X}) \ , \\
&\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)}, Z, \boldsymbol{X}) = \widehat{\alpha}^{(-k)}(Y^{(0)}, \boldsymbol{X})\widehat{\beta}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}) \ , \\
&\widehat{\mathbb{E}}^{(-k)}\{g(V) \,|\, W\} = \int g(v)\widehat{f}^{(-k)}(V = v \,|\, W)\, dv \ , \\
&\mathbb{E}^{(-k)}\{\widehat{g}^{(-k)}(V) \,|\, W\} = \int \widehat{g}^{(-k)}(v) f^*(V = v \,|\, W)\, dv \ , \\
&N_k = |\mathcal{I}_k| \ , \\
&\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}(V) = \frac{1}{N_k}\sum_{i \in \mathcal{I}_k} V_i \ , \\
&\mathbb{P}(V) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i \ , \\
&\mathbb{G}_{\mathcal{I}_k}^{(-k)}(V) = \frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i \in \mathcal{I}_k} \left\{V_i - \mathbb{E}^{(-k)}(V)\right\} \ .
\end{aligned}
$$

根据第 C.5 和 C.6章节，模型 τ^* 中的 有效影响函数为

$$
\texttt{IF}^*(\boldsymbol{O}) = \frac{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*}{\mathbb{E}(A)} \ ,
$$

其中

$$
\phi^*(\boldsymbol{O}) = \begin{bmatrix} \{A - (1-A)\pi^*(Y, Z, \boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G} - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \mathcal{G})\} \\ +(1-A)\pi^*(Y, Z, \boldsymbol{X})\{\omega^*(Y, Z, \boldsymbol{X}) - \mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \omega^*)\} \\ +A\mu^*(Z, \boldsymbol{X}; \omega^*) + (1-A)\omega^*(Y, Z, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \ .
$$

的闭式表示 ω^* 可见于（S.133）。

估计量构造如下

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\tau} = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N}\widehat{\tau}^{(k)} \ , \quad \widehat{\tau}^{(k)} = \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})\}}{\mathbb{P}(A)} \ , \\
&\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) = \begin{bmatrix} \{A - (1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y, Z, \boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G} - \widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}; \mathcal{G})\} \\ +(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y, Z, \boldsymbol{X})\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y, Z, \boldsymbol{X}) - \widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}; \widehat{\omega}^{(-k)})\} \\ +A\widehat{\mu}^{(-k)}(Z, \boldsymbol{X}; \widehat{\omega}^{(-k)}) + (1-A)\widehat{\omega}^{(-k)}(Y, Z, \boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \ .
\end{aligned}
$$

由简单的代数，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{N_k}\{\widehat{\tau}^{(k)} - \tau^*\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i \in \mathcal{I}_k}\left\{\frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i)}{\mathbb{P}(A)} - \frac{A_i\tau^*}{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}(A)}\right\} \\
&= \underbrace{\frac{\mathbb{E}(A)}{2}\left\{\frac{1}{\mathbb{P}(A)} - \frac{1}{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}(A)}\right\}}_{=o_P(1)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i \in \mathcal{I}_k}\frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) + A_i\tau^*}{\mathbb{E}(A)}}_{=O_P(1)}
\end{aligned}
$$

$$+\underbrace{\frac{\mathbb{E}(A)}{2}\left\{\frac{1}{\mathbb{P}(A)}+\frac{1}{\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}(A)}\right\}}_{=1+o_P(1)}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i)-A_i\tau^*}{\mathbb{E}(A)}}_{\equiv(\mathrm{AN})=O_P(1)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i)-A_i\tau^*}{\mathbb{E}(A)}+o_P(1)\ .$$

第二行成立，因为 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{E}(A)+o_P(1)$ 且 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}(A)=\mathbb{E}(A)+o_P(1)$ 由大数定律，并且 $\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i)$是有界的。第四个带下括号的项（下文称为(AN)）将被证明是渐近正态的，因此第二和第四个带下括号的项为 $O_P(1)$。我们进一步证明

$$\begin{aligned}
&\sqrt{N_k}\{\widehat{\tau}^{(k)}-\tau^*\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i)-A_i\tau^*}{\mathbb{E}(A)}+o_P(1)\\
&=\frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\phi^*(\boldsymbol{O}_i)-A_i\tau^*}{\mathbb{E}(A)}+o_P(1) &\text{(S.135)}\\
&\quad+\sqrt{N_k}\mathbb{E}^{(-k)}\left\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^*(\boldsymbol{O})\right\} &\text{(S.136)}\\
&\quad+\mathbb{G}_{\mathcal{I}_k}^{(-k)}\left\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^*(\boldsymbol{O})\right\}\ . &\text{(S.137)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{N_k}}\sum_{i\in\mathcal{I}_k}\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O}_i)+o_P(1)\ .
\end{aligned}$$

注意，S.135根据中心极限定理具有渐近正态性。基于下述推导，我们证明S.136和S.137是 $o_P(1)$。因此，(AN) 具有渐近正态性，并且 $O_P(1)$。此外，这进一步得到主要结果：

$$\sqrt{N}(\widehat{\tau}-\tau^*)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O}_i)+o_P(1)\xrightarrow{D}N(0,\sigma^2)\ ,$$

其中 $\sigma^2=\mathrm{Var}\{\mathtt{IF}^*(\boldsymbol{O})\}$。

因此，为完成 $\widehat{\tau}$ 的渐近正态性证明，还需证明：

$$\begin{aligned}
\text{(S.136)}&=\sqrt{N_k}\mathbb{E}^{(-k)}\left\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^*(\boldsymbol{O})\right\}=o_P(1)\ ,\\
\text{(S.137)}&=\mathbb{G}_{\mathcal{I}_k}^{(-k)}\left\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^*(\boldsymbol{O})\right\}=o_P(1)\ .
\end{aligned}$$

我们首先刻画（S.136）的速率。注意，它可以表示为

$$\begin{aligned}
&N_k^{-1/2}\text{(S.136)}\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\begin{bmatrix}\{A-(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\+(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\+A\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})+(1-A)\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{bmatrix}\\
&\quad-\mathbb{E}^{(-k)}\begin{bmatrix}\{A-(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\+(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\}\\+A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)+(1-A)\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l}(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\ +A\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\\ -(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\ -A\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-(1-A)\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]\\
&= -\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l}(1-A)\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\ -(1-A)\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\ -(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\\ -(1-A)\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]\\
&\overset{(S.91)}{=} -\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l}(1-A)\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}\\ \qquad\times\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}\\ -\{\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\end{array}\right]\\ -\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]\\
&\overset{(S.90)}{=} -\mathbb{E}^{(-k)}\left[\begin{array}{l}A\{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})/\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-1\}\\ \qquad\times\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}\\ -\{\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\end{array}\right]\\ -\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right]. \qquad \text{(S.138)}
\end{aligned}
$$

我们将使用 $\alpha_{\mathcal{N}}$ 和 $\beta_{\mathcal{N}}$，它们在引理 B.5-(v)中定义。对于任意函数 h，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right]\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\beta_{\mathcal{N}}^*(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right]\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}-1\right\}h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right]\\
&\quad+\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\beta_{\mathcal{N}}^*(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right]\\
&\quad+\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}-1\right\}\left\{\frac{\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\beta_{\mathcal{N}}^*(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right]\\
&=\mathbb{E}^{(-k)}\left[\left\{\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}-1\right\}\mathbb{E}\{h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\}\right]\\
&\quad+\mathbb{E}^{(-k)}\left[\left\{\frac{\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\beta_{\mathcal{N}}^*(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}\mathbb{E}\{h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\,|\,A=1,Z,\boldsymbol{X}\}\right]\\
&\quad+\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}-1\right\}\left\{\frac{\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\beta_{\mathcal{N}}^*(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}h(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\right]. \qquad \text{(S.139)}
\end{aligned}
$$

代入 $h=\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\ \boldsymbol{X};\ \mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})$，方程（S.139）变为

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\left[A\left\{\frac{\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}{\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})}-1\right\}[\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})]\right]\right\|\\
&\lesssim\mathbb{E}^{(-k)}\left[\left\|\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^*(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}-1\right\|\times\left\|\mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\,\middle|\,A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right\|\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{E}^{(-k)}\left[\left\|\frac{\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\beta_{\mathcal{N}}^{*}(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\|\times\left\|\mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\middle|A=1,Z,\boldsymbol{X}\right]\right\|\right]\\
&+\mathbb{E}^{(-k)}\left[\left\|\frac{\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}{\alpha_{\mathcal{N}}^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})}-1\right\|\left\|\frac{\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})}{\beta_{\mathcal{N}}^{*}(Z,\boldsymbol{X})}-1\right\|\left\|\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\right\|\right]\\
\lesssim&\left\|\begin{array}{l}\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\\ -\alpha_{\mathcal{N}}^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\end{array}\right\|_{P,2}\times\left\|\mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\middle|A=1,Y^{(0)},\boldsymbol{X}\right]\right\|_{P,2}\\
&+\left\|\begin{array}{l}\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})\\ -\beta_{\mathcal{N}}^{*}(Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right\|_{P,2}\times\left\|\mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\{\mathcal{G}^{(0)}-\widehat{\omega}^{(-k)}\}\\ -\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G}-\widehat{\omega}^{(-k)})\end{array}\middle|A=1,Z,\boldsymbol{X}\right]\right\|_{P,2}\\
&+\left\|\begin{array}{l}\widehat{\alpha}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\\ -\alpha_{\mathcal{N}}^{*}(Y^{(0)},\boldsymbol{X})\end{array}\right\|_{P,2}\left\|\begin{array}{l}\widehat{\beta}_{\mathcal{N}}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X})\\ -\beta_{\mathcal{N}}^{*}(Z,\boldsymbol{X})\end{array}\right\|_{P,2}\\
\lesssim&\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\end{array}\right]^{2}.
\end{aligned}
\tag{S.140}
$$

最后一行由（S.41）、（S.42）、（S.48）、（S.49）得出。

此外，由（S.50），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{E}^{(-k)}\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}\right\|\\
\lesssim&\left[\begin{array}{l}\left\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\\ +\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}\end{array}\right]\\
&\quad\times\left\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})-f^{*}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\right\|_{P,2}.
\end{aligned}
\tag{S.141}
$$

结合（S.138）、（S.140）和（S.141），我们得出

$$
\begin{aligned}
&N_k^{-1/2}\left\|\text{(S.136)}\right\|\\
\lesssim&\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\end{array}\right]\\
&\quad\times\left[\begin{array}{l}\|\widehat{f}^{(-k)}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(Y^{(0)}\,|\,A=0,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})-f^{*}(A=1\,|\,Z,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\\ +\|\widehat{f}^{(-k)}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})-f^{*}(Z=1\,|\,\boldsymbol{X})\|_{P,2}\end{array}\right]\\
&=r_Y^{(-k)2}+r_A^{(-k)2}+r_Y^{(-k)}r_A^{(-k)}+r_Y^{(-k)}r_Z^{(-k)}+r_A^{(-k)}r_Z^{(-k)}\\
&=o_P\big(N^{-1/2}\big).
\end{aligned}
$$

第二个不等式由（S.43）、（S.48）和（S.50）得到。最后一行由假设 (A7)得到。这就完成了对（S.136）为 $o_P(1)$的证明。

接下来，我们刻画（S.137）的速率。（S.137）在给定 $\mathcal{I}_k$ 条件下的期望为 0。（S.137）的方差为

$$
\mathrm{Var}^{(-k)}\big\{\text{(S.137)}\big\}\le\mathrm{Var}^{(-k)}\big\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^{*}(\boldsymbol{O})\big\}\le\mathbb{E}^{(-k)}\big[\big\|\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^{*}(\boldsymbol{O})\big\|_2^2\big].
$$

因此，只需找到$\mathbb{E}^{(-k)}\big[\big\|\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^{*}(\boldsymbol{O})\big\|_2^2\big]$的速率。注意，$\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^{*}(\boldsymbol{O})$可以

明确写为：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^*(\boldsymbol{O})\\
&=\begin{bmatrix}
\{A-(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\
+(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
+A\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})+(1-A)\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})
\end{bmatrix}\\
&\qquad-\begin{bmatrix}
\{A-(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\}\{\mathcal{G}-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\
+(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\}\\
+A\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)+(1-A)\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})
\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}
(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})+\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\}\\
-(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})+\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
+A\{\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\
-A\{\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
-(1-A)\{\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\}
\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}
(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})+\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\}\\
-(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})+\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
+(1-A)\pi^*(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})+\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
-(1-A)\widehat{\pi}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\{\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})+\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
+A\{\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\
-A\{\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
-(1-A)\{\omega^*(Y,Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y,Z,\boldsymbol{X})\}
\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}
(1-A)\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\begin{bmatrix}
\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\\
+\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\\
+\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})
\end{bmatrix}\\
+(1-A)\begin{bmatrix}
\mathcal{G}-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\\
-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})+\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}
\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\\
-\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})
\end{Bmatrix}\\
+A\{\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\}\\
-A\{\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)-\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})\}\\
-(1-A)\{\omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\}
\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(-k)}\big[\big\|\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O})-\phi^*(\boldsymbol{O})\big\|_2^2\big]\\
&\lesssim\begin{bmatrix}
\big\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\mathcal{G})\big\|_{P,2}^2\\
+\big\|\widehat{\mu}^{(-k)}(Z,\boldsymbol{X};\widehat{\omega}^{(-k)})-\mu^*(Z,\boldsymbol{X};\omega^*)\big\|_{P,2}^2\\
+\big\|\widehat{\omega}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\omega^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}^2\\
+\big\|\widehat{\pi}^{(-k)}(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})-\pi^*(Y^{(0)},Z,\boldsymbol{X})\big\|_{P,2}^2
\end{bmatrix}\\
&=o_P(1)\,.
\end{aligned}
\tag{S.142}
$$

最后一行由（S.43）、（S.39）、（S.46）、（S.47）可得。

最后，我们证明方差估计量 $\widehat{\sigma}^2$ 是一致的。注意到

$$\widehat{\sigma}^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} \widehat{\sigma}^{2,(k)} \ , \quad \widehat{\sigma}^{2,(k)} = \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\left[\left\{ \frac{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - A\widehat{\tau}}{\mathbb{P}(A)} \right\}^2 \right] .$$

因此，只需证明 $\widehat{\sigma}^{2,(k)} - \sigma^2 = o_P(1)$，其表达式如下 ：

$$\begin{aligned}
&\widehat{\sigma}^{2,(k)} - \sigma^2 \\
&= \{\mathbb{P}(A)\}^{-2} \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\left[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - A\widehat{\tau}\}^2 \right] - \sigma^2 \\
&= \{\mathbb{E}(A)\}^{-2} \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\left[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - A\widehat{\tau}\}^2 \right] - \sigma^2 + o_P(1) \\
&= \{\mathbb{E}(A)\}^{-2} \Big[\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\left[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - A\widehat{\tau}\}^2 \right] - \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\left[\{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*\}^2 \right] \Big] \\
&\qquad + \Big[\{\mathbb{E}(A)\}^{-2} \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\left[\{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*\}^2 \right] - \sigma^2 \Big] + o_P(1) \\
&= \{\mathbb{E}(A)\}^{-2} \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\Big[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - A\widehat{\tau}\}^2 - \{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*\}^2 \Big] + o_P(1) \ . \qquad \text{(S.143)}
\end{aligned}$$

第三行和第五行由大数定律成立。因此，只需证明（S.143）也是 $o_P(1)$。（S.143）中的项可以写成

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_k} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \Big[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\}^2 - \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\}^2 \Big] \\
&= \frac{1}{N_k} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \left[\begin{array}{l} [\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\} - \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\}] \\ \times [\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\} + \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\}] \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{N_k} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \left[\begin{array}{l} [\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\} - \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\}] \\ \times [\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\} - \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\} + 2\{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\}] \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{N_k} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \Big[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\} - \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\} \Big]^2 \\
&\quad + \frac{2}{N_k} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \Big[[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - A_i\widehat{\tau}\} - \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\}] \{\phi^*(\boldsymbol{O}_i) - A_i\tau^*\} \Big] \ .
\end{aligned}$$

令 $\widehat{\Delta}^{(-k)} = \{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - A\widehat{\tau}\} - \{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*\}$。由霍尔德不等式可知，（S.143）的绝对值的上界为

$$\big| \text{(S.143)} \big| \precsim \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\Big[\{\widehat{\Delta}^{(-k)}\}^2 \Big] + 2\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\Big[\{\widehat{\Delta}^{(-k)}\}^2 \Big] \cdot \mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\Big[\{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*\}^2 \Big] \ .$$

由于 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}[\{\phi^*(\boldsymbol{O}) - A\tau^*\}^2] = \{\mathbb{E}(A)\}^2\sigma^2 + o_P(1) = O_P(1)$，若 $\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}[\{\widehat{\Delta}^{(-k)}\}^2] = o_P(1)$，则（S.143）为 $o_P(1)$。由一些代数运算可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathcal{I}_k}\Big[\{\widehat{\Delta}^{(-k)}\}^2 \Big] &\lesssim \frac{1}{N_k} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}_i) - \phi^*(\boldsymbol{O}_i)\}^2 + (\widehat{\tau} - \tau^*)^2 \\
&= \mathbb{E}^{(-k)}\Big[\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - \phi^*(\boldsymbol{O})\}^2 \Big] + (\widehat{\tau} - \tau^*)^2 + o_P(1) \\
&= o_P(1) \ .
\end{aligned}$$

第二行是由大数定律应用于 $\{\widehat{\phi}^{(-k)}(\boldsymbol{O}) - \phi^*(\boldsymbol{O})\}^2$ 得出的。最后一行成立

源自（S.142）以及 $\widehat{\tau} = \tau^* + o_P(1)$，而这源于估计量的渐近正态性。证明至此结束。

C.8 定理6.1

该结果直接由引理B.2得出。

参考文献

Abadie, A. (2003). 处理反应模型的半参数工具变量估计。计量经济学杂志, 113(2):231–263. Angrist, J. D., Imbens, G. W. 和 Rubin, D. B. (1996). 使用工具变量进行因果效应识别。《美国统计学会会刊》, 91(434):444–455. Angrist, J. D. 和 Krueger, A. B. (2001). 工具变量与识别的探索：从供给和需求到自然实验。《经济展望杂志》, 15(4):69–85. Athey, S. 和 Imbens, G. W. (2006). 非线性双重差分模型中的识别与推断。 计量经济学, 74(2):431–497. Berger, R. L. 和 Boos, D. D. (1994年). 在干扰参数的置信集上最大化的P值。《美国统计学会会刊》, 89(427):1012–1016. Bergmeir, C. 和 Benítez, J. M. (2012). 使用斯图加特神经网络模拟器在R中实现的神经网络：RSNNS。 统计软件杂志, 46(7):1–26. Bickel, P. J., Klaassen, C. A., Ritov, Y. 和 Wellner, J. A. (1998). 半参数模型的有效与自适应估计。施普林格，纽约。 Blanco, G., Flores, C. A. 和 Flores-Lagunes, A. (2013). 职业培训队培训对工资的平均处理效应与分位数处理效应的界。 人力资源杂志, 48(3):659–701. Bodory, H., Huber, M. 和 Kueck, J. (2024). *causalweight*：基于逆概率加权的因果推断估计方法。R程序包版本1.1.1。 Card, D. (2001). 估计教育回报：若干长期存在的计量经济学问题的进展。 计量经济学, 69(5):1127–1160. Chen, H. Y. (2007). 用于度量关联的半参数优势比模型。 生物统计学, 63(2):413–421. Chen, T. 和 Guestrin, C. (2016). Xgboost：一种可扩展的树提升系统。载于第*22*届*ACM SIGKDD*知识发现与数据挖掘国际会议论文集, KDD ’16, 第785–794页。 Chernozhukov, V., Chetverikov, D., Demirer, M., Duflo, E., Hansen, C., Newey, W. 和 Robins, J. (2018年). 处理与结构参数的双重/去偏机器学习。 计量经济学杂志, 21(1):C1–C68. Danieli, O., Nevo, D., Walk, I., Weinstein, B. 和 Zeltzer, D. (2025年). 工具变量设计的负对照伪 falsification检验。《美国经济评论》（即将发表）。

就业与培训管理局（2025）。什么是 Job Corps？https://www.dol.gov/agencies/eta/jobcorps。访问日期：2025-12-25。Fox, J., Kleiber, C. 和 Zeileis, A.（2025）。*ivreg*：通过 *'2SLS'*、*'2SM'* 或 *'2SMM'* 进行工具变量回归及诊断。R程序包版本 0.6-5。Friedman, J., Hastie, T. 和 Tibshirani, R.（2010）。通过坐标下降法求解广义线性模型的正则化路径。统计软件杂志，33(1):1–22。Friedman, J. H.（1991）。多元自适应回归样条。《统计年鉴》，19(1):1 – 67。Greenwell, B., Boehmke, B., Cunningham, J. 和 Developers, G.（2019）。*gbm*：广义提升回归模型。R程序包版本 2.1.5。Gu, C.（2014）。平滑样条方差分析模型：R程序包 gss。统计软件杂志，58(5):1–25。Hahn, J.（1998）。倾向得分在平均处理效应的有效半参数估计中的作用。计量经济学，66(2):315–331。Hall, P., Racine, J. 和 Li, Q.（2004）。交叉验证与条件概率密度估计。《美国统计学会会刊》，99(468):1015–1026。Hastie, T. 和 Tibshirani, R.（1986）。广义可加模型。《统计科学》，1(3):297 – 310。Hayfield, T. 和 Racine, J. S.（2008）。非参数计量经济学：np 程序包。统计软件杂志，27(5):1–32。Hernán, M. A. 和 Robins, J. M.（2006）。用于因果推断的工具变量：流行病学家的梦想？《流行病学》，17(4):360–372。Huber, M. 和 Mellace, G.（2015）。基于不等式矩约束检验局部平均处理效应识别中的工具变量有效性。《经济学与统计学评论》，97(2):398–411。Imbens, G. W. 和 Angrist, J. D.（1994）。局部平均处理效应的识别与估计。计量经济学，62(2):467–475。Imbens, G. W. 和 Newey, W. K.（2009）。无加性条件下三角联立方程模型的识别与估计。计量经济学，77(5):1481–1512。Job Corps（2025）。截至 PY2023 QTR 2（12-2023）的滚动四季度绩效报告。https://www.jobcorps.gov/reports?topic=17&program-year%5B%5D=2023。访问日期：2025-12-25。

Kanamori, T., Hido, S. 和 Sugiyama, M.（2009）。直接重要性估计的最小二乘法方法。机器学习研究期刊，10(48):1391–1445。Keele, L., Zhao, Q., Kelz, R. R. 和 Small, D.（2019）。工具变量设计的证伪检验及其在手术倾向中的应用。《医疗护理》，57(2):167–171。Kennedy, E. H., Balakrishnan, S. 和 G'Sell, M.（2020）。用于识别依从者及推广因果效应的强工具变量。《统计年鉴》，48(4):2008 – 2030。Kennedy, E. H., Lorch, S. 和 Small, D. S.（2018）。利用局部工具变量曲线和连续工具变量进行稳健因果推断。英国皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法学，81(1):121–143。Kitagawa, T.（2015）。工具变量有效性检验。计量经济学，83(5):2043–2063。Kooperberg, C.（2020）。*polspline*：多项式样条程序。R程序包版本 1.1.19。Kress, R.（2014）。《线性积分方程》。施普林格，第3版。Lee, Y., Yu, M., Liu, J., Park, C., Zhang, Y., Robins, J. M. 和 Tchetgen Tchetgen, E. J.（2025）。乘法型工具变量模型下非线性反事实泛函的推断。预印本 *arXiv:2507.15612*。Levis, A. W., Kennedy, E. H. 和 Keele, L.（2024）。利用工具变量对因果效应进行非参数识别与有效估计。预印本 *arXiv:2402.09332*。Liu, J., Park, C., Lee, Y., Zhang, Y., Yu, M., Robins, J. M. 和 Tchetgen Tchetgen, E. J.（2025）。乘法型工具变量模型。预印本 *arXiv:2507.09302*。Liu, L., Miao, W., Sun, B., Robins, J. 和 Tchetgen Tchetgen, E.（2020）。利用工具变量识别和推断边际已处理者平均处理效应。《中华统计学志》，30(3):1517。Makiyama, K.（2019）。*densratio*：密度比估计。R程序包版本 0.2.1。McFadden, D.（1973）。定性选择行为的条件逻辑回归分析。载于 Zarembka, P.（编），《计量经济学前沿》，第105–142页。学术出版社，纽约，纽约州，美国。Mourifié, I. 和 Wan, Y.（2017）。局部平均处理效应假设检验。《经济学与统计学评论》，99(2):305–313。Newey, W. K.（1990）。半参数效率界。《应用计量经济学杂志》，5(2):99–135。Newey, W. K. 和 Powell, J. L.（2003）。非参数模型的工具变量估计。计量经济学，71(5):1565–1578。

Nguyen, X.、Wainwright, M. J. 和 Jordan, M.（2007）。通过惩罚凸风险最小化估计散度泛函和似然比。载于 Platt, J.、Koller, D.、Singer, Y. 和 Roweis, S. 编，《神经信息处理系统进展》，第20卷。Curran Associates, Inc. Ogburn, E. L.、Rotnitzky, A. 和 Robins, J. M.（2014）。局部平均处理效应曲线的双重稳健估计。《英国皇家统计学会会刊B辑：统计方法学》，77(2)：373–396。Park, C. 和 Kang, H.（2022）。因果推断中推断异质性处理效应的分组方法。《arXiv预印本：1908.04427》。威斯康星大学麦迪逊分校统计学系，麦迪逊。Park, C. 和 Tchetgen Tchetgen, E. J.（2022）。用于因果推断的通用双重差分方法。《arXiv预印本：2212.13641》。Phibbs, C. S.、Bronstein, J. M.、Buxton, E. 和 Phibbs, R. H.（1996）。出生医院的患者数量和护理级别对新生儿死亡率的影响。《美国医学会杂志》，276(13)：1054–1059。Richardson, T. S. 和 Robins, J. M.（2013）。单世界干预图（SWIGs）：统一反事实方法与因果关系图形方法。《华盛顿大学统计与社会科学中心系列。工作论文》，128(30)：2013。Robins, J.、Li, L.、Tchetgen Tchetgen, E. 和 van der Vaart, A.（2008）。高阶影响函数与非线性泛函的极小极大估计。《概率与统计：纪念David A. Freedman文集》，2：335–421。Robins, J. M.（1994）。利用结构嵌套均值模型校正随机试验中的不依从。《统计学通讯：理论与方法》，23(8)：2379–2412。Robins, J. M.、Rotnitzky, A. 和 Scharfstein, D. O.（2000）。缺失数据和因果推断模型中选择偏倚与未测量混杂的敏感性分析。载于 Halloran, M. E. 和 Berry, D. 编，《流行病学、环境与临床试验中的统计模型》，第1–94页，纽约州纽约市。Springer New York。Rotnitzky, A. 和 Robins, J.（1997）。不可忽略无应答的半参数回归模型分析。《医学统计学》，16(1)：81–102。Schick, A.（1986）。关于半参数模型中的渐近有效估计。《统计年鉴》，14(3)：1139–1151。Schochet, P. Z.、Burghardt, J. 和 Glazerman, S.（2001）。全国 Job Corps 研究：Job Corps 对参与者就业及相关结果的影响。《技术报告》。美国劳工部就业与培训管理局。

Schochet, P. Z.、Burghardt, J. 和 McConnell, S.（2008）。Job Corps 是否有效？全国 Job Corps 研究的影响结果。《美国经济评论》，98(5)：1864–1886。Strittmatter, A.（2019）。按性别划分的 Job Corps 异质性收入效应：转换分位数方法。《劳动经济学》，61：101760。Sugiyama, M.、Nakajima, S.、Kashima, H.、Buenau, P. 和 Kawanabe, M.（2007）。通过模型选择进行直接重要性估计及其在协变量偏移适应中的应用。载于 Platt, J.、Koller, D.、Singer, Y. 和 Roweis, S. 编，《神经信息处理系统进展》，第20卷。Curran Associates, Inc. Sun, B.、Liu, L.、Miao, W.、Wirth, K.、Robins, J. 和 Tchetgen Tchetgen, E. J.（2018）。利用工具变量对非随机缺失数据进行半参数估计。《中华统计学志》，28(4)：1965。Sun, B.、Miao, W. 和 Wickramarachchi, D. S.（2026）。利用工具变量对不可忽略缺失数据进行双重稳健估计。《中华统计学志》，36(4)。即将出版。Tan, Z.（2006）。使用工具变量进行因果推断的回归与加权方法。《美国统计学会会刊》，101(476)：1607–1618。Tan, Z.（2010）。使用工具变量的边际结构模型与嵌套结构模型。《美国统计学会会刊》，105(489)：157–169。Tchetgen Tchetgen, E. J.（2024）。助推平均处理效应。《arXiv预印本：2410.23590》。Tchetgen Tchetgen, E. J.、Park, C. 和 Richardson, D. B. 用于流行病学因果推断的通用双重差分方法。《流行病学》，35(1)：16–22。Tchetgen Tchetgen, E. J.、Robins, J. M. 和 Rotnitzky, A.（2010）。关于半参数优势比模型中的双重稳健估计。《生物统计学》，97(1)：171–180。Tchetgen Tchetgen, E. J. 和 Vansteelandt, S.（2013）。利用工具变量对已处理者的处理效应进行替代性识别与推断。《哈佛大学生物统计学工作论文系列》。Train, K. E.（2009）。《模拟离散选择方法》。剑桥大学出版社，剑桥。Tsiatis, A. A.（2006）。《半参数理论与缺失数据》。施普林格，纽约。van der Laan, M. J.、Polley, E. C. 和 Hubbard, A. E.（2007）。超级学习器。《遗传学与分子生物学中的统计应用》，6(1)。Vansteelandt, S.、Bowden, J.、Babanezhad, M. 和 Goetghebeur, E.（2011）。关于因果优势比的工具变量估计。《统计科学》，第403–422页。

Vansteelandt, S. 和 Goetghebeur, E.（2003）。基于广义结构均值模型的因果推断。英国皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法学，65(4):817–835。Volker, T. B.（2023）。*densityratio*：通过密度比估计进行分布比较。Wang, L. 和 Tchetgen Tchetgen, E.（2017）。使用工具变量对平均处理效应进行有界、高效且多重稳健的估计。英国皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法学，80(3):531–550。Wooldridge, J. M.（2016）。《计量经济学导论：现代方法》。South-Western Cengage Learning。Wright, M. N. 和 Ziegler, A.（2017）。ranger：在 C++ 和实数集中快速实现高维数据的随机森林。统计软件杂志，77(1):1–17。Ye, T.、Shao, J. 和 Kang, H.（2021）。双样本汇总数据孟德尔随机化中的去偏逆方差加权估计量。《统计年鉴》，49(4):2079 – 2100。