arXiv:2602.02271v1 [cs.CE] 2 Feb 2026

# 偏微分方程的神经几何：正则性、稳定性与收敛保证

Samundra Karki[a]、Adarsh Krishnamurthy[a]、
Baskar Ganapathysubramanian,*

[a]爱荷华州立大学，美国爱荷华州艾姆斯

**摘要**

隐式神经表示（INR）已成为一种强大的几何表示工具，但其是否适用于基于物理的模拟，仍未得到充分研究。豪斯多夫距离等指标可以量化表面重建质量，却无法反映实现可证明数值性能所需的几何正则性。本文建立了一个统一的理论框架，将隐式神经表示训练误差与偏微分方程（具体而言，线性椭圆方程）的解精度联系起来。我们定义了隐式神经表示支持适定边值问题所需的最低几何正则性，并推导出先验误差估计，将神经网络的函数逼近误差与有限元离散误差联系起来。分析表明，要达到线性有限元的收敛率，隐式神经表示训练损失必须随网格尺寸的平方缩放。

## 1. 引言

准确表示复杂几何是计算科学与工程领域的一项基础要求，也是固体力学、流体流动、输运和多物理场耦合中边值问题的基石。在大多数经典仿真工作流中，几何以显式形式提供，例如 CAD边界表示或多边形表面，随后转换为适用于离散化的形式，如贴体网格。尽管这套流程已相当成熟，但为复杂形状生成高质量网格可能耗费大量人力和计算资源；随着几何复杂度增加，还容易失败或丢失保真度 [16, 12, 19, 15, 1]。

近年来，隐式神经表示（INR）已成为一种颇具吸引力的几何表示替代方案，能够以紧凑、连续且可微的方式表示几何 [17, 2, 5, 21]。INR 将形状隐式编码为神经场的零水平集 $\phi_\theta$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，通常通过训练来逼近有符号距离函数（SDF）。与显式表面表示相比，INR 具有多项优势：（i）能够提供与分辨率无关的几何描述；（ii）可以直接从点云或图像等数据中学习 [22, 5], ；（iii）无需显式提取表面，即可在任意空间位置进行查询。

隐式场长期以来一直应用于数值分析流程中，尤其是在几何处理和网格生成方面。例如，Persson [18] 展示了使用水平集表示构建边界拟合网格的方法，其中，该过程的稳健性关键取决于由隐式场导出的几何量（如法向量和梯度）的适定性。近年来，隐式神经表示也被直接应用于嵌入式和非拟合离散中。具体而言，Karki等人 [11, 10] 提出了基于八叉树的计算网格上的直接仿真流程，用于线性弹性和不可压缩纳维-斯托克斯方程等典型偏微分方程，并通过移位边界法（*SBM*） [13, 14]弱施加边界条件。此类直接流程的一个关键要素，是确保学习得到的隐式场在界面周围的窄带区域内保持良好的几何性质。为此，Karki等人 [11] 采用训练策略，在管状邻域内施加近似的 Eikonal结构（$||\nabla\phi_\theta|| \approx 1$），并结合额外的基于法向的 一致性损失，以维持稳定的边界投影和定义良好的法向方向。

这些进展表明，神经几何上的仿真不仅涉及曲面重建，还从根本上依赖于隐式场的微分正则性。尽管如此，对这一

*通讯作者

要求仍缺乏严格的认识：隐式神经表示需要具备怎样的几何精度和正则性，才能支持稳定且收敛的数值模拟？隐式神经表示领域的大多数研究都使用倒角距离或豪斯多夫距离等指标，评估原始曲面与重建曲面之间的几何质量。虽然这些指标能够量化曲面之间的接近程度，但它们本身无法控制边值问题的稳定性常数，也不能保证嵌入方法中所用边界算子的适定性。尤其是，较小的重建误差并不能排除界面附近出现病态行为，例如梯度消失、法向量不规则或曲率无界；这些问题都会使边界条件施加不稳定，并降低变分离散的精度。

这揭示了**重建保真度**与**仿真就绪度**之间的差距：目前尚无统一框架能够：(i) 明确在由隐式神经表示定义的区域上求解偏微分方程所需的最小正则性条件；(ii) 量化几何中的神经近似误差如何传递至偏微分方程的解；(iii) 将训练容差要求与离散精度保证联系起来。本研究旨在通过开展误差分析，建立隐式神经表示近似误差与椭圆边值问题的偏微分方程解误差之间的联系，从而阐明隐式神经表示何时能够作为科学计算中可靠的几何代理。我们的分析聚焦于泊松型扩散模型：

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

以及其在 $\Omega^p$ 上由隐式神经表示诱导的对应模型：

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u^p) = f \quad \text{in } \Omega^p, \qquad u^p = 0 \quad \text{on } \partial\Omega^p,$$

其中 $\kappa$ 是统一椭圆的，$f$ 是给定的强迫项。我们的主要贡献如下：

- **最小几何正则性要求**。 我们确定了学习得到的水平集函数 $\psi$ 所需满足的充分几何条件，以确保 $\Gamma_p$ 存在良定义的管状邻域以及唯一的法向投影映射。具体而言，我们要求界面邻域内满足 $\psi \in C^{1,1}$ ，具有统一的非退化性界$|\nabla\psi| \geq c_0 > 0$，并通过 $\|\nabla^2\psi\|_{\text{op}} \leq C_\psi$保证曲率有界。

- **训练误差 $\Rightarrow$ 豪斯多夫 几何界**。 设 $\phi$ 表示定义真实边界 $\Gamma = \{\phi = 0\}$的参考（真实值）水平集函数，该边界围成真实区域$\Omega = \{\phi < 0\}$。我们通过管状邻域 $\mathcal{T}_h$ 内的水平集一致性偏差来量化隐式神经表示近似精度：$= \{x : |\phi(x)| < h_{\text{管}}\}$:

  $$\varepsilon_\infty := \|\psi - \phi\|_{L^\infty(\mathcal{T}_h)}.$$

  在梯度非退化性条件下，这意味着豪斯多夫扰动界具有如下形式：

  $$d_H(\Gamma, \Gamma^p) \lesssim \frac{\varepsilon_\infty}{c_0},$$

  这明确揭示了梯度消失所导致的放大机制。

- **主要先验总误差估计（隐式神经表示 + 有限元法）**。 设 $u_{p\,h}$ 表示扰动区域$\Omega_p$ 上采用网格尺寸$h_{\text{mesh}}$、多项式次数$k$ 的有限元解。我们的主要结果给出了总误差分解：

  $$\|(u - u_h^p)\|_{L^2(D)} \leq C_{\text{geom}} \left(\frac{\varepsilon_\infty}{c_0}\right) + C_{\text{FEM}}\, h_{\text{mesh}}^{k+1}\, |u^p|_{H^{k+1}(\Omega^p)}, \tag{1}$$

  其中，$D$ 是包含$\Omega \cup \Omega^p$ 的固定背景域，函数通过零延拓进行比较。一个直接推论是实用的训练准则：若要保持 $O(h^2{}_{\text{mesh}})$有限元法收敛阶，隐式神经表示必须满足 $\varepsilon_\infty = O(h^2{}_{\text{mesh}})$（对于线性基函数）。

提纲。 本文其余部分组织如下。在第 2 节中，我们介绍记号、几何距离以及泛函分析框架。第 3 节陈述了隐式神经表示所定义边界的适定投影与曲率控制所需的最小几何正则性假设。第 4 节推导了一个豪斯多夫型界，将一致隐式神经表示函数误差 $\varepsilon_\infty$ 与几何边界扰动联系起来。第 5 节将椭圆问题的精确区域扰动估计与标准有限元逼近理论相结合，以证明总体先验界（方程 1），从而给出对隐式神经表示训练精度的明确要求，以避免降低仿真收敛性。

## 2. 预备知识与符号

我们总结本文通篇使用的记号与泛函分析框架。本节主要是为来自不同背景的读者而增设的。

几何符号。 令 $\mathbb{R}^n$ 表示$n$维欧几里得空间。向量用粗体符号表示$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开域，其边界为 $\Gamma := \partial\Omega$。$\Omega$ 的神经（由隐式神经表示诱导的）近似记为 $\Omega^p$，其边界记为 $\Gamma^p$。

对于$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和$r > 0$，$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ 表示开球。单位球面为 $\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$。为量化区域之间的几何差异，我们使用豪斯多夫距离

$$d_H(\Omega, \Omega^p) := \max\left\{\sup_{\mathbf{x}\in\Omega} \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \Omega^p), \sup_{\mathbf{y}\in\Omega^p} \operatorname{dist}(\mathbf{y}, \Omega)\right\}, \tag{2}$$

其中 $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, S) := \inf_{\mathbf{y}\in S} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$。

正则性假设。 我们采用标准的霍尔德空间$C^{k,\alpha}$。函数属于 $C^{0,1}$ 当且仅当它是利普希茨连续的；属于$C^{1,1}$ 当且仅当其梯度是利普希茨连续的。全文中，我们假设水平集函数 $\phi$ 和 $\psi$ 满足假设 3.1中的管状正则性条件，这些条件蕴含界面 $\Gamma = \{\phi = 0\}$ 和 $\Gamma^p = \{\psi = 0\}$ 是$C^{1,1}$超曲面。对于海森矩阵 $\nabla^2\phi$，我们用 $\|\nabla^2\phi\|_{\mathrm{op}}$ 表示其算子（谱）范数。

函数空间。 令$L^2(\Omega)$表示$\Omega$上的平方可积函数空间。我们采用标准索博列夫空间$H^k(\Omega)$，其中$H_0^1(\Omega)$表示$H^1(\Omega)$中在 $\Gamma$ 上为零的函数（按迹的意义），而$H^{-1}(\Omega)$是$H_0^1(\Omega)$的对偶空间。在利普希茨区域上的椭圆问题分析中，我们采用贝西夫空间$B^{3/2}_{2,\infty}$；将函数零延拓到背景域$D$后，该空间可由以下方式刻画：

$$\|u\|_{B^{3/2}_{2,\infty}(D)} := \|u\|_{H^1(D)} + \sup_{0<|h|\le 1} \frac{\|\nabla u(\cdot + h) - \nabla u(\cdot)\|_{L^2(D)}}{|h|^{1/2}}. \tag{3}$$

这是定义在利普希茨区域上的椭圆问题所对应的尖锐正则性尺度，并在第5节的稳定性估计中发挥核心作用。

注 2.1（零延拓）。 定义在$\Omega$或$\Omega^p$ 上的函数均通过零延拓至固定的背景域$D \supset \Omega \cup \Omega^p$。这样便可在公共空间$H_0^1(D)$中比较不同区域上的解。

## 3. 隐式神经表示的几何正则性

令 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为一个隐式定义物理域 $\Omega$ 及其界面 $\Gamma(\psi = 0)$，如图 1所示：

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi(\mathbf{x}) < 0\}, \qquad \Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

要使水平集场 $\psi$ 成为适用于在 $\Gamma$上施加狄利克雷或诺伊曼边界条件的偏微分方程问题的有效几何表示，它必须在边界附近满足某些正则性和非退化性质。现在，我们正式陈述对 $\psi$的假设。

**假设 3.1**（几何正则性）。 设 $\mathcal{T}_h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\psi(\mathbf{x})| < h\}$ 为围绕 $\Gamma$（它是标量场 $\psi$的零水平集）的宽度为$h > 0$的管状邻域。我们假设 $\psi \in C^{1,1}(\mathcal{T}_h)$，这意味着 $\psi$ 连续可微且具有 Lipschitz 连续梯度。此外，存在常数 $c_0 > 0$ 和$C_\psi < \infty$，使得对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_h$:

$$\|\nabla\psi(\mathbf{x})\| \ge c_0, \qquad \|\nabla^2\psi(\mathbf{x})\|_{\mathrm{op}} \le C_\psi, \tag{4}$$

其中，$\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示海森矩阵的谱范数。

这些条件意味着单位法向量场 $\mathbf{n}$ 是利普希茨连续的，并且 $\Gamma$ 的主曲率有界于$C_\psi/c_0$。

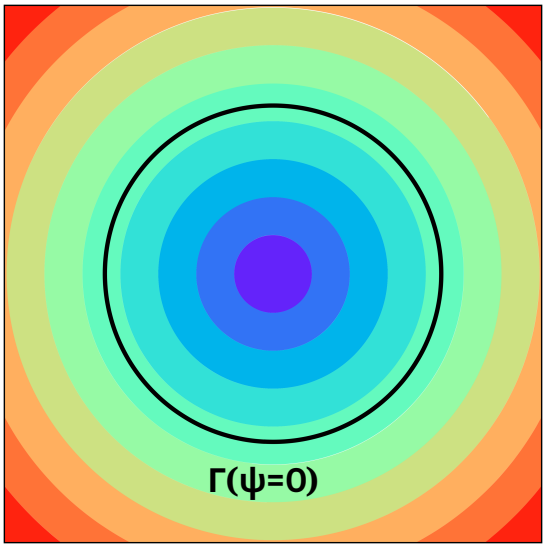



**图 1：** 真实几何周围的水平集 Γ。隐式场（$\psi$）围绕边界（Γ），使得 $\psi = 0$ 在 Γ

备注 3.2（有效神经网络架构）。 激活函数的选择决定了隐式神经表示是否满足假设 3.1：

1. **光滑激活函数（$C^\infty$）：** 使用双曲正切函数、正弦函数（SIREN）、Swish激活函数或高斯误差线性单元的架构可得到 $\psi \in C^\infty$，只要梯度不消失，即可在局部满足该假设。
2. **高阶整流器（$C^{1,1}$）：** 平方ReLU，$\sigma(x) = (\max\{0,x\})^2$，产生全局$C^{1,1}$ 函数，且海森矩阵有界，从而使其对偏微分方程求解器在几何上是安全的。
3. **标准ReLU（$C^{0,1}$）：** 标准ReLU 网络产生带有尖锐折痕的分段线性边界。它们不满足假设 3.1，因为曲率呈分布形式（狄拉克δ函数），且法向量不连续，从而导致边界投影不适定。

### *3.1.* 边界投影的适定性

虚拟域方法（例如移位边界法）要求将边界附近的点映射回Γ [13, 14, 7, 8]。我们证明假设 3.1 保证了这一映射的唯一性，即使 $\psi$ 并非完美的符号距离函数（SDF）。

**引理3.3**（法向投影的局部存在唯一性）。 设 $\psi \in C^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ 满足假设 *3.1*，其零水平集表示区域 $\Omega$ 的边界。那么，存在一个常数 $h_{\text{crit}} > 0$，仅依赖于 $c_0$ 和 $C_\psi$，使得对于任意 $h \in (0, h_{\text{crit}})$，以下结论成立：

对于每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_h$，都存在唯一的 $\mathbf{x}^* \in \Gamma$ 和唯一的 $d \in (-h, h)$，使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + d\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^*), \qquad \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) = \frac{\nabla\psi(\mathbf{x}^*)}{\|\nabla\psi(\mathbf{x}^*)\|}. \tag{5}$$

完整证明见附录 A。

这一结果证 实，隐式神经表示无需严格满足程函方程 $\|\nabla\psi\| = 1$。只要梯度非零（$c_0 > 0$），且曲率受到控制，因此该几何可用于仿真。

在第6.3节中，我们采用基于隐式神经表示的几何表示与非拟合方法，主要使用**SBM**[13, 14]，并以八叉树作为背景网格。该方法精确计算$\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ 以施加边界条件。

## 4. 几何扰动分析

在实际应用中，我们使用神经网络 $\psi$近似真实几何 $\phi$。现在，我们量化这种近似引入的几何误差。设：

$$\phi(\mathbf{x}) \quad \text{(True Level Set)}, \qquad \psi(\mathbf{x}) \quad \text{(Neural Approximation)}.$$

我们假设两个场都满足假设 3.1 在一个公共管状邻域内 $\mathcal{T}_h$。此外，我们假设网络经过训练，达到统一容差：

$$\|\psi - \phi\|_{L^\infty(\mathcal{T}_h)} \le \varepsilon_\infty. \tag{6}$$

**引理4.1**（Hausdorff距离界）。 设 $\Gamma = \{\phi = 0\}$ 表示真实的零水平集，且 $\Gamma^p = \{\psi = 0\}$ 表示由神经近似给出的相应零水平集。在假设 *3.1* 的正则性条件和相容性条件（公式 *6*）下，*Hausdorff* 距离有界为：

$$d_H(\Gamma, \Gamma^p) \le \frac{\varepsilon_\infty}{\min(c_0, \tilde{c}_0)} + O(\varepsilon_\infty^2), \tag{7}$$

其中 $c_0$， $\tilde{c}_0$ 分别是 $\|\nabla\phi\|$ 和 $\|\nabla\psi\|$ 的下界。

完整证明见附录 B。

备注 4.2（梯度消失的影响）。 该界按 $1/c_0$进行缩放。这凸显了一项关键的训练要求：仅仅最小化残差 $|\psi - \phi|$ 是不够的。训练损失还必须施加程函约束或梯度正则化，以防止$c_0 \to 0$。如果隐式神经表示梯度在界面处消失，几何误差$d_H$ 将变得无界，从而破坏仿真精度。

## 5. 扰动区域上的稳定性与离散化

本节量化由隐式神经表示定义的区域中的几何近似误差如何传递至椭圆边值问题的解。我们的论述遵循 Savaré 和 Schimperna [20], 提出的定量区域扰动框架，该框架在最低限度的几何正则性（利普希茨边界）条件下可得出尖锐的稳定性估计。

### *5.1.* 动机

设 $u$ 表示定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$上的某个椭圆问题的弱解。稳定性理论与数值分析中的一个基本问题是：

当 $\Omega$ 被扰动区域 $\Omega^p$取代时，解 $u$ 会如何变化?

这个问题出现在许多经典场景中，包括变化区域上变分解的稳定性、形状优化 [6], 以及多边形边界近似 [3]的误差分析。在我们的研究中，扰动区域 $\Omega^p$来自隐式神经表示重建几何。尽管诸如 Γ-收敛或 Mosco 收敛等定性工具可以给出收敛结论，我们的目标是得到一个定量 界，并使其显式依赖于：(i) 区域间的距离，(ii) 边界正则性参数，以及 (iii) 外力$f$的范数。

### *5.2.* 问题表述

设$D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个同时包含真实区域 $\Omega$ 与扰动区域 $\Omega^p$ 的有界背景区域 . 我们考虑 狄利克雷问题

$$\text{(True)} \quad \begin{cases} -\nabla\cdot(\kappa\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma := \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{(Perturbed)} \quad \begin{cases} -\nabla\cdot(\kappa\nabla u^p) = f & \text{in } \Omega^p, \\ u^p = 0 & \text{on } \Gamma^p := \partial\Omega^p, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $\kappa \in L^\infty(D)$ 满足一致椭圆性

$$0 < \kappa_{\min} \le \kappa(x) \le \kappa_{\max} < \infty,$$

且$f \in L^2(D)$。我们将解在其区域外延拓为零，以便在 $D$ 上比较 $u$,$u^p \in H_0^1(D)$。

注释 5.1（水平集约定）。 在我们的隐式神经表示设定中，我们用水平集表示区域：$\Omega = \{\phi < 0\}$ 和 $\Omega^p = \{\psi < 0\}$，因此 $\Gamma = \partial\Omega = \{\phi = 0\}$ 和 $\Gamma^p = \partial\Omega^p = \{\psi = 0\}$ （不存在拓扑病态情形时）。
注5.2（非齐次边界条件）。对于边界数据 $u|_\Gamma = g$，引入提升函数 $w \in H^1(D)$，使 $w|_\Gamma = g$ （且 $w|_{\Gamma^p} \approx g$），并将分析应用于齐次化未知量 $\tilde{u} = u - w$ 和 $\tilde{u}^p = u^p - w$。

*5.3.* 几何正则性：一致锥条件

Savaré 和 Schimperna 的稳定性理论 [20] 要求边界满足最低限度的正则性假设，该假设通过一致锥条件来表述。

**假设 5.3** （一致 $(\rho,\theta)$-锥条件）。区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足一致 $(\rho,\theta)$-锥条件，当且仅当存在常数 $\rho > 0$ 和 $\theta \in (0, \pi/2)$，使得对于每个 $x_0 \in \partial\Omega$，都存在一个单位向量 $n(x_0) \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得对所有

$$h \in C_{\rho,\theta}(n(x_0)) := \{h \in \mathbb{R}^n : 0 < |h| < \rho,\ h \cdot n(x_0) > |h| \cos\theta\},$$

以下包含关系

$$(B_{3\rho}(x_0) \cap \Omega) - h \subset \Omega, \qquad (B_{3\rho}(x_0) \setminus \Omega) + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega \tag{9}$$

成立。

锥条件等价于 $\partial\Omega$ 的一致利普希茨正则性；参见 [20, 定义 2.6 和注释 2。7]。注释 5.4（与 INR 正则性的关系）。 我们的水平集正则性假设（假设 3.1）意味着 $\partial\Omega$ 是一个 $C^{1,1}$ 超曲面，因此是利普希茨的，进而满足 假设 5.3；例如参见 [4, 定理 I.2.2。2]。

*5.4.* 主要稳定性估计

Let

$$d_\star := d_H(\Gamma, \Gamma^p)$$

表示边界之间的豪斯多夫距离。

**定理 5.5** （区域扰动下的稳定性 [20, 定理 1–2 和推论 8。2]）。 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$满足 假设 *5.3*。假设扰动足够小：

$$d_\star \le \tfrac{1}{2}\rho \sin\theta. \tag{10}$$

设 $u \in H_0^1(\Omega)$ 和 $u^p \in H_0^1(\Omega^p)$ 是方程 （*8*） 的弱解*(Equation 8)*。将其零延拓至 $D$ 后，有如下估计：

$$\|\nabla u - \nabla u^p\|_{L^2(D)} \le C_1 \|f\|_{L^2(D)}^{1/2} \|f\|_{H^{-1}(D)}^{1/2} \left(\frac{d_\star}{\rho \sin\theta}\right)^{1/2}, \tag{11}$$

$$\|u - u^p\|_{L^2(D)} \le C_2 \|f\|_{L^2(D)}^{1/2} \|f\|_{H^{-1}(D)}^{1/2} \left(\frac{d_\star}{\rho \sin\theta}\right), \tag{12}$$

其中 $C_1$ 和 $C_2$ 仅依赖于 $n$、$\kappa_{\max}/\kappa_{\min}$ 和 $\operatorname{diam}(D)$。

我们简要概述 定理 5.5背后的机制；详见 Savaré 和 Schimperna [20] 以了解完整证明 s.

在公共空间中的变分表述.. 令 $V := H_0^1(D$，并定义

$$a(v,w) := \int_D \kappa \nabla v \cdot \nabla w \, dx,$$

它在 $V$ 上是强制的且连续的。尽管 $u$ 和$u^p$ 是在不同区域上求解问题的，但我们可以将它们视为定义在不同的闭子空间上

$$V_\Omega := H_0^1(\Omega) \subset V, \qquad V_{\Omega^p} := H_0^1(\Omega^p) \subset V.$$

抽象逼近论证给出了以到这些子空间的距离表示的界。

**引理 5.6**（抽象稳定性 [20, 引理 4.2]）。存在 $\sigma > 0$ 仅依赖于强制性/$a$ 的连续性常数$(\cdot,\cdot)$ 使得

$$\|u - u^p\|_V \le \sigma\Big(d(u, V_{\Omega^p}) + d(u^p, V_\Omega)\Big), \qquad d(v, W) := \inf_{w\in W} \|v - w\|_V.$$

超额、余 补超额和豪斯多夫控制。。有向集合差异通过超额进行量化 ss

$$e(X, Y) := \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(x, Y), \qquad \operatorname{dist}(x, Y) := \inf_{y\in Y} |x - y|,$$

以及补 充超额 $\check{}e(X,Y) := e(\mathbb{R}^n \setminus Y, \mathbb{R}^n \setminus X)$。在假设 5.3 和(方程 10)下，补充
超额 Ω 之间 以及 $\Omega^p$ 由豪斯多夫距离控制；参见 [20, 引理 7.4]:

$$\check{e}(\Omega, \Omega^p) \lesssim \frac{d_\star}{\sin\theta}.$$

局部化与平移构造。利用单位分解和锥条件，通过沿允许的锥方向进行局部平移来构造比较函数，从而得到含有 $|h| \sim d_\star/\sin\theta$ 的差商项；参见[20, 命题 5.1 和引理 7。3]。

利普希茨区域中的差商正则性。椭圆方程解在利普希茨区域上满足与 *Besov* 正则性 $B^{3/2}_{2,\infty}$ 相应的最优差商估计；参见 [20, 定理 6。2] 以及 Jerison 和 Kenig [9]。特别是，

$$\|u(\cdot + h) - u(\cdot)\|_{L^2} + \|\nabla u(\cdot + h) - \nabla u(\cdot)\|_{L^2} \lesssim |h|^{1/2} \|f\|_{L^2}.$$

汇总估计；利用对偶性得到 $L^2$ 界。结合引理 5.6与局部化和差商估计，可得能量估计 (公式 11)。$L^2$ 估计 (公式 12) 则通过一种适用于扰动区域的对偶性（Aubin–Nitsche 型）论证得出；参见 [20,定理 8。4]。

注记 5.7（1/2 指数的最优性）。平方根依赖关系$d_\star^{1/2}$ 在（方程 11）中一般是尖锐的，反映了利普希茨区域上椭圆问题的正则性障碍；参见 Savaré 与 Schimperna [20], 以及 Jerison 与 Kenig [9]。

### *5.5.* 与 *INR* 几何的联系

定理 5.5将 INR 逼近质量与 PDE 解精度联系起来。将其与来自第 4 节的几何扰动估计相结合，可得到显式的 INR 到 PDE 传播界。

推论 5.8（INR 到 PDE 误差传播，于 $L^2$）。在假设 3.1 与 5.3下，设 $\Omega = \{\phi < 0\}$ 与 $\Omega^p = \{\psi < 0\}$。假设 INR 场 $\psi$ 在管状邻域 $\mathcal{T}_h$上满足，

$$\|\phi - \psi\|_{L^\infty(\mathcal{T}_h)} \le \varepsilon_\infty.$$

则相应的解$u$在 Ω 上以及$u^p$ 在 $\Omega^p$ 上满足

$$\|u - u^p\|_{L^2(D)} \le \tilde{C}_{L^2} \|f\|^{1/2}_{L^2(D)} \|f\|^{1/2}_{H^{-1}(D)} \left(\frac{\varepsilon_\infty}{c_0 \rho \sin\theta}\right), \tag{13}$$

其中 $c_0 := \inf_{x\in\Gamma} \|\nabla\phi(x)\|$。

证明。根据 引理4.1，一致失配意味着 $d_H(\Gamma, \Gamma^p) \lesssim \varepsilon_\infty/c_0$（忽略高阶项）。将此界代入定理5.5 的 $L^2$-稳定性形式（公式 12）即可证明 （公式 13）。 □

*5.6.* 总误差：几何 +离散化

实际中，我们使用网格尺寸为 $h_{\text{mesh}}$ 的有限元离散，在 $\Omega^p$ 上对扰动区域问题进行数值求解。令 $u^p{}_h$ 表示离散解。在 $D$ 上测得的总误差可分解为

$$\|u - u_h^p\|_{L^2(D)} \le \|u - u^p\|_{L^2(D)} + \|u^p - u_h^p\|_{L^2(\Omega^p)}.$$

**定理 5.9** (先验总 $L^2$ 误差估计)。 在推论 5.8的假设下，假设在 $\Omega^p$ 上使用多项式次数为 $k$ 的协调有限元，且 $u^p \in H^{k+1}(\Omega^p)$。那么存在常数 $C_{\text{geom}}, C_{\text{FEM}} > 0$，它们与 $h_{\text{mesh}}$ 和 $\varepsilon_\infty$无关，使得

$$\|u - u_h^p\|_{L^2(D)} \le C_{\text{geom}} \, \|f\|_{L^2(D)}^{1/2} \, \|f\|_{H^{-1}(D)}^{1/2} \left(\frac{\varepsilon_\infty}{c_0}\right) + C_{\text{FEM}} \, h_{\text{mesh}}^{k+1} \, |u^p|_{H^{k+1}(\Omega^p)}. \tag{14}$$

证明。 由三角不等式可得

$$\|u - u_h^p\|_{L^2(D)} \le \|u - u^p\|_{L^2(D)} + \|u^p - u_h^p\|_{L^2(\Omega^p)}.$$

第一项　　由推论 5.8可知有界。第二项则由标准的 $L^2$ 有限元估计　　：

$$\|u^p - u_h^p\|_{L^2(\Omega^p)} \le C \, h_{\text{mesh}}^{k+1} \, |u^p|_{H^{k+1}(\Omega^p)}.$$

合并这两个界可得(方程 14)。 □

注 5.10（平衡几何误差与离散误差）。 假设强迫项范数 $\|f\|_{L^2(D)}$、 $\|f\|_{H^{-1}(D)}$ 以及正则性半范数 $|u^p|_{H^{k+1}(\Omega^p)}$ 均为 $O(1)$，且常数 $C_{\text{geom}}$ 和$C_{\text{FEM}}$ 具有可比性。平衡（公式 14）中的两项可得如下准则：

$$\varepsilon_\infty \sim h_{\text{mesh}}^{k+1}.$$

特别地，对于 $k = 1$，预期 $\varepsilon_\infty \sim h^2$ 网格；而对于$k = 2$，预期 $\varepsilon_\infty \sim h^3$ 网格。

注 5.11（实践意义（数量级））。 界 （公式 14）表明，除非随网格分辨率同步减小 $\varepsilon_\infty$，否则 INR 几何误差将占主导。例如，若目标是使 $L^2$ 离散误差达到 $h^{k+1}$ 网格 量级，则 $\varepsilon_\infty$ 应在相同量级上选取（在上一条注释的假设下）。因此：

- 对于$k = 1$且$h_{\text{网格}} = 10^{-2}$，目标是 $\varepsilon_\infty \approx 10^{-4}$。
- 对于$k = 2$和$h_{\text{网格}} = 10^{-2}$，目标是 $\varepsilon_\infty \approx 10^{-6}$。
- 对于$k = 2$和$h_{\text{网格}} = 10^{-3}$，目标是 $\varepsilon_\infty \approx 10^{-9}$。

这些尺度关系启发了相应的训练策略：根据预期的离散精度调整隐式神经表示的容差，避免在粗网格已足够时过度训练。

## 6. 结果

本节通过数值结果，为第 4 节中提出的几何假设和扰动界提供支持。我们的工作分为两个阶段。首先，利用二维解析隐式场，分离考察几何正则性（假设 3.1）在确保法向/最近点投影定义良好且稳定（引理3.3）方面所起的作用；我们将直观展示梯度非退化性成立的区域，并验证牛顿迭代下的投影行为。其次，对于经过训练、用于逼近单位圆有符号距离场的基于 SIREN 的隐式神经表示，我们重复相同的诊断，并通过逐步增加训练预算，实证验证 Hausdorff扰动估计（引理4.1）。最后，我们通过在扰动几何上采用非贴体八叉树离散和移位边界法（SBM）边界处理求解泊松问题，将几何失配与下游偏微分方程精度联系起来，展示解误差如何随 Hausdorff距离变化，以及几何误差占主导时网格加密如何趋于饱和。

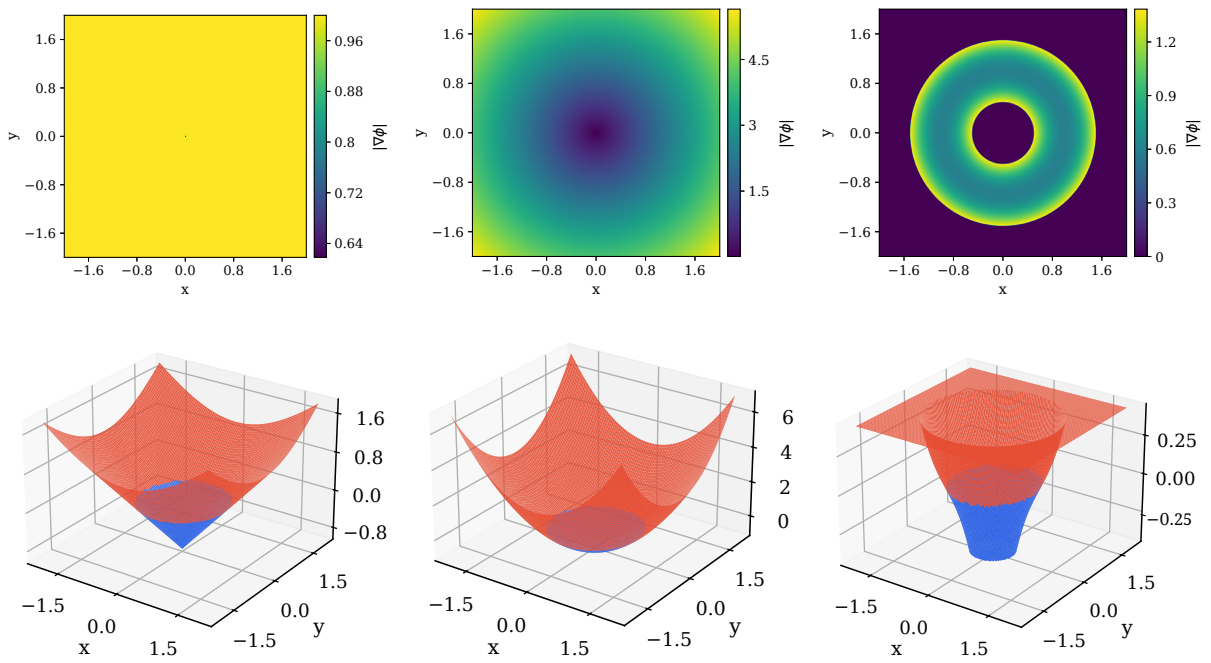



**图 2：** 对三个解析水平集构造上的假设 ***3.1***的验证。各列依次为：（情形*1*）程函符号距离场 $\phi = d$，（情形*2*）非*Eikonal*二次函数 $\phi = r^2 - R^2$，（情形*3*）带状非退化场（旨在仅在指定的管状带内维持 $|\nabla\phi| \geq c_0$）。上排：梯度幅值 $|\nabla\phi|$，展示零水平集附近的（非）退化性。下排：标量场的曲面图 $z = \phi(x, y)$，突出显示界面附近标量场的定性形状。特别是，情形*3*表明，诸如下界$|\nabla\phi| \geq c_0$ 之类的正则性要求可能仅在界面的狭窄邻域 $\mathcal{T}_h$ 内成立。

### *6.1.* 最近点投影的数值验证

在转向 INR 定义的几何之前，我们先通过三个二维解析水平集构造，说明假设 3.1 和引理3.3 所起的作用。 图 2 比较了：(i) Eikonal 有符号距离场 $\phi = d$，(ii) 与其具有相同零水平集的非Eikonal二次隐式场 $\phi = r^2 - R^2$，以及 (iii) 一种带状水平集场，其构造仅在界面 $|\nabla\phi| \geq c_0$ 周围指定的管状邻域内满足条件。梯度幅值图明确标示出非退化条件 $|\nabla\phi| \geq c_0$ 成立和失效的区域，而曲面可视化$z = \phi(x,y)$ 则直观展示了零水平集附近的标量场分布。

接下来，我们使用标准的牛顿最近点迭代，在数值上验证法向投影映射的适定性，

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\phi(\mathbf{x}_k)}{\|\nabla\phi(\mathbf{x}_k)\|^2}\nabla\phi(\mathbf{x}_k),$$

这与沿法向使用牛顿法求解 $\phi(\mathbf{x}) = 0$ 相一致。 图3 报告了（上图）迭代收敛到真实最近点的初始点集合，该最近点位于 $\Gamma = \{\phi = 0\}$ 上；以及（下图）相应的投影误差。对于情形1和情形2，在界面附近的广大区域内，迭代都能稳健收敛，这与 $\nabla\phi$ 在 Γ附近不为零相一致。相比之下，情形3只有在设计的带状区域 $\mathcal{T}_h$内才能可靠收敛，这说明基于投影的构造只有在分析范围限定于$h < h_{\text{crit}}$ 且满足假设 3.1 中的梯度非退化条件时才是稳定的。

### *6.2. Hausdorff* 扰动界的数值验证

接下来，我们在一个受控的二维测试案例中，通过实证验证引理4.1的 Hausdorff 扰动估计。我们考虑单位圆的有符号距离函数（SDF）

$$\phi(x) = \|x\| - 1, \tag{15}$$

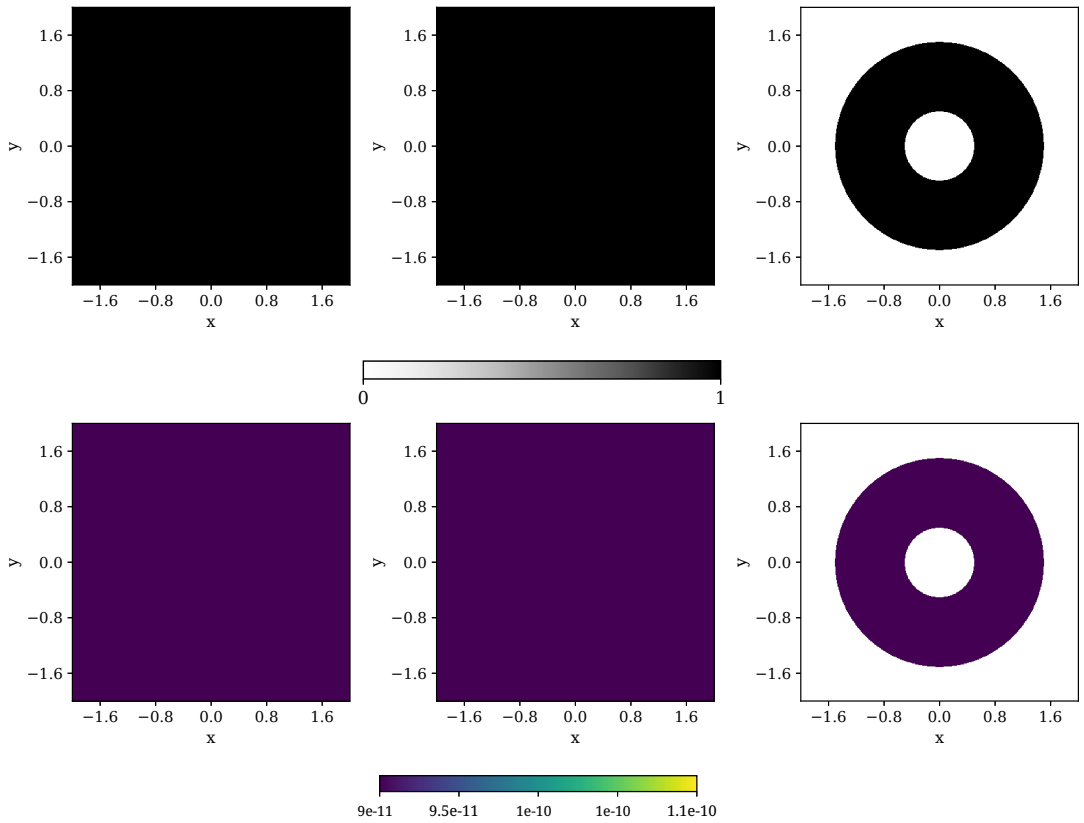



**图3：** 通过牛顿法法向投影对引理*3.3*进行数值验证。上：成功掩码（收敛到真实最近点）。下：成功集合上的投影误差 $\|\mathbf{x}_{\text{final}} - \mathbf{x}^*(\mathbf{x})\|$。情形*1*（*Eikonal*符号距离函数）和情形*2*（非*Eikonal*二次函数）在 $\Gamma$的宽广邻域内均能稳健收敛，而情形*3*仅在指定的管状邻域内收敛 $\mathcal{T}_h$。

其零水平集 $\Gamma = \{\phi = 0\}$ 是单位圆。我们使用基于 SIREN 的隐式神经表示（INR） $\psi_\theta$ 进行训练，以在固定包围盒上近似 $\phi$，并在界面附近的窄带内结合数据项与 Eikonal惩罚项。我们采用四种不同的计算预算（逐步增加优化步数）重复训练，并将其视为精度逐渐提高的几何替代物。

不同训练预算下的正则性趋势。 图4 展示了四种训练预算下学习到的隐式场。上排显示梯度幅值 $|\nabla\psi_\theta|$，下排则显示曲面图 $z = \psi_\theta(x,y)$。随着训练推进，水平集景观变得更加平滑、振荡更少，界面附近的梯度幅值也越来越稳定，并逐渐接近符号距离函数理想状态 $|\nabla\phi| \equiv 1$。这些观察结果与假设 3.1一致，该假设要求：(i) $\nabla\psi_\theta$ 具有非退化性；(ii) 在$C^{1,1}$型控制下， $\Gamma^p$的管状邻域内具有有界曲率替代量。

隐式神经表示界面的投影稳定性。 为进一步将这些正则性改进与几何适定性联系起来，我们应用牛顿法法向投影迭代

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\psi_\theta(\mathbf{x}_k)}{\|\nabla\psi_\theta(\mathbf{x}_k)\|^2}\,\nabla\psi_\theta(\mathbf{x}_k), \tag{16}$$

这是隐式曲面的标准最近点构造。图5展示了每个训练后的隐式神经表示对应的结果：（上）牛顿迭代收敛到参考圆上真实最近点的初始点集合；（下）收敛集合上的最近点误差。更长时间的训练既能扩大收敛区域，也能减小投影误差。这直接佐证了引理3.3背后的机制：稳定的法向投影对梯度非退化性十分敏感；当 $\|\nabla\psi_\theta\|$在界面附近变小或不规则时，法向投影会退化。

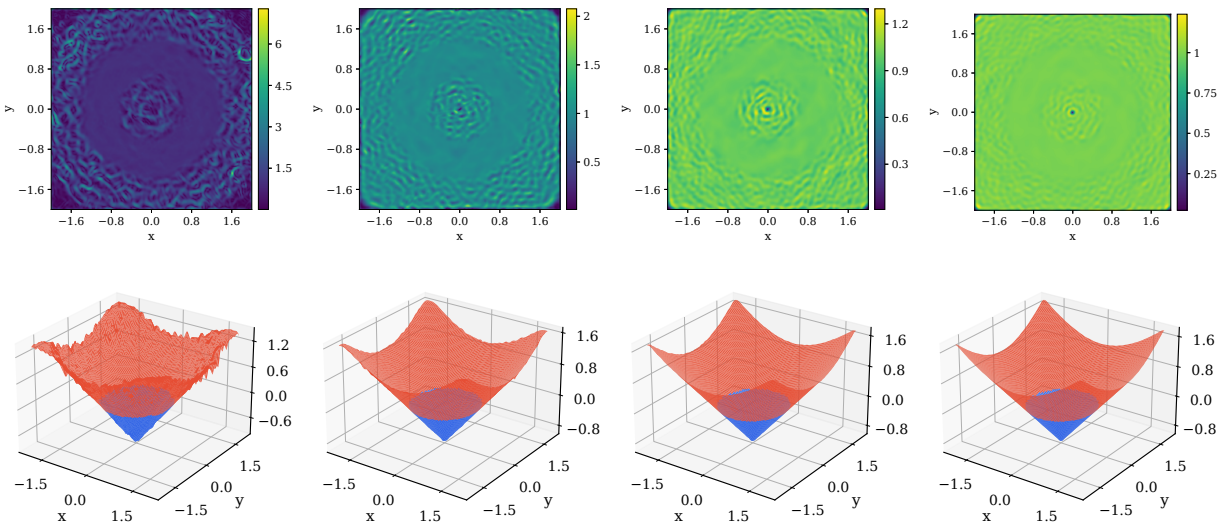


**图4：** 采用不同 训练预算训练的***INR***场。 各列对应的训练步数/训练轮次为：$10_3$, $3{\times}10^3$, $10_4$, 1。$5{\times}10^4$. 上：均匀网格上的梯度幅值 $|\nabla\psi_\theta|$，显示随着训练的进行，界面附近的非退化性有所改善。下：学习得到的曲面 $z = \psi_\theta(x,y)$，显示振荡减少，且训练时间越长，水平集景观越规则。

*Hausdorff* 界限的实证验证。。现在，我们验证引理4.1中的定量估计。令$\Gamma^p = \{\psi_\theta = 0\}$ 表示INR诱导边界。我们在真实界面周围的管状邻域内评估误差，

$$\mathcal{T}_h = \{x : |\phi(x)| < h\},$$

并定义经验一致失配和梯度非退化性如下

$$\widehat{\varepsilon}_\infty := \max_{x\in\mathcal{T}_h} |\psi_\theta(x) - \phi(x)|, \qquad \widehat{\tilde{c}}_0 := \min_{x\in\mathcal{T}_h} \|\nabla\psi_\theta(x)\|. \tag{17}$$

由于参考场 $\phi$ 是精确的符号距离函数，因此对于真实几何，我们有 $c_0 = 1$ 。受引理4.1的启发，我们比较测得的 Hausdorff 差异 $d_H(\Gamma,\Gamma^p)$与预测上界

$$\widehat{\text{Bound}} := \frac{\widehat{\varepsilon}_\infty}{\min(1, \widehat{\tilde{c}}_0)}. \tag{18}$$

图6 绘制了 $d_H$ 与 $\widehat{\varepsilon}_\infty/\tilde{c}_0$ 在双对数尺度下的关系，并给出了参考线 $y = x$，对应于引理4.1预测的上界。所有测得的点均位于直线 $y = x$下方，证实已训练的隐式神经表示的经验表现与理论估计一致。

解读。 结果突显了两个关键现象。首先，Hausdorff 距离随训练推进而系统性降低，这与一致失配的减少相吻合 $\widehat{\varepsilon}_\infty$。 其次，该上界明确依赖于 $\tilde{c}_0$，，这强调了梯度非退化性的重要性：即使函数失配很小，若 在界面附近 $\|\nabla\psi_\theta\|$ 退化，也可能导致较大的几何误差。在我们的实验中， $\tilde{c}_0$ 在较大的训练预算下趋近于理想的 SDF 值 1，预测上界也变得越来越紧。总体而言，这些结果为引理4.1的几何扰动估计提供了具体证据，表明它捕捉到了实际神经水平集重建中隐式神经表示训练误差与界面偏差之间的主导尺度关系。

### *6.3.* 几何扰动下的经验误差尺度关系

现在，我们通过实验考察几何边界扰动如何影响基于INR的非拟合离散化流程中的椭圆边值问题数值解。针对定义在利普希茨区域上的椭圆问题，经典域扰动理论预测，对于足够小的扰动，$L^2$ 解误差

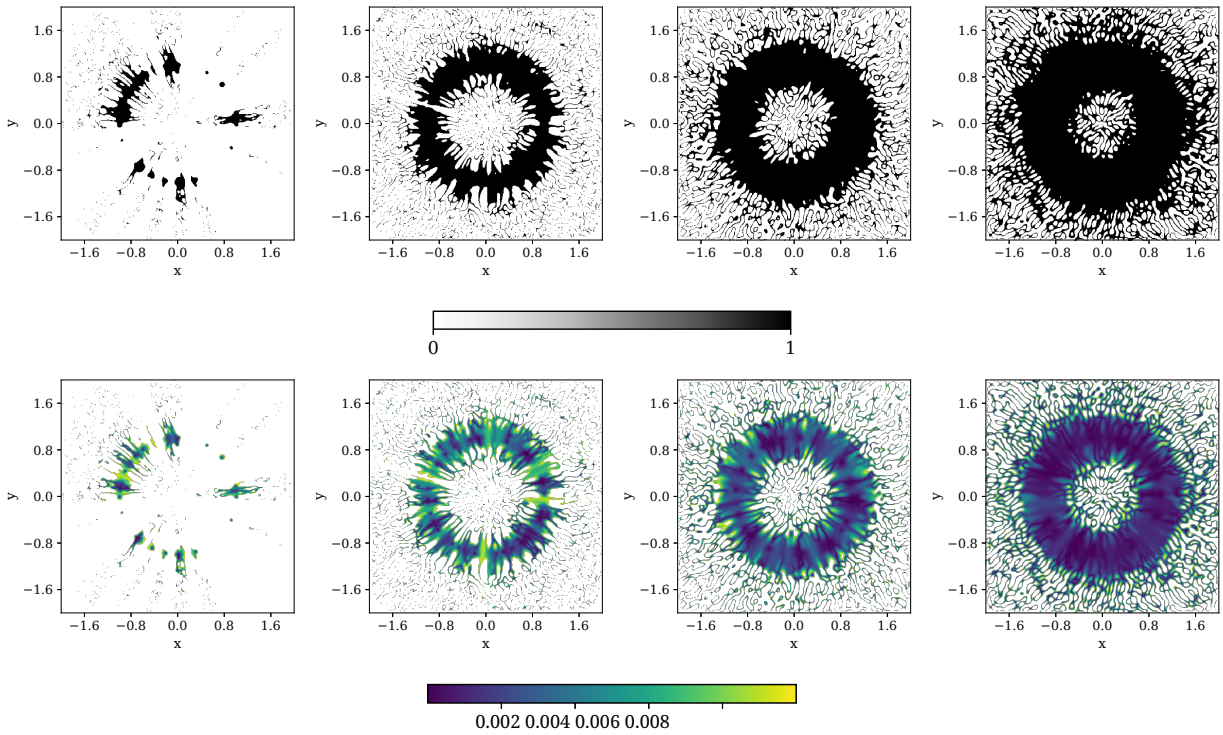



**图5：** 在训练轮次中，对 ***INR*** 零水平集应用牛顿最近点投影。 我们应用牛顿映射 *(方程16)* 将网格点投影到 $\Gamma^p = \{\psi_\theta = 0\}$。上图：成功掩码（黑色表示收敛到参考圆上的真实最近点，白色表示投影失败或收敛到错误的点）。下图：成功区域上的投影误差 $\|\mathbf{x}_{\text{final}} - \mathbf{x}^*(\mathbf{x}_0)\|$。更长的训练会带来更大的成功区域和更小的误差，这与引理*3.3*中梯度非退化性的作用一致。引理*3.3*。

与豪斯多夫边界失配近似呈线性关系，而离散误差会随着网格加密按代数速率衰减，直至达到几何诱导误差下限。本节旨在说明，在实际应用中，当（i）几何由神经场隐式表示，且（ii）在非拟合背景网格上使用移位边界法（SBM）弱施加边界条件时，这种标度行为如何体现。

本节中，参考区域 $\Omega$ 为单位圆盘，其边界为 $\Gamma = \partial\Omega$。我们生成一系列扰动区域 $\Omega^p$，其边界 $\Gamma^p$ 以可控方式偏离 $\Gamma$。几何差异使用豪斯多夫距离$d_H(\Gamma, \Gamma^p)$ 进行量化。

模型问题与制造解。。我们考虑泊松问题

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \Gamma. \tag{19}$$

为便于直接评估误差，我们采用制造解

$$u(x, y) = \sin(\pi x), \tag{20}$$

这意味着强迫项为

$$f(x, y) = -\Delta u(x, y) = \pi^2 \sin(\pi x), \tag{21}$$

和边界数　　据 $g = u|_\Gamma$。对于每个扰动后的几何 $\Omega^p$，我们求解相应的扰动区域问题

$$-\Delta u^p = f \quad \text{in } \Omega^p, \qquad u^p = g^p \quad \text{on } \Gamma^p, \tag{22}$$

其中，狄利克雷数据始终取自制造解，即 $g^p = u|_{\Gamma^p}$。所有计算均采用基于八叉树的背景网格进行非拟合离散，并使用移位边界法（SBM）弱施加$\Gamma^p$ 上的狄利克雷边界条件。

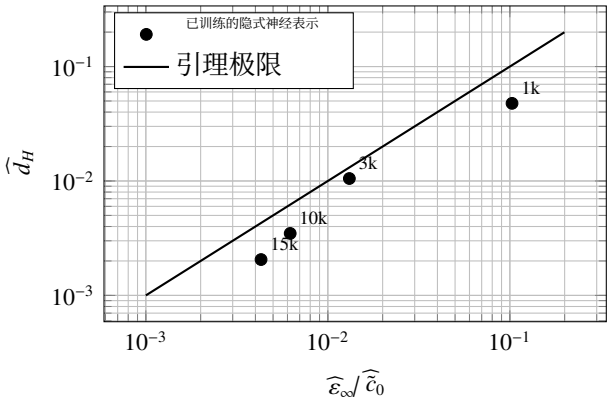
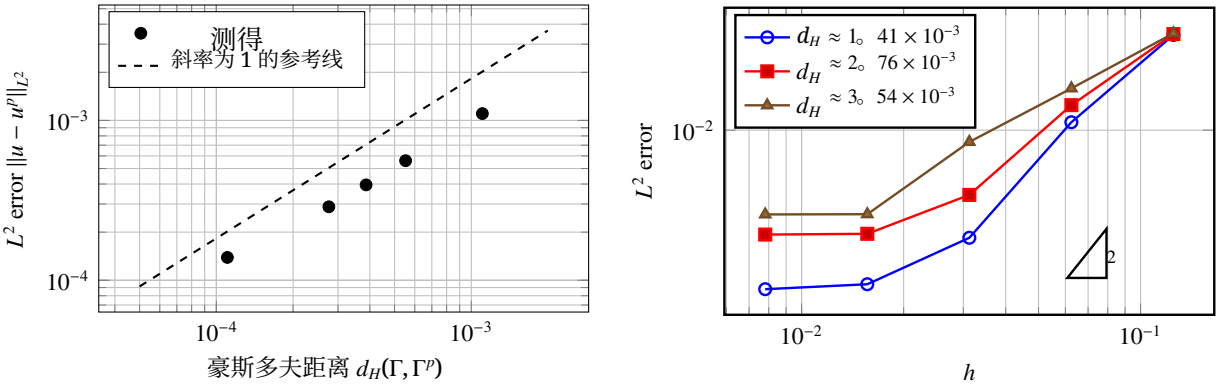



**图6：** 对引理*4.1*的实证验证：测得的豪斯多夫距离 $\widehat{d}_H$ 始终低于预测上界 $\widehat{\varepsilon}_\infty/\widehat{\tilde{c}}_0$ （直线 $y = x$），适用于训练轮次不同的隐式神经表示。




**(a)** $L^2$ 误差与 *Hausdorff* 距离。　　**(b)**固定 $d_H$ 下的网格加密。

**图7：** 解 *Hausdorff* 距离的函数 采用八叉树背景网格和 ***SBM***边界处理时，几何扰动下的误差。左：$L^2$ 误差作为 *dorff*边界失配的函数。右：$L^2$ 若干固定扰动幅度下，随着网格加密的收敛情况。

由于 $u$ 和 $u^p$ 定义在不同的区域上，我们通过延拓在固定的背景域 $D \supset \Omega \cup \Omega^p$ 上比较它们，并报告

$$\|u - u^p\|_{L^2(D)}.$$

这为受扰动几何之间提供了一种一致的度量，并将几何失配的影响与依赖于区域的归一化区分开来。

### *6.3.1.* 解误差与 *Hausdorff*扰动

图7（左）报告了测得的$L^2$ 误差 $\|u - u^p\|_{L^2(D)}$ 与豪斯多夫边界失配$d_H(\Gamma, \Gamma^p)$之间的关系，横轴采用双对数尺度。虚线表示经典扰动估计预测的线性尺度关系。测量数据呈现出近似仿射趋势，斜率接近 +1，表明其实测尺度关系

$$\|u - u^p\|_{L^2(D)} \approx C\, d_H(\Gamma, \Gamma^p), \tag{23}$$

适用于此处考虑的扰动幅度。这一观察结果与关于扰动利普希茨区域上椭圆问题的理论预期一致，并表明，使用 SBM 时，INR定义的替代几何对边界失配的一阶敏感性与经典拟合离散相同。

### *6.4.* 离散化与几何误差的相互作用

接下来，我们研究网格加密与固定几何扰动之间的相互作用。对于每个选定的扰动水平（等价地，对于每个固定的 Hausdorff 距离 $d_H(\Gamma,\ \Gamma^p)$），我们在一系列均匀（方程 22）上求解

加密的八叉树网格上进行求解，其特征网格尺寸为$h$。图7（右图）展示了三种代表性扰动幅度下，$\|u - u^p\|_{L^2(D)}$ 随$h$ 减小的收敛情况。对于较粗的网格，总误差随网格加密而减小，反映出离散误差的降低。然而，当$h$ 足够小时，曲线趋于平缓，继续加密网格也不再带来改善，这表明进入了几何受限区域。这种行为与如下形式的加性误差分解相符

$$\text{total error} \;\approx\; \underbrace{\text{geometry-induced error}}_{\text{set by } d_H(\Gamma,\Gamma^p)} \;+\; \underbrace{\text{discretization error}}_{\to 0 \text{ as } h\to 0}.$$

预渐近区域中的斜率标记表明，随着网格加密，误差呈代数衰减；而平台则证实，边界失配会形成不可约误差下限，除非同时按照离散尺度减小$d_H(\Gamma,\Gamma^p)$。

综合来看，图7 中的两幅图表明，要在由隐式神经表示定义的区域上获得精确的椭圆方程解，必须同时控制网格分辨率$h$ 和几何差异$d_H(\Gamma,\Gamma^p)$。在隐式神经表示的应用背景下，这凸显了让训练容差与预期离散精度相匹配的重要性，从而避免几何主导的饱和。

## 7. 结论

我们建立了一个统一的理论框架，将隐式神经表示（INR）的逼近质量与由隐式神经表示定义的区域上椭圆型偏微分方程解的稳定性和精度联系起来。尽管隐式神经表示能够紧凑、连续且可微地表示几何形状，我们的结果表明，仅凭重建导向的度量（例如提取曲面之间的倒角距离或豪斯多夫距离）并不能充分判断学习得到的场是否适用于科学仿真。特别是，能否用于仿真在很大程度上取决于界面邻域内隐式场的微分正则性 。

我们的主要贡献可概括如下。

1. **适定投影所需的最小几何正则性**。 我们确定了界面管状邻域中隐式场的充分正则性条件，这些条件能够保证法向投影映射的存在性和唯一性，并避免病态的几何行为。具体而言，我们要求 $\psi \in C^{1,1}$ 局部成立，同时满足一致的梯度非退化下界 $\|\nabla\psi\| \geq c_0 > 0$ ，且曲率替代量有界 $\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{op}} \leq C_\psi$。这些常数显式地出现在稳定性估计中，阐明了梯度消失如何放大几何误差，并使基于投影的构造变得不稳定。

2. **训练误差 $\Rightarrow$ 豪斯多夫边界扰动**。 假设一致逼近容差为 $\|\psi - \phi\|_{L^\infty(\mathcal{T}_h)} \leq \varepsilon_\infty$，我们推导了将学习得到的边界 $\Gamma^p = \{\psi = 0\}$ 与参考边界$\Gamma = \{\phi = 0\}$ 联系起来的界，其形式为豪斯多夫距离估计$d_H(\Gamma,\Gamma^p) \lesssim \varepsilon_\infty/c_0,$ ，明确体现了梯度下界的作用。

3. **几何到解的稳定性与训练指南**。 将几何扰动估计与椭圆型边值问题的精确稳定性结果相结合，我们得到了显式先验界，表明几何扰动如何传播为偏微分方程解误差。结合标准有限元逼近理论，这给出了隐式神经表示训练的实用精度要求：为避免在网格加密下出现几何主导的饱和，隐式神经表示的精度必须与目标离散化尺度相应地收紧。特别地，对于一阶方法，这导出一条简单的经验法则：几何误差的衰减必须快于离散误差，才能保持渐近收敛。

未来方向。有几种自然的扩展方向。首先，明确区分几何误差与离散误差，这促使我们采用自适应策略，将 INR 训练容差与离散化分辨率及误差指示子相结合，以避免训练不足（这会限制精度）和过度训练（这会浪费计算资源）。其次，将分析扩展到高阶离散化和高正则性偏微分方程情形，需要基于对隐式场更强的光滑性假设，对几何进行更精细的控制。最后，将这些稳定性机制推广到

时变区域和移动边界问题，将为基于隐式神经表示的仿真流程提供理论基础，适用于流固相互作用和自由边界动力学。

总体而言，我们的研究结果为将隐式神经表示用作高保真科学计算中可靠的几何基元提供了严谨的框架，并阐明了稳定且收敛的偏微分方程仿真所需的正则性和训练条件。

**参考文献**

[1] Chiba, N., Nishigaki, I., Yamashita, Y., Takizawa, C., Fujishiro, K., 1998. 通过边界拟合方法灵活地自动生成六面体网格.《计算机在应用力学与工程中的方法》161, 145–154.[2] Chibane, J., Alldieck, T., Pons-Moll, G., 2020. 用于三维形状重建与补全的特征空间隐函数，载于：IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，IEEE，线上举行。第6970–6981页。[3] Ciarlet, P.G., Raviart, P.A., 1972. 曲边单元上的插值理论及其在有限元方法中的应用.《计算机在应用力学与工程中的方法》1, 217–249.[4] Grisvard, P., 1985.《非光滑区域上的椭圆问题》. Pitman。[5] Gropp, A., Yariv, L., Haim, N., Atzmon, M., Lipman, Y., 2020. 用于形状学习的隐式几何正则化，载于：第37届国际机器学习会议论文集，JMLR.org，线上举行。第1–12页。[6] Henrot, A., 1994. 拉普拉斯算子关于区域的连续性：综述.《控制与控制论》23, 427–443.[7] Hsu, M.C., Wang, C., Xu, F., Herrema, A.J., Krishnamurthy, A., 2016. 使用B-rep CAD模型直接进行浸入几何流体流动分析.《计算机辅助几何设计》43, 143–158.[8] Jaiswal, M., Corpuz, A.M., Hsu, M.C., 2024. 面向扫描物体上稳健的基于点云的流动分析的网格驱动重采样与正则化.《计算机在应用力学与工程中的方法》432, 117426。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782524006819，doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117426。[9] Jerison, D., Kenig, C.E., 1995. 利普希茨区域上的非齐次狄利克雷问题.《泛函分析杂志》130, 161–219。doi:10.1006/jfan.1995.1067.[10] Karki, S., Hsu, M.C., Krishnamurthy, A., Ganapathysubramanian, B., 2026. 使用复杂几何的隐式神经表示进行力学仿真.《计算机辅助设计》190, 103978。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448525001393，doi：https://doi.org/10.1016/j.cad.2025.103978。[11] Karki, S., Shadkhah, M., Yang, C.H., Balu, A., Scovazzi, G., Krishnamurthy, A., Ganapathysubramanian, B., 2025. 使用复杂几何的隐式神经表示直接进行流动仿真.《计算机在应用力学与工程中的方法》446, 118248.[12] Liu, W.K., Li, S., Park, H.S., 2022. 有限元方法八十年：起源、演进与未来.《计算工程方法档案》29, 4431–4453.[13] Main, A., Scovazzi, G., 2018a. 用于嵌入域计算的移位边界法。第一部分：泊松问题与斯托克斯问题.《计算物理学杂志》372, 972–995.[14] Main, A., Scovazzi, G., 2018b. 用于嵌入域计算的移位边界法。第二部分：线性对流-扩散方程与不可压缩纳维-斯托克斯方程.《计算物理学杂志》372, 996–1026.

[15] McHenry, K., Bajcsy, P., 2008. 三维数据内容、文件格式与查看器概述. 技术报告 ISDA08-002. 国家超级计算应用中心，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校。美国伊利诺伊州厄巴纳市克拉克街西1205号，邮编61801。技术报告，图像空间数据分析组。[16] Nguyen, V.P., Anitescu, C., Bordas, S.P., Rabczuk, T., 2015. 等几何分析：综述与计算机实现方面.《数学与计算机仿真》117, 89–116。[17] Park, J.J., Florence, P., Straub, J., Newcombe, R., Lovegrove, S., 2019. DeepSDF：学习用于形状表示的连续有符号距离函数，载于：IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，IEEE，长滩。第1–12页。[18] Persson, P.O., 2005. 隐式几何体的网格生成. 博士论文. 麻省理工学院。[19] Peskin, C.S., 1972. 心脏瓣膜周围的流动模式：一种数值方法.《计算物理学杂志》10, 252–271。[20] Savaré, G., Schimperna, G., 2002. 区域扰动及二阶椭圆方程解的估计.《纯粹与应用数学杂志》81, 1071–1112。[21]Sitzmann, V., Martel, J., Bergman, A., Lindell, D., Wetzstein, G., 2020. 采用周期性激活函数的隐式神经表示，载于：Larochelle, H., Ranzato, M., Hadsell, R., Balcan, M., Lin, H.（编），神经信息处理系统进展，Curran Associates公司，线上举行。第7462–7473页。网址：https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2020/file/53c04118df112c13a8c34b38343b9c10-Paper.pdf。[22] Wang, P., Liu, L., Liu, Y., Theobalt, C., Komura, T., Wang, W., 2021. NeuS：通过体渲染学习用于多视图重建的神经隐式表面，载于：第35届神经信息处理系统国际会议论文集，第27171–27183页。

## 附录 A. 投影存在性证明

在本节中，我们给出引理3.3的完整证明。

证明。**步骤 1：正则性 $\Gamma$ 及单位法向量**。根据假设3.1，$\psi \in C^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ 和 $\|\nabla\psi(x)\| \geq c_0 > 0$ 在 $\mathcal{T}_h$上。因此，零水平集

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = 0\}$$

是一个$C^{1,1}$ 嵌入超曲面。定义单位法向量场

$$\mathbf{n}(x) := \frac{\nabla\psi(x)}{\|\nabla\psi(x)\|}, \qquad x \in \Gamma.$$

对于$x$、$y \in \Gamma$，利用 $\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \frac{2}{\min(\|a\|,\|b\|)} \|a - b\|$ 以及 $\|\nabla\psi\| \geq c_0$ 在 $\Gamma \subset \mathcal{T}_h$上，可得

$$\|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)\| \leq \frac{2}{c_0} \|\nabla\psi(x) - \nabla\psi(y)\| \leq \frac{2C_\psi}{c_0} \|x - y\|,$$

因为 $\nabla\psi$ 在 $\mathcal{T}_h$ 上是利普希茨函数，其 Lipschitz 常数有界于$C_\psi$。因此，$\mathbf{n}$ 在 $\Gamma$ 上是利普希茨函数，且

$$\mathrm{Lip}(\mathbf{n}) \leq L_n := \frac{2C_\psi}{c_0}.$$

**步骤 2：可达邻域的存在性与度量投影的唯一性**。由于 $\Gamma$ 是具有利普希茨单位法向量的$C^{1,1}$超曲面，因此它具有正可达性。因此，存在 $\rho > 0$，仅取决于$L_n$，使得到 $\Gamma$的最近点投影在以下区域内定义良好且唯一：

$$U_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, \Gamma) < \rho\}.$$

特别地，对于每个$x \in U_\rho$，存在唯一的$x^* = \Pi_\Gamma(x) \in \Gamma$ 满足 $|x - x^*| = \mathrm{dist}(x, \Gamma)$.

**步骤 3：嵌入水平集管状邻域至可达邻域中**。我们证明，对于$h$ 足够小的 $\mathcal{T}_h \subset U_\rho$。固定$x \in \mathcal{T}_h$ 并考虑常微分方程

$$\dot\gamma(t) = -\frac{\nabla\psi(\gamma(t))}{\|\nabla\psi(\gamma(t))\|^2}, \qquad \gamma(0) = x. \tag{A.1}$$

由于 $\psi \in C^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ 且 $\|\nabla\psi\| \geq c_0 > 0$ 在 $\mathcal{T}_h$ 上，方程(Equation A.1) 中的向量场在 $\mathcal{T}_h$ 上是局部 Lipschitz 的，只要 $\gamma(t) \in \mathcal{T}_h$，解就存在。沿着这条轨迹，

$$\frac{d}{dt}\psi(\gamma(t)) = \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = -1,$$

因此 $\psi(\gamma(t)) = \psi(x) - t$。令 $T := |\psi(x)|$。对于 $t \in [0, T]$，有 $|\psi(\gamma(t))| = |\psi(x) - t| \leq |\psi(x)| < h$，所以 $\gamma(t) \in \mathcal{T}_h$在$[0, T]$ 上，并且

$$\psi(\gamma(T)) = \psi(x) - T = 0, \qquad \text{so} \qquad \gamma(T) \in \Gamma.$$

因此，

$$\mathrm{dist}(x, \Gamma) \leq \int_0^T \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_0^{|\psi(x)|} \frac{1}{\|\nabla\psi(\gamma(t))\|}\, dt \leq \frac{|\psi(x)|}{c_0} < \frac{h}{c_0}.$$

取

$$h_{\mathrm{crit}} := c_0\, \rho,$$

由此可知，只要 $h < h_{\mathrm{crit}}$，就有 $\mathrm{dist}(x, \Gamma) < \rho$，即 $x \in U_\rho$。由于 $x \in \mathcal{T}_h$ 是任意的，这就证明了 $\mathcal{T}_h \subset U_\rho$。

**步骤 4：法坐标表示与唯一性**。固定$h < h_{\mathrm{crit}}$，并令$x \in \mathcal{T}_h$。则$x \in U_\rho$，因此唯一的最近点投影$x^* = \Pi_\Gamma(x) \in \Gamma$ 存在。对于$C^{1,1}$ 超曲面，距离最小化的一阶最优性条件意味着

$$x - x^* \perp T_{x^*}\Gamma,$$

因此$x - x^*$ 平行于$\mathbf{n}(x^*)$。定义有符号距离

$$d := (x - x^*) \cdot \mathbf{n}(x^*).$$

则 $x - x^* = d\mathbf{n}(x^*)$，因此

$$x = x^* + d\,\mathbf{n}(x^*),$$

这给出（方程 5）。 $x^*$ 的唯一性意味着 $d$的唯一性。

证明完毕。 □

## 附录 B。Hausdorff界的证明

本节将完整证明 引理4.1。

证明。 令 $\Gamma = \{\phi = 0\}$ 和 $\Gamma^p = \{\psi = 0\}$，并假设：(i) $\phi$、 $\psi \in C^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ 对某个公共管状邻域 $\mathcal{T}_h$成立；(ii) 非退化性和曲率界

$$\|\nabla\phi\| \geq c_0, \quad \|\nabla^2\phi\|_{\mathrm{op}} \leq C_\phi, \qquad \|\nabla\psi\| \geq \tilde{c}_0, \quad \|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{op}} \leq \tilde{C}_\psi \quad \text{on } \mathcal{T}_h;$$

（iii）一致场误差 $\|\psi - \phi\|_{L^\infty(\mathcal{T}_h)} \leq \varepsilon_\infty$。

我们先证明两个有向距离的界，然后取其最大值。

**步骤 1：从 Γ到 $\Gamma^p$** 固定$x \in \Gamma$ 使得 $\phi(x) = 0$。那么

$$|\psi(x)| = |\psi(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon_\infty. \tag{B.1}$$

定义

$$n_\psi(x) := \frac{\nabla\psi(x)}{\|\nabla\psi(x)\|}, \qquad \sigma := \operatorname{sign}(\psi(x)) \in \{-1, 0, 1\}.$$

若 $\sigma = 0$ 则 $x \in \Gamma^p$ 且 $\operatorname{dist}(x, \Gamma^p) = 0$，因此假设 $\sigma = \pm 1$。考虑射线

$$r(s) = x - \sigma s\, n_\psi(x), \qquad g(s) := \sigma\,\psi(r(s)).$$

那么$g(0) = |\psi(x)| > 0$。

根据链式法则，

$$g'(s) = -\nabla\psi(r(s)) \cdot n_\psi(x).$$

利用加减法和柯西–施瓦茨不等式，

$$\nabla\psi(r(s)) \cdot n_\psi(x) = \nabla\psi(x) \cdot n_\psi(x) + (\nabla\psi(r(s)) - \nabla\psi(x)) \cdot n_\psi(x) \geq \|\nabla\psi(x)\| - \|\nabla\psi(r(s)) - \nabla\psi(x)\|.$$

˜由于 $\nabla\psi$ 在 $\mathcal{T}_h$上是常数为$C\psi$ 的利普希茨函数，

$$\|\nabla\psi(r(s)) - \nabla\psi(x)\| \leq \tilde{C}_\psi \|r(s) - x\| = \tilde{C}_\psi s, \quad \text{as long as } r(s) \in \mathcal{T}_h.$$

因此，

$$g'(s) \leq -\|\nabla\psi(x)\| + \tilde{C}_\psi s, \qquad \text{while } r(s) \in \mathcal{T}_h.$$

从 0 积分到$s$，得到

$$g(s) \leq |\psi(x)| - \|\nabla\psi(x)\|\, s + \tfrac{1}{2}\tilde{C}_\psi s^2. \tag{B.2}$$

令$s_{-x}$ 表示右侧二次方程的较小非负根：

$$s_{-x} = \frac{\|\nabla\psi(x)\| - \sqrt{\|\nabla\psi(x)\|^2 - 2\tilde{C}_\psi|\psi(x)|}}{\tilde{C}_\psi},$$

只要满足以下条件，该根便有定义

$$\|\nabla\psi(x)\|^2 \geq 2\tilde{C}_\psi|\psi(x)|.$$

一个充分条件是

$$\varepsilon_\infty \leq \frac{\tilde{c}_0^2}{2\tilde{C}_\psi}. \tag{B.3}$$

为确保线段 $\{r(s):\ 0 \leq s \leq s_{-x}\}$ 保持在 $\mathcal{T}_h$ 内，只需要求 $s_{-x} \leq h$。利用不等式$1-\sqrt{1-t} \leq t$，其中 $t \in [0,1]$，我们得到

$$s_{-x} \leq \frac{2|\psi(x)|}{\|\nabla\psi(x)\|},$$

因此，一个充分条件是

$$\varepsilon_\infty \leq \frac{\tilde{c}_0}{2}\, h. \tag{B.4}$$

在（方程 B.3）–（方程 B.4）下，（方程 B.2）意味着 $g(s_{-x}) \leq 0$，而 $g(0) > 0$。由连续性可知，存在$\bar{s} \in (0, s_{-x}]$，使得 $g(\bar{s}) = 0$，即 $\psi(r(\bar{s})) = 0$ 且 $r(\bar{s}) \in \Gamma^p$。因此，

$$\operatorname{dist}(x, \Gamma^p) \leq \bar{s} \leq s_{-x}.$$

利用 $\|\nabla\psi(x)\| \geq \tilde{c}_0$ 和 $|\psi(x)| \leq \varepsilon_\infty$，可得

$$\sup_{x\in\Gamma} \operatorname{dist}(x, \Gamma^p) \leq \frac{\varepsilon_\infty}{\tilde{c}_0} + \frac{\tilde{C}_\psi}{2\tilde{c}_0^3}\varepsilon_\infty^2 + O(\varepsilon_\infty^3). \tag{B.5}$$

步骤 *2*：由 $\Gamma^p$ 到 $\Gamma$。固定 $y \in \Gamma^p$ 使得 $\psi(y) = 0$。则 $|\phi(y)| \leq \varepsilon_\infty$。用 $\phi$ 代替 $\psi$ 重复步骤 1（以及常数 $c_0$,$C_\phi$），假设 g

$$\varepsilon_\infty \leq \frac{c_0^2}{2C_\phi}, \qquad \varepsilon_\infty \leq \frac{c_0}{2}\, h,$$

我们得到

$$\sup_{y\in\Gamma^p} \operatorname{dist}(y, \Gamma) \leq \frac{\varepsilon_\infty}{c_0} + \frac{C_\phi}{2c_0^3}\varepsilon_\infty^2 + O(\varepsilon_\infty^3). \tag{B.6}$$

**步骤 3：豪斯多夫距离** 根据定义，

$$d_H(\Gamma, \Gamma^p) = \max\left\{ \sup_{x\in\Gamma} \operatorname{dist}(x, \Gamma^p),\ \sup_{y\in\Gamma^p} \operatorname{dist}(y, \Gamma) \right\}.$$

结合（方程 B.5）与（方程 B.6）可得

$$d_H(\Gamma, \Gamma^p) \leq \frac{\varepsilon_\infty}{\min(c_0, \tilde{c}_0)} + O(\varepsilon_\infty^2),$$

其中 $O(\varepsilon_\infty^2)$ 常数仅依赖于（$c_0$,$C_\phi$）以及（$\tilde{c}_0$, $\tilde{C}_\psi$）。 □