arXiv:2602.02291v1 [math.OC] 2 Feb 2026

理性玩家与从众玩家的博弈

Raghupati Vyas[a]，*、Khushboo Agarwal[b]、Konstantin Avrachenkov[b]、Veeraruna Kavitha[a]

[a]*IEOR*，印度理工学院孟买分校，*Powai*，孟买 *400076*，马哈拉施特拉邦，印度[b]
Inria SophiaAntipolis，*2004*年 *Route des Lucioles*，*Valbonne 06902*，法国

摘要

经典博弈论是分析理性玩家之间策略互动的有力框架。然而，在许多现实情形中，玩家依据自身固有的自然倾向而非审慎推理来选择行动。本文提出一个分析框架，用于研究包含 α比例理性玩家和（$1-\alpha$）比例从众（非理性）玩家的大规模群体博弈。我们提出一种称为 α理性纳什均衡（简称 αRNE）的新均衡概念，并讨论其不同诠释。某些经典均衡可能消失，也可能出现一些新的均衡，但这只会发生在较小的 $\alpha > 0$下。有趣的是，理性玩家会因从众行为的存在而受益，甚至可能获得超过社会最优水平的效用。更令人惊讶的是，在某些情况下，从众玩家也能受益，获得接近社会最优的效用。

我们进一步通过无政府代价（PoA）等指标研究从众比例对系统性能的影响。在交通网络中，一个由庇古首先研究、后由布雷斯进一步研究的著名悖论通常源于理性决策：增加一条额外链路可能会降低整个系统的效率。对我们模型的分析得出了不同的结论。当相当一部分用户表现出从众行为时，只要能够适当地影响从众选择，引入一条新链路就能提高效率。从众比例越高和/或拥堵程度越低，收益就越大。相反，如果从众决策无法受到影响，额外链路可能会产生不利影响。我们还研究了一种带宽

*通讯作者电子邮箱：raghupati.vyas@iitb.ac.in (Raghupati Vyas), khushboo.agarwal@inria.fr (Khushboo Agarwal), k.avrachenkov@inria.fr (KonstantinAvrachenkov), vkavitha@iitb.ac.in (Veeraruna Kavitha)

共享博弈，其中从众倾向能够提高系统效率。

最后，我们讨论在存在从众行为时的机制设计或影响力设计。扩展后的均衡集合带来了新的机会，但当无法创造影响力时，也会增加出现不理想结果的风险。

关键词：理性、非理性、从众行为、行为方面、博弈论、均场博弈、机制设计。

---

1. 引言

经典博弈论是分析理性且聪明的玩家之间策略互动的有力框架（参见先驱者的研究，如 von Neumann 等人（1944 年）、Nash Jr（1950 年））。理性参与者会根据（或预判）其他玩家的策略，选择使自身收益最大化的策略。能够准确计算并选择最佳策略以最大化自身收益的玩家，被称为聪明或理性的玩家。

随着时间推移，经典理论因对玩家的“聪明程度”或“理性”作出严格假设而开始受到批评——在现实情形中，玩家往往会偏离这些理想化假设，可能是由于推理能力有限或信息不足等原因。因此，研究方向逐渐转向更准确地捕捉实际人类行为，这为行为博弈论（研究其他因素对人类决策的影响，参见 Camerer 等人（2004 年）、卡梅勒（2011 年））、行为经济学（研究此类决策对经济学的影响，参见塞勒（2018 年））和神经经济学（结合神经科学、心理学和经济学，以揭示玩家非理性选择的生物学基础，参见 Schultz（2008 年））等领域铺平了道路。

行为博弈论尤其试图通过纳入玩家的认知局限与社会局限，研究并弥合理论预测与观察到的行为之间的差距。该领域的大部分工作是实验性的，旨在刻画这样一个事实：个体无法进行无限思考，在计算其效用时可能出错，或者其效用会受到社会规范和偏好等的影响，参见专著卡梅勒（2011年）。在理论方面，文献中的大多数要么考虑目光不够长远的玩家（例如，Sandholm（2010）），要么考虑在计算其效用时会犯错的有限理性玩家（例如，吉仁泽（2002年））。例如，McKelvey和Pal-

frey（1995年）提出了一种称为量化反应均衡（QRE）的均衡概念，用以解释玩家期望效用中的误差。该框架假定玩家基于带有随机误差的不完美估计效用来选择其行动。QRE的一个著名例子是logit均衡，当这些误差按照钟形曲线分布时便会出现（例如参见Anderson等人（2002年））。另一方面，Eliaz（2002年）的工作以及随后Vasal和Berry（2020a）、Vasal和Berry（2020b）的分析考察了涉及有缺陷（某种程度上非理性）玩家的均衡概念。这些均衡还纳入了对任意子集有缺陷玩家之偏离的稳定性。

然而，在许多现实场景中，玩家会依据自身固有的自然倾向选择行动，而完全不考虑理性（基本上，他们不会通过优化某个效用函数来决定自己的选择，无论是否存在估计误差）。在各种应用中，大量决策者都表现出这类行为，在大规模群体博弈中尤为常见。从众行为是最常见的行为倾向之一，即个体会跟随多数。以下是一些可以观察到这种倾向的情形：一群人在交通信号灯附近过马路时，多数人会随大流；在股票市场中，个体往往会选择热门选项；在电子商务平台上，也能观察到类似的选择。其他主要的行为倾向还包括避开人群（例如，尽管某家餐馆不那么受欢迎，仍选择人少的餐馆，或选择人少的时段前往公共场所）、忠诚度（例如，反复购买某个特定品牌），甚至考虑随机选择等。总而言之，这类选择更多是出于一种倾向，而非经过审慎推理后作出的决定。

据我们所知，现有研究并未探讨如上所述、由理性玩家与具有“非理性自然倾向”者混合参与的博弈。我们力求通过考虑决策者之间的从众行为来克服这一局限。具体而言，我们框架中的“从众玩家”只是选择已被多数人选择的行动，而不赋予效用任何重要性。

还有一些文献探讨了其他不同情境下的从众行为。在 Banerjee（1992）以及 Morone和Samanidou（2008）的研究中，作者提出了一种序贯决策模型，其中掌握部分信息的玩家在决策时也会考虑先前玩家的行动。他们可能会根据观察结果而忽略自己的信号。作者表明，在

结果均衡中，玩家会表现出从众行为；在这种均衡下，可用信息的价值可能会被抵消。Eyster and Rabin（2009）进行了类似研究，并展示了类似结果：部分信息和信念可能导致玩家从众于非最优策略（他们将此称为幼稚羊群行为）。因此，在这类论文中，有限理性羊群效应可能导致非最优选择；而在我们的研究中，降低理性的选择（加上其他玩家跟随多数趋势）可能导致玩家从众于最优选择。事实上，我们观察到，在许多示例／情形中，无政府代价会降低。

第二个也是更重要的区别在于，我们研究的是策略性决策（可能由占比较小的理性玩家群体作出）与从众倾向相互作用所产生的结果。这种混合群体更能代表现实场景，而研究由此类群体构成的博弈也带来了若干新问题：

- 首先，对于这类博弈，什么样的解概念才合适?
- 这类解应如何解读?
- 从众群体的存在（及其占比）如何影响理性玩家的效用？又会如何影响整体系统性能?
- 非理性是否有益？是否存在这类博弈实例?
- 从众行为的存在（以及对其的认知）会如何改变博弈设计？从众倾向的存在能否为设计者带来新的机会?

本文通过以下方式回答上述大部分问题：(a) 构建恰当的分析框架，对理性玩家与非理性（从众行为）玩家之间的互动进行建模；(b) 引入一种新的均衡概念，并将其命名为“α-理性纳什均衡（α-RNE）”。在此，理性玩家占群体的 $\alpha > 0$ 部分。

首先，我们观察到，α-RNE 可以具有与经典纳什均衡（仅有理性玩家时的解，即在 $\alpha = 1$ 时）类似的解释（处方、预测、某些学习动态的极限等）。

当 α 超过某个阈值时，均衡集合与经典情形保持不变（该阈值与行动数量成正比）。然而，当 α 较小（低于该阈值）时，一些经典均衡可能会消失，而一些新的策略测度可能成为均衡——因此

存在从众行为时的均衡可能与忽略从众行为时的情形（经典情形）大不相同。我们的研究结果还表明，存在从众行为时，理性玩家总能获益——有时甚至能获得高于社会最优效用的效用。重要的是，在某些情况下，从众玩家也可能获益，甚至几乎达到社会最优效用。有时，不理性才是理性的选择！

我们分析了交通网络中的一种情形，该情形呈现出广为人知的布雷斯悖论（参见 Braess 等人（2005年））——本文旨在考虑一种更为现实的人群构成（其中一部分表现出从众倾向），并再次考察悖论出现的可能性。答案仍然是肯定的——在某些情形下，加入额外链路前后的均衡集合表明，额外链路会使所有人的表现恶化。然而，在是否考虑从众行为方面，两者存在细微差异。在本文的示例情形中，我们观察到，经典理论低估了悖论出现的可能性——考虑从众行为的均衡表明，在更大的参数范围内会出现悖论。

我们还讨论了受从众倾向影响的博弈的设计方面。在许多示例博弈中可以发现，从众玩家的存在扩大了均衡集合。这可能带来机遇，因为理想结果可能会被纳入新的均衡集合——如果设计者能够策略性地施加适当且足够的初始影响力，就有机会推动系统趋向理想均衡。我们讨论了用于创造这种影响力的斯塔克尔伯格框架。另一方面，当无法创造适当的初始影响力时，更大的均衡集合也增加了设计上的挑战（可能必须为最坏的情况做好准备）。

在我们早期发表于会议论文的工作中，Agarwal 等人（2025a）分析了一个仅包含两种行动选择的简化框架。本文将分析扩展到任意有限数量的行动。这一重要扩展使我们能够分析一些重要且贴近现实的应用：（i）考察存在从众倾向时，交通网络中是否可能出现著名的布雷斯悖论；（ii）分析包含大量发射功率选择的带宽共享问题，并展示随着理性玩家的比例降低，理性参与者和非理性参与者都能实现接近社会最优效用的效用。我们还详细讨论了

所提出均衡概念的各种解释。我们还讨论并展示了针对存在从众玩家的情形，机制（影响力）设计方面的内容。

接下来，我们简要介绍均值场博弈的背景，以及广为人知的解概念——纳什均衡的不同诠释。随后，我们将在第2节提出新的解概念 α-RNE。第3至4节将从理论上探讨这类新均衡，并研究一些应用；第5节讨论机制设计方面。第6节总结全文。

均值场博弈、解及其诠释

在玩家数量庞大的博弈中，求出纳什均衡是一项极其复杂的任务——必须在处理大量变量的同时，优化每位玩家的效用函数。在此背景下，均值场博弈（MFG）理论应运而生，成为一种强有力的工具；该理论在一定的“对称性”和“非原子性”假设下，研究玩家数量趋于无穷时的“极限博弈”：(i) 所有玩家的效用函数 u 和行动集 $\mathcal{A}$ 均相同；(ii) 在极限情况下，单个玩家（或有限个玩家）的影响可以忽略不计（例如，Carmona 等人（2018））。基本而言，研究重点从个体行动的组合 $\mathbf{a} := (a_i)_{\{i \in \mathcal{A}\}}$ 转向玩家所选行动的经验测度或总体测度 $\mu = (\mu_i)_{\{i \in \mathcal{A}\}}$，其中，对于每个 i，μ_i 表示选择行动 i 的玩家所占比例。因此，任何玩家的效用函数 u 取决于其选择的行动 i 以及对应于其余群体的经验测度 μ。具体而言，任何玩家的效用都是一个函数 $u : \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$，其中 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的概率测度集合；请注意，所有玩家的 u 都相同，并且单个（指定）玩家甚至有限个玩家的行动都不会改变 μ。总之，任何均值场博弈都由元组 $\mathcal{G} := \langle \mathcal{A}, u \rangle$ 指定。本文假设行动集 $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$，其中某个 $n < \infty$。

均值场博弈的纳什均衡定义为群体的经验测度 μ^*，它满足以下不动点条件：

$$\mathcal{S}(\mu^*) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu^*), \text{ where} \tag{1}$$
$$\mathcal{S}(\mu) = \text{support}(\mu) := \{i \in \mathcal{A} : \mu_i > 0\} \text{ and } \mathcal{A}_u^R(\mu) := \text{Arg}\max_{i \in \mathcal{A}} u(i, \mu).$$

已经证明，在包括渐近对称性在内的某些假设下，有限玩家博弈的纳什均衡会收敛到均值场博弈的纳什均衡（均值场博弈纳什均衡）（例如参见 Carmona 等人（2018））。

纳什均衡的诠释

在文献中，对纳什均衡有多种解释（例如参见 Holt 和 Roth（2004年）、Narahari（2014））, 我们在此讨论其中相关的几种:

（i）处方：如果主持人/控制者按照底层博弈的纳什均衡，向一组玩家建议行动（各自独立选择行动），那么没有玩家会认为反对这一处方对自己有利。

（ii）预测：在某些博弈中，玩家能够预测博弈的结果，而该结果本质上会是一个纳什均衡。例如，如果迭代删除严格劣策略或弱劣策略后得到唯一的行动组合，那么这个唯一的组合就是纳什均衡，玩家也就能轻易预测这样的结果。

（iii）学习：玩家往往会彼此反复互动。在这类情形中，每位玩家都会根据其他玩家所选择行动的历史，不断尝试调整自己的行动，以求最大化自身效用（例如，虚拟博弈、最佳响应动态、复制子动态等）。在许多此类情形中，学习过程的极限是一个纳什均衡。不过，同样重要的是要注意，有些纳什均衡并非学习过程的极限，有时也会出现其他极限（例如，关于复制子动态，参见 Sandholm（2010））。尽管如此，文献中此前研究过的多种动态已被证明，在某些条件下会收敛到纳什均衡。因此，在许多情形中，纳什均衡集合是学习过程可能达到的极限集合。

（iv）轮流动态：有时，玩家必须依次选择行动，而所有玩家都选完行动后，才会实现各自的效用（例如，带有潜在奖励的调查、投票等）。玩家可以观察此前玩家选择的经验测度。在某些条件下，这种动态同样会收敛到纳什均衡（例如，参见 Agarwal等（2025b）中与$\alpha = 1$相关的结果）。

经典博弈论一直是分析理性玩家之间策略互动的有力框架。然而，如前所述，由于其基于“理性”这一假设，因此存在局限性。现在，我们将研究既有理性玩家、也有表现出从众行为的玩家参与的博弈。在下一节中，我们将回到上述列表，并讨论 α-RNE 的平行解释。

2. 新概念： α-RNE

为引入均衡的新概念，我们扩展均值场博弈框架，并纳入以下关键区别——现在，群体中有 α 的比例是理性玩家，其余玩家则表现出从众行为。首先介绍一些新记号——对于任意 $i \in \mathcal{A}$，令 μ_i^R 表示理性玩家中选择行动 i 的比例，并令向量 $\mu^R := (\mu_i^R)_{\{i \in \mathcal{A}\}}$ 表示相应的经验测度。接下来，我们将介绍刻画各类玩家之间互动的模型。

理性玩家的决策

我们按照经典平均场博弈对理性玩家的行动进行建模。因此，如果 μ 是整个群体所选择行动的经验测度[1]，则任何典型理性玩家针对 μ 的最佳响应（μ^R）将满足如下不动点方程，如公式（1）所示：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mu^R) &\subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu), \text{ where} \\ \mathcal{A}_u^R(\mu) &= \operatorname{Arg}\max_{i \in \mathcal{A}} u(i, \mu), \quad \mathcal{S}(\mu^R) = \{i \in \mathcal{A} : \mu_i^R > 0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

注意，当 $\alpha = 1$时，我们将有 $\mu = \mu^R$，于是任何满足（2）的 μ 都将成为经典平均场博弈纳什均衡，其定义见公式（1）。

从众玩家的决策

从众玩家盲目跟随“多数”，并不在意自己的效用。换言之，他们不像理性玩家那样进行优化。对玩家的从众行为进行建模的一种简单方式，是假设他们选择理性玩家中多数人所选择的行动，即他们选择满足 $\mu_i^R \geq \mu_j^R$ 的行动 i，其中对所有满足 $j \neq i$的 $j \in \mathcal{A}$均成立。

然而，上述方法存在局限性。通常，玩家无法区分理性玩家和从众玩家。因此，我们采用一种更为现实的方式来描述从众行为——假设从众玩家

[1]回想一下，该博弈是在平均场框架下描述的，因此，单个玩家选择的行动不会影响博弈结果（见 Carmona 等人（2018））。鉴于此，将 μ 视为对应于“整个”群体的经验测度是恰当的。

选择多数玩家（包括其他从众玩家）所选择的行动。具体而言，假设每个从众玩家面对整个群体的经验测度 μ 时，选择以下行动：

$$\mathcal{A}^H(\mu) := \min\left\{ i : i \in \operatorname{Arg}\max_{j\in\mathcal{A}} \mu_j \right\}. \tag{3}$$

再次回到平均场极限，单个（或有限个）玩家的选择不会改变 μ。此外，为了简化并便于进行上述分析，我们假设在出现平局时，集合 Arg max $_{j\in\mathcal{A}}\,\mu_j$ 中索引最小的行动优先（正如博弈论文献中通常采用的做法，例如 Narahari (2014)）。在进一步讨论之前，我们先对从众选择（3）作一些重要说明。

（i）从众玩家根据（3）选择的行动可能并不是针对 μ的最佳响应。相反，这反映了由从众行为驱动的一种行为倾向。因此，这并不是一种理性选择，不同于搭便车情况下试图利用他人努力（或决策）的做法（参见 Feldman a nd Chuang (2005)、Hardin and Cullity (2003)）；在后一种情况下，玩家是理性的，因为他们试图从其他玩家的决策中获益，并且只有在发现从众对自己有利时才会从众。

（ii）第二点评论涉及从众玩家可能只跟随自身的情况；当在某个 α-RNE 下，某个由从众玩家选择的行动 i 满足 $\mu_i = 1-\alpha$ 时，就会出现这种情况。考虑到这种可能性十分重要，原因有很多，下面马上列举几点。现实中，非理性行为可能有更多变体，例如，有些玩家会随机选择，或有自己的偏好等；这些玩家在全局（或大型群体）中可能无足轻重，但其影响力可能足以引导或误导从众群体。另一种情况是，控制者可以对某个“重要”行动（对系统有益）施加一些初始影响力，从众群体会追随这一行动，但理性玩家可能并不认为这有益（我们将在第5节详细讨论这些问题）。在所有这些情况下，到了极限时，从众玩家似乎都在跟随自身。还有一种可能性是，理性参与者起初认为某个行动有益（如各种博弈动态中的情况，例如 Sandholm（2010）），非理性玩家会跟随这些理性玩家以及自身，而后来理性玩家可能会根据新的经验测度 μ，发现另一种行动更有益。因此，在上述所有情形中，所有从众玩家都会选择一个未被

其他人选择的行动。之后给出的例 1 中就观察到了非理性玩家跟随自身的一个实例。

结果均衡

考虑所有玩家的决策后，整个群体中从行动集$\mathcal{A}$中选择行动 i 的玩家比例为:

$$\mu_i = \alpha\mu_i^R + (1-\alpha)1_{\{i=\mathcal{A}^H(\mu)\}}, \text{ for each } i \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

基本上，选择行动 i的玩家比例是由选择行动 i 的理性玩家比例（$\alpha\mu_i^R$）和从众玩家比例共同决定的；如果行动 i是多数玩家的行动，即 $i = \mathcal{A}^H$（μ）（见（3）），则从众玩家也会选择该行动；我们下文将行动 $\mathcal{A}^H$（μ）称为从众选择。定义了理性玩家和从众玩家的行动后，接下来我们引入新的[2]概念:

定义1。对于任意 $\alpha \in (0,1]$,，一对经验测度（μ, μ^R）称为 α-理性纳什均衡，简称 α-***RNE***，当且仅当其满足以下条件:

(i) $\mathcal{S}(\mu^R) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$, see (2), and

(ii) $\mu_i = \alpha\mu_i^R + (1-\alpha)1_{\{i=\mathcal{A}^H(\mu)\}}$ for each $i \in \mathcal{A}$, see (4).

基本上，理性玩家会针对整体群体分布 μ采取最优行动，如第（i）部分所述。此外，整体比例

[2]我们的框架不应与贝叶斯框架混淆（参见 Narahari (2014)）。在我们的框架中，理性玩家求解以下问题（其中 $\mu^H = \delta(\mathcal{A}^H(\mu))$， δ 是狄拉克测度）:

$$\text{Arg max}_{i\in\mathcal{A}} u(i, \alpha\mu^R + (1-\alpha)\mu^H),$$

其中，玩家根据行动的聚合分布作出响应，并将群体视为单个混合实体。相比之下，在贝叶斯框架下，理性参与者会求解:

$$\text{Arg max}_{i\in\mathcal{A}} (\alpha u(i, \mu^R) + (1-\alpha)u(i, \mu^H)).$$

本质上，我们的方法假设玩家会观察并响应整个群体的综合影响力，而贝叶斯表述则假设玩家会对不同人口类型进行概率推理，并据此整合效用。

第（ii）部分中选择行动 i 的玩家 μ_i 由选择行动 i 的理性玩家所占比例（即 $\alpha\mu_i^R$），以及所有从众玩家组成；前提是多数玩家选择了行动 i（即 $(1-\alpha)\,1_{\{i=\mathcal{A}^H(\mu)\}}$）。

请注意，与纳什均衡类似，新概念 α-RNE（定义1）同样能够抵御理性玩家的单方面偏离，而从众玩家则只需跟随多数。考虑到某些决策者的从众倾向所带来的影响，可以利用这一概念分析更贴近现实的情形。下面马上通过一个博弈示例来说明。

例 1 (**产品选择博弈**）。考虑这样一个博弈：每位玩家（顾客）必须从三种可选产品中选择一种，即$\mathcal{A} = \{1,2,3\}$。假设顾客的效用函数 $u(\cdot,\cdot)$满足以下关系：

$$u(1,\mu) > u(2,\mu) > u(3,\mu),\ for\ each\ \mu.$$

显然，对于任意 μ，最大值点集$_{a\in\mathcal{A}}\,u(a,\mu) = \{1\}$。因此，由$(1)$可知，该博弈存在唯一的经典纳什均衡 $\mu_{classical} = (1,0,0)$。

在此类选择中，显然并非所有选择都是理性作出的；相反，人们往往有很强的从众倾向（或倾向于选择多数人选择的选项）。现在，考虑一个更贴近现实的情形：非理性玩家多于理性玩家，即设 $\alpha \leq 1/2$。根据(2)-(4)，当 $\mu_\alpha = \mu_{classical}$如上所述且 $\mu_\alpha^R = (1,0,0)$ 时，$\mu_\alpha, \mu_\alpha^R)$是一个 α-*RNE*；因此，经典纳什均衡也是一个 α-*RNE*。此外，还有两个额外的 α-*RNE*：$\mu_\alpha = (\alpha, 1-\alpha, 0)$和 $\mu_\alpha^R = (1,0,0)$，或者 $\mu_\alpha = (\alpha, 0, 1-\alpha)$和 $\mu_\alpha^R = (1, 0, 0)$。值得注意的是，在这两种情况下，非理性顾客在均衡中（仅）跟随自身，两者的差别仅在于从众选择。此外，即便理性玩家所占比例更高，这些额外均衡仍然存在；事实上，比例最高可达 $\alpha \leq 2/3$，使用(2)-(4)即可验证。

此示例说明， α-RNE 的集合不一定与经典纳什均衡的集合相同。在存在从众玩家的情况下，可能会出现新的均衡。这促使我们进一步研究与 α-RNE 相关的各个方面，我们将在接下来的章节中对此进行探讨。接下来，我们将重点介绍这一新概念的诠释。

2.1. α-*RNE* 的诠释

在上一节中，我们讨论了对经典纳什均衡的各种解释。现在，我们来考察类似的解释是否适用于

α-RNE，从而探究对于主要受从众倾向影响的博弈， α-RNE 是否能更好地取代经典纳什均衡。在继续讨论之前，我们先定义本文将始终用到的一个关键行动集合，即“均衡从众选择”集合：

$$\mathcal{H}_\alpha := \{i \in \mathcal{A} : \exists \text{ an } \alpha\text{-RNE } (\mu, \mu^R) \text{ such that } i = \mathcal{A}^H(\mu)\}. \tag{5}$$

该集合刻画了在均衡时与从众玩家相关的所有行动。换言之，在任何 α-RNE 下， $\mathcal{H}_\alpha$ 之外的行动都不是从众选择，因此不可能是在博弈任何均衡时由从众玩家选择的行动。此外，假设所有理性玩家都了解 $\mathcal{H}_\alpha$。现在我们讨论 α-RNE 的解释。

(i) 处方： 在某些博弈中， α-RNE 可被视为对玩家的恰当处方。例如，考虑这样一种情形：某个外部实体（如控制者或主持人）控制着博弈。控制者可以计算出所有可能的 α-RNE。假设它想指定一个理想的 α-RNE，例如 (μ_*, μ_*^R)。通过定向广告并利用单边稳定性，它可以成功指定 α-RNE，即 (μ_*, μ_*^R)：（i）它可以使用定向广告或激励机制等适当机制，影响从众玩家，使其选择行动 $i^* := \mathcal{A}^H(\mu^*)$（关于这种影响力设计的详细讨论见第5节）；（ii）如果它成功引导从众群体转向 i^*，理性玩家也会遵从，因为任何单边偏离都不会给理性玩家带来更好的结果（见定义1）。

（ii）预测： α-RNE 的另一种有意义的解释是它在预测中的作用，类似于纳什均衡，如上一节所述。在某些具有混合群体的博弈中，理性玩家可以利用可用信息（关于该博弈的共同知识），就其行动预测结果。考虑以下经验测度集合，其中每个均衡从众选择 $i^H \in \mathcal{H}_\alpha$对应一个：

$$\mathcal{E}(i^H) = \{\mu : \mu_{i^H} \geq 1 - \alpha\}. \tag{6}$$

如果对所有 $i^H \in \mathcal{H}_\alpha$和 $\mu \in \mathcal{E}$（i^H），下列条件成立：

$$u(i, \mu) < u(j, \mu), \text{ for all } j \in \mathcal{A} \setminus \{i\}, \tag{7}$$

那么，理性玩家会认为行动 i 无益，并将其消去（基本上，无论所有可能的均衡从众选择如何，行动 i 都被 j支配）。因此，理性玩家的行动集缩减为 $\mathcal{A} \setminus \{i\}$。

消去该行动后，基于缩减后的行动集 $\mathcal{A} \setminus \{i\}$（以及均衡从众选择集 $\mathcal{H}_\alpha$），理性玩家可能会发现另一个行动（例如 k）被支配，并将其一并消去。这个过程可以继续下去。如果这样的迭代消去过程最终得到唯一选择 i^*，那么 i^* 就会成为任何 α-RNE中的唯一理性选择。在这类情形中，我们可以根据理性选择预测结果。例如，在第4.1.2小节研究布雷斯悖论的例子时，我们会看到，新链路 AB 成为根据理性选择预测的结果，因为对于理性玩家而言， AB 是严格占优策略（无论均衡从众选择如何）。我们确实在推论3(ii)中观察到，对于$\alpha \leq 2/3$ ， AB 是两个α-RNE中的唯一理性选择。

(iii) 从众学习：与经典情形类似，在同时包含理性玩家和从众玩家的博弈中， α-RNE 的概念也可以从动态视角自然地加以诠释。理性玩家根据观察到的理性玩家和从众玩家所采取的行动历史，不断调整自己的行动以最大化效用；而从众玩家则动态地采取多数玩家选择的行动。

虚拟博弈、最佳响应动态和复制子动态等动态过程，也可以扩展以适应这种混合人群框架。我们计划在未来证明，理性玩家的策略调整与从众行为之间的相互作用会收敛到α-RNE。

(iv) 从众的轮流动态：在包含理性玩家和从众玩家的博弈中，新的概念 α-RNE 可以看作前一节所讨论的轮流动态的极限。在我们近期的工作 Agarwal 等（2025b）中，我们证明了在某些假设下且当$|\mathcal{A}| = 2$时，此类动态几乎必然收敛到 α-RNE 集合。

在下一节中，我们将深入探讨具有多个行动的博弈中的这一新解概念（α-RNE），并推导出若干关键洞见以及识别 α-RNE的简单条件。此外，我们还分析了不同情形下的效用变化。

在结束本节之前，我们想对 $\mathcal{H}_\alpha$（均衡从众选择集合）作一项重要说明。有些行动可能不是从众选择（即，对于某些 a， $a \notin \mathcal{H}_\alpha$ ）——根据附录7中的引理1，这种情况（如果可能发生）只会在以下情况下出现：

理性群体规模较大，且 $\alpha > 1 - 1/|\mathcal{A}|$。例如，根据第4.1小节的推论3(i)，在研究具有三种选择 $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ 的交通网络时，我们会发现，如果 $\alpha > 2/3$，则 $\mathcal{H}_\alpha = \{3\} \subsetneq \mathcal{A}$。另一方面，当理性群体规模较小时（即 $\alpha \leq 1 - 1/|\mathcal{A}|$），我们有 $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{A}$，这意味着在某个均衡下，$\mathcal{A}$ 中的每个行动都可以成为从众选择（同样依据引理1）。

3. 分析

考虑一个人群博弈，其中 α比例的玩家是理性玩家，其余玩家表现出从众行为。根据定义1，如果 (μ,μ^R) 是一个 α-RNE，那么两者之间存在如下关系：$\mu^R = \mu^R(\mu) = (\mu_i^R(\mu))_{i\in\mathcal{A}}$，其中分量函数定义如下：

$$\mu_i^R(\mu) := \frac{\mu_i}{\alpha}, \ \forall\, i \in \mathcal{A}\backslash\{k\}, \text{ where } k = \mathcal{A}^H(\mu), \text{ and } \mu_k^R(\mu) := \frac{\mu_k - (1-\alpha)}{\alpha}. \tag{8}$$

换言之，任何 α-RNE 都可以仅根据总体经验测度 μ 唯一定义；基本上，任何 α-RNE 都可以只用第一个分量 μ表示为 $(\mu, \mu^R(\mu))$。因此，我们随后仅用 α分量表示 μ *-RNE*，并令 $\mathcal{N}_\alpha$ 表示任意一个 α-*RNE* 的集合$\alpha \in (0, 1]$:

$$\mathcal{N}_\alpha = \left\{\mu : (\mu, \mu^R(\mu)) \text{ is an } \alpha\text{-RNE and } \mu^R(\cdot) \text{ is as in } (8)\right\}. \tag{9}$$

值得注意的是，当 $\alpha = 1$、$\mathcal{N}_\alpha$ 是经典平均场博弈纳什均衡的集合，记作 $\mathcal{N}_1$。在接下来的小节中，我们将详细刻画均衡集合$\mathcal{N}_\alpha$ 。

3.1. α-*RNE* 的识别

为继续进行，我们定义一些便于使用的总体测度集合。

（i） $\mathcal{M}_P$ 纯人群测度集合定义如下：

$$\mathcal{M}_P := \left\{\mu : \mu_i \in \{0, 1\} \text{ and } \sum_{i\in\mathcal{A}} \mu_i = 1\right\}. \tag{10}$$

该集合中的人口测度支持单一行动。

（ii）我们定义以下混合（非纯）人口测度子集，其中至少有两个行动为理性玩家带来相等的效用：

$$\mathcal{M}_I := \{\mu : h_{ij}(\mu) = 0, \text{ for all } (i,j) \text{ such that } i,j \in \mathcal{S}(\mu), i \neq j, \ |\mathcal{S}(\mu)| \geq 2\}, \tag{11}$$

其中，函数 $h_{ij}(\cdot)$表示第 i个行动与第 j个行动之间的效用差，定义如下：

$$h_{ij}(\mu) := u(i,\mu) - u(j,\mu), \text{ for all } i,j \in \mathcal{A} \text{ with } i \neq j. \tag{12}$$

首先，根据定义1并利用式（10）和（11）中定义的集合，可以立即得出经典均值场博弈纳什均衡集合（$\mathcal{N}_1$）在 $\alpha = 1$处满足以下性质：

(C.i) $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{M}_P \cup \mathcal{M}_I$，反之亦然，

(C.ii) *if* $\mu \in \mathcal{M}_P \cup \mathcal{M}_I$ *and* $\mathcal{S}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$, *then* $\mu \in \mathcal{N}_1$.

接下来，我们将通过引入另外两个（依赖于α的）人口测度集合，详细刻画任意固定 $\alpha < 1$时 α-RNE的集合。

(i) 每种行动的选择比例都严格低于 $1-\alpha$ 的群体人口测度集合 $\mathcal{M}_\alpha$ ，形式化定义如下：

$$\mathcal{M}_\alpha := \{\mu : \mu_i < 1 - \alpha \text{ for all } i \in \mathcal{A}\}. \tag{13}$$

(ii) 集合 $\mathcal{P}_\alpha$ 包含所有在存在一个“从众”行动（例如 i），且理性参与者认为选择 i以外的行动更有利时会产生的人口测度，即，当 $\mu_i = 1 - \alpha$ 且$\mathcal{S}(\mu^R) = (\mathcal{S}(\mu) \setminus \{i\}) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$时，参见（2）—（3）：

$$\mathcal{P}_\alpha := \left\{\mu : \mu_i = 1 - \alpha \text{ for } i = \mathcal{A}^H(\mu), \text{ and } (\mathcal{S}(\mu) \setminus \{i\}) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)\right\}. \tag{14}$$

在继续之前，注意到对于任意 $\alpha > 1 - 1/n$， $\mathcal{M}_\alpha$ 和 $\mathcal{P}_\alpha$ 均为空，回忆一下 $n = |\mathcal{A}|$。定义这些集合后，我们现在陈述主定理，该定理利用经典平均场博弈纳什均衡识别 α-RNE 的集合。

定理1 (**识别 α-RNE**)。 设 $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$。那么，对于任意 $\alpha \in (0, 1]$, ，以下结论成立，其中 M_α 和 P_α 分别由 (13) 和 (14) 定义：

$$\mathcal{N}_\alpha = (\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{M}_\alpha) \cup \mathcal{P}_\alpha.$$

特别是，如果 $\alpha > 1 - 1/n$，则有 $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1$.

证明。 证明见附录 *7*。 □

因此，一般而言，纳什均衡集合既不包含于α-RNE 集合中，反之亦然。对任何 $\alpha < 1$ 而言，重要的含义如下：

(i) 如果 理性智能体的比例足够高，即 $\alpha > 1 - 1/n$，那么从众玩家的存在不会影响均衡集合，即 $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1$ （回想一下 $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha = \emptyset$ 对于这样的 α）；

(ii) 当 $\alpha \leq 1 - 1/n$ 时，情况则截然不同，即如果理性参与者的比例较低，某些经典均衡可能不再存在（ $\mathcal{M}_\alpha$ 中的那些均衡），而新的 α-RNE 可能出现（ $\mathcal{P}_\alpha$ 中的那些）；以及

(iii) 令人惊讶的是，随着 n （行动数量）增加，即使少数从众玩家 $(1-\alpha) \lessapprox 1/n$ 也能对均衡集合产生显著影响， $\mathcal{N}_\alpha$。

我们现在稍作离题，讨论一个只有两个行动的特殊情形，以便更好地阐释定理1的结果。我们近期发表的首篇会议论文 Agarwal 等人（2025 a）已经分析了这种较简单的博弈；我们还将证明，定理1的结果与 Agarwal 等人（2025a，定理 2）中的结果一致。

3.1.1. 双行动博弈 *(n=2)*

在 $n = 2$ 的情况下，两个相关的经验测度可以用更简单的记号表示：$\mu = (z, 1-z)$ 和 $\mu^R = (y, 1-y)$；此处 $z = \mu_1$ 和 $y = \mu_1^R$ 表示对应于第一个行动的分量。相应地，效用函数 $u(\cdot, \mu)$ 可以表示为 $u(\cdot, z)$，见 (8)。注意， α-RNE 的集合 ($\mathcal{N}_\alpha$) 可以仅依据 (8)-(9) 用 z 来表示：

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\alpha &= \{z : (z, y^*(z)) \text{ is an } \alpha\text{-RNE}\}, \text{ where} \\ y^*(z) &:= \frac{z}{\alpha} 1_{\{z < \frac{1}{2}\}} + \left(\frac{\alpha - (1-z)}{\alpha} \right) 1_{\{z \geq \frac{1}{2}\}}. \end{aligned}$$

此处，(10)-(11) 中定义的集合简化为如下形式：

$$\mathcal{M}_P = \{(1,0), (0,1)\}, \mathcal{M}_I = \{(z, 1-z) : h_{12}(z) = u(1,z) - u(2,z) = 0,\ z \in (0,1)\}.$$

现在，(C.i) 保持如前，而利用上述结果，(C.ii) 简化为：

(a) $0 \in \mathcal{N}_1$ 仅当 $h(0) \leq 0$，且 $1 \in \mathcal{N}_1$ 仅当 $h(1) \geq 0$；以及

（b）任何使两个效用 $u(1, z)$ 和 $u(2, z)$ 相等的总体测度，都是 $\alpha = 1$ 处的均衡，即 $\mathcal{M}_I \subseteq \mathcal{N}_1$。

现在我们利用定理1推导 α-RNE 的集合：

推论 1. 设 $|\mathcal{A}| = n = 2$ 和 $z := \mu_1$。则 α-*RNE* 的集合为：

(i) $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1$，即当 $\alpha > 1/2$ 时，与 *MFG-NEs* 的结果一致；

(ii) $\mathcal{N}_\alpha = (\mathcal{N}_1 \setminus \{z : \alpha < z < 1-\alpha\}) \cup \mathcal{P}_\alpha$ 当 $\alpha \le 1/2$ 时，其中，

$$\mathcal{P}_\alpha = \{z : z = \alpha \text{ and } h(\alpha) \ge 0\} \cup \{z : z = 1-\alpha \text{ and } h(1-\alpha) \le 0\}. \qquad \square$$

因此，根据 P_α，受从众群体影响的具有两个行动的博弈可以根据参数的不同，产生形式为 $\mu = (\alpha,\ 1-\alpha)$ 和/或 $\mu = (1-\alpha,\ \alpha)$ 的新均衡。当多数由从众群体构成时，任何第一分量为 μ_1^* 且位于开区间 $]\alpha,\ 1-\alpha[$ 内的经典均衡都不再是均衡。此外，上述 α-RNEs 集合与（Agarwal 等人，2025a，定理 2）中刻画的集合完全一致。

接下来我们讨论两个广为人知的“度量指标”——当 $\alpha = 1$ 时，传统上它们用于揭示玩家的理性选择如何影响博弈结果——并将其扩展到理性玩家和从众玩家并存的情形。

无政府代价与稳定性

无政府代价（PoA）是博弈论中的一种“度量”，用于量化代理人的理性选择所导致的某种“社会效用”（通常定义为所有代理人效用之和）的“损失”。形式上，它被定义为（Koutsoupias 和 Papadimitriou（1999年））：

$$\mathrm{PoA} := \frac{\inf\left\{u^s(\mu^{NE}) : \mu^{\mathrm{NE}} \in \mathcal{N}_1\right\}}{u_*^s}, \tag{15}$$

其中，社会效用与社会最优效用分别定义为，

$$u^s(\mu) := \sum_{i \in \mathcal{A}} \mu_i u(i, \mu), \text{ and } u_*^s := \sup\left\{u^s(\mu) : \mu_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^n \mu_i = 1\right\}. \tag{16}$$

基本上，无政府代价比较的是“最差”的纳什均衡社会效用（即式（15）分子中的量）与“最优”的社会效用（即式（15）分母中的量）。文献中已有不少相关实例（Roughgarden，2005年；Johari 和 Tsitsiklis，2004年），显示无政府代价显著偏小（远离 1），且这很大程度上归因于理性行为。最令人感兴趣的问题之一是：从众群体的存在（或理性选择的减少）是否会影响无政府代价？如果会，又会如何影响？影响程度又有多大？

类似地，我们也有稳定性代价（PoS），它比较“最优”的纳什均衡社会效用与最优社会效用：

$$\mathrm{PoS} := \frac{\sup\left\{u^s(\mu^{NE}) : \mu^{\mathrm{NE}} \in \mathcal{N}_1\right\}}{u^s_*}. \tag{17}$$

再次探讨从众群体的存在如何影响稳定性代价，是一件很有意思的事。在继续之前，我们想先说明最小化问题和最大化问题在无政府代价/稳定性代价方面的区别。对于最小化问题，本文最大化成本函数的相反数。因此，最小化问题的代价（无政府代价/稳定性代价）大于（或等于）*1*，而最大化问题的代价则小于（或等于）*1*。无论哪种情况，代价越接近 1，由理性（或次优）选择所付出的代价就越小。

接下来，我们将探讨从众群体对无政府代价和稳定性代价的影响。首先，我们将研究一个相关问题：分别考察其对理性智能体和非理性智能体效用的影响，并将这些效用与社会最优效用进行比较。

3.2. 效用比较

设 μ^*_α 是某个 $\alpha < 1$ 下的任意 α-RNE，并定义：

$$u^R(\mu^*_\alpha) := u(i, \mu^*_\alpha) \text{ for any } i \in \mathcal{A}^R_u(\mu^*_\alpha), \text{ and} \tag{18}$$

$$u^I(\mu^*_\alpha) := u(i, \mu^*_\alpha) \text{ for } i = \mathcal{A}^H(\mu^*_\alpha). \tag{19}$$

上述两个量分别表示任意 α-RNE 下典型理性参与者和典型从众参与者的期望效用（见（2）-（3））；注意，根据定义1(i)，理性效用 u^R definition 不取决于 $i \in \mathcal{A}^R_u(\mu^*_\alpha)$ 的具体选择。下面的结果比较了不同均衡下的各种效用与社会最优效用 u^s_* (16)。

定理 2. 对于任意 $\alpha \in (0,1)$ 以及任意 $\mu^*_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$，有：

(i) $u^I(\mu^*_\alpha) \le u^R(\mu^*_\alpha)$ *and* $u^I(\mu^*_\alpha) \le u^s_*$, *and*

(ii) $u^s_* \ge u^R(\mu^*_\alpha) = u^I(\mu^*_\alpha)$ *if* $\mu^*_\alpha \in \mathcal{N}_1$.

证明. ： 证明见附录 *7*。

上述结果的 (i) 部分表明，理性玩家获得的效用始终不低于从众玩家。此外，从众玩家的效用永远无法超过社会最优效用 u^s_*。不过，我们将在后续章节看到，随着理性选择（或 α）减少，他们的效用可以接近 u^s_*。

(ii) 部分指出，如果某个 α-RNE 的总体测度也构成经典平均场博弈纳什均衡，即 $\mu_\alpha^* \in \mathcal{N}_1$ 也成立，那么理性参与者和非理性参与者获得的效用相同。此外，由于 $\mu_\alpha^* \in \mathcal{N}_1$，也可以将其视为经典博弈的一个纳什均衡，其中所有玩家都是理性玩家——换言之，从众玩家（即使不进行理性选择）获得的效用，也等于某个经典均衡中理性玩家的效用。此外，在此类均衡中，没有任何玩家（甚至理性玩家）能够获得超过社会最优效用的效用。

无政府代价和稳定性代价指标最初是为研究理性决策导致的社会效用下降而提出的；下文将定义 (15)-(17) 扩展为同时研究从众行为和理性决策所导致的下降：

$$\text{PoA} := \frac{\inf\{u^s(\mu) : \mu \in \mathcal{N}_\alpha\}}{u_*^s} \quad \text{and} \quad \text{PoS} := \frac{\sup\{u^s(\mu) : \mu \in \mathcal{N}_\alpha\}}{u_*^s}. \tag{20}$$

最后，定理1-2的结果意味着：

(i) 当系统中有大量理性智能体且 $\alpha > 1 - 1/n$ 时，从众群体不会产生影响——无政府代价或稳定性代价均不会改变，因为 $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1$，并且

(ii) 在 $\alpha \leq 1 - 1/n$ 的情况下，与经典情形 ($\alpha = 1$) 相比，无政府代价和稳定性代价均可能改善——当 $\mathcal{M}_\alpha = \emptyset$ 和 $P_\alpha \neq \emptyset$ 时，就可能出现这种情况。

根据附录7中的引理1，当 $\alpha \leq 1 - 1/n$ 时，每个行动都是均衡从众选择（即 $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{A}$）；基本上，对于任意 $a \in \mathcal{A}$，都存在一个具有 $\mu^*_{\alpha,\, a} \geq (1-\alpha)$ 的 α-RNEμ_α^*（证明见附录 7）。因此，(14) 中的 P_α 很可能非空。事实上，对于下一节讨论的两种应用，我们都观察到 $\mathcal{M}_\alpha = \emptyset$ 和 $\mathcal{P}_\alpha \neq \emptyset$，并且稳定性代价显著改善；这种改善还会随着 $\alpha \to 0$ 而进一步扩大。

现在，我们将关注一些重要的应用，推导 α-RNE 的集合，并比较不同情形下玩家的效用。这将展示 α-RNE 在各种情境中的实际影响及其细微之处。

4. 一些重要博弈

4.1. 布雷斯悖论与从众行为

文献此前已说明，在某些运输网络中，增加一条新链路可能会延长旅行者的时间延迟，而不是改善交通流；这与直觉相悖。这一现象

最早由 Arthur Pigou 于1920年提出（参见专著 Pigou (2017) 及其中的参考文献），后来以数学家 Dietrich Braess 的名字命名（参见 Braess 等人（2005）中的译文）；他于1968年首次从理论上确立了这一现象。此后，布雷斯悖论在若干重要的交通网络中得到证实，并主要归因于决策者的理性（Braess 等人（2005），Murchland（1970））。

从众行为在交通网络中十分普遍（更准确地说，人们倾向于跟随前面的人），因此我们将探究在存在从众玩家（旅行者）的情况下是否也会出现这种悖论。为此，我们先描述一对会出现该悖论的简单网络。具体而言，我们考察一个有两条路线的网络和一个有额外路线的网络，并比较这两种情况下的均衡集合（α-RNE）。

4.1.1. 有两条路线的交通网络

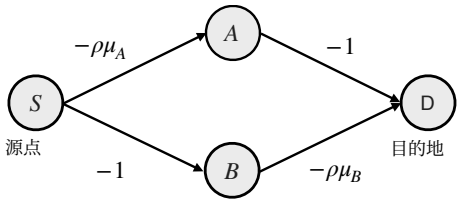


图 1：有两条路线的交通网络

考虑一个从源点（S）到目的地（D）有两条路线的交通网络。第一条路线经过枢纽 A，第二条路线经过枢纽B，如图 1 所示。若干旅行者（玩家）选择两条路线之一，从源点前往目的地。路段 SB 和 AD 性能优越，因此无论通勤者人数多少，出行延误都可以忽略不计。然而，使用这些路段的玩家需要支付一个单位的固定通行费。另一方面，路段 SA 和 BD 上的出行成本会受到拥堵水平的影响，并计入使用这些路段的通勤者的成本。具体而言，这些路段上的出行成本分别为 $\rho\mu_A$ 和 $\rho\mu_B$；其中，μ_A 和 μ_B 分别是使用经过枢纽 A 和 B的路线的玩家比例，而 $\rho \in (0, 1)$表示拥堵系数。因此，玩家参与一个行动集为 $\mathcal{A} = \{A, B\}$、效用函数如下的非合作均值场博弈：

$$u(i, \mu) = (-1 - \rho\mu_A)1_{\{i=A\}} + (-1 - \rho\mu_B)1_{\{i=B\}}. \tag{21}$$

现在，利用推论 1，我们立即得到：

推论 2. 考虑效用函数由（21）给出的非合作均值场博弈。那么， α-*RNE* 的集合为：

(i) if $\alpha \in (1/2, 1]$, *then* $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1 = \{(1/2, 1/2)\}$,

(ii) 若 $\alpha \in (0, 1/2]$，则 $\mathcal{N}_\alpha = \{(\alpha, 1-\alpha),\ (1-\alpha, \alpha)\}$。

因此，经典纳什均衡是唯一的，且等于 $(1/2, 1/2)$——群体在两条路线上均匀分布。然而，当理性玩家的比例较小（$\alpha \le 1/2$）时，会出现两个新的均衡 $(\alpha, 1-\alpha)$ 和 $(1-\alpha, \alpha)$—— 此时所有理性玩家选择一条路线，而从众玩家选择另一条路线。

在进一步讨论之前，我们研究存在从众群体时该双路径网络的稳定性代价和无政府代价。

社会效用、无政府代价和稳定性代价。 对于双路径网络，在任意群体测度 μ处，利用 (21)，(16) 中的社会效用由下式给出：

$$u^s(\mu) = -1 - \rho((\mu_A)^2 + (\mu_B)^2). \tag{22}$$

因此，当 $\alpha > 1/2$ 时， α-理性社会效用，即在唯一的 α-RNE 处， μ^*_α =$(1/2, 1/2)$ 等于 $u^s(\mu^*_\alpha) = -1 - \rho/2$，见推论 2。另一方面，对于$\alpha \le 1/2$，我们有两个不同的 α-RNE，但它们的社会效用相等：

$$u^s((\alpha, 1-\alpha)) = u^s((1-\alpha, \alpha)) = -1 - \rho(\alpha^2 + (1-\alpha)^2).$$

进一步由 (22) 和 (16) 可得社会最优效用 $u^s_* = -1 - \rho/2$。因此，对于不存在从众人群的经典情形，PoA=PoS=1；只要从众群体不超过 50%（即$\alpha > 1/2$），这些值就保持不变，见 (20)。这表明对于双路径网络，理性决策也是社会最优的；此外，只要 $\alpha > 1/2$，纳入从众玩家不会改变系统效率。

然而，当从众玩家的比例超过 $1/2$ 时，无政府代价仍等于稳定性代价（见推论 2）；我们将这个共同值记为 p_{AS}，即令p_{AS} = 无政府代价 = 稳定性代价。与前一个区域不同， p_{AS} 此时开始从 1 增大，因而性能变差（回想一下，对于最小化问题，差距（$p_{AS} - 1$）体现了策略性决策造成的性能下降程度）。事实上，当 $\alpha \downarrow 0$时，$p_{AS} \uparrow 1 + \rho/(2+\rho)$。因此，在有两条路线的交通网络中，存在大量从众群体（其中 $\alpha \le 1/2$）会使系统性能变差，无论 ρ如何；而当 $\alpha > 1/2$ 时，结果是高效的。

4.1.2. 带有额外路线的交通网络

为分析额外路线的影响，我们考虑一个扩展的交通网络，如图2所示，其中新增了一条从枢纽 A 到枢纽B 的直接连接。因此，每位玩家现在可以在从源点 S 到目的地 D的三条可用路线中选择一条：经由路线 A、路线 B或新路线 AB，因此现在的行动集为 $\mathcal{A} = \{A, B, AB\}$。相应的效用函数为：

$$u(i,\mu) = \begin{cases} -1 - \rho(\mu_A + \mu_{AB}), & \text{if } i = A, \\ -1 - \rho(\mu_B + \mu_{AB}), & \text{if } i = B, \\ -\rho(\mu_A + \mu_{AB}) - \rho(\mu_B + \mu_{AB}), & \text{if } i = AB, \end{cases} \tag{23}$$

其中， $\mu_A, \mu_B,$和 μ_{AB}分别是使用路线 $A, B,$和 AB的玩家比例。请注意，使用路线 AB 的玩家不会产生额外成本。

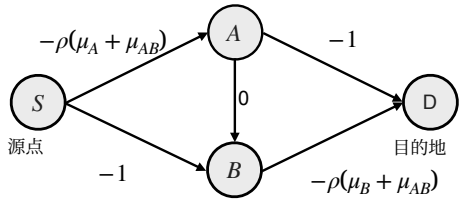


图2：带有额外路线的交通网络

接下来，利用定理1，我们得到以下结果：

推论3. 考虑效用函数(23)对应的非合作均值场博弈。则， α-*RNE* 的集合为：

(i) if $\alpha \in (2/3, 1]$, *then* $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1 = \{(0, 0, 1)\}$,

(ii) if $\alpha \in (0, 2/3]$, *then* $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1 \cup \{(1-\alpha, 0, \alpha), (0, 1-\alpha, \alpha)\}$.

注意，由于新增了链路 AB，在经典均衡中没有玩家选择路线 A 或 B；相反，所有玩家最终都选择路线 AB （而当只有两条路线 A 和 B 时，玩家则平均分配在两条路线之间；见推论 2）。此外，当理性玩家的比例足够高（$\alpha > 2/3$）时，纳什均衡集合与 α-RNE 集合重合。然而，当理性玩家的比例较低（$\alpha \leq 2/3$）时，会出现两个新的均衡（$1-\alpha, 0, \alpha$）和（$0, 1-\alpha, \alpha$）——在这些均衡中，所有理性玩家都选择路线 AB，而所有从众玩家（共同）都选择路线 A 或路线 B 。

值得注意的是，对于理性群体规模较大的情形（确切地说， $\alpha >$）， A 和 B 并非均衡从众选择，且$\mathcal{H}_\alpha = \{AB\}$

2/3）。此外，路线 AB 成为理性玩家的占优策略——接下来我们会稍稍偏离主题，对此进行详细讨论。

值得注意的是， A和 B 并不是均衡从众选择，并且当理性群体足够大时（具体而言，对于$\alpha > 2/3$），$\mathcal{H}_\alpha = \{AB\}$。此外，路径 AB 对理性玩家而言成为占优策略；在简要岔开讨论之后，我们将在下一节详细考察这一现象。

从众行为下的行动支配 AB： 假设理性玩家对该博弈具有共同知识。具体而言，他们可以估计所有可能的均衡从众选择的集合 $\mathcal{H}_\alpha$，其定义见式（5）；回顾一下， $\mathcal{H}_\alpha$ 是在某个 α-RNE中可能成为从众选择的行动集合。在此类情形下，如第2.1节中已经解释的那样，他们认为，如果对于所有可能的均衡从众选择 $i^H \in \mathcal{H}_\alpha$ 以及所有可能的理性经验测度 μ^R，以下条件均成立，则行动 i 被行动 j 支配（回顾一下，任意 $\mu \in \mathcal{E}(i^H)$都等于 $\mu = \alpha\mu^R + (1-\alpha)1_{i^H}$，其中某个 μ^R见式（6）—（7））：

$$u(i,\mu) < u(j,\mu), \text{for all } j \in \mathcal{A}\setminus\{i\}, \text{ with } \mu := \alpha\mu^R + (1-\alpha)1_{i^H}.$$

对于 $\alpha \le 2/3$、 $\mathcal{H}_\alpha = \{A, B, AB\}$，接着 AB即使考虑从众行为，仍是占优策略： (i) 对于任意满足 A 为均衡从众选择的 μ^R 和 $\mu = \alpha\mu^R + (1-\alpha)1_A$，以下[3]成立（因为 $\rho < 1$，且见 (23)），

$$u(AB,\mu) > u(A,\mu), \text{ and } u(AB,\mu) > u(B,\mu); \tag{24}$$

(ii) 即使对于均衡从众选择 B 和 AB，类似结果仍成立；也就是说，即便 $\mu = \alpha\mu^R + (1-\alpha)1_B$ 或 $\mu = \alpha\mu^R + (1-\alpha)1_{AB}$，(24) 仍成立

接下来，我们研究三路径网络的稳定性代价和无政府代价，然后再比较这两个网络。

社会效用、无政府代价和稳定性代价。 利用 (23)，在任意总体测度 μ 下，(16) 中三路径网络的社会效用为：

$$u^s(\mu) = -\mu_A - \mu_B - \rho(\mu_A + \mu_{AB})^2 - \rho(\mu_B + \mu_{AB})^2. \tag{25}$$

因此，对于 $\alpha > 2/3$，唯一的 α-RNE $\mu^*_\alpha = (0, 0, 1)$处的社会效用等于$u^s(\mu^*_\alpha) = -2\rho$，见推论3。另一方面，对于 $\alpha \le 2/3$，该博弈存在

[3]显然， $u(AB, \mu) = -\rho(1-\alpha+\alpha(\mu^R_A+\mu^R_{AB})) - \rho\alpha(\mu^R_B+\mu^R_{AB}) > -\rho\alpha(\mu^R_B+\mu^R_{AB}) - 1 = u(B, \mu)$，且 $u(AB, \mu) > -\rho(1-\alpha+\alpha(\mu^R_A+\mu^R_{AB})) - 1 = u(A, \mu)$。

多个 α-RNE：除了(0，0，1)之外，还出现了两个具有相同社会效用的新均衡：

$$u^s((1-\alpha,0,\alpha)) = u^s((0,1-\alpha,\alpha)) = -\rho\alpha^2 + \alpha - \rho - 1. \tag{26}$$

Fu进一步由（25）可知，（16）中的社会最优效用在 ρ 的两个区域中有所不同：

$$u_*^s = -2\rho 1_{\{\rho \le 1/2\}} + {}^{(1-4\rho)}\!/_{(2\rho)} 1_{\{\rho > 1/2\}}; \tag{27}$$

因此，分析无政府代价和稳定性代价自然分为两个不同的区域：

（i）若 $\rho \le 1/2$，则有无政府代价 $=$ 稳定性代价 $= 1$ 在 $\alpha = 1$ 处，这意味着在经典情形中，理性选择本身就是社会最优的。只要理性参与者足够多，即使存在从众群体，系统仍保持高效（ α-RNE 是社会最优的）；更准确地说，对所有 $\alpha > 2/3$ 均成立（根据推论 3， $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1$）。然而，当从众行为在 $\alpha \le 2/3$ 时占主导地位，效率就会下降——此时由（26）—（27）可得，无政府代价 $= {}^{(\rho\alpha^2-\alpha+\rho+1)}\!/_{(2\rho)}$ ，而稳定性代价等于一；由于稳定性代价仍为一，系统仍有可能通过适当的影响力设计达到社会最优点，详见第5节。不过，无政府代价会随从众比例增加——当 $\alpha \downarrow 0$ 时，无政府代价 $\uparrow 1 + {}^{(1-\rho)}\!/_{(2\rho)}$。

(ii) 如果 $\rho > 1/2$，理性选择将不再是社会最优的——事实上，对于 $\alpha > 2/3$ （包括经典情形），我们有唯一的 α-RNE，相应的无政府代价 $=$ 稳定性代价 $= {}^{(4\rho^2)}\!/_{(4\rho-1)}$，严格大于 1。换言之，当 $\rho > 1/2$，即拥堵程度较高时，理性决策会降低系统效率。

然而，当从众群体规模更大且 $\alpha \le 2/3$ 时，系统效率可能进一步降低。在 α-RNEs 下，社会效用等于 $u^s = -2\rho$（在 (0，0，1) 处）或 $u^s = -\rho\alpha^2 + \alpha - \rho - 1$（在 $(1-\alpha,\ 0,\ \alpha)$ 和 $(0,\ 1-\alpha,\ \alpha)$ 处）。通过简单的基于凹性的论证，可以证明 $-2\rho \ge -\rho\alpha^2 + \alpha - \rho - 1$ 当且仅当$\alpha \le \bar{\alpha} := {}^{(1-\rho)}\!/_{\rho}$。总之，无政府代价和稳定性代价指标如下（见 (20)、(27)）：

$$(\mathrm{PoA},\ \mathrm{PoS}) = \begin{cases} \left(\frac{2\rho(\rho\alpha^2-\alpha+\rho+1)}{4\rho-1}, \frac{4\rho^2}{4\rho-1}\right), & \text{if } \alpha \in (0, \min\{\bar{\alpha}, 2/3\}], \\ \left(\frac{4\rho^2}{4\rho-1}, \frac{2\rho(\rho\alpha^2-\alpha+\rho+1)}{4\rho-1}\right), & \text{if } \alpha \in (\bar{\alpha}, 2/3]. \end{cases}$$

与之前一样，无政府代价还可能进一步恶化，事实上，当 $\alpha \le \bar{\alpha}$ 时， $\alpha \downarrow 0$ 无政府代价 $\uparrow {}^{2\rho(1+\rho)}\!/_{(4\rho-1)}$；而且对于任意 $\alpha > \bar{\alpha}$，系统效率都与只有理性参与者时相同。

因此，非理性决策的存在进一步降低了双链路网络（无政府代价和稳定性代价均变差）以及三链路网络（只有无政府代价变差）中的系统效率。然而，情况并非总是如此，正如第4.2小节的下一个例子所示。现在我们来比较这两个网络。

4.1.3. 含额外链路的悖论

最后，我们考察上述交通网络中是否会出现布雷斯悖论（第4.1小节开头讨论过）；我们先从经典情形（$\alpha = 1$）入手，再研究存在从众行为时的同一问题。

在 $\alpha = 1$ 处根据推论 2，社会效用 (22) 在唯一的 α-RNE（双路径网络）处由 $(-1 - \rho/2)$ 给出，而增加一条新链路后，该值等于 (-2ρ)，这由推论3及 (25) 可得。因此，新链路会诱导出社会绩效下降的均衡，当且仅当 $(-2\rho) < (-1 - \rho/2)$ ——因此，当拥堵在 $\rho > 2/3$ 下显著时，理性决策会使新增链路成为一场灾难——这便是该悖论。因此，我们考虑 $\rho \in (2/3,1)$ 以便进一步分析。

我们现在转向核心问题：在存在从众玩家的情况下，该悖论是否仍然存在？由推论3可知，当$\alpha > 2/3$ 时（即从众群体较小时），结果与经典情形一致，且布雷斯悖论仍然存在。

接下来，我们考虑从众群体规模较大的情形，其中 $\alpha \leq 2/3$；根据推论3，此时博弈存在多个均衡，这使分析更加复杂。为研究这一情形，我们现在比较三路径网络中不同 α-RNE 下最好的和最差的社会效用，与双路径网络中（唯一的）α-RNE-social- utility。形式化地，令 u_b^s,3(α, ρ) 和 u_w^s,3(α, ρ) 分别表示三链路网络中最好的和最差的 α-RNE-social utility，并令$u_2^s(\alpha, \rho)$ 表示双路径网络中（唯一的） α-RNE-social-utility。利用这些量，我们现在定义相关的“比较函数” $g_b(\alpha, \rho) := u_b^s$,3$(\alpha, \rho) - u_2^s(\alpha, \rho)$ 和 $g_w(\alpha, \rho) := u_w^s$,3$(\alpha; \rho) - u_2^s(\alpha; \rho)$；这些函数的具体形式见附录7.1。

由凹性可知，对所有满足 $\rho > 2/3$的(α, ρ)，均有 $g_w(\alpha, \rho) < 0$ ；因此，“最差” α-RNE处的社会效用始终劣于两条路径情形下的社会效用。此外，类似的凹性论证表明，在满足 $\rho > 2/3$的(α, ρ)平面的如下子集上有 $g_b < 0$ ，见附录7.1中的方程(37)-(38)：

$$\left\{(\alpha, \rho) : \alpha \in \left(\left(1-\sqrt{3-2/\rho}\right)/2, \left(1-\sqrt{1-2\rho^2}\right)/(2\rho)\right) \cup (2/3, 1] \text{ and } \rho \in (2/3, 12/17]\right\} \bigcup \left\{(\alpha, \rho) : \alpha \in \left(\left(1-\sqrt{3-2/\rho}\right)/2, 1\right] \text{ and } \rho \in (12/17, 1)\right\}.$$

因此，在上述子区域中，无论达到何种均衡，三链路网络的效率都更低。

我们进一步在图3中绘制了 g_b 在 $(\alpha, \rho) \in [0, 1] \times [2/3, 1)$ 中的符号，以便比较整个区域——我们观察到，在该 (α, ρ) 区域的很大一部分（见红色区域）中， $g_b < 0$ ；在这个红色子区域中，即使是最优的 α-RNE 所对应的社会效用，也低于两条路径网络所产生的社会效用。

因此，有趣的是，只有在以下情况下，三路径网络的社会效用才会提升：(a) 可以采用恰当的影响力设计，引导从众群体走向“最佳”的 α-RNE；(b) 理性群体所占比例较小（蓝色区域分布在 α 较小的取值附近）。在所有其他情况下，即使存在从众群体，理性决策也会使新增路线弊大于利。

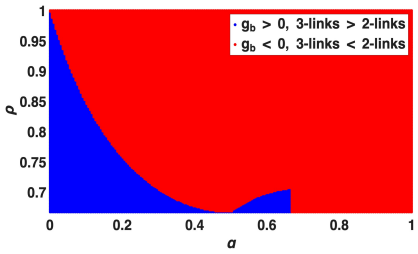


图3：“最佳均衡”社会效用的比较。

4.2. 具有从众行为的带宽共享博弈

考虑一个通信网络，玩家共享一个公共带宽来传输信息。每位玩家必须从 n 个可能的传输级别中进行选择，这些级别由集合 $\mathcal{A} = \{1, 1/2, \ldots, 1/n\}$中的行动表示。较高的传输级别（例如， $i = 1$）允许玩家以更高的速率传输，但会对所有玩家造成更大的干扰；较低的传输级别（例如，$i = 1/n$）则会减少干扰，但也会限制传输速率。

玩家的效用取决于其选择的传输级别以及所有玩家造成的总干扰。干扰由所有玩家传输级别的加权和决定，因此效用函数为：

$$u(i, \mu) = i\,(1 - c(\mu))\,, \text{ for all } i \in \mathcal{A}, \text{ where } c(\mu) := \sum_{j=1}^{n} \mu_j / j. \tag{28}$$

作为定理1的直接推论，我们首先得到 α-RNE的集合：

推论4. 考虑带宽共享博弈，则有如下结论

(i) 若 $\alpha > 1 - 1/n$，则 $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1 = \{(1,0,\ldots,0)\}$，且

(ii) 若 $\alpha \leq 1 - 1/n$，则 $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$，其中

$$\mathcal{B}_\alpha := \{\mu : \mu_1 = \alpha, \mu_i = 1 - \alpha, \textit{ for some } i \neq 1, \textit{ and } \mu_j = 0\ \forall j \notin \{i, 1\}\}. \qquad \square$$

对于任意总体测度 μ，博弈(28)的社会效用(16)为：

$$u^s(\mu) = c(\mu)\,(1 - c(\mu))\,. \tag{29}$$

由于函数 $c \mapsto c(1-c)$ 是凹函数，且在 $1/2$ 处取得最大值，因此社会最优效用为 $u^s_* = 1/4$——注意，对于 $\mu^* = (0, 1, 0, \cdots, 0)$，$c(\mu^*) = 1/2$。根据推论 (4)，当 $\alpha > 1 - 1/n$ 时，存在唯一的 α-RNE $\mu^*_\alpha = (1, 0, \cdots, 0)$，其中

两组玩家的效用均为零，$u^R(\mu_\alpha^*) = u^I(\mu_\alpha^*) = 0$（见 (18)-(19)）。因此，当群体由具有 $\alpha > 1 - 1/n$ 的理性参与者主导时，PoA=PoS=0（现在我们处理的是一个最大化问题，因此这些价格小于或等于 1，见下文对 (17) 的说明）。换言之，理性决策彻底破坏了系统效率，而从众群体规模较小时，情况依然如此。接下来我们研究从众人群规模增大所带来的影响。

由于即使从众群体规模更大，(1,0,$\cdots$,0)仍然是 α-RNE，因此无政府代价仍为零；然而稳定性代价提升至

$$\begin{aligned}\mathrm{PoS} = \frac{\max_{\mu\in\mathcal{B}_\alpha} u^s(\mu)}{1/4} &= 4\max_{j>1}\left(\alpha + (1-\alpha)/j\right)\left(1-\left(\alpha+(1-\alpha)/j\right)\right)\\ &= 4\max_{j>1}\frac{(j\alpha+1-\alpha)(j-1)(1-\alpha)}{j^2} > 0.\end{aligned}$$

事实上，随着 $\alpha \downarrow 0$，稳定性代价增至1——因此，与第4.1小节的例子相反，从众群体的存在提升了系统效率；实际上，当理性参与者所占比例微不足道，且能够设计出适当的影响力设计时（见第5节），系统可以在接近社会最优点的状态下运行——所以有时“不理性或许才是理性的选择！”

此外，根据最优性和均衡的定义，任何 α-RNE下任何比例的理性参与者，其效用都不会超过经典情形下或当 $\alpha = 1$时的社会最优效用，即对所有 $\mu^* \in \mathcal{N}_1$，$u^R(\mu^*) \le u_*^s$。然而，有趣的是，从众群体的存在能够严格地使理性玩家受益——例如，如果 $\alpha < \min\left\{\frac{3j-4}{4\,j-1}, \frac{j-1}{j}\right\}$，那么在 α-RNE下，$u^R(\mu^*) > u_*^s$，$\mu^* = \alpha\delta(1) + (1-\alpha)\delta(j)$，其中 $\delta(i)$是集中于 i的狄拉克测度。

因此，总而言之，从众决策的存在可能以两种方式改变结果——有时系统效率会提高，而在某些情况下则会下降——理性参与者可以从这类非理性决策中获益——令人惊讶的是，甚至从众群体也能获益。然而，正如本节多处所指出的，只有在能够适当地影响从众决策时，人们才能从非理性决策中获益。接下来，我们将精确聚焦于这类设计方面。

5. 从众玩家的机制设计

在许多情形下，需要由控制者/主持人设计一种环境，使博弈能够产生预期结果。这种对“理想”博弈的设计称为机制设计，在全体玩家均为理性玩家的经典博弈中，相关文献对此已有大量研究（例如，参见 Narahari (2014)）。本节旨在探讨这样的情形：相当一部分

决策者表现出从众行为，且控制者掌握这一信息。我们将运用前文提出的理性-非理性框架来研究这一问题。设计者可以利用定理1的结果，该定理给出了识别 α-RNE 的条件。

我们通过产品选择例 1 来说明理性—非理性设计方面。假设有一家制造商生产该例中给出的三种产品。此外，假设制造商必须根据对博弈结果（反映市场需求）的预期来决定生产活动，并确定各产品的生产比例。制造商也可以将每种产品的利润率纳入决策考量。

如果所有顾客都是理性的，制造商就能轻松预测需求——请回想一下，经典博弈有一个唯一的纳什均衡 (1，0，0)。因此，制造商可以预期产品 1 将主导市场，并据此规划生产。即使它希望生产其他产品，也看不到太多前景。

现在，假设有一部分顾客表现出从众行为，且这一比例至少为 $1/3$。此外，假设制造商了解这种构成。那么，情况就会截然不同——这对制造商而言可能是福，也可能是祸。请回想一下，该博弈有三个 α-RNE，分别为 (1，0，0)、(α，$1-\alpha$，0) 和 (α，0，$1-\alpha$)（见例 1）。换言之，未来的市场需求可能会只集中在产品 1 上，也可能集中在产品 1 和 2 上，或集中在产品 1 和 3 上。因此，博弈结果以及市场需求都变得难以预测。为了避免失去顾客，制造商可能不得不生产所有产品。这可能导致生产过剩及相关损失。

另一方面，从众行为的存在也为制造商生产“理想”产品提供了机会。例如，在同一个例子中，制造商可能热衷于生产产品 2，或许是因为其利润率更高。如果整个群体都是理性的，制造商将别无选择。然而，当顾客存在从众行为时，制造商可以通过采用一些额外策略，推动博弈走向结果（α，$1-\alpha$，0）。例如，可以采取定向策略，如对产品 2 进行过度广告宣传，从而影响部分顾客的初始决策，最终使所有具有从众行为的顾客都选择产品 2（在极限情况下跟随自身，参见第2节），并使（α，$1-\alpha$，0）成为最终结果。

总之，如果所有顾客都是理性的，则只有产品1存在需求。然而，从众顾客为所有产品创造需求开辟了道路。此外，借助广告、口碑传播、社交媒体传播等外部力量，人们或许能够为某一期望产品创造需求。本质上，制造商可以借助定理1预测理性行动与羊群行为，从而进行战略规划。

因此，如果控制者能够策略性地创造一种初始影响力，推动从众玩家采取“合适”的行动，就可能实现“理想”的结果。这里需要注意的是，控制者只会选择指向 $\mathcal{H}_\alpha$ 中那些行动的影响力（见(5)），因为只有这些行动是可持续的（这一点在第2.1小节中讨论）。这种针对性方法利用了 α-RNE的性质（这些性质有助于在各种可能选择中确定期望结果）。这一情形可以建模为斯塔克尔伯格博弈，其中控制者创造初始影响力。接下来，我们将通过正式构建相应的影响力设计博弈，针对具有从众玩家的一般博弈更深入地探讨这一方面。

5.1. 影响力设计：斯塔克尔伯格框架

我们考虑一个三级斯塔克尔伯格框架，以形式化影响力设计的相关思想。在上层，控制者或主持人旨在通过设计适当的影响力来实现某个“指定目标” f，进而调节从众玩家的决策；稍后我们将讨论f 的各种选择。这种影响力可以借助影响者或知名人士（如名人、体育界人士、政客等）来塑造，他们能够通过广告、口碑传播等方式影响公众认知和行为（如产品选择例 1 所述）。影响力被指定为行动集合 $\mathcal{A}$上的经验测度 ν，它既可以是影响者自身所选行动的结果（例如 Singh and Kavitha (2024) 中的情形），也可以由推动 $\mathcal{H}_\alpha$中的一组选择的力量所创造。

中层对应从众玩家（占群体的$1-\alpha$比例），他们的选择受所创造的影响力 ν 驱动；他们只是跟随趋势。具体而言，他们选择影响力测度 ν所指示的最大行动：

$$i_*^H(\nu) = \text{Arg max}_{i\in\mathcal{A}}\nu(i), \tag{30}$$

如有需要，可按照式（3）进行平局裁决。

最后，在较低层级，我们考虑构成群体中 α比例的理性玩家。这些玩家根据从众群体的趋势选择自己的行动，并力求优化自身的效用函数。因此，在给定从众玩家 i^H的行动的条件下，理性玩家之间的交互构成了一个非合作均值场博弈，具体如下：

$$\mathcal{G}(i^H) := \left\langle \mathcal{A}, u(\cdot,\ \cdot;\ i^H) \right\rangle, \tag{31}$$

其中 $u(i,\ \mu^R;\ i^H)$ 表示典型理性参与者选择行动 $i \in \mathcal{A}$时的效用函数，如果 μ^R 是理性玩家的经验测度，且从众玩家已选择行动 i^H。

对任意从众行动 i^H，经验测度 $\mu_*^R(i^H)$ 是下层博弈的均值场博弈纳什均衡，如果它满足以下条件：

$$\text{support}(\mu_*^R(i^H)) \subseteq \text{Arg}\max_{i\in\mathcal{A}} u\left(i,\ \mu_*^R(i^H);\ i^H\right).$$

根据定义1可知，当 $i^H \in \mathcal{H}_\alpha$ 时，$\left(\mu_*(i^H)\ \mu_*^R(i^H)\right)$ 且 $\mu_*(i^H) := \alpha\mu_*^R(i^H) + (1-\alpha)\delta(i^H)$ 是一个 α-RNE；此处 δ 表示狄拉克测度。

控制者的目标函数 f 取决于从众行为群体和理性群体所选择的行动，而这些行动又取决于影响力ν。因此，上层的控制者关注以下影响力设计博弈，

$$\nu^* \in \text{Arg}\max_{\nu: i_*^H(\nu)\in\mathcal{H}_\alpha} f\left(i_*^H(\nu),\ \mu_*^R(i_*^H(\nu))\right). \tag{32}$$

元组 $\left(\nu^*,\ i_*^H,\ \mu_*^R\right)$，其中 $i_*^H = i_*^H(\nu^*)$ 且 $\mu_*^R = \mu_*^R(i_*^H(\nu^*))$，表示影响力博弈的斯塔克尔伯格均衡（*SE*）（当该博弈适定时）。

根据平局裁决规则以及 $i_*^H(\nu)$ 的定义（见（30）），（32）中的优化问题可以改写为：

$$\max_{i^H\in\mathcal{H}_\alpha} f\left(i^H,\ \mu_*^R(i^H)\right). \tag{33}$$

上述等价关系仅在 f 不显式依赖于影响力 ν（如（32）所示）时成立；并且（显然）对于每个 i^H，都存在一个 ν，使得 $i_*^H(\nu) = i^H$。如果 i_*^H 是（33）的最优解，那么任何满足 $i_*^H(\nu^*) = i_*^H$ 的 ν^* 都会成为最优影响力。

只有当博弈适定时，才能讨论斯塔克尔伯格均衡，也就是说，对于每个 ν 和 $i_*^H(\nu)$，下层均衡 μ_*^R 都存在且唯一。根据与（33）的等价性，如果对于每个 $i^H \in \mathcal{H}_\alpha$，理性玩家之间的下层博弈 $\mathcal{G}(i^H)$ 都存在唯一的均值场博弈纳什均衡，那么该问题就是适定的。

产品选择博弈的影响力设计 1：现在，我们从影响力设计的角度分析例 1。回想一下，其中有三个 α-RNE，且满足 $\mathcal{H}_\alpha = \{1,2,3\}$，而制造商更偏好产品 2。因此，制造商会考虑一个影响力设计博弈，其中，

$$f(i^H,\mu^R) = (1-\alpha)1_{\{i^H=2\}} + \alpha\mu^R(2). \tag{34}$$

[4]基本上，我们假设 f 仅取决于代理人的行动，而不取决于所产生的影响力 ν。如有需要，可以扩展该框架，使 f 还取决于 ν。

显然，对于任意 $i^H \in \mathcal{H}_\alpha$，测度 $\mu_*^R(i^H) = (1, 0, 0)$是理性玩家之间下层博弈 $\mathcal{G}(i^H)$的唯一纳什均衡。因此，该影响力博弈是适定的。由式 (33) 和 (34) 可知，$i^H = 2$ 是式 (33) 所给优化问题的解。因此，当 $i_*^H = 2$、$\mu_*^R = (1, 0, 0)$，且影响力 ν^* 满足$\nu^*(2) > \max\{\nu^*(1)\ \nu^*(3)\}$时，元组（$\nu^*$，$i_*^H$，$\mu_*^R$）构成该博弈的一个斯塔克尔伯格均衡。例如，制造商可以通过对产品 2 进行过度广告宣传来实现这样的影响力 ν^*。如果能够实现这种影响力，最终的市场需求分布（由从众行为和理性顾客带来的综合市场需求）将达到 $\mu_* = (\alpha, 1-\alpha, 0)$。在这种情况下，制造商可以策略性地规划产品 1 和产品 2 的产量比例，使其与 μ_*一致。

备注：以下是关于影响力设计博弈以及从众玩家设计的一些（总结性）备注。

通常，含有从众玩家的博弈会有多个 α-RNE，而第5.1小节中的斯塔克尔伯格均衡会为控制者从中找出“最优”的一个。换言之，在存在歧义（有多个 α-*RNE*）且能够创造所需影响力的情况下，控制者可以通过创造影响力 ν^*（由影响力博弈提供），推动博弈朝着最有利的结果发展。请注意，这只有在存在能够受到影响的从众玩家时才有可能。

当控制者无法创造所需影响力时，其选择必须取决于所有可能的结果/α-RNE。例如，它可以采用最差预期规则，预测博弈未来结果的最坏情形（如果制造商的目标是不失去顾客，那么在产品选择博弈1中，它必须生产全部三种产品）。

我们还想在此澄清，本文关注的仅是影响力（待创造），而非创造影响力的手段。已有一些文献研究后者。例如，Singh and Kavitha (2024) 中的控制者设计了最优激励，以充分激励影响者接种疫苗，进而在群体中产生积极影响，最终达到预期的疾病根除水平。不过，对于影响力设计博弈，我们假设能够创造所需的任何影响力。

该分析框架还可用于描述另一种情形——理性玩家自身也可以在上层创建经验测度 ν，以引导或误导从众玩家，并从中获取由此产生的收益。在此语境下，函数f（见（32））对应于理性玩家的效用函数 u（见（31））。这种方法得到的结果是斯塔克尔伯格博弈的结果，对理性玩家有利。

6. 结论

本文构建了一个分析框架，用于研究具有大规模群体的博弈，其中有 α 比例的玩家采取理性行动，而其余（$1-\alpha$）比例的玩家则遵循多数意见（从众行为）。我们引入了一种新的均衡概念，称为 α理性纳什均衡（α-RNE），并讨论了其多种解释，包括处方、预测以及某些学习动态的极限。随后我们证明，随着从众玩家比例的增加，均衡集合可能发生变化：一些经典均衡可能消失，同时也可能出现一些新的均衡。有趣的是，在存在从众玩家的情况下，理性玩家总能获益——有时甚至能获得高于社会最优效用的效用。此外，在某些情况下，从众玩家也可能获得更高的效用，甚至几乎达到社会最优效用。或许，有时非理性才是理性的!

我们进一步通过无政府代价（PoA）等性能指标，考察从众行为对系统效率的影响。在交通网络中，众所周知，新增一条链路会因理性决策而降低系统效率（总体出行时间增加）；这一现象最早由庇古发现，随后由布雷斯进行了详细分析。我们发现，如果从众群体占主导地位，且能够友好地影响该群体，就可以应对这种低效率，使新链路发挥积极作用。从众比例越高和/或拥堵水平越低，改善效果就越显著。然而，如果从众决策无法受到影响，额外链路就会降低性能。在基于碰撞的带宽共享博弈中，众所周知，理性决策会导致显著的无政府代价。我们发现，从众群体的存在会带来一种新的均衡，其效率大幅提高；事实上，当理性群体规模显著较小时，即使是非理性参与者，其效用也接近社会最优值。

最后，我们讨论存在从众行为时的机制设计方面。均衡集合扩大后，在成功创造适当影响力的情况下，可能带来有益的机会。然而，如果无法创造这种影响力，更大的均衡集合就会增加设计难度，因为可能出现不理想的结果。我们通过一个用于影响力设计的斯塔克尔伯格框架来说明这些问题。

参考文献

Agarwal, K., Avrachenkov, K., Kavitha, V., Vyas, R., 2025a. 平衡理性与社会影响力：存在从众行为的博弈中的α-理性纳什均衡，载于：网络博弈论国际会议，施普林格。第91–107页。

Agarwal, K., Avrachenkov, K., Vyas, R., Kavitha, V., 2025b。具有短视理性和从众玩家的双选择行为

博弈动态。ACM计算系统测量与分析汇刊 9，1–26。Anderson, S.P., Goeree, J.K., Holt, C.A., 2002。logit均衡：对直觉性行为异常的一种观点。南方经济杂志 69，21–47。Banerjee, A.V., 1992年。羊群行为的一个简单模型。经济学季刊 107，797–817。Braess, D., Nagurney, A., Wakolbinger, T., 2005年。论交通规划悖论。交通科学 39，446–450。Camerer, C.F., 2011年。《行为博弈论：战略互动中的实验》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，美国。Camerer, C.F., Ho, T.H., Chong, J.K., 2004年。行为博弈论：思考、学习与教学，载于：Huck, S.（编），《理解战略行为：博弈论、实验与有限理性的新进展》。施普林格，柏林，德国，第120–180页。Carmona, R., Delarue, F., 等，2018年。《平均场博弈的概率论及其应用 I–II》。随机分析丛书，施普林格，纽约，美国。Eliaz, K., 2002年。容错实施。经济研究评论 69，589–610。Eyster, E., Rabin, M., 2009年。理性与幼稚羊群行为。CEPR讨论论文第DP7351号。Feldman, M., Chuang, J., 2005年。克服对等系统中的搭便车行为。ACM SIGecom Exchanges 5，41–50。Gigerenzer, G., 2002年。《有限理性：适应性工具箱》。麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州。Hardin, R., Cullity, G., 2003年。搭便车问题，载于：Zalta, E.N.（编），《斯坦福哲学百科全书》。形而上学研究实验室，斯坦福大学。Holt, C.A., Roth, A.E., 2004年。纳什均衡：一种观点。美国国家科学院院刊 101，3999–4002。URL：https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0308738101，doi:10.1073/pnas.0308738101，arXiv：https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.0308738101。

Johari, R., Tsitsiklis, J.N., 2004年。网络资源分配博弈中的效率损失。《运筹学数学》29, 407–435。Koutsoupias, E., Papadimitriou, C., 1999年。最坏情况均衡，载于：《计算机科学理论方面年度研讨会》，施普林格，第404–413页。McKelvey, R.D., Palfrey, T.R., 1995年。正规形博弈的分位响应均衡。《博弈与经济行为》10, 6–38。Morone, A., Samanidou, E., 2008年。关于从众行为的简短札记。《进化经济学杂志》18, 639–646。Murchland, J.D., 1970年。交通流中的布雷斯悖论。《交通运输研究》4, 391–394。Narahari, Y., 2014年。《博弈论与机制设计》。世界科学出版社，新加坡。Nash Jr, J.F., 1950年。n人博弈中的均衡点。美国国家科学院院刊36, 48–49。von Neumann, J., Morgenstern, O., Rubinstein, A., 1944年。《博弈论与经济行为：60周年纪念版》。普林斯顿大学出版社。网址：http://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx。Pigou, A.C., 2017年。福利与经济福利，载于：《福利经济学》。劳特利奇，伦敦，第3–22页。Roughgarden, T., 2005年。《自私路由与无政府代价》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥。Sandholm, W.H., 2010。《群体博弈与演化动力学》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥。Schultz, W., 2008年。引言：神经经济学的前景与收益。《英国皇家学会哲学汇刊B辑：生物科学》363, 3767–3769。Singh, V., Kavitha, V., 2024年。影响者、领导者与公众之间的随机疫苗接种博弈。《动态博弈与应用》14, 1268–1316。Sundaram, R.K., 1996年。《优化理论入门》。剑桥大学出版社，剑桥。

Thaler, R.H., 2018年。从腰果到助推：行为经济学的发展演变。《美国经济评论》108, 1265–1287。

Vasal, D., Berry, R., 2020a. 匿名博弈中的 Alpha-鲁棒均衡。SSRN 工作论文第 3643821 号。

Vasal, D., Berry, R., 2020b. 匿名博弈中的容错均衡：最佳响应对应与不动点。ArXiv:2005.06812。

7. 附录

定理1的证明：我们将证明分为以下两个步骤 s:

步骤 1：为证明，对于所有 $\alpha \in (0,1], ((\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{M}_\alpha) \cup \mathcal{P}_\alpha) \subset \mathcal{N}_\alpha$.

令 $\mu \in \mathcal{P}_\alpha$，并设 $\mathcal{A}^H(\mu) = k$，其中某个 $k \in \mathcal{A}$。根据定义（14），我们有$\mu_k = 1-\alpha$。定义 $\mu_k^R := 0$ 和 $\mu_i^R := \mu_i/\alpha$，对所有 $i \neq k \in \mathcal{A}$ 均成立。注意，对所有 $i \in \mathcal{A}$，$\mu_i^R \in [0,1]$ 均成立——这是因为 $\sum_{i\neq k} \mu_i = \alpha$，因此对所有$i \neq k$，$\mu_i \leq \alpha$ 均成立。

首先，根据上述定义可观察到，(4) 对 (μ, μ^R) 成立。现在，为了说明该对也满足 (2)，考虑任意 $i \in \mathcal{S}(\mu^R)$，即满足 $\mu_i^R > 0$ 的情形；则根据构造，$i \neq k = \mathcal{A}^H(\mu)$，并且 $\mu_i > 0$ (as$\mu_i^R = \mu_i/\alpha$)；因此：

$$i \in \left(\mathcal{S}(\mu) \setminus \{\mathcal{A}^H(\mu)\}\right) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu) \quad \text{(the last inclusion is by (14))}.$$

因此，$\mathcal{S}(\mu^R) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$，从而根据定义1，$\mu \in \mathcal{N}_\alpha$。

接下来，考虑任意 $\mu \in \mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{M}_\alpha$。由于 $\mu \notin \mathcal{M}_\alpha$，至少存在一个 i 使得 $\mu_i \geq 1-\alpha$。令 $k := \mathcal{A}^H(\mu)$，则根据定义，$\mu_k \geq 1-\alpha$。现在，按照 (8) 设置 μ^R。注意，对于所有 $i \in \mathcal{A}$，$\mu_i^R \in [0,1]$，并且如前所述满足 (4)。此外，再次有 $\mathcal{S}(\mu^R) \subseteq \mathcal{S}(\mu)$，而现在由于 $\mu \in \mathcal{N}_1$，我们还得到 $\mathcal{S}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$。因此，根据定义1，$\mu \in \mathcal{N}_\alpha$。

步骤2：为证明，对于所有 $\alpha \in (0, 1], \mathcal{N}_\alpha \subseteq ((\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{M}_\alpha) \cup \mathcal{P}_\alpha)$。

令 $\mu \in \mathcal{N}_\alpha$ 满足 $k = \mathcal{A}^H(\mu)$。则 $\mu_k \geq (1-\alpha)$，因此 $\mu \notin \mathcal{M}_\alpha$。按照式（8）定义 μ^R，由定义1可得，$\mathcal{S}(\mu^R) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$。

首先，设 $k \notin \mathcal{A}_u^R(\mu)$，则由定义1可得 $\mu_k = 1-\alpha$。根据式（8），$\mu_k^R = 0$，因此 $\mathcal{S}(\mu) \setminus \{k\} = \mathcal{S}(\mu^R) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$。因此 $\mu \in \mathcal{P}_\alpha$，见式（14）。

现在，设 $k \in \mathcal{A}_u^R(\mu)$。则 $\mu_k \geq 1-\alpha$，因此根据式（8），要么 $\mathcal{S}(\mu^R) = \mathcal{S}(\mu)$，要么$\mathcal{S}(\mu^R) = \mathcal{S}(\mu) \setminus \{k\}$。无论哪种情况，$\mathcal{S}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_u^R(\mu)$。因此，根据式（1），$\mu \in \mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{M}_\alpha$。 □

定理 2 的证明：第（i）部分：对所有人口测度 μ，定义函数 $f(\mu) = \sum_{i=1}^n \mu_i u(i, \mu)$。考虑任意 $\mu_\alpha^* \in \mathcal{N}_\alpha$，则（见（16））：

$$u_*^s = \sup_\mu f(\mu) = \max\left\{ \sup_{\{\mu;\mu\neq\mu_\alpha^*\}} f(\mu), f(\mu_\alpha^*) \right\} \geq f(\mu_\alpha^*).$$

接下来，我们将证明，对于所有 $\mu_\alpha^* \in \mathcal{N}_\alpha$，$f(\mu_\alpha^*) \geq u_\alpha^I(\mu_\alpha^*)$ 且 $u_\alpha^I(\mu_\alpha^*) \leq u_\alpha^R(\mu_\alpha^*)$。考虑 $\mu_\alpha^* \in \mathcal{N}_\alpha$，则有（见（18）-（19））：

$$f(\mu_\alpha^*) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\alpha,i}^* u(i, \mu_\alpha^*) \leq \max_{i \in \mathcal{A}} u(i, \mu_\alpha^*) = u^R(\mu_\alpha^*). \tag{35}$$

再次根据定义1，我们有如下结论：

$$f(\mu_\alpha^*) = \mu_{\alpha,a^H}^* u(a^H, \mu_\alpha^*) + \sum_{i \in \mathcal{A} \setminus \{a^H\}} \mu_{\alpha,i}^* u(i, \mu_\alpha^*) \geq u(a^H, \mu_\alpha^*) = u^I(\mu_\alpha^*). \tag{36}$$

因此，由（35）和（36），我们有：

$$u^I(\mu_\alpha^*) \leq u^R(\mu_\alpha^*).$$

第（ii）部分： 假设 $\mu_\alpha^* \in \mathcal{N}_\alpha$。则有，$u^I(\mu_\alpha^*) = u^R(\mu_\alpha^*)$，根据（35）-（36）可推出 $u_*^s \geq f(\mu_\alpha^*) = u^I(\mu_\alpha^*) = u^R(\mu_\alpha^*)$。□

引理1。 对于每个 $\alpha \leq 1 - 1/|\mathcal{A}|$，我们有 $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{A}$（$\mathcal{H}_\alpha$ 定义于（5）中）。

证明。 考虑任意固定的 $a \in \mathcal{A}$。定义如下均值场博弈，其中 $\mathcal{A}$ 为行动集合，效用函数为，

$$w^a(i, \nu) := u(i, (1-\alpha)\delta_a + \alpha\nu) \text{ for all } i \in \mathcal{A} \text{ and all } \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{A}),$$

其中 δ_a 是集中于 a处的概率测度。如果 ν^* 是 w^a-博弈的任意一个均值场博弈纳什均衡，则根据定义1、（8）以及w^a-博弈的定义可直接推出，$\mu^* := (1-\alpha)\delta_a + \alpha\nu^*$ 是原始 u-博弈（见第（2）节）的一个 α-RNE，当 $\alpha \leq 1 - 1/|\mathcal{A}|$时，$\mathcal{A}^H(\mu^*) = a$。因此，如果 w^a-博弈具有一个均值场博弈纳什均衡，则 $a \in \mathcal{H}_\alpha$。

因此，只需证明对于每个 $a \in \mathcal{A}$，w^a-博弈都存在均值场博弈纳什均衡。这一点显而易见，因为每个有限行动均值场博弈都存在均值场博弈纳什均衡——这是将卡库塔尼不动点定理（参见 Sundaram，1996，第 9.26 定理）应用于以下对应关系所得，其中对于每个 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$，

$$\Phi(\mu) := \text{Arg} \max_{\mu' \in \mathcal{D}(\mu)} w(\mu', \mu),$$
$$\text{with } w(\mu', \mu) := \sum_a \mu'(a) u(a, \mu), \text{ and, } \mathcal{D}(\mu) = \mathcal{P}(\mathcal{A});$$

注意到，根据最大值定理（Sundaram，1996，定理9.17），$\mu \mapsto \Phi(\mu)$是非空、上半连续、紧且凸的对应——此处$\Theta = \mathcal{P}(\mathcal{A})$、$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$，并且显然 $\mu' \mapsto w(\mu', \mu)$是线性的，因此是凸且连续的。□

7.1. 第*4.1*小节中交通网络应用的材料利用（21）—（23）以及推论2-3, 并且结合 $\bar{\alpha}：=(1-\rho)/\rho$, 我们有:

$$\begin{aligned} u^s_{b,3}(\alpha;\rho) &= -2\rho 1_{\{\alpha<\bar{\alpha}\}} + (-\rho\alpha^2-\rho+\alpha-1)1_{\{\alpha\in[\bar{\alpha},2/3]\}} - 2\rho 1_{\{\alpha>2/3\}}, \\ u^s_{w,3}(\alpha;\rho) &= (-\rho\alpha^2-\rho+\alpha-1)1_{\{\alpha<\bar{\alpha}\}} - 2\rho 1_{\{\alpha\geq\bar{\alpha}\}}, \text{ and} \\ u^s_2(\alpha;\rho) &= (-1-\rho+2\rho\alpha-2\rho\alpha^2)1_{\{\alpha\leq 1/2\}} + (-1-\rho/2)1_{\{\alpha>1/2\}}. \end{aligned}$$

比较函数的显式表达式如下:

$$g_b(\alpha;\rho) = \begin{cases} 1-\rho-2\rho\alpha+2\rho\alpha^2, & \text{if } \alpha\in(0,\bar{\alpha}), \\ \rho\alpha^2-2\rho\alpha+\alpha, & \text{if } \alpha\in[\bar{\alpha},1/2], \\ -\rho\alpha^2-\rho/2+\alpha, & \text{if } \alpha\in(1/2,2/3], \\ 1-3\rho/2, & \text{if } \alpha\in(2/3,1]. \end{cases} \tag{37}$$

$$g_w(\alpha;\rho) = \begin{cases} \rho\alpha^2+\alpha-2\rho\alpha, & \text{if } \alpha\in(0,\bar{\alpha}), \\ 1-\rho-2\rho\alpha+2\rho\alpha^2, & \text{if } \alpha\in[\bar{\alpha},1/2], \\ 1-(3\rho)/2, & \text{if } \alpha\in(1/2,1]. \end{cases} \tag{38}$$