# 布朗运动及其流变学类比物的谱分析

Nicos Makris[1]
*Dept. of Civil and Environmental Engineering、 Southern Methodist University、 Dallas、 Texas, 75276*

（日期：2026年2月3日）

质量为 $m$ 、半径为 $R$ 的探针微粒浸没在线性黏弹性材料中，其布朗运动的功率谱揭示了频域中呈现的重复模式和相关结构等有价值的信息。本文采用布朗运动的黏性–黏弹性对应原理，表明：在任意线性各向同性黏弹性材料中，布朗运动的功率谱（功率谱密度）与一个线性流变网络的复动态流动度（复迁移率）的实部成正比。该线性流变网络由布朗粒子所浸没的线性黏弹性材料与一个具有质量 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$、带有分布式惯性的惯容器并联连接而成。这一流变学类比物的构造显著简化了在黏弹性材料中的布朗运动功率谱计算，例如麦克斯韦流体、杰弗里斯流体、亚扩散材料，或会产生流体动力学记忆的高密度黏性流体。

arXiv:2602.02297v1 [math-ph] 2 Feb 2026

## 引言

浸没于黏弹性材料中的探针微粒的热驱动布朗运动，是周围材料的分子对探针微粒持续随机碰撞的结果（对于直径为 $1\,\mu$m（$10^{-6}m$）的微粒，每秒碰撞次数超过 $10^{15}$ 次）。如此大量的碰撞引起布朗粒子位置和速度的随机涨落，其位置 $x$ 在任意给定时刻 $t$ 由概率密度函数 $p\,(x,t)$ 描述；这最早由Einstein[1], 在求解一维扩散方程时表明，该方程预测了浸没在无记忆牛顿黏性流体中的布朗粒子的长期（扩散状态）行为。Einstein的[1]长期解表明，位置概率密度 $p\,(x,t)$ 的方差$\sigma^2\,(t)$ 随时间线性增长， $\sigma^2\,(t) = 2Dt$，其中 $D$ 是无记忆材料中布朗过程与时间无关的扩散系数。鉴于布朗过程的分布 $p\,(x,t)$ 随时间线性扩展（$\sigma^2\,(t) = 2Dt$），无记忆牛顿黏性流体中的布朗运动并非平稳随机过程。然而，它是具有平稳增量的过程，这意味着在给定时间间隔内，布朗过程中高斯分布 $p\,(x,t)$ 与相关性的演化是相同的，而与该时间间隔从何时开始无关。作为例子，对于由 $M$ 个布朗粒子组成的系综（集合）以及两个不同时刻 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ （$\xi_1 \neq \xi_2$），系综平均速度相关函数

$$\begin{aligned}\langle v(\xi_1)v(\xi_1+t)\rangle &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} v_j(\xi_1)\,v_j(\xi_1+t)\\ &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} v_j(\xi_2)\,v_j(\xi_2+t) = \langle v(\xi_2)v(\xi_2+t)\rangle,\end{aligned} \tag{1}$$

与从时间 $\xi_1$ 还是时间$\xi_2$开始无关。

类似地，通过求解更复杂的福克–普朗克方程[2–6]，可以计算处于带耗散的谐势阱（阻尼谐振子）中的布朗粒子的位置概率密度函数$p(x,t)$。由此也可得到一个高斯位置概率密度函数，它起初随时间扩展，最终达到一种方差不随时间变化的形状， $\sigma^2_{t=large} = \left(\frac{k_B T}{6\pi R G}\right)^2$，其中 $k_B$ 为玻尔兹曼常数， $T$ 为包围半径为 $R$的布朗微球的材料的平衡温度， $G$ 为周围类固体材料的弹性剪切模量。因此，鉴于分子碰撞产生布朗运动的潜在机制（过程）是平稳的（平均而言不随时间变化），且布朗运动的结果具有式（1）所示的平稳增量，便可以对布朗运动进行谱分析，正如 Wang and Uhlenbeck 在其开创性的 1945 年论文[7]中提出的那样。

爱因斯坦于1905年发表论文[1] ，通过求解一维扩散方程，得到布朗粒子位置的高斯概率密度函数，并以此解释了布朗运动。此后不久，朗之万[8] 采用截然不同的方法[9–11]解释了布朗运动。在他1908年的论文中，朗之万将统计力学与连续介质力学结合起来，建立了布朗微球的运动方程。该微球的半径为 $R$、质量为 $m$，悬浮在剪切黏度为 $\eta$ 的牛顿黏性流体中，并受到源自流体分子与布朗微球碰撞的随机力 $f_R(t)$作用：

$$m\,\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta\,v(t) + f_R(t), \tag{2}$$

其中 $v(t) = \frac{dr_{(t)}}{dt}$ 为粒子速度， $\zeta v(t)$为与布朗粒子速度成正比的黏性阻力。对于剪切黏度为 $\eta$的无记忆黏性流体，阻力系数由斯托克斯定律 $\zeta = 6\pi R\eta$[12]给出。

除以布朗微球的质量 $m$ 后，式(2)取如下表达式

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=\frac{f_R(t)}{m}, \tag{3}$$

其中 $\tau=\frac{m}{6\pi R\eta}$是持续涨落耗散过程的耗散时间。随机激励$f_R(t)$的时间平均值为零，$\langle f_R(t)\rangle=0$，而对于仅耗散能量（无弹性）的无记忆黏性流体，力相关函数收缩为狄拉克δ函数[13]

$$\langle f_R(t_1)f_R(t_2)\rangle=A\,\delta(t_1-t_2) \tag{4}$$

其中 $t_1\neq t_2$ 和 $A$是表示随机力强度的常数。

鉴于激励力 $f_R(t)$的随机性，朗之万方程(3)可结合方程(4)[9–11] 按系综平均进行积分，悬浮于黏性流体中的微粒的均方位移最早由Ornstein[14]计算得出：

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta r^2(t)\right\rangle &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\big(r_j(t)-r_j(0)\big)^2\\ &= \frac{Nk_BT}{3\pi R}\,\frac{1}{\eta}\Big[t-\tau\big(1-e^{-t/\tau}\big)\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $N\in\{1,2,3\}$ 是空间维度数，而 $r_j(t)$和 $r_j(0)$分别是粒子 $j$ 在时刻 $t$ 和在时间原点 $t=0$的位置。

均方位移的拉普拉斯变换，$\mathcal{L}\{\langle\Delta r^2(t)\rangle\}=\langle\Delta r^2(s)\rangle=\int_0^\infty\langle\Delta r^2(t)\rangle e^{-st}\,dt$，与速度自相关函数的拉普拉斯变换 $\mathcal{L}\{\langle v\ 0\ v\ t\ \rangle\}=\underset{10,11,15}{\langle v\ 0\ v\ s\ \rangle}=(\,)(\,)\int_0^\infty\langle v\ 0\ v\ t\ \rangle e^{-st}\,dt$ (,)(,)(,)(,)，通过以下恒等式相关联

$$\langle v(0)v(s)\rangle=\frac{s^2}{2}\,\langle\Delta r^2(s)\rangle \tag{6}$$

同时，根据函数导数的拉普拉斯变换性质，

$$s^2\langle\Delta r^2(s)\rangle=\mathcal{L}\left\{\frac{d^2\langle\Delta r^2(t)\rangle}{dt^2}\right\}+s\,\langle\Delta r^2(0)\rangle+\frac{d\langle\Delta r^2(0)\rangle}{dt}. \tag{7}$$

由式（5）可知，在时间起点 $t=0$，$\langle\Delta r^2(0)\rangle=0$。此外，式（5）左侧的时间导数适用于悬浮在任意材料中的微粒布朗运动，给出

$$\frac{d\langle\Delta r^2(t)\rangle}{dt}=\frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M}\big(r_j(t)-r_j(0)\big)\frac{dr_j(t)}{dt}. \tag{8}$$

因此，在 $t=0$处，由方程$d\langle\Delta r^2(t)\rangle/dt=0$(8)，并将式（7）代入式中可得(6)

$$\mathcal{L}\{\langle v(0)v(t)\rangle\}=\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2\langle\Delta r^2(t)\rangle}{dt^2}\right\}. \tag{9}$$

式（9）的拉普拉斯逆变换得出

$$\langle v(0)v(t)\rangle=\frac{1}{2}\,\frac{d^2\langle\Delta r^2(t)\rangle}{dt^2}, \tag{10}$$

这表明，速度自相关函数是均方位移[16,17]的二阶时间导数的一半。方程（5）右侧的时间导数为

$$\frac{d\langle\Delta r^2(t)\rangle}{dt}=\frac{N\,k_BT}{3\pi R}\,\frac{1}{\eta}\big(1-e^{-t/\tau}\big), \tag{11}$$

这表明，在 $t=0$时，$d\langle\Delta r^2(t\ \rangle/dt=0$)，这与方程（8）的结果一致。方程（10）结合方程（11）的结果，给出了质量为 $m$ 的布朗粒子悬浮于黏度为 $\eta$、无记忆的牛顿流体中时的速度自相关函数：

$$\langle v(0)v(t)\rangle=\frac{1}{2}\,\frac{d^2\langle\Delta r^2(t)\rangle}{dt^2}=\frac{Nk_BT}{m}\,e^{-t/\tau}. \tag{12}$$

这是[7,18] 在对随机布朗过程进行系综平均后推导出的经典结果。方程（12）虽适用于所有时间尺度，却未考虑流体动力学记忆；当受到激发的布朗粒子在其近旁推动致密流体时，便会显现这种记忆[19–25]。

读者会发现，方程（12）给出的速度自相关函数中的指数项，正是对适用于所有时间尺度的方程（5）所给出的均方位移取二阶时间导数后剩下的部分。因此，考虑短时间尺度下的“弹道区间”后，Ornstein 1917[14] 给出的方程（5）中的均方位移表达式，与方程（10）所示的恒等式一致；这表明，悬浮在无记忆牛顿流体中的布朗粒子，其速度之所以相关，仅仅是因为弹道区间的存在。相比之下，Einstein 1905 年给出的均方位移“长期”表达式，$\langle r^2(t)\rangle=2NDt$，（扩散区间）得出的速度自相关函数始终为零。

**功率谱与相关性**

类似于公式 (1) 给出的速度自相关函数，对于公式 (12) 所描述的布朗粒子浸没在无记忆黏性流体中的特定情况，时域过程（信号）的功率谱揭示了该过程在频域中的重复模式和相关结构。信号的功率谱（功率谱密度）是其傅里叶变换的模平方[7,26,27]，，因此是频域中的实值函数，并且是

信号的双边自相关函数（偶函数）的傅里叶变换。

由式 (12) 给出的系综平均速度自相关函数是一个从 $t = 0$开始的单边时域函数，因此其傅里叶变换是一个复值量：

$$\begin{aligned}\mathrm{VAC}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle v(0)v(t)\rangle e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{Nk_BT}{m}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-t/\tau}e^{-i\omega t}\,dt = \frac{Nk_BT}{6\pi R\eta}\frac{\tau}{1+i\omega\tau}\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\tau = \dfrac{m}{6\pi R\eta}$ 是涨落–耗散过程的耗散时间。然而，鉴于布朗运动过程具有平稳增量，系综平均速度相关性 $\langle v(\xi)v(\xi+t)\rangle$ 在从时刻 $\xi > 0$开始的时间区间内，应与系综平均速度相关性$\langle v(\xi)\,v(\xi-t)\rangle$ 在时刻 $\xi$的时间区间开始之前所发生的情况相同。因此，由式 (12) 给出的单边速度自相关函数可以表示为双边偶函数：

$$\langle v(0)v|t|\rangle = \frac{N\,k_BT}{m}\,e^{-|t|/\tau}. \tag{14}$$

由式 (14) 给出的双边偶（对称）自相关函数的傅里叶变换为[28]

$$\begin{aligned}S(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle v(0)v(|t|)\rangle e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{N\,k_BT}{m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|/\tau}e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{N\,k_BT}{3\pi R\eta}\,\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}.\end{aligned} \tag{15}$$

由式（15）给出的实值函数 $S(\omega)$，是剪切黏度为 $\eta$ 的无记忆黏性流体中布朗运动的功率谱密度（PSD）或功率谱。图1用粗深色线绘出了式（15）给出的归一化功率谱密度随无量纲频率$\omega\tau = \omega\dfrac{m}{6\pi R\eta}$变化的曲线。

---

更一般地，如果 $\phi(\omega) = \Re_e\{\phi(\omega)\} + i\mathrm{Im}\{\phi(\omega)\}$ 是单边时域响应函数$\psi(t)$的傅里叶变换，那么双边偶函数$\psi(|t|)$的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}S(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(|t|)\,e^{-i\omega t}\,dt \\ &= 2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\psi(t)\cos(\omega t)\,dt = 2\,\Re_e\{\phi(\omega)\}.\end{aligned} \tag{16}$$

例如，由方程（13）给出的 $VAC(\omega)$的实部为

$$\Re_e\{VAC(\omega)\} = \frac{N\,k_BT}{6\pi k\eta}\,\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}. \tag{17}$$

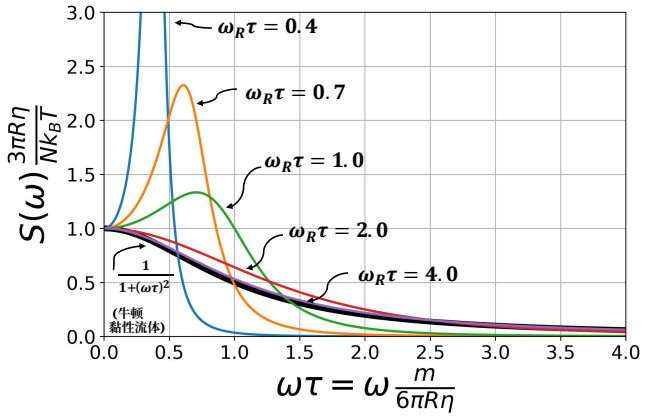


图1. 麦克斯韦流体中布朗运动的归一化功率谱，该流体具有单一弛豫时间 $\eta/G$；图中展示了不同无量纲参数 $\omega_R\tau = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{Gm}{6\pi R}}$ 下，功率谱随无量纲频率 $\omega\tau = \omega\frac{m}{6\pi R\eta}$变化的情况。随着串联弹簧的刚度增大（ $G$ 或$\omega_R\tau$增大），功率谱趋于无记忆黏性流体中布朗运动的功率谱（$\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}$）。

---

therefore, $2\,\mathrm{Re}\{VAC(\omega)\} = S(\omega)$, as given by equation (15).

**黏性–黏弹性对应原理**

当布朗粒子浸没在线性黏弹性材料中时，粒子的运动由广义朗之万方程描述[29,30]

$$m\,\frac{dv(t)}{dt} + \int_0^t \zeta(t-\xi)\,v(\xi)\,d\xi = f_R(t), \tag{18}$$

其中，$m$ 是布朗粒子的质量，$v(t)$是其速度，$f_R(t)$是作用于随机运动粒子的随机力。式（18）中的卷积积分表示粒子在黏弹性流体中随机运动时所受的阻力，并考虑了由于流体弹性而导致的阻力衰减记忆。流体的弹性成分会影响作用于布朗粒子的随机力的时间相关性；因此，在这种情况下，式（4）被替换为

$$\big\langle f_R(t)\,f_R(0)\big\rangle = k_BT\,\zeta(t-0), \tag{19}$$

其中，$\zeta(t-0)$是广义朗之万方程（18）中卷积项的弛豫核。

Mason和Weitz[31] 通过假设斯托克斯结果可推广至频域，计算了悬浮布朗粒子的均方位移；该结果描述的是无记忆黏性流体中运动球体所受的阻力系数

在无记忆黏性流体 $\zeta = 6\pi R\eta$[12] 中，可将其推广为黏弹性材料的复动态粘度 $\eta_{ve}(\omega) = \mathcal{G}_{ve}(\omega)/i\omega$ 与布朗粒子–粘弹性材料网络阻抗之间的关系，$\mathcal{Z}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$，

$$\eta_{ve}(\omega) = \frac{\mathcal{G}_{ve}(\omega)}{i\omega} = \frac{\mathcal{Z}(\omega)}{6\pi R}, \tag{20}$$

采用方程（20），Mason和Weitz[31] 将探测布朗粒子的均方位移 $\langle\Delta r^2(t)\rangle$与粒子悬浮其中的黏弹性材料的复动态模量$\mathcal{G}_{ve}(\omega)$联系起来。

$$\begin{aligned}\langle\Delta r^2(\omega)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int\langle\Delta r^2(t)\rangle e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{Nk_BT}{3\pi R}\frac{1}{i\omega\left[\mathcal{G}_{ve}(\omega) - \frac{m}{6\pi R}\omega^2\right]},\end{aligned} \tag{21}$$

方程（18）分母中括号内的量 $\mathcal{G}_{ve}(\omega) - \frac{m}{6\pi R}\omega^2 = \mathcal{G}_{(\omega)}$，是一个流变网络的复动态模量；该网络由布朗粒子浸没其中的黏弹性材料与惯容为 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$[32]的惯容器并联连接而成。

惯容器是一种线性机械元件，在力–位移层面上，其输出力仅与其端节点（端子）[33–35] 的相对加速度成正比，并与另外两种基本力学元件——弹性弹簧和粘性阻尼器——共同构成三种基本元件。在力-电流、速度-电压类比中，惯容器是电容器的机械类比，其比例常数为惯容，单位为质量 [M]。例如，驱动陀螺（具有陡导程角）在物理上就是一种惯容器，因为其驱动力仅与其端子的相对加速度成正比。在应力-应变层面上，惯容器的比例常数为分布惯容$m_R$，单位为 $[M][L]^{-1}$ （即 Pa·s$^2$）。

复动态模量的倒数是复动态柔量，$\mathcal{J}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{G}(\omega)}$[36–40] 而，$\mathcal{J}(\omega)/i\omega = \mathcal{C}(\omega)$是复蠕变函数——即黏弹性网络的蠕变柔量的傅里叶变换，$\mathcal{C}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}J(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$[41,42]。鉴于上述线性粘弹性理论中的关系，对式（21）进行逆傅里叶变换可得[32]

$$\begin{aligned}\langle\Delta r^2(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\langle\Delta r^2(\omega)\rangle\, e^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{Nk_BT}{3\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{C}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{Nk_BT}{3\pi R}\, J(t),\end{aligned} \tag{22}$$

方程（22）表述了布朗运动的黏性–黏弹性对应原理，即在温度为 T 的热平衡状态下，悬浮于线性、各向同性黏弹性材料（流体或固体）中的一组质量为 $m$、半径为 $R$ 的布朗微球，其均方位移 $\langle\Delta r^2(t)\rangle$ 与 $\frac{Nk_BT}{3\pi R}\gamma(t)$ 完全相同；其中，$\gamma(t) = J(t)$ 是流变网络在单位阶跃应力作用下产生的应变，该网络由线性黏弹性材料（布朗微球悬浮其中）与具有分布惯容 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$[32] 的惯容器并联连接而成。无论布朗粒子与其浸没或嵌入其中的材料交换作用力的机制为何（黏性、惯性、流体动力学记忆或黏弹性），方程（22）均具有普遍适用性[25,32]。

在式（6）中用$i\omega$ ($s = i\omega$)替换拉普拉斯变量 $s$，并代入由式（21）给出的$\langle\Delta r^2(\omega)\rangle$的表达式，可得

$$\begin{aligned}VAC(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle v(0)\, v(t)\rangle e^{-i\omega\tau}\, d\tau = -\frac{\omega^2}{2}\langle\Delta r^2(\omega)\rangle \\ &= \frac{Nk_BT}{6\pi R}\frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)} = \frac{Nk_BT}{6\pi R}\,\varphi(\omega),\end{aligned} \tag{23}$$

量$\mathcal{G}^{i\omega}(\omega) = \varphi(\omega) = \dot{\gamma}(\omega)/\tau(\omega)$ 在流变学中称为复动态流动度[39,40]，它描述应变速率输出与应力输入之间的关系。在结构力学中，$\varphi(\omega) = i\omega/\mathcal{G}(\omega)$的对应量是迁移率（阻抗的倒数）；在电气工程中，它称为导纳。

参照式 (13) 后续给出的推理，并结合式 (23) 的结果，温度为 $T$、处于热平衡状态的任意线性各向同性黏弹性材料中的布朗运动，其实值功率谱（功率谱密度）为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\omega) = 2\,\Re_e\{\mathrm{VAC}(\omega)\} &= \frac{Nk_BT}{3\pi R}\,\Re_e\left\{\frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)}\right\} \\ &= \frac{Nk_BT}{3\pi R}\,\Re_e\{\varphi(\omega)\}\,,\end{aligned} \tag{24}$$

其中，$\varphi(\omega) = \frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)}$ 是一个流变网络的复动态流动度，该网络由布朗微粒所浸没的线性黏弹性材料与一个分布惯容为 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$ 的惯容器并联连接而成。

例如，对于浸没在剪切黏度为 $\eta$ 的无记忆黏性流体中的布朗粒子，相应的流变网络如图 2[32,34]，所示，是互黏流体，由黏度为 $\eta$ （即溶剂的黏度）的阻尼器与分布惯容为 $m_R$ 的惯容器并联连接而成。

给定图2所示阻尼器与惯性器的并联连接，互黏性流体的本构定律为

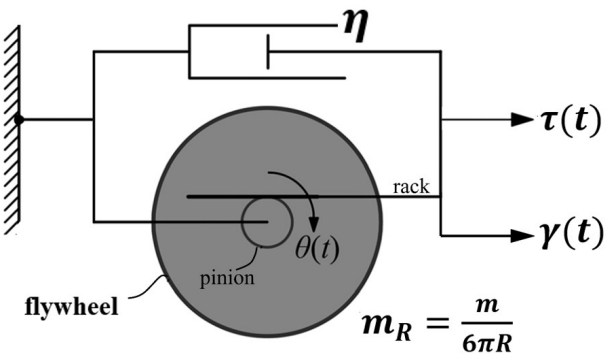


图 2. 惯性黏性流体，由分布惯容为 $m_R$、单位为 $[M][L]^{-1}$ 的惯容器与黏度为 $\eta$、单位为 $[M][L]^{-1}[T]^{-1}$ 的阻尼器并联连接而成。类比于传统的液压活塞式阻尼器示意图，分布式惯容器以齿条–齿轮–飞轮系统示意。

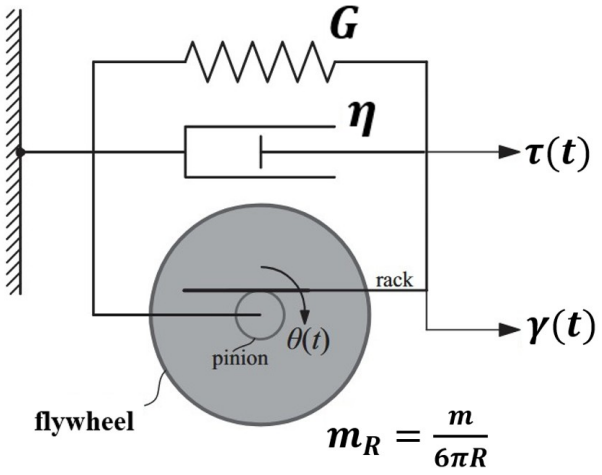


图3. 惯性黏弹性固体，由弹性剪切模量为 $G$的线性弹簧、剪切黏度为 $\eta$的阻尼器以及分布惯量为 $m_R$的惯容器并联组成。

$$\tau(t) = \eta \frac{d\gamma(t)}{dt} + m_R \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}, \tag{25}$$

式(25)的傅里叶变换给出

$$\tau(\omega) = \mathcal{G}(\omega)\,\gamma(\omega) = \left(i\omega\eta - \omega^2 m_R\right)\gamma(\omega), \tag{26}$$

其中，$\mathcal{G}(\omega) = i\omega\eta - \omega^2 m_R$是互黏流体的复动态模量。由式 (26) 可得，

$$\varphi(\omega) = \frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)} = \frac{i\omega}{i\omega\eta - \omega^2 m_R} = \frac{1}{\eta + i\omega m_R} = \frac{1}{\eta}\frac{1}{1 + i\omega\tau}. \tag{27}$$

因为 $\frac{m_R}{\eta} = \frac{m}{6\pi R\eta} = \tau$——也就是说，它是布朗过程的耗散时间。

将式 (27) 的结果代入式 (24) 给出的功率谱表达式，可得无记忆黏性流体中黏度为 $\eta$ 时布朗运动的功率谱

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{Nk_BT}{3\pi R}\,\mathrm{Re}\{\varphi(\omega)\} = \frac{Nk_BT}{3\pi R\eta}\,\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \tag{28}$$

这是式（15）给出的结果，并以粗深色线绘制在图1中。

**谐振陷阱中布朗运动的功率谱**

嵌入黏弹性开尔文固体中的微粒在随机力 $f_R(t)$激励下的布朗运动，已由Uhlenbeck及其合作者[7,18]加以研究。微球的运动方程

质量为 $m$、半径为 $R$、处于具有黏性阻尼的谐振陷阱中并受到随机激励力$f_R(t)$作用时为

$$m\frac{d^2r(t)}{dt^2} + \zeta\frac{dr(t)}{dt} + k\,r(t) = f_R(t), \tag{29}$$

其中，$r(t)$为粒子位移，$\zeta\frac{dr(t)}{dt}$为黏性阻力，$k\,r(t)$为与布朗运动粒子 $r(t)$ 的位移成正比的线性回复力。将式（29）除以粒子质量 $m$，可得

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dr(t)}{dt} + \omega_0^2\,r(t) = \frac{f_R(t)}{m}, \tag{30}$$

其中，$\tau = \frac{m}{\zeta} = \frac{m}{6\pi R\eta}$仍为耗散时间，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$为被捕获粒子的无阻尼固有角频率。当 $\omega_0\tau > \frac{1}{2}$ 时，式（30）描述的系统为欠阻尼；当 $\omega_0\tau = \frac{1}{2}$ 时，系统为临界阻尼；当 $\omega_0\tau < \frac{1}{2}$ 时，系统为过阻尼[18]。

利用式 (22) 在时域中或式 (23) 在频域中表述的黏性–黏弹性对应原理，我们希望计算图3所示惯性黏弹性固体的复动态流动度 $\varphi(\omega) = \frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)}$。该固体由弹簧（弹性剪切模量$G$）、阻尼器（剪切黏度 $\eta$）和惯容器（分布惯容 $m_R$[32]）并联连接而成。

给定图3所示三个基本流变理想化模型的并联连接，惯性黏弹性固体的本构定律为

$$\tau(t) = G\,\gamma(t) + \eta\frac{d\gamma(t)}{dt} + m_R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}, \tag{31}$$

式(31)的傅里叶变换给出

$$\tau(\omega) = \mathcal{G}(\omega)\,\gamma(\omega) = \big(G + i\omega\eta - \omega^2 m_R\big)\gamma(\omega). \qquad (32)$$

其中，$\mathcal{G}(\omega) = G + i\omega\eta - \omega^2 m_R$ 是图3所示惯性黏弹性固体的复动态模量。因此，该惯性黏弹性固体的复动态流动度为

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) = \frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)} &= \frac{i\omega}{G + i\omega\eta - \omega^2 m_R} \\ &= \frac{1}{m_R}\cdot\frac{\omega^2/\tau + i\omega(\omega_R^2 - \omega^2)}{(\omega_R^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}.\end{aligned} \qquad (33)$$

其中，$\omega_R = \sqrt{\frac{G}{m_R}} = \sqrt{\frac{6\pi R G}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ 是无阻尼角频率，$m_R = \frac{m}{6\pi R}$ 和 $\tau = \frac{m}{6\pi R\eta} = \frac{m_R}{\eta}$ 是布朗过程的耗散时间。

将方程（33）给出的复动态流动度 $\varphi(\omega)$ 的表达式代入方程（24）给出的功率谱密度通式，可得：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\omega) &= \frac{Nk_BT}{3\pi R}\Re_e\{\varphi(\omega)\} \\ &= \frac{Nk_BT}{3\pi R\eta}\frac{(\omega\tau)^2}{[(\omega_R\tau)^2 - (\omega\tau)^2]^2 + (\omega\tau)^2}.\end{aligned} \qquad (34)$$

图4绘出了粒子在谐势阱中发生布朗运动时，由方程（34）给出的归一化功率谱（PSD）随无量纲频率 $\omega\tau = \omega\frac{m}{6\pi R\eta}$ 的变化关系，其中无量纲网络参数 $\omega_R\tau = \sqrt{\frac{m}{6\pi R G}}\,\tau = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{Gm}{6\pi R}}$ 取不同值。

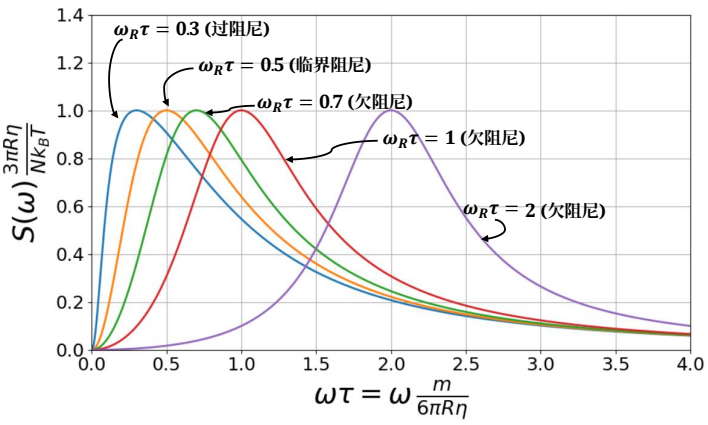


图 4. 粒子悬浮在开尔文固体（谐振陷阱）中时的布朗运动归一化功率谱，展示了不同无量纲参数 $\omega_R\tau = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{Gm}{6\pi R}}$ 下谱值随无量纲频率 $\omega\tau = \omega\frac{m}{6\pi R\eta}$ 的变化。

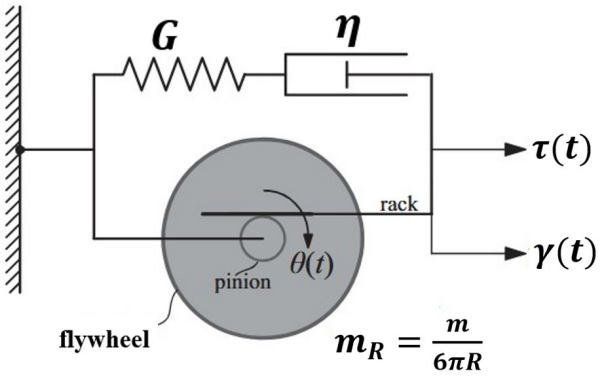


图 5. 麦克斯韦流体中布朗运动的流变学类比。它由剪切模量为 $G$、剪切黏度为 $\eta$ 的麦克斯韦元件构成，该元件与分布惯容为 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$ 的惯容器并联连接。

**麦克斯韦流体中的布朗运动功率谱**

当粒子浸没在具有单一弛豫时间 $\frac{\eta}{G}$ 的麦克斯韦流体中，并受到黏弹性流体分子碰撞产生的随机力 $f_R(t)$ 作用时，其布朗运动由朗之万方程 (18) 描述，其中弛豫核 $\zeta(t-\xi)$ 为[29,30]

$$\zeta(t-\xi) = 6\pi R\,G_{ve}(t-\xi) = 6\pi R\,G\,e^{-\frac{G}{\eta}(t-\xi)}. \qquad (35)$$

这里，$G_{ve}(t-\xi) = Ge^{-\frac{G}{\eta}(t-\xi)}$ 是麦克斯韦流体在单位幅值阶跃应变 $U(t-0)$ 作用下产生的应力松弛模量[36–40]。方程（18）结合式（35），可得布朗粒子速度自相关函数的时间演化[43]，进而原则上可以通过积分变换计算功率谱 $S(\omega)$。

本节利用方程（24）计算麦克斯韦流体中布朗运动的功率谱。该方程由频域中的黏性–黏弹性对应原理（如方程（21）所示）推导而来。因此，问题归结为计算麦克斯韦流体的复动态流动度，$\varphi(\omega) = \frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)}$。该流体的剪切模量为 $G$，剪切黏度为 $\eta$，并与具有分布惯容 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$ 的惯容器并联连接，如图 5 所示。

图 5 所示流变网络的总应力输出 $\tau(t) = \tau_1(t) + \tau_2(t)$ 是以下各项之和：

麦克斯韦元件的应力输出 $\tau_1(t)$

$$\tau_1(t)+\frac{\eta}{G}\frac{d\tau_1(t)}{dt}=\eta\frac{d\gamma(t)}{dt}, \tag{36}$$

以及来自惯容器 $\tau_2(t)$ 的应力输出

$$\tau_2(t)=m_R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}. \tag{37}$$

将方程（36）和（37）相加，并加上方程（37）的时间导数，可得图5所示流变网络的三阶本构方程。

$$\tau(t)+\frac{\eta}{G}\frac{d\tau(t)}{dt}=\eta\frac{d\gamma(t)}{dt}+m_R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\frac{\eta m_R}{G}\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}, \tag{38}$$

与前一种情况一样，定义耗散时间 $\tau=\frac{m_R}{\eta}=\frac{m}{6\pi R\eta}$ 和旋转角频率 $\omega_R=\sqrt{\frac{G}{m_R}}=\sqrt{\frac{6\pi RG}{m}}$ 后，方程（38）可写为

$$\tau(t)+\frac{1}{\tau\omega_R^2}\frac{d\tau(t)}{dt}=m_R\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\gamma(t)}{dt}+\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\frac{1}{\tau\omega_R^2}\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}\right). \tag{39}$$

对方程（39）进行傅里叶变换，得到 $\tau(\omega)=\mathcal{G}(\omega)\gamma(\omega)$，其中 $\mathcal{G}(\omega)$ 是图5所示流变网络的复动态模量：

$$\mathcal{G}(\omega)=\frac{\tau(\omega)}{\gamma(\omega)}=m_R\frac{i\omega\left(\frac{1}{\tau}+i\omega-\frac{1}{\tau\omega_R^2}\omega^2\right)}{1+i\omega\frac{1}{\tau\omega_R^2}} \tag{40}$$

因此，方程（39）所描述的流变模型的复动态流动度为

$$\begin{aligned}\varphi(\omega)&=\frac{i\omega}{\mathcal{G}(\omega)}=\frac{1}{m_R}\frac{1+i\omega\dfrac{1}{\tau\omega_R^2}}{\dfrac{1}{\tau}+i\omega-\dfrac{1}{\tau\omega_R^2}\omega^2}\\&=\frac{1}{m_R}\frac{\tau\omega_R^4+i\omega(\omega_R^2-\omega^2)}{(\omega_R^2-\omega^2)^2+(\omega\tau)^2\omega_R^4}\end{aligned} \tag{41}$$

将方程（41）给出的复动态流动度 $\varphi(\omega)$ 表达式的实部代入方程（24）给出的功率谱密度的一般表达式，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\omega)&=\frac{Nk_BT}{3\pi R}\Re_e\{\varphi(\omega)\}\\&=\frac{Nk_BT}{3\pi R\eta}\frac{(\omega_R\tau)^4}{\left[(\omega_R\tau)^2-(\omega\tau)^2)\right]^2+(\omega\tau)^2(\omega_R\tau)^4}\end{aligned} \tag{42}$$

图1绘出了粒子浸没在麦克斯韦流体中时布朗运动的归一化功率谱（功率谱密度），其表达式由式（42）给出，并将其表示为无量纲频率 $\omega\tau=\omega\frac{m}{6\pi R\eta}$ 的函数，适用于不同的无量纲网络参数 $\omega_R\tau=\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{Gm}{6\pi R}}$。随着 $\omega_R\tau$ 增大（$G$ 较大或 $\eta$ 较小），功率谱趋近于无记忆黏性流体中布朗运动的功率谱，该曲线以粗深色线绘出。

**杰弗里斯流体中的布朗运动功率谱。**

当麦克斯韦元件（弹簧 $G$ 和阻尼器 $\eta$ 串联连接）与一个黏度为 $\eta_\infty$ 的阻尼器并联时，便形成一种称为杰弗里斯流体的流变网络。杰弗里斯曾提出用它来模拟地层的黏弹性行为[44]。杰弗里斯流体已被流变学家广泛应用于多种研究，包括黏弹性流体中对流的起始过程[45]，、描述某些软物质材料（如蠕虫状胶束溶液和浓分散液）的线性响应[46,47]，，以及理解蠕动输运[48]。在极低频率下，通常会出现缓慢松弛，这源于黏弹性材料中胶体结构的重组，其弛豫时间为 $\frac{\eta}{G}$。在高频下，由于弹簧 $G$ 具有柔顺性，剪切应力主要由并联的阻尼器承受，其黏度为 $\eta_\infty$，因此响应以黏性为主。因此，杰弗里斯流体的松弛模量 $G_{\mathrm{ve}}(t)$ 为[37,40,49]

$$G_{\mathrm{ve}}(t)=\eta_\infty\,\delta(t-0)+G\,e^{-\frac{G}{\eta}t}. \tag{43}$$

通过采用时域方程（22）或频域方程（23）所表达的黏性–黏弹性对应原理，可以通过计算图 6 所示流变网络的时频响应函数，分析浸没于杰弗里斯流体中的布朗运动粒子。图 6 所示流变网络的总应力 $\tau(t)=\tau_1(t)+\tau_2(t)+\tau_3(t)$ 是图 6 顶部所示麦克斯韦元件的应力输出、

$$\tau_1(t)+\frac{\eta}{G}\frac{d\tau_1(t)}{dt}=\eta\frac{d\gamma(t)}{dt}. \tag{44}$$

黏度为 $\eta_\infty$ 的阻尼器的应力输出，

$$\tau_2(t)=\eta_\infty\frac{d\gamma(t)}{dt}. \tag{45}$$

以及图 6 底部所示惯容器的应力输出之和

$$\tau_3(t)=m_R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}. \tag{46}$$

将方程（44）–（46）相加，再加上方程（45）和（46）的时间导数，可得

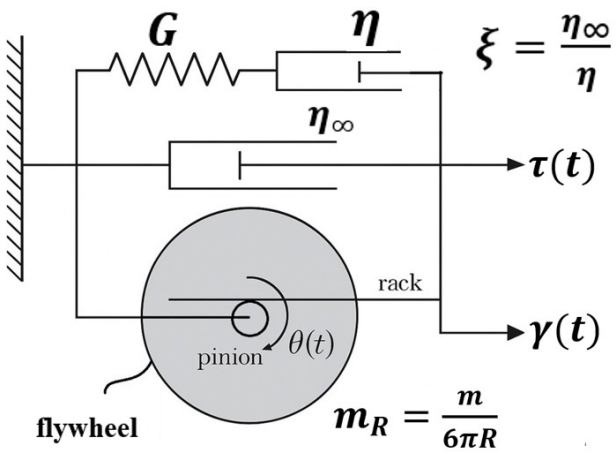


图 6. 微球在杰弗里斯流体中的布朗运动的流变学类比：质量为 $m$ 、半径为 $R$ 的微球，其流变网络由麦克斯韦元件与阻尼器并联构成。

图 6[49] 所示流变网络的三阶本构方程：

$$\tau(t)+\frac{\eta}{G}\frac{d\tau(t)}{dt}=m_R\left[\frac{\eta}{m_R}\left(1+\frac{\eta_\infty}{\eta}\right)\frac{d\gamma(t)}{dt}+\left(1+\frac{\eta.\eta_\infty}{m_RG}\right)\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\frac{\eta}{G}\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}\right] \tag{47}$$

By defining the dissipation time $\tau=\frac{m_R}{\eta}=\frac{m}{6\pi R\eta}$, the rotational angular frequency $\omega_R=\sqrt{\frac{G}{m_R}}=\sqrt{\frac{6\pi RG}{m}}$, and the dimensionless viscosity ratio $\xi=\frac{\eta_\infty}{\eta}$, equation (47) can be rewritten as

$$\tau(t)+\frac{1}{\tau\omega_R^2}\frac{d\tau(t)}{dt}=m_R\left[\frac{1}{\tau}(1+\xi)\frac{d\gamma(t)}{dt}+\left(1+\frac{\xi}{(\omega_R\tau)^2}\right)\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\frac{1}{\tau\omega_R^2}\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}\right]. \tag{48}$$

式（48）与式（39）形式相同；不过，此时剪切应变的一阶和二阶时间导数项的系数中包含黏度比 $\xi=\eta_\infty/\eta$，该比值决定了并联阻尼器的作用，而其黏度 $\eta_\infty$ 在高频下占主导地位。

对式（48）进行傅里叶变换，得到 $\tau(\omega)=G(\omega)\gamma(\omega)$，其中 $G(\omega)$ 是图 6 所示流变网络的复动态模量。

$$G(\omega)=\frac{\tau(\omega)}{\gamma(\omega)}=m_R\,i\omega\,\frac{\frac{1+\xi}{\tau}+i\omega\left(1+\frac{\xi}{(\omega_R\tau)^2}\right)-\frac{\omega^2}{\tau\omega_R^2}}{1+\frac{i\omega}{\tau\omega_R^2}}. \tag{49}$$

因此，复动态流动度为

$$\varphi(\omega)=\frac{i\omega}{G(\omega)}=\frac{1}{m_R}\frac{\tau\omega_R^2+i\omega}{(1+\xi)\,\omega_R^2-\omega^2+i\omega\left(1+\frac{\xi}{(\omega_R\tau)^2}\right)\tau\omega_R^2}. \tag{50}$$

将式（50）给出的复动态流动度 $\varphi(\omega)$ 表达式的实部代入式（24）给出的一般功率谱密度表达式，可得

$$S(\omega)=\frac{Nk_BT}{3\pi R}\Re_e\{\varphi(\omega)\}=\frac{Nk_BT}{3\pi R\eta}\frac{(\omega_R\tau)^2\left[(1+\xi)(\omega_R\tau)^2+\frac{\xi}{(\omega_R\tau)^2}(\omega\tau)^2\right]}{\left[(1+\xi)(\omega_R\tau)^2-(\omega\tau)^2\right]^2+\left[\omega\tau\left(1+\frac{\xi}{(\omega_R\tau)^2}\right)(\omega_R\tau)^2\right]^2} \tag{51}$$

图7绘出了由公式（51）给出的、浸没在杰弗里斯流体中的粒子的布朗运动归一化功率谱（功率谱密度）随无量纲频率 $\omega\tau=\omega\sqrt{\frac{m}{6\pi R\eta}}$ 变化的曲线，其中流变网络的无量纲参数 $\omega_R\tau=\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{Gm}{6\pi R}}$ 和 $\xi=\frac{\eta_\infty}{\eta}$ 取不同值。当 $\xi=0$ 时，我们可得到图1所示的浸没在麦克斯韦流体中的粒子布朗运动功率谱。

**亚扩散材料中的布朗运动功率谱**

一些复杂材料会表现出亚扩散行为：从早期时刻开始，在跨越数个时间数量级的范围内，均方位移随时间按照幂律 $\langle\Delta r^2(t)\rangle\sim t^\alpha$ 增长，其中 $0\le\alpha\le1$ 为扩散指数[50,51]。

这种幂律流变行为最早由 Nutting 报道[52]，，他注意到，几种类流体材料在受到阶跃应变后，其应力响应会

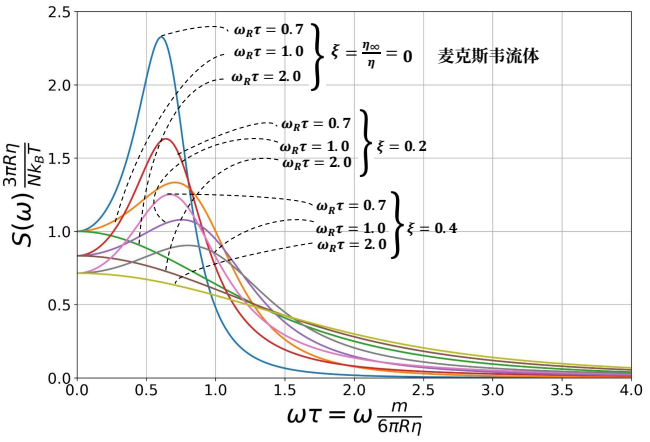


图 7. 杰弗里斯流体中布朗运动的归一化功率谱，展示了不同无量纲参数 $\omega_R\tau = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{Gm}{6\pi R}}$ 和 $\xi = \frac{\eta_\infty}{\eta}$ 取值下，功率谱随无量纲频率 $\omega\tau = \omega m/(6\pi R\eta)$的变化

遵循幂律衰减 $\tau(t) = G_{\mathrm{ve}}(t) \sim t^{-\alpha}$，其中$0 \le \alpha \le 1$. 继 Nutting 的观察之后，Gemant[53,54] 早期关于分数阶微分的研究，以及 Scott Blair[55,56] 率先将分数阶微积分引入黏弹性领域。类比于胡克弹簧（其应力与应变的零阶导数成正比）和牛顿黏壶（其应力与应变的一阶导数成正比），Scott Blair 及其同事[55–57] 提出了弹簧幂律元件。这是一种介于弹簧和阻尼器之间的机械元件，其本构定律为

$$\tau(t) = \mu_\alpha \frac{d^\alpha \gamma(t)}{dt^\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1, \tag{52}$$

其中，$\alpha$ 是一个正实数（$0 \le \alpha \le 1$），$\mu_\alpha$是一个具有$[M][L]^{-1}[T]^{\alpha-2}$单位的唯象材料参数（即 Pa·s$^\alpha$），而 $d^\alpha\gamma(t)\,dt^\alpha$是应变历史 $\gamma(t)$的 ~~$\alpha$ 阶分~~数阶导数。

阶数为 $\alpha$ 的分数阶导数定义为卷积积分

$$I^\alpha \gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\xi)^{\alpha-1}\, \gamma(\xi)\, d\xi. \tag{53}$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 是伽马函数。当下限为 $c = 0$ 时，式 (53) 给出的积分通常称为黎曼–刘维尔分数阶积分[58–61]。式 (53) 中的积分仅在 $\alpha > 0$ 时收敛；若 $\alpha$ 是复数，则积分在$\Re_e(\alpha) > 0$ 时收敛。不过，通过对 $\Re_e(\alpha) = 0$ 这条直线进行适当的解析延拓，并且在函数 $\gamma(t)$ 可微 $n$ 次的条件下，可以证明式 (58) 给出的积分在 $n - \Re_e(\alpha) > 0$[62]时存在。

在这种情况下，$\alpha \in \mathbb{R}^+$阶分数阶导数存在，其定义为

$$\frac{d^\alpha \gamma(t)}{dt^\alpha} = I^{-\alpha}\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{0^-}^t \frac{\gamma(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1}}\, d\xi, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+, \tag{54}$$

其中，$\mathbb{R}^+$ 是正实数集合，而积分下限 $0^-$ 处可以存在一个在原点具有奇异性的函数，例如 $\gamma(t) = \delta(t-0)$ [13]。方程（54）表明，$\alpha$ 阶的 $\gamma(t)$的分数阶导数，本质上是 $\gamma(t)$与核函数 $\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma\ -\alpha}$ ()[58,60,63]的卷积。方程（54）给出的黎曼–刘维尔~~分~~数阶导数定义（积分下限为零）与流变学相关，因为应变和应力历史$\gamma(t)$与 $\tau(t)$都是因果函数，在负时间处为零。

由方程（52）表示的弹簧壶元件（斯科特-布莱尔流体）的松弛模量（由单位幅值阶跃应变 $\gamma(t) = U(t-0)$引起的应力历史）为[64–67]

$$G_{ve}(t) = \mu_\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, t^{-\alpha}, \qquad t > 0, \tag{55}$$

其衰减遵循 Nutting[52]最初观测到的幂律。弹簧幂律元件的蠕变柔量（迟滞函数）为[63–70]

$$J_{ve}(t) = \frac{1}{\mu_\alpha} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\, t^{\alpha}, \qquad t \ge 0. \tag{56}$$

式 (56) 中出现的幂律 $t^\alpha$ 使式 (52) 所表示的基本弹簧幂律元件（斯科特-布莱尔流体）成为研究亚扩散材料中布朗运动的合适现象学模型。

利用时域中由方程 (22) 表示的黏性–黏弹性对应原理，可以通过计算图 8 所示流变网络的频率响应函数和时域响应函数，分析浸没在亚扩散材料中的粒子的布朗运动。该网络由方程 (52) 所述的弹簧幂律元件与惯容为 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$ 的分布惯容惯容器并联组成。

鉴于弹簧幂律元件与惯容器并联连接，图 8 所示流变网络的本构定律为

$$\tau(t) = \mu_\alpha \frac{d^\alpha \gamma(t)}{dt^\alpha} + m_R \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}, \tag{57}$$

对方程 (57) 进行傅里叶变换，得到

$$\tau(\omega) = G(\omega)\,\gamma(\omega) = \left[(i\omega)^\alpha \mu_\alpha - \omega^2 m_R\right]\gamma(\omega), \tag{58}$$

其中 $(i\omega)^\alpha = \omega^\alpha\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)$。公式 [58] 右侧方括号中的量是图 8 所示流变网络的复动态模量。

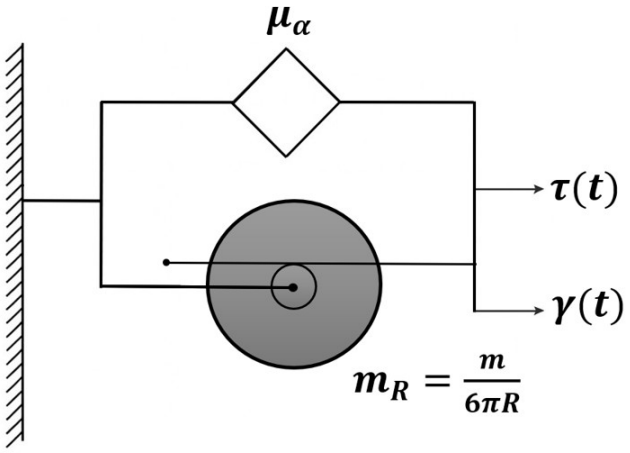


图 8. 亚扩散材料中布朗运动的流变学类比。该模型由一个弹簧幂律元件与一个分布惯容为 $m_R = \frac{m}{6\pi R}$ 的惯容器并联构成，其中弹簧幂律元件的唯象材料参数为 $\mu_\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$。

$$G(\omega) = \frac{\tau(\omega)}{\gamma(\omega)} = \mu_\alpha\, \omega^\alpha \left(\cos\frac{\alpha\pi}{2} + i \sin\frac{\alpha\pi}{2}\right) - m_R\, \omega^2. \tag{59}$$

由公式 (57) 描述且如图 8 所示的流变学模型的复动态流动度为

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \frac{i\omega}{G(\omega)} \\ &= \frac{1}{m_R} \frac{i\omega}{\frac{\mu_\alpha}{m_R}\,\omega^\alpha \cos\frac{\alpha\pi}{2} - \omega^2 + i\,\frac{\mu_\alpha}{m_R}\,\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\end{aligned} \tag{60}$$

注意到量 $\lambda = \left(\frac{m_R}{\mu_\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ 的单位为时间，方程 (60) 给出的复动态流体率 $\varphi(\omega)$ 的实部可写为

$$\Re_e\{\varphi(\omega)\} = \frac{\lambda}{m_R} \frac{\lambda^{2-\alpha}\,\frac{\mu_\alpha}{m_R}(\omega\lambda)^{\alpha+1}\,\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left[\lambda^{2-\alpha}\frac{\mu_\alpha}{m_R}(\omega\lambda)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - (\omega\lambda)^2\right]^2 + \left[\lambda^{2-\alpha}\frac{\mu_\alpha}{m_R}(\omega\lambda)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2} \tag{61}$$

利用 $\lambda^{2-\alpha}\,\frac{\mu_\alpha}{m_R} = 1$，将方程 (61) 代入功率的一般表达式

由方程 (24) 给出的功率谱密度可得

$$S(\omega) = \frac{Nk_BT}{3\pi R}\,\Re\{\varphi(\omega)\} = \frac{Nk_BT}{3\pi R}\,\frac{1}{(\mu_\alpha\, m_R^{1-\alpha})^{\frac{1}{2-\alpha}}}\,\frac{(\omega\lambda)^{1+\alpha}\,\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left[(\omega\lambda)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - (\omega\lambda)^2\right]^2 + \left[(\omega\lambda)^\alpha\,\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2}. \tag{62}$$

[1]其中，量 $\left[\mu_\alpha m_R^{1-\alpha}\right]^{2-\alpha}$ 的单位为黏度（例如 Pa·s）。

图 9 绘出了粒子浸没在亚扩散材料中时布朗运动的归一化功率谱（功率谱密度），其中唯象材料常数为 $\mu_\alpha$；图中展示了不同幂律分数阶指数 $\alpha$ 下，归一化功率谱随无量纲频率[1]$\omega\lambda = \omega\left(\frac{m_R}{\mu_\alpha}\right)^{2-\alpha}$ 的变化。该幂律由方程 (52) 给出。

在 $\alpha = 1$ 的极限情况下，弹簧壶元件变为带有 $\mu_\alpha = \mu_1 = \eta$ 的牛顿黏壶，而公式 (62) 给出的功率谱则简化为公式 (15) 给出的功率谱，因为

$$\left[\mu_\alpha m_R^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} = \left[\eta\, m_R^0\right]^{\frac{1}{2-1}} = \eta.$$

**在产生流体动力学记忆的致密黏性流体中的布朗运动**

当包围布朗粒子的流体密度不可忽略时，粒子的非定常运动与被排开流体的运动之间会产生复杂的相互作用。因此，除方程（2）中出现的力之外，布朗粒子还会排开其紧邻区域内的流体；作为反作用，流体会对粒子施加作用，从而产生不同于方程（4）中 δ 相关性的长程相关。布朗粒子与被排开流体之间的相互作用，可以通过加入惯性项和记忆项来描述

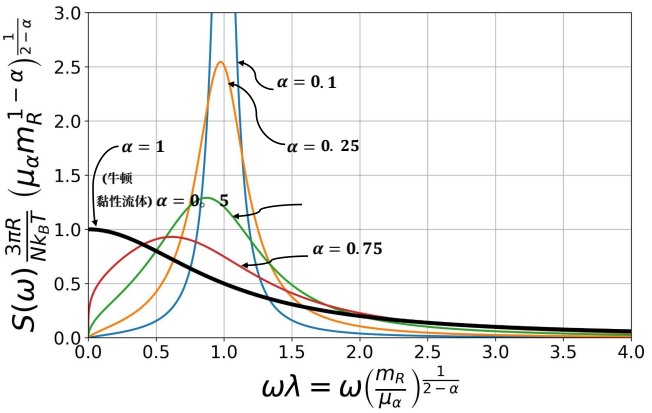


图 9. 亚扩散材料中布朗运动的归一化功率谱，展示分数阶指数 $\alpha$ 取不同值时随无量纲频率 $\omega\lambda =$ 的变化 $\omega\left(\frac{m_R}{\mu_\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$.

基本朗之万方程 (2)[12,19,21,71],

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{2}{3}\pi R^3\rho_f\frac{dv(t)}{dt} - 6\pi R\eta\, v(t) - 6R^2\sqrt{\pi\rho_f\eta}\int_0^t \frac{dv(\xi)/d\xi}{(t-\xi)^{1/2}}\,d\xi + f_R(t), \tag{63}$$

方程（63）附加惯性项中的量 $\frac{2}{3}\pi R^3\rho_f$ 是被排开流体 $\frac{m_f}{2}$ 的一半质量（$m_f = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_f$ 为周围流体的密度）。而后面的项 $6\pi R\eta\, v\,(t)$ 是通常的斯托克斯摩擦力，在方程（2）中也有出现。关于任意方式运动的球体在牛顿黏性流体中所受阻力的完整解，最早发表于布西内斯克的开创性论文[71]中。方程（63）中的卷积积分项是一种流体动力学记忆力，它源于被排开流体对运动中布朗粒子的反作用。

回顾一下，连续函数的黎曼–刘维尔分数阶积分由公式 (53) 定义，其中下限为 $c = 0$；公式 (63) 中的流体动力学记忆积分，本质上是布朗粒子的加速度历史 $dv(t)\,dt$ 的 $1\,2$ 阶分数阶积分。因此，利用公式 (53)，公式 (63) 可表示为 [25]

$$M\frac{dv(t)}{dt} + 6\pi R\eta\, v(t) + 6R^2\sqrt{\pi\rho_f\eta}\,\Gamma(1/2)\,I^{1/2}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = f_R(t), \tag{64}$$

其中 $M = m + \frac{1}{2}m_f = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\rho_p + \frac{1}{2}\rho_f\right)$，$\rho_p$为布朗粒子的质量密度。利用分数阶微积分的性质，对速度的导数（一阶导数）进行阶数为$1\,2$ 的分数阶积分，等于对速度历史施加阶数为$1\,2$ 的分数阶导数

：

$$I^{1/2}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = \frac{d^{1/2}v(t)}{dt^{1/2}} = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\int_0^t \frac{v(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}}\,d\xi. \tag{65}$$

更一般地，在广义函数的框架下，连续函数 $f(t)$ 的 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 阶分数阶导数定义为 $f(t)$ 与核函数 $\frac{1}{\Gamma^{q-1}(1-q)}$ 的卷积。将公式 (65) 的结果与 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 结合使用，公式 (64) 可简化为

$$M\frac{dv(t)}{dt} + 6\pi R^2\sqrt{\rho_f\eta}\,\frac{d^{1/2}v(t)}{dt^{1/2}} + 6\pi R\eta\, v(t) = f_R(t). \tag{66}$$

方程（66）给出了一个引人注目的结果：分数阶微分不仅出现在对广泛粘弹性材料的唯象幂律弛豫进行建模时[52–56]，而且也会作为基本守恒定律的结果，从连续介质力学方程的求解中自然涌现[12,19,20,71]。考虑了流体动力学记忆的朗之万方程（63）或（66），由Widom[20]在求解布朗粒子速度自相关函数的积分方程并结合随机过程适当的长程相关之后，得到了解析解。在Widom解的基础上[20]，，Hinch[21] 导出了速度自相关函数的如下结果，该结果亦见于文献[22,73]:

$$\langle v(0)v(t)\rangle = \frac{Nk_BT}{M(b-a)}\left[be^{b^2t}\,\mathrm{Erfc}(b\sqrt{t}) - ae^{a^2t}\,\mathrm{Erfc}(a\sqrt{t})\right], \tag{67}$$

with

$$a = \frac{z+\sqrt{z^2-4\zeta M}}{2M}, and \qquad b = \frac{z-\sqrt{z^2-4\zeta M}}{2M}, \tag{68}$$

本文遵循Clercx和Schram[22], 的记号，其中 $\zeta = 6\pi R\eta$ 和 $z = 6\pi R^2\sqrt{\rho_f\eta}$ 的单位为$[M][T]^{-1/2}$，即朗之万方程（68）中出现的布朗粒子速度的 $1/2$ 分数阶导数的系数。

具有流体动力学记忆的布朗运动的流变学类比由Makris[25] 通过综合朗之万方程（66）左侧出现的力学元件而构建。该流变学网络由剪切黏度为$\eta$的阻尼器、材料常数为$\mu_{3/2} = R\sqrt{\rho_f\eta} = \frac{z}{6\pi R}$，以及分布惯容为 $m_R = \frac{M}{6\pi R} = \frac{2}{9}R^2\rho_f\left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + \frac{1}{2}\right)$，的惯容器组成，如图10所示。

阻尼器、惯壶和惯容器并联连接时，图 10 所示流变网络的本构定律为

$$\tau(t) = \eta\frac{d\gamma(t)}{dt} + \mu_{3/2}\frac{d^{3/2}\gamma(t)}{dt^{3/2}} + m_R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}. \tag{69}$$

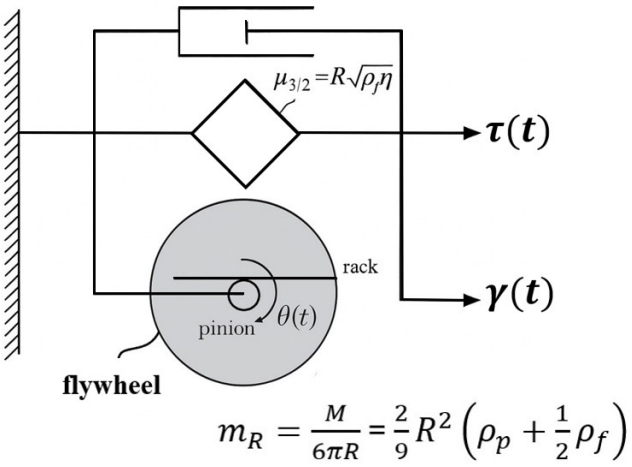


图 10. 具有流体动力学记忆的牛顿黏性流体中布朗运动的流变学类比。黏度为 $\eta$ 的阻尼器与材料常数为 $\mu_{3/2}=R\sqrt{\rho_f\eta}$ 的斯科特–布莱尔元件以及一个惯容器并联连接，惯容为分布式 $m_R=\frac{M}{6\pi R}=\frac{2}{9}R^2\rho_f\left(\frac{\rho_p}{\rho_f}+\frac{1}{2}\right)$。（阻尼器–惯性元件–惯容器并联连接）

对式（69）进行傅里叶变换，得到 $\tau(\omega)=G(\omega)\gamma(\omega)=\left[i\omega\eta+\mu_{3/2}(i\omega)^{3/2}-m_R\omega^2\right]\gamma(\omega)$。式（69）所描述、并在图 10 中示意的流变学模型的复动态流动度为

$$\varphi(\omega)=\frac{i\omega}{G(\omega)}=\frac{1}{m_R}\frac{1}{\frac{\eta}{m_R}+\frac{\mu_{3/2}}{m_R}(i\omega)^{1/2}+i\omega}. \tag{70}$$

其中 $(i\omega)^{1/2}=\omega^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$。因此，式 (70) 的实部为

$$\Re\{\varphi(\omega)\}=\frac{1}{m_R}\frac{\frac{\eta}{m_R}+\frac{\mu_{3/2}}{m_R}\omega^{1/2}\cos\frac{\pi}{4}}{\left[\frac{\eta}{m_R}+\frac{\mu_{3/2}}{m_R}\omega^{1/2}\cos\frac{\pi}{4}\right]^2+\left[\omega+\frac{\mu_{3/2}}{m_R}\omega^{1/2}\sin\frac{\pi}{4}\right]^2} \tag{71}$$

注意到量 $\lambda=\left(\frac{m_R}{\mu_{3/2}}\right)^2$ 的单位是时间，并将式 (71) 的分子和分母同时乘以 $\lambda^2$ 以及 $\sqrt{\lambda}\frac{\mu_{3/2}}{m_R}=1$后，

由式（24）给出的功率谱密度（PSD）的一般表达式变为

$$S(\omega)=\frac{Nk_BT}{3\pi R}\Re\{\varphi(\omega)\}=\frac{Nk_BT}{3\pi R}\frac{m_R}{\mu_{3/2}^2}\frac{\frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2}+(\omega\lambda)^{1/2}\cos\frac{\pi}{4}}{\left[\frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2}+(\omega\lambda)^{1/2}\cos\frac{\pi}{4}\right]^2+\left[\omega\lambda+(\omega\lambda)^{1/2}\sin\frac{\pi}{4}\right]^2} \tag{72}$$

其中，量 $\frac{\mu_{3/2}^2}{m_R}$ 的单位为黏度单位（Pa·s）。因此，量 $\frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2}$ 是无量纲的。

图11绘制了致密黏性流体中布朗运动的归一化功率谱（PSD），这种流体会产生流体动力学记忆。图中以无量纲频率 $\omega\lambda=\omega\left(\frac{m_R}{\mu_{3/2}}\right)^2$为函数，展示了不同无量纲密度比 $\gamma=\frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2}$ =下的情况。

$\frac{1}{9}\left(1+\frac{2\rho_p}{\rho_f}\right)$. 例如，当密度为 $\rho_p=1570$kg/m$^3$ 的三聚氰胺树脂微球浸入水中（密度为 $\rho_f\approx 1000$ kg/m$^3$）时，$\frac{\rho_p}{\rho_f}=1.57$和 $\gamma=\frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2}=0.46$；而当它们浸入密度为 784 kg/m$^3$的丙酮中时，$\frac{\rho_p}{\rho_f}=2.00$和 $\gamma=\frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2}=0.55$。

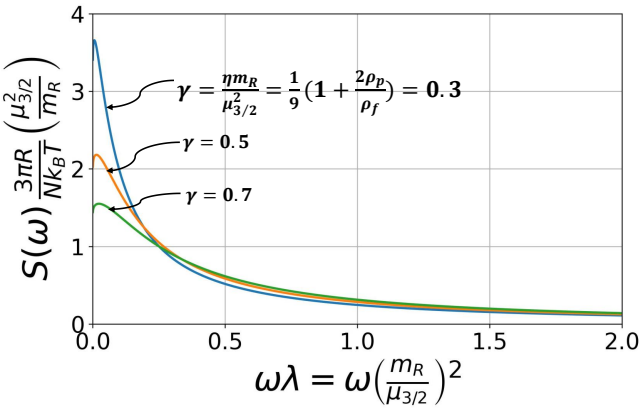


图11. **图11**。致密黏性流体中布朗运动的归一化功率谱，该流体会产生流体动力学记忆；图中展示了不同无量纲密度比参数 $\gamma = \frac{\eta m_R}{\mu_{3/2}^2} = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{2\rho_p}{\rho_f}\right)$，下随无量纲频率 $\omega\lambda = \omega\left(\frac{m_R}{\mu_{3/2}^2}\right)^2$ .变化的情况


**摘要**

本文将黏性–黏弹性对应原理[25,32] 应用于布朗运动，并证明：质量为 $m$ 、半径为 $R$ 的微粒浸入任意线性各向同性黏弹性材料时，其布朗运动的功率谱（功率谱密度）正比于一种线性流变网络的复动态流动度（复迁移率）的实部。该网络由微粒所浸入的线性黏弹性材料与具有分布惯容$m_R = \frac{m}{6\pi R}$的惯容器并联连接而成。构建这一流变学类比，可显著简化黏弹性材料中布朗运动功率谱的计算。

在推导出无记忆黏性流体和线性开尔文固体（谐振陷阱）中布朗运动功率谱的已知结果后，我们给出了布朗运动在麦克斯韦流体、杰弗里斯流体、亚扩散材料以及会产生流体动力学记忆的致密黏性流体中的功率谱结果。



[1]A. Einstein, 《物理学年鉴》**17**, 549（1905）。[2]R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 第2版（Butterworth–Heinemann, 牛津, 1996）。[3]H. Risken, *The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications*（Springer, 柏林, 1996）。[4]M. T. Araujo 和 E. Drigo Filho, Journal of Statistical Physics**146**, 610（2012）。[5]F. Polotto、E. Drigo Filho、J. Chahine 和 R. J. de Oliveira, Physica A**493**, 286（2018）。[6]I. Santra、S. Das 和 S. K. Nath, Journal of Physics A**54**, 334001（2001）。[7]M. C. Wang 和 G. E. Uhlenbeck, Reviews of Modern Physics**17**, 323（1945）。[8] P. Langevin, Comptes Rendus**146**, 530（1908）。[9]L. D.LandauandE. M. Lifshitz, *Statistical Physics Part I*（培格曼出版社，牛津，1980）。[10]P. Attard, *Non-equilibrium Thermodynamics and Statistical Me-chanics*（牛津大学出版社，2012）。[11]W. Coffey和Y. P. Kalmykov, *The Langevin Equation*（世界科学出版社，2012）。[12]L. D. Landau和E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*（培格曼出版社，牛津，1980）。[13]M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*（剑桥大学出版社，剑桥，1958）。[14]L. S. Ornstein, 《阿姆斯特丹皇家科学院院刊》21，96（1917）。[15]T. M. Squires和T. G. Mason, 《流体力学年评》42，413（2010）。[16] V. Kenkre、R. Kuhne和P. Reineker，Z. Phys. B 41，177（1981）。[17]X. Bian、C. Kim和G. E. Karniadakis, 《软物质》12，6331（2016）。[18]G. E. Uhlenbeck和L. S. Ornstein, 《物理评论》36，823（1930）。[19]R. Zwanzig和M. Bixon, 《物理评论A》2，2005（1970）。[20]A. Widom, 《物理评论A》3，1394（1971）。[21]E. J. Hinch, 《流体力学杂志》72，499（1975）。[22]H. J. H. Clercx和P. P. J. M. Schram, 《物理评论A》46，1942（1992）。[23]T. Franosch *et al.*, 《自然》478，85（2011）。[24]M. Jannasch、M. Mahamdeh和E. Sch¨affer，Physical Review Letters 107，228301（2011）。[25]N. Makris, 《流体物理学》33，072014（2021）。[26]A. Papoulis, （1962）。[27]R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*（麦格劳-希尔，1965）。[28]A. Erd´elyi *et al.*, *Tables of Integral Transforms*（麦格劳-希尔，1954）。[29]V. S. Volkov和G. V. Vinogradov, 《非牛顿流体力学杂志》15，29（1984）。[30]R. Rodriguez和E. Salinas-Rodriguez, 《物理学杂志A》21，2121（1988）。[31]T. G. Mason和D. A. Weitz，Physical Review Letters 74，1250（1995）。[32]N. Makris, 《物理评论E》101，052139（2020）。[33]M. C. Smith, 《IEEE自动控制汇刊》47，1648（2002）。[34]N. Makris, 《工程力学杂志》143，04017123（2017）。[35]N. Makris, Meccanica 53，2237（2018）。[36]A. C. Pipkin, *Lectures on Viscoelasticity Theory*，第2版（施普林格，1986）。[37]R. B. Bird、R. C. Armstrong和O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*，第1卷（威利出版社，1987）。[38]N. W. Tschoegl, *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction*（施普林格，1989）。[39]H. Giesekus, 《流变学学报》34，2（1995）。[40]N. Makris和N. G. Kampas, 《流变学学报》48，815（2009）。[41]R. M. L. Evans *et al.*, 《物理评论E》80，012501（2009）。[42]N. Makris，Meccanica 54，19（2019）。[43]V. S. Volkov和A. I. Leonov, 《化学物理杂志》104，5922（1996）。[44]H. 杰弗里斯, *The Earth*，第2版（剑桥大学出版社，1929）。[45]G. Lebon、P. Parmentier、P. Teller和P. C. Dauby, 《流变学学报》33，257（1994）。[46]M. Khan和T. G. Mason, 《软物质》10，9073（2014）。[47]M. Khan和T. G. Mason, 《物理评论E》89，042309（2014）。[48]M. Kothandapani和S. Srinivas, 《国际非线性力学杂志》43，915（2008）。[49]N. Makris, 《软物质》17，5410（2021）。[50]A. Palmer、J. Xu和D. Wirtz, 《流变学学报》37，97（1998）。[51]T. Gisler和D. A. Weitz，Physical Review Letters 82，1606（1999）。

[52]P. G. Nutting，美国材料试验学会会刊**21**，1162（1921）。[53]A. Gemant，《物理学》**7**，311（1936）。[54]A. Gemant，《哲学杂志》**25**，540（1938）。[55]G. W. Scott Blair，*A Survey of General and Applied Rheology*（Pitman，伦敦，1944）。[56]G. W. Scott Blair，《胶体科学杂志》**2**，21（1947）。[57]G. W. Scott Blair和J. E. Caffyn，《哲学杂志》**40**，80 1949（）。[58]K. Oldham和J. Spanier，*The Fractional Calculus: Mathematics in Science and Engineering* 3，卷（学术出版社，圣迭戈，1974）。[59]S. G. Samko、A. A. Kilbas和O. I. Marichev，*Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* 1，卷（戈登与布里奇出版社，阿姆斯特丹，1974）。[60]K. S. Miller和B. Ross，*An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*（威利出版社，纽约，1993）。[61]I. Podlubny，*Fractional Differential Equations*（爱思唯尔，阿姆斯特丹，1998）。[62]M. Riesz，《数学学报》**81**，1（1949）。[63]F. Mainardi，*Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity* 2010（帝国理工学院出版社 / 世界科学出版社，伦敦，）。[64]W. Smit 和 H. de Vries，《流变学学报》**9**，525（1970）。[65]R. C. Koeller，《应用力学杂志》**51**，299（1984）。[66]C. H. R. Friedrich，《流变学学报》**30**，151（1991）。[67]N. Heymans 和 J.-C. Bauwens，《流变学学报》**33**，210（1994）。[68]H. Schiessel、R. Metzler、A. Blumen 和 T. F. Nonnenmacher，《物理学杂志 A：数学与综合》**28**，6567（1995）。[69]L.-I. Palade、V. Verney 和 P. Attan´e，《流变学学报》**35**，265（1996）。[70]N. Makris 和 E. Eft hymiou，《流变学学报》（2020）。[71]J. V. Boussinesq，《科学院纪要》**100**，935（1885）。[72]N. Makris，《分数阶与应用数学》**5**，18（2021）。[73]T. Li 和 M. G. Raizen，《物理学年鉴》**525**，281（2013）。