arXiv:2602.02305v1 [math.FA] 2 Feb 2026

紧李群上的再生核希尔伯特空间与熵柯尔莫哥洛夫数

Z. Avetisyan* K. Gonzalez†‡ M. Ruzhansky*§

2026年2月3日

摘要

对于紧李群 G，我们研究与定义在$L^2(G)$上的左不变、正、对称迹类积分算子的积分核 K 相关联的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_K$。我们给出了将 $\mathcal{H}_K$ 嵌入到空间 $C(G)$（即 G上的连续函数空间）时，熵柯尔莫哥洛夫数（亦称覆盖数）的渐近下界和上界估计。

1 引言

再生核希尔伯特空间（再生核希尔伯特空间）是泛函分析中的一种工具，它建立了一种利用核来分析函数的形式化方法。再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_K$ 与一个对称且正定的核函数 $K(x,y)$唯一对应，该核函数定义在 $X \times X$上，其中 X 为度量空间[2]。再生核希尔伯特空间的定义特征是再生性质，即对于任意函数$f \in \mathcal{H}_K$以及定义域 X中的任意点 x，有 $f(x) = \langle f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}_K}$，从而将函数的取值与涉及该核的内积联系起来。这一性质使再生核希尔伯特空间成为机器学习与逼近理论的自然框架，因为它允许在高维特征空间中分析函数，而无需显式计算特征映射，转而依赖核技巧 [26, 16]。

尽管再生核希尔伯特空间自然地源于正定的核，但20世纪90年代核机器学习的早期阶段主要聚焦于满足Mercer定理 [4, 20, 29]所述特定条件的核。近年来，采用正定核的估计与学习方法已相当流行，因为正定核似乎是应当考虑的恰当核类。

在度量空间中，覆盖某个子集所需的给定半径为 ϵ的球的最小数量，称为该集合的 ϵ-覆盖数。通过嵌入算子，属于再生核希尔伯特空间的单位球像的覆盖数，或嵌入算子的覆盖数，已成为评估基于观测数据的统计算法潜在误差的一项关键工具

*根特大学，比利时。数学系：分析、逻辑与离散数学
†埃里温国立大学，亚美尼亚。数学与力学学院
‡魏茨曼科学研究所，以色列。数学与计算机科学学院§伦敦玛丽女王大学，英国。数学系

[5, 31, 32]。开发获取覆盖数精确估计的技术，为解决应用数学领域的许多问题打开了大门。覆盖数也称为熵柯尔莫哥洛夫数 [18], ，在基于核的学习算法和高斯过程 [21, 27, 30]等领域发挥着重要作用。

2002年，Zhou 通过将再生核希尔伯特空间嵌入连续函数空间，对其中球的像的覆盖数进行了严格分析。利用覆盖数与核的傅里叶变换平滑性之间的关系，Zhou 推导出了与高斯再生核希尔伯特空间相关的覆盖数上界，并就球的半径从右侧趋近于零时其渐近行为提出了一个颇具启发性的猜想 [31]。

多年后，Kuhn 在 2011年 确定了这些覆盖数的精确渐近行为。他的创新策略基于利用正交归一基对高斯再生核希尔伯特空间进行显式表示 [19], ，其证明的关键工具是 Steinwart 等人 [28] 关于高斯再生核希尔伯特空间结构的研究结果；特别是，他们探讨了文献 [28] 中给出的这些空间的特定正交归一基。

受这一研究思路启发，2023年有研究给出了与魏尔斯特拉斯分形核 W 相关的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_W$ 嵌入连续函数空间 $C(I)$的映射 $I_W : \mathcal{H}_W \to C(I)$ 的覆盖数的锐利估计。这里， $C(I)$ 是定义在 $I \doteq [-1, 1]$ 上并赋予上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ [3] 的连续实值函数空间。随后，作为这项工作的推广，2024年有研究给出了单位球面 [14] 以及紧致两点齐性空间上两类一般再生核希尔伯特空间嵌入的覆盖数的精确估计 [15]。

在经典再生核希尔伯特空间背景下，对覆盖数的研究以建立其上界与下界之间精确的渐近等价关系为特征。事实上，当再生核希尔伯特空间源自这样的核 K： 其定义域为 X 一个闭区间，或 X 一个维数为 d 的紧致二维齐次空间（球面是其中一个特例），且其傅里叶系数或舍恩贝格系数受几何级数控制时，浸入算子的熵柯尔莫哥洛夫数I_K 的行为等价于 $[\ln(1/\epsilon)]^{d+1}$，当 $\epsilon \to 0^+$时。若考虑傅里叶系数按调和级数衰减的核 K [14, 15]，这种行为则会发生显著变化。

在本文中，我们将覆盖数行为的研究拓展到紧李群背景下。我们首先探讨紧李群酉表示的矩阵形式，并给出 L^2-函数的傅里叶级数展开。结合紧群上的伪微分算子的全局量子化与符号（例如，右卷积核的傅里叶变换） [13], ，我们可以用符号明确写出核 K ，从而便于研究 K的性质。我们主要关注与核 K相关联的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_K$ ，以求得嵌入算子 $I_K : \mathcal{H}_K \to C(G)$的覆盖数界，其中 $C(G)$表示紧李群 G上的连续函数空间。紧李群上的再生核希尔伯特空间与覆盖数研究结合了抽象调和分析和泛函分析中的工具，因此是一个新颖的课题，有望为数学研究开辟新的方向。

本文的组织结构如下。第2节介绍后文将用到的紧李群的主要事实，并引入本文研究的重点——积分核。第3节从核的符号出发，刻画核的连续性、对称性和正性

。第4节讨论迹类不变算子，并介绍与上一节所述核相关的再生核希尔伯特空间。第5节定义符号的有限阶迹和行列式，并给出嵌入算子 I_K 的覆盖数估计。

2 背景

本节回顾定义在紧李群上的平方可积函数的一些基本事实。此外，我们还介绍 Schatten-von Neumann 类中的算子，以及紧李群上积分核的表示，这些内容将在全文中使用。

令 $L^2(G) \doteq L^2(G, d\mu)$ 为平方可积函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ 构成的希尔伯特空间，其中 G 是维数为 n 的紧李群，μ 是 G 上的归一化哈尔测度。我们考虑由内积诱导的范数 $\|\cdot\|_2$

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_G f(x)\overline{g(x)}d\mu(x), \quad f, g \in L^2(G). \tag{2.1}$$

本文中，我们将 $d\mu(x)$ 简记为 dx。

令 G 表示 $\hat{G}$ 的连续不可约酉表示 ξ 的等价类集合。对于 $[\xi] \in G$，通过在 ξ 的表示空间中选取一组标准正交基，我们可以将 ξ 视为矩阵值酉函数 $\xi\colon G \to \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$，其中 d_ξ 是 ξ 的表示空间的维数。根据彼得–外尔定理 [25, 定理 7.5.14]，我们知道集合

$$\mathcal{B} = \left\{\sqrt{d_\xi}\,\xi_{ij} : (\xi_{ij})_{i,j=1}^{d_\xi}, [\xi] \in \hat{G}\right\},$$

是 $L^2(G)$的标准正交基。因此，如果 $f \in L^2(G)$,

$$f(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\xi} \langle f, \sqrt{d_\xi}\,\xi_{ij}\rangle_2 \sqrt{d_\xi}\,\xi_{ij}(x),$$

对几乎每一个 $x \in G$。整理各项并记住 $\langle f, \xi_{ij}\rangle_2 = (\hat{f}(\xi))_{ji}$ 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \sum_{j=1}^{d_\xi}\sum_{i=1}^{d_\xi} (\hat{f}(\xi))_{ji}\xi_{ij}(x) \\ &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \sum_{j=1}^{d_\xi} [\hat{f}(\xi)\,\xi(x)]_{jj}. \end{aligned}$$

因此，作为 Peter-Weyl 定理的推论，我们得到如下傅里叶反演公式：

$$f(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\hat{f}(\xi)\,\xi(x)], \tag{2.2}$$

对于几乎处处的 $x \in G$。换句话说，如果 $\mathfrak{F}: L^2(G) \to \ell^2(\hat{G})$ 是群傅里叶变换，我们也将逆傅里叶变换写作

$$(\mathfrak{F}^{-1}C)(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[C(\xi)\,\xi(x)], \tag{2.3}$$

对于几乎处处的 $x \in G$ [25, 定理 10.3.23]。

我们考虑一个紧算子 $T: L^2(G) \to L^2(G)$。那么 T^*T 是紧的、自伴的且非负的。因此，我们可以通过等式 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 定义 T的绝对值。令$s_k(T)$为 $|T|$的特征值，其中 $k = 1, 2, \cdots$，即计入重数后的 $|T|$的特征值。数值 $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots \geq s_n(T) \geq \cdots \geq 0$称为 T的奇异值。如果 $0 < p < \infty$ 且奇异值序列是 ℓ^p-可求和的，则称 T 属于*Schatten-von Neumann* 类 $S_p\left(L^2(G)\right) \doteq S_p(L^2(G))$。如果 $1 \leq p < \infty$，则为 $S_p\left(L^2(G)\right)$ 关联一个范数，定义如下

$$\|T\|_{S_p(L^2(G))} \doteq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (s_k(T))^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

若 $1 \leq p < \infty$ 类 $S_p\left(L^2(G)\right)$ 在赋予范数$\|\cdot\|_{S_p(L^2(G))}$后成为巴拿赫空间。若 $p = \infty$ 我们定义 $S_{\infty(L^2(G))}$ 为从 $L^2(G)$ 到 $L^2(G)$ 的紧算子类，并赋予算子范数$\|T\|_{S_\infty(L^2(G))} \doteq \|T\|_{op}$。为进一步简化记号，我们将$S_p$ 记作 $S_p(L^2(G))$。

Schatten-von Neumann 类彼此嵌套，满足

$$S_p \subset S_q, \quad \text{if } 1 \leq p < q \leq \infty, \tag{2.4}$$

并满足复合嵌入关系

$$S_q S_p \subset S_r,$$

其中

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

此外，对于 $A \in S_p$ 和 $B \in S_q$，有

$$\|AB\|_{S_r} \leq \|A\|_{S_p}\|B\|_{S_q}, \tag{2.5}$$

并且由例如 [7, 定理 3.1], 可得

$$\|A\|_{S_p} = (\mathrm{Tr}(|A|^p))^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{2.6}$$

这些类通常分别称为希尔伯特–施密特算子类和迹类 [10]。根据 [24,定理 5]，如果 A 是迹类算子，那么

$$|\mathrm{Tr}A| \leq \|A\|_{S_1}. \tag{2.7}$$

令 T 为迹类算子， $D(G)$ 为测试函数集，其对偶空间$D'(G)$ 为分布空间。注意，由于 G 是紧的，我们有 $D(G) = C^\infty(G)$。我们记得，哈尔测度在 G 上的左平移和右平移下保持不变，并给出以下命题。

命题 2.1。 *[8, 推论 3.7]* 设 G 为紧李群，且左不变算子T在 $L^2(G)$上有界。那么它具有形式 $Tf = f * k$，其中 $k \in D'(G)$。此外，若 $T \in S_2$，则 $k \in L^2(G)$。

换言之，若 T 在左平移下保持不变，则 $T\colon\ L^2(G) \to L^2(G)$是一个卷积算子，其（右卷积）核为 k，使得

$$Tf(x) = (f * k)(x) = \int_G k(y^{-1}x) f(y) dy, \quad a.e.\, x \in G, \tag{2.8}$$

对所有 $f \in L^2(G)$均成立。由于我们假设了 $T \in S_1$，由公式 (2.4) 可得 $T \in S_2$，再由命题 2.1 可得 $k \in L^2(G)$。

利用公式 (2.2)，我们可以写出

$$\begin{aligned} k(y^{-1}x) &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\hat{k}(\xi)\, \xi(y^{-1}x)] \\ &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\xi(x)\hat{k}(\xi)\, \xi(y)^*], \end{aligned}$$

对几乎处处的 $x,\ y \in G$均成立。若 $K\colon\ G \times G \to \mathbb{C}$ 是由 $K(x,\ y) \doteq k(y^{-1}x)$定义的核，则有

$$K(x, y) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\xi(x)\hat{k}(\xi)\, \xi(y)^*],$$

对几乎处处的 $x,\ y \in G$均成立，因此我们可以将公式 (2.8) 写成

$$Tf(x) = \int_G K(x, y) f(y) dy, \quad a.e.\, x \in G, \tag{2.9}$$

对所有 $f \in L^2(G)$均成立。

$\hat{}$ 我们引入 $\sigma_T(\xi)$，即大小为 $d_\xi \times d_\xi$ 的 T 的矩阵符号，并将其定义为 $\sigma_T(\xi) \doteq \hat{k}(\xi)$，其中 $[\xi] \in \hat{G}$。由于 $k \in L^2(G)$，$\sigma_T = \hat{k} \in \ell^2(\hat{G})$。因此，我们可以写成

$$K(x, y) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\xi(x)\sigma_T(\xi)\, \xi(y)^*], \tag{2.10}$$

对于几乎处处的 $x,\ y \in G$。

3 紧李群上的连续、对称正定核

下文中，我们关注核 K 何时连续、对称且正定。函数 $K\colon G \times G \to \mathbb{C}$ 若满足对几乎处处的 $x,\ y \in G$，有 $K(x, y) = K(y, x)$，则称为对称核；若对任意 $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in G$和 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$，均有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \overline{c_j} K(x_i, x_j) \geq 0.$$

最后一个定义等价于对每个非零复列向量 z （属于 $\mathbb{C}^n$），都有 $z^*(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n z \geq 0$，其中 z^* 表示 z的共轭转置。积分线性算子T: $L^2(G) \to L^2(G)$若满足对所有 $f \in L^2(G)$均有 $\langle Tf, f\rangle_2 \geq 0$，则称为正定算子 。

引理 3.1。 当 T 是 $L^2(G)$上的迹类算子时，在（*2.10*）中定义的核 K 是连续的。

证明。 由不等式（2.5）（$r=1$、 $p=1$ 和 $q=\infty$）、公式（2.7）和（2.6），可得

$$|\mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_T(\xi)\xi(y)^*]| \leq \|\xi(y^{-1}x)\|_{op}\|\sigma_T(\xi)\|_{S_1} = \mathrm{Tr}(|\sigma_T(\xi)|),$$

对几乎处处的 x， $y \in G$，因此，

$$\sum_{[\xi]\in\hat{G}} |d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_T(\xi)\xi(y)^*]| \leq \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}(|\sigma_T(\xi)|).$$

如果 T 是迹类算子，那么

$$\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}(|\sigma_T(\xi)|) < \infty,$$

[8, 定理 3.5]。由魏尔施特拉斯M判别法，定义 $K(x,\ y)$的级数在$G \times G$ 上一致收敛，几乎处处，因此 $K(x,\ y)$是连续的。 ■

引理 3.2。 由（*2.10*）定义的核 K 是对称的，当且仅当矩阵符号 $\sigma_T(\xi)$ 对所有 $[\xi] \in \hat{}G$都是厄米矩阵。

证明。 如果对所有 $[\xi] \in G$，都有 $\sigma_T(\xi)^* = \sigma_T(\xi)$，那么我们有

$$\begin{aligned}\overline{K(y,x)} &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \overline{\mathrm{Tr}[\xi(y)\sigma_T(\xi)\xi(x)^*]} \\ &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[(\xi(y)\sigma_T(\xi)\xi(x)^*)^*] \\ &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_T(\xi)\xi(y)^*] \\ &= K(x,y),\end{aligned}$$

对几乎处处的 x， $y \in G$。如果 K 是对称核，根据傅里叶级数表示的唯一性，我们得到 $\sigma_T(\xi)^* = \sigma_T(\xi)$，证明完毕。 ■

此外，如果 T 是有界算子，那么 K 是对称核，当且仅当算子T 是自伴的 [6, 11]。因此，我们得到以下定理:

定理 3.3。 设 T 是由 (2.9)给出的有界算子， K 是由 *(2.10)* 给出的积分核。以下条件等价:

1. 核 K 是对称的。

ˆ*2.* 对所有 $[\xi] \in G$，矩阵符号 $\sigma_T(\xi)$ 都是厄米矩阵。

3. 算子 T 是自伴的。

证明。 由引理 3.2, [6, 命题 4.6]以及 $L^2(G)$ 中自伴算子的定义可得。

■

关于核 K的正定性，我们陈述以下定理 .

定理 3.4。 设 T 是由(2.9)给出的迹类有界算子，且 K 是其由 *(2.10)* 给出的积分核。以下条件等价:

1. 核 K 是正定的。

2. 算子 T 是正定的。ˆ*3.* 对所有 $[\xi] \in G$，矩阵符号 $\sigma_T(\xi)$ 都是正定的。

证明。 假设核 K 是正定的。由于 K 是紧致空间 G 上的连续函数（引理 3.1），因此 K 有界，从而 $K \in L^2(G \times G,\ d\mu \times d\mu)$。通过对 [12] 中关于赋有哈尔测度的紧李群的定理 2.1 的证明进行改写，我们得到有界算子 T 是正定的（$1 \to 2$）。现在，如果 T 是正定算子，且 K 是连续函数，那么 K 也正定（定理 2.3]（$2 \to 1$））。

由普朗歇尔定理和表达式（2.8），我们得到

$$\begin{aligned}\langle Tf, f\rangle_{L^2(G)} &= \langle \widehat{Tf}, \hat{f}\rangle_{\ell^2(\hat{G})} \\ &= \langle \widehat{f * k}, \hat{f}\rangle_{\ell^2(\hat{G})} \\ &= \langle \sigma_T \hat{f}, \hat{f}\rangle_{\ell^2(\hat{G})} \\ &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\hat{f}(\xi)^* \sigma_T(\xi)\hat{f}(\xi)].\end{aligned}$$

ˆ 因此，如果矩阵 $\sigma_T(\xi)$对所有 $[\xi] \in G$都是正定的，那么算子 T 是正定的（$3 \to 2$）。

任取 $[\xi_0] \in \hat{G}$，并考虑由下式给出的ˆ $f \in \ell^2(\hat{G})$

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} M(\xi_0), & \text{if} \quad \xi = \xi_0 \\ 0, & \text{if} \quad \xi \neq \xi_0, \end{cases}$$

其中， $M(\xi_0)$ 是一个大小为 $d_{\xi_0} \times d_{\xi_0}$ 的矩阵，使得

$$M(\xi_0)_{ij} = v_i\, \delta_{jl_0} = \begin{cases} v_i, & \text{if} \quad j = l_0, \\ 0, & \text{if} \quad j \neq l_0, \end{cases}$$

其中， $v_i \in \mathbb{C}$ 对于 $1 \le i \le d_{\xi_0}$ 和任意固定的 l_0（满足 $1 \le l_0 \le d_{\xi_0}$）。于是

$$\langle Tf_{\xi_0}, f_{\xi_0}\rangle_{L^2(G)} = d_{\xi_0} \mathrm{Tr}\,[M^*(\xi_0)\sigma_T(\xi_0)M(\xi_0)] = d_{\xi_0}\, v^*\sigma_T(\xi_0)v,$$

其中 v是向量 $(v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots,\ v_{d_{\xi_0}})^\top$。因此，若 T是正定的，则 $\sigma_T(\xi)$ 是正定矩阵 $(2 \to 3)$，证明完毕。 ■

4 与核K相关的再生核希尔伯特空间（再生核希尔伯特空间）

从现在起，考虑迹类不变算子 T 及其对称正定核 K，分别由 (2.9) 和 (2.10) 给出。根据上一节中的定理 3.3 和定理 3.4，矩阵符号 $\sigma_T(\xi)$ 是厄米正定的，因此存在唯一的正矩阵 $H_{\sigma_T}(\xi)$，使得 $\sigma_T(\xi) = H^2_{\sigma_T}(\xi)$ 且 $H_{\sigma_T}(\xi)^* = H_{\sigma_T}(\xi)$ ^，其中 $[\xi] \in G$ [17]。此外，

$$\sup_{[\xi]\in\hat{G}} \|\sigma_T(\xi)\|_{op} = \sup_{[\xi]\in\hat{G}} \|H_{\sigma_T}(\xi)\|^2_{op},$$

and

$$|\sigma_T(\xi)| = \sqrt{\sigma_T(\xi)^*\sigma_T(\xi)} = \sigma_T(\xi).$$

Moore理论 [22, 23], 多年后由Aronszajn关于再生核希尔伯特空间的工作接续 [1],保证，对于一个正定对称核 K，存在唯一的函数希尔伯特空间 $(\mathcal{H}_K, \langle\cdot, \cdot\rangle_K)$，其满足：

1. $K(\cdot, x) \in \mathcal{H}_K$对所有 $x \in G$均成立；
2. （再生性质） $f(x) = \langle f, K(\cdot, x)\rangle_K$，对所有 $x \in G$和 $f \in \mathcal{H}_K$均成立。

下面的定理4.2给出了与核K相关的再生核希尔伯特空间的刻画。

备注4.1。我们注意到

$$g(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)],$$

与 $C \in \ell^2(\hat{G})$ 等价于

$$\hat{g}(\xi) = H_{\sigma_T}(\xi)C(\xi),$$

^对所有 $[\xi] \in G$.

定理 4.2. 若 $K : G \times G \to \mathbb{C}$ 是 *(2.10)* 中的对称正定核，且 T 是有界连续线性迹类算子，则

$$\mathcal{H}_K = \left\{ g : G \to \mathbb{C} \mid g(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)],\ a.e.\ x \in G, C \in \ell^2(\hat{G}) \right\}$$

赋予内积

$$\langle g, h\rangle_K = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)B(\xi)^*], \quad g, h \in \mathcal{H}_K,$$

其中

$$g(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)] \text{ and } h(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[B(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)] \text{ for almost every } x \in G.$$

证明。考虑集合

$$\mathcal{H}=\left\{g:G\to\mathbb{C}\mid g(x)=\sum_{[\xi]\in\hat{G}}d_\xi\,\mathrm{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)],\ a.e.\ x\in G,\,C\in\ell^2(\hat{G})\right\}$$

赋予内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$，如本定理陈述中所述。首先，我们证明：若函数 g 属于 $\mathcal{H}$，则 g 几乎处处为有限函数。事实上，我们证明 g是一个连续函数。

由不等式 (2.5)（$r=1$、 $p=1$ 和 $q=\infty$），可得

$$|\mathrm{Tr}[H_{\sigma_T}(\xi)C(\xi)\xi(x)]|\le\|H_{\sigma_T}(\xi)\,C(\xi)\|_{S_1}\|\xi(x)\|_{op}=\|H_{\sigma_T}(\xi)\,C(\xi)\|_{S_1}.$$

再次由不等式 (2.5)（$r=1$、 $p=2$ 和 $q=2$），可得

$$\|H_{\sigma_T}(\xi)\,C(\xi)\|_{S_1}\le\|H_{\sigma_T}(\xi)\|_{S_2}\|C(\xi)\|_{S_2}=\sqrt{\mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)]}\,\|C(\xi)\|_{S_2}.$$

这样

$$|d_\xi\mathrm{Tr}[H_{\sigma_T}(\xi)C(\xi)\xi(x)]|\le\sqrt{d_\xi\,\mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)]}\,\sqrt{d_\xi}\,\|C(\xi)\|_{S_2},$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{[\xi]\in\hat{G}}\sqrt{d_\xi\,\mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)]}\,\sqrt{d_\xi}\,\|C(\xi)\|_{S_2}&\le\left(\sum_{[\xi]\in\hat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)]\right)^{1/2}\left(\sum_{[\xi]\in\hat{G}}d_\xi\,\|C(\xi)\|_{S_2}^2\right)^{1/2}\\&=\left(\sum_{[\xi]\in\hat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)]\right)^{1/2}\|C\|_{\ell^2(\hat{G})}\\&<\infty.\end{aligned}$$

由魏尔施特拉斯M判别法,

$$g(x)=\sum_{[\xi]\in\hat{G}}d_\xi\,\mathrm{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)]$$

当 $C\in\ell^2(\hat{G})$ 时，在 G 中一致收敛。因此， $g(x)$ 是紧集 G 上的连续函数，因而几乎处处为有限函数。

现在，我们证明性质 1. 和 2. 均成立。

我们写作

$$C(\xi,y)\doteq(\xi(y)H_{\sigma_T}(\xi))^*,\quad y\in G,\,[\xi]\in\hat{G}.$$

设 $L_y\colon G\to\mathcal{U}(H_\xi)$ 满足 $L_y(\xi)=\xi(y)$，其中 $\mathcal{U}(H_\xi)$ 是希尔伯特空间 H_ξ 的酉群。由于 $L_y\in l^\infty(\hat{G})$ 和 $H_{\sigma_T}\in\ell^2(\hat{G})$，我们得到 $L_yH_{\sigma_T}\in\ell^2(\hat{G})$ [13, 第2.1小节。由此

$$K_y(x)\doteq K(x,y)=\sum_{[\xi]\in\hat{G}}d_\xi\,\mathrm{Tr}\left[(\xi(y)H_{\sigma_T}(\xi))^*\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)\right]$$

属于 $\mathcal{H}$，对所有 $x \in G$ 均成立，且性质 1. 得以满足。

为了证明 2.，对每一个 $g \in \mathcal{H}$，我们写出

$$g(x) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)], \quad a.e.\ x \in G,$$

并且由 $\mathcal{H}$ 中内积的定义可见

$$\begin{aligned}\langle g, K_y\rangle_K &= \left\langle \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)], \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[(\xi(y)H_{\sigma_T}(\xi))^*\xi(x)H_{\sigma_T}(\xi)] \right\rangle_K \\ &= \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[C(\xi)\xi(y)H_{\sigma_T}(\xi)] \\ &= g(y),\end{aligned}$$

对所有 $y \in G$ 与 $g \in \mathcal{H}$。

不难看出，$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ 是一个希尔伯特空间，并且由于由 K 诱导的再生核希尔伯特空间的唯一性，我们得到 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K$，从而该定理的结论成立。 ■

5 覆盖数

我们给出将在以下各小节中使用的覆盖数的一般性质。考虑巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_Y)$。对 $\epsilon > 0$，若 B_X 与 B_Y 分别是 X 与 Y 中的单位球，则算子 $L: X \longrightarrow Y$ 的覆盖数 由下式给出

$$\mathcal{C}(\epsilon, L) \doteq \mathcal{C}(\epsilon, L(B_X)) = \min\left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists\, y_1, y_2, ..., y_n \in Y \text{ s.t. } L(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (y_j + \epsilon B_Y) \right\}.$$

以下性质可见 [14, 19]。如果 $S, L: X \to Y$ 和 $R: Z \to X$ 是巴拿赫空间上的线性算子，那么对于任意 $\epsilon, \delta > 0$，我们有以下性质：

1. $\mathcal{C}(\epsilon+\delta, L+S) \le \mathcal{C}(\epsilon, L)\ \mathcal{C}(\delta, S)$；2. $\mathcal{C}(\epsilon\delta, LR) \le \mathcal{C}(\epsilon, L)\ \mathcal{C}(\delta, R)$；3. 如果 $n \doteq \operatorname{rank}(L) < \infty$，那么 $\mathcal{C}(\epsilon, L) \le (1 + 2\|L\|_{op}/\epsilon)^n$；4. 如果 $\|L\|_{op} \le \epsilon$，那么 $\mathcal{C}(\epsilon, L) = 1$。

对于 X 和 Y 两个 n维希尔伯特空间和算子 $L: X \to Y$，我们有如下估计

$$\sqrt{\det(L^*L)}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^n \le \mathcal{C}(\epsilon, L), \quad \epsilon > 0. \tag{5.11}$$

5.1 算子范数

覆盖数的性质 3. 和 4. 突显了计算算子范数的重要性，我们将在本小节中给出相关计算。

若 $T \in S_1$ 是 $L^2(G)$ 上的正迹类不变算子，如 (2.9) 所示，且 $\mathfrak{F}: L^2(G) \to l^2(\hat{G})$ 是群傅里叶变换，如 (2.3) 所示，则

$$\mathfrak{F} \circ T \circ \mathfrak{F}^{-1} = \bigoplus_{[\xi] \in \hat{G}} \sigma_T(\xi),$$

其中 σ_T 是 $\mathbb{C}^{d_\xi}$ 上正厄米算子构成的域。定义线性有界算子 $Q_T : l^2(\hat{G}) \to C(G)$ 如下:

$$Q_T C \doteq \mathfrak{F}^{-1}\left[H_{\sigma_T} C\right], \tag{5.12}$$

对所有 $C \in l^2(\hat{G})$，其中 H_{σ_T} 如第 4 节所示；令 $Q_K: l^2(\hat{G}) \to (\mathcal{H}_K, \langle\cdot, \cdot\rangle_K)$ 为满足以下条件的算子

$$Q_K C = Q_T C,$$

对所有 $C \in l^2(\hat{G})$。因此 $\mathcal{H}_K = Q_K\left(l^2(\hat{G})\right)$。

注意

$$\begin{aligned}
\langle Q_K C, Q_K B\rangle_K &= \langle \mathfrak{F}^{-1}\left[H_{\sigma_T} C\right], \mathfrak{F}^{-1}\left[H_{\sigma_T} B\right]\rangle_K \\
&= \sum_{[\xi] \in \hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[C(\xi) B^*(\xi)] \\
&= \langle C, B\rangle_{\ell^2(\hat{G})},
\end{aligned}$$

对所有 $C,\ B \in \ell^2(\hat{G})$，因此算子 Q_K 是酉算子。

我们感兴趣的是，为嵌入算子建立覆盖数 $C(\epsilon,\ I_K)$ 的估计，其中 $\epsilon \to 0$

$$I_K : (\mathcal{H}_K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K) \to C(G).$$

从现在起，我们用 Q 表示 Q_T。显然， $Q = I_K \circ Q_K$，利用Q_K的酉性，可得

$$C\left(\epsilon, I_K\right) = C\left(\epsilon, Q\right), \tag{5.13}$$

对所有 $\epsilon > 0$。

对于每个子集 $A \subseteq \hat{G}$，我们考虑投影 $\mathbb{P}_A: \ell^2(\hat{G}) \to \ell^2(A)$，它由一个乘子给出

$$\mathbb{P}_A = \bigoplus_{[\xi] \in A} \mathbf{1}_{\mathbb{C}^{d_\xi}}.$$

于是，我们可以写成

$$g = \mathbb{P}_A\, g + \mathbb{P}_{A^{\complement}}\, g, \quad g \in \ell^2(\hat{G}),$$

对于任意 $A \subseteq \hat{G}$，我们考虑算子 $Q_A \doteq Q\,\mathbb{P}_A$ 和 $Q_A^{\complement} \doteq Q\,\mathbb{P}_{A^{\complement}}$。注意，$Q_{\hat{G}} = Q$。

ˆˆˆ 令 $\mathcal{P}_\sharp(G)$ 为 G 的所有有限子集组成的集合。若 $A \in \mathcal{P}_\sharp(G)$，则算子 Q_A 是有限秩算子，其中

$$\operatorname{rank}(Q_A) \le \operatorname{rank}(\mathbb{P}_A) = \sum_{[\xi]\in A} {d_\xi}^2, \tag{5.14}$$

and

$$Q - Q_A = Q_{A^{\complement}}.$$

特别是，

$$\|Q - Q_A\|_{op} = \left\|Q_A^{\complement}\right\|_{op}.$$

更准确地说， Q、 Q_A 和$Q_A^{\complement}$ 的算子范数由以下结果给出。

引理 5.1. 设 $K : G\times G \to \mathbb{C}$ 是 *(2.10)* 中的正定对称核，且 T 是迹类有界连续线性算子。这些算子

$$Q : \ell^2(\hat{G}) \longrightarrow C(G), \quad with \quad Q(C) \doteq \mathfrak{F}^{-1}\left[H_{\sigma_T} C\right],\ C \in \ell^2(\hat{G}),$$

$$Q_A = Q\,\mathbb{P}_A, \quad and \quad Q_A^{\complement} = Q\,\mathbb{P}_{A^{\complement}},$$

ˆ其中 $A \in \mathcal{P}_\sharp(G)$ 和 $C(G)$ 分别表示配备上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的连续函数空间，满足

$$\|Q\|_{op}^2 = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)], \quad \|Q_A\|_{op}^2 = \sum_{[\xi]\in A} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)], \quad and \quad \|Q_A^{\complement}\|_{op}^2 = \sum_{[\xi]\in A^{\complement}} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)].$$

证明。 由 [25] 中的引理 10.3.28 以及不等式 (2.5)（$r = 2$、 $p = 2$ 和 $q = \infty$）可得

$$\left|\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\xi(x) H_{\sigma_T}(\xi) C(\xi)]\right| \le \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \|H_\sigma(\xi)\|_{S^2} \|C(\xi)\|_{S^2},$$

对所有 $x \in G$ 均成立；由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \|H_\sigma(\xi)\|_{S^2}\|C(\xi)\|_{S^2} \le \left(\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \|H_\sigma(\xi)\|_{S^2}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \|C(\xi)\|_{S^2}^2\right)^{1/2} = \|H_\sigma\|_{\ell^2(\hat{G})}\|C\|_{\ell^2(\hat{G})},$$

对所有 $C \in \ell^2(\hat{G})$，则

$$\|Q(C)\|_{\sup} = \|(\mathfrak{F}^{-1}\left[H_{\sigma_T} C\right])\|_{\sup} \le \|H_{\sigma_T}\|_{\ell^2(\hat{G})}\|C\|_{\ell^2(\hat{G})},$$

对所有 $C \in \ell^2(\hat{G})$。由此，

$$\|Q\|_{op} \le \|H_{\sigma_T}\|_{\ell^2(\hat{G})}.$$

如果 $C = H_{\sigma_T}$ 和 $x = e$ （ G 的单位元），那么

$$(Q(C))(x) = (\mathfrak{F}^{-1}\left[{H_{\sigma_T}}^2\right])(e) = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)] = \|H_{\sigma_T}\|_{\ell^2(\hat{G})}^2,$$

并且可以达到上限。因此，

$$\|Q\|_{op} = \|H_{\sigma_T}\|_{\ell^2(\hat{G})} = \left(\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)] \right)^{1/2}.$$

其余范数等式可通过类似计算得出。 ■

由于根据 [8, 定理 5.1]，我们有 $\|H_{\sigma_T}\|^2_{\ell^2(\hat{G})} = \sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)] = \mathrm{Tr}\ T$，因此得到

$$\|H_{\sigma_T}\|_{\ell^2(\hat{G})} = \sqrt{\|T\|_{S^1}},$$

因此

$$\|Q\|_{op} = \sqrt{\|T\|_{S^1}}.$$

将 $\epsilon = \epsilon\|Q\|_{op}/\|Q\|_{op}$ 和 $Q = Q\|Q\|_{op}/\|Q\|_{op}$ 改写后，根据覆盖数的性质 2. 和 4.，我们有

$$C(\epsilon, Q) = C\left(\frac{\epsilon}{\|Q\|_{op}}, \frac{Q}{\|Q\|_{op}} \right), \tag{5.15}$$

为简便起见，我们可以假设 $\|Q\|_{op} = \|T\|_{S^1} = 1$。

5.2 算子秩估计

$\hat{}$ 在上一小节中，我们考察了某些 $A \in \mathcal{P}_\sharp(G)$ 的有限秩算子 Q_A。本小节中，我们考虑一族更小的有限集 A，并估计相应算子的秩。

设 $\mathcal{L}_G$ 为 G 上的拉普拉斯算子（或泛包络代数的卡西米尔元）。对于每个 $[\xi] \in \hat{G}$，ξ 的矩阵元是 $\mathcal{L}_G$ 的特征函数，其特征值记为 $-\lambda_{[\xi]}$ [25, 定理 10.3.13]。换言之，

$$-\mathcal{L}_G \xi_{ij}(x) = \lambda_{[\xi]} \xi_{ij}(x), \quad x \in G,$$

其中 $\lambda_{[\xi]} \geq 0$ 和 $1 \leq i, j \leq d_\xi$。此外，$\langle\xi\rangle \doteq (1 + \lambda_{[\xi]})^{1/2}$ 是一阶椭圆伪微分算子 $(I - \mathcal{L}_G)^{1/2}$ 的一个特征值。

$\hat{}$ 我们不再对所有可能的有限子集 $A \in \mathcal{P}_\sharp(G)$ 进行优化，而是对由下式给出的有限集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in(1,+\infty)}$ 进行优化

$$A_\lambda \doteq \{[\xi] \in \hat{G} \mid \quad \langle\xi\rangle \leq \lambda\}, \tag{5.16}$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$ 均成立。显然，族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in(1,+\infty)}$ 随着 λ 的增大而递增，

$$A_\lambda \subset A_\mu, \quad \lambda \leq \mu,$$

对所有 $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$。这样，适用于式 (5.16) 中的有限集 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in(1,+\infty)}$ 的引理 5.1 以及算子

$$Q_{A_\lambda} = Q\,\mathbb{P}_{A_\lambda}, \quad \text{and} \quad Q^{\complement}_{A_\lambda} = Q\,\mathbb{P}_{A_\lambda^{\complement}},$$

我们有

$$\|Q_{A_\lambda}\|_{op}^2 = \sum_{[\xi]\in A_\lambda} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)] = \sum_{\langle\xi\rangle\le\lambda} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)],$$

and

$$\|Q_{A_\lambda}^{\complement}\|_{op}^2 = \sum_{[\xi]\in A_\lambda^{\complement}} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)] = \sum_{\langle\xi\rangle>\lambda} d_\xi \operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)].$$

此外，我们可以将公式 (5.14) 写成

$$\operatorname{rank}(Q_{A_\lambda}) \le \sum_{\langle\xi\rangle\le\lambda} {d_\xi}^2.$$

注 5.2. 我们记录两个有时会用到的性质：

$$\sum_{\langle\xi\rangle\le\lambda} {d_\xi}^2\langle\xi\rangle^{\alpha n} \asymp \lambda^{(\alpha+1)n} \quad for\ \alpha > -1,$$

$$\sum_{\langle\xi\rangle\ge\lambda} {d_\xi}^2\langle\xi\rangle^{\alpha n} \asymp \lambda^{(\alpha+1)n} \quad for\ \alpha < -1,$$

为 $\lambda\to\infty$。上述公式见于 *[9]*，最初是在渐近意义下推导得到的，即 $\lambda\to+\infty$。然而，不难看出，这些公式对于 $\lambda\in(1,+\infty)$ 也一致成立。因此，存在正实常数 $C_{\alpha,n}$, $c_{\alpha,n}$, $W_{\alpha,n}$ 和 $w_{\alpha,n}$，使得

$$c_{\alpha,n}\lambda^{(\alpha+1)n} \le \sum_{\langle\xi\rangle\le\lambda} {d_\xi}^2\langle\xi\rangle^{\alpha n} \le C_{\alpha,n}\lambda^{(\alpha+1)n}, \quad for\ \alpha > -1, \tag{5.17}$$

$$w_{\alpha,n}\lambda^{(\alpha+1)n} \le \sum_{\langle\xi\rangle\ge\lambda} {d_\xi}^2\langle\xi\rangle^{\alpha n} \le W_{\alpha,n}\lambda^{(\alpha+1)n}, \quad for\ \alpha < -1, \tag{5.18}$$

对所有 $\lambda\in(1,+\infty)$，均有。

注意，由公式 (5.17) 取 $\alpha=0$，可得

$$\operatorname{rank}(Q_{A_\lambda}) \le C_{0,n}\lambda^n, \quad \lambda\in(1,+\infty). \tag{5.19}$$

5.3 与具有迹和有限阶行列式符号的核相关的估计

在本小节中，我们考虑如 (2.9) 中的 T $L^2(G)$ 上的一个正迹类不变算子。为了求算子 Q 的覆盖数估计，并由此得到 I_K算子的估计，我们对符号 σ_T 的迹和行列式定义如下的阶概念。

定义 5.3. 设 $\beta>0$。如果存在正实常数 b_T，使得符号 σ_T 的迹的阶小于或等于 β，则

$$\operatorname{Tr}[\sigma_T(\xi)] \le b_T\, d_\xi\, \langle\xi\rangle^{-\beta}$$

^分别对所有 $[\xi]\in G$ 成立。

我们注意到，如果符号 σ_T 的迹的阶小于或等于 β，那么

$$\sum_{[\xi]\in\hat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)] \le b_T \sum_{[\xi]\in\hat{G}} {d_\xi}^2 \langle\xi\rangle^{-\beta}, \tag{5.20}$$

并且如果我们假设 $\beta > n$，那么由 [8, 引理 3.8] 可得

$$\sum_{[\xi]\in\hat{G}} {d_\xi}^2 \langle\xi\rangle^{-\beta} < \infty,$$

并且 T 是一个迹类算子。

定义 5.4. 设 $\gamma > 0$。符号 σ_T 的行列式的阶大于或等于γ，若存在正实常数 c_T 和 ω_T 使得

$$(\det[\sigma_T(\xi)])^{\frac{1}{d_\xi}} \ge c_T\, e^{-2\omega_T\langle\xi\rangle^\gamma},$$

$\hat{}$分别对所有 $[\xi]\in G$成立。

定理 5.5. 设 K 是定义在 n 维紧李群G上的正定对称核，由级数展开式 *(2.10)* 表示。若存在 $\beta > n$，使得符号σ_T 的迹的阶小于或等于 β，则存在正实常数 C_n、 b_T 和κ_β 使得

$$\ln C\left(\epsilon, I_K\right) \le \frac{C_n \left(4 b_T \kappa_\beta \|T\|_{S^1}\right)^{\frac{n}{\beta-n}}}{\epsilon^{\frac{2n}{\beta-n}}} \ln\left[1 + \frac{4\sqrt{\|T\|_{S^1}}}{\epsilon}\right],$$

对所有 $\epsilon \in \left(0, \frac{\sqrt{\|T\|_{S^1}}}{\sqrt{3}}\right)$均成立。

证明。 我们考虑对算子Q的近似$Q_{A_\lambda} \doteq Q\,\mathbb{P}_{A_\lambda}$，其中 A_λ 如公式 (5.16) 所示，且对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$，都有 $\|Q - Q_{A_\lambda}\| \le \delta$。换言之，

$$\sum_{[\xi]\in A_\lambda^{\complement}} d_\xi \,\mathrm{Tr}\left[\sigma_T(\xi)\right] \le \delta^2, \quad \lambda \in (1, +\infty), \quad \delta > 0.$$

根据覆盖数的性质 1，我们写出

$$\mathcal{C}(\epsilon, Q) \le \mathcal{C}(\epsilon - \delta, Q_{A_\lambda})\mathcal{C}(\delta, Q - Q_{A_\lambda}), \quad 0 < \delta < \epsilon,$$

根据覆盖数的性质 4 和性质 3，我们得到

$$\mathcal{C}(\epsilon, Q) \le \mathcal{C}(\epsilon - \delta, Q_{A_\lambda}) \le \left(1 + \frac{2}{\epsilon - \delta}\sqrt{\sum_{[\xi]\in A_\lambda} d_\xi \,\mathrm{Tr}\left[\sigma_T(\xi)\right]}\right)^{\mathrm{rank}\left(Q_{A_\lambda}\right)}, \quad 0 < \delta < \epsilon.$$

记

$$\delta_\lambda \doteq \sqrt{\sum_{[\xi]\in A_\lambda^{\complement}} d_\xi \,\mathrm{Tr}\left[\sigma_T(\xi)\right]}, \quad \lambda \in (1, +\infty),$$

我们看到 $\delta_\lambda \le \delta < \epsilon$。因此，若像第 5.1 小节末尾那样考虑 $\|Q\| = 1$，则有

$$\mathcal{C}(\epsilon, Q) \le \left(1 + \frac{2\sqrt{1-\delta_\lambda^2}}{\epsilon - \delta_\lambda}\right)^{\operatorname{rank}\left(Q_{A_\lambda}\right)}, \quad \lambda \in (1, +\infty), \quad \delta_\lambda < \epsilon < 1.$$

假设 $\epsilon < \frac{1}{\sqrt{3}}$，函数 $F\colon (0, \epsilon) \to (0, +\infty)$ 定义为

$$F(\delta) \doteq \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\epsilon - \delta},$$

对所有 $\delta \in (0, \epsilon)$，该函数严格递增。若假设 $\beta > n$，使得符号σ_T 的迹的阶小于或等于 β，则

$$\operatorname{Tr}\left[\sigma_T(\xi)\right] \le b_T\, d_\xi \langle \xi \rangle^{-\beta}, \quad \beta \in (n, +\infty), \quad [\xi] \in \hat{G},$$

对于某个常数 $b_T \in (0, +\infty)$。然后由 (5.18) ($\alpha = -\beta/n$) 得到

$$\delta_\lambda^2 = \sum_{\langle \xi \rangle > \lambda} d_\xi \operatorname{Tr}\left[\sigma_T(\xi)\right] \le b_T \sum_{\langle \xi \rangle > \lambda} d_\xi^2 \langle \xi \rangle^{-\beta} \le b_T \kappa_\beta \lambda^{n-\beta},$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$，且对于某个常数 $\kappa_\beta \in (0, +\infty)$。由此可得

$$F\left(\delta_\lambda\right) \le \frac{\sqrt{1 - b_T \kappa_\beta \lambda^{n-\beta}}}{\epsilon - \sqrt{b_T \kappa_\beta}\, \lambda^{\frac{n-\beta}{2}}},$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$。注意，若假设满足以下条件，则限制 $\delta_\lambda < \epsilon$ 成立：

$$\lambda > \left(\frac{b_T \kappa_\beta}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{\beta - n}}.$$

另一方面，由 (5.19)

$$\operatorname{rank}(Q_{A_\lambda}) \le C_n \lambda^n,$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$ 以及某个常数 $C_n \in (0, +\infty)$ 均成立。综合以上结果，我们得到

$$\mathcal{C}(\epsilon, Q) \le \left(1 + \frac{2\sqrt{1-\delta_\lambda^2}}{\epsilon - \delta_\lambda}\right)^{\operatorname{rank}\left(Q_{A_\lambda}\right)} \le \left(1 + \frac{2\sqrt{1 - b_T \kappa_\beta \lambda^{n-\beta}}}{\epsilon - \sqrt{b_T \kappa_\beta}\, \lambda^{\frac{n-\beta}{2}}}\right)^{C_n \lambda^n},$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$ 均成立，并且我们需要将函数 $H_\epsilon\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ 最小化，其定义为

$$H_\epsilon(\lambda) \doteq \left(1 + \frac{2\sqrt{1 - b_T \kappa_\beta \lambda^{n-\beta}}}{\epsilon - \sqrt{b_T \kappa_\beta}\, \lambda^{\frac{n-\beta}{2}}}\right)^{C_n \lambda^n},$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$ 均有定义，在区间上

$$\lambda \in \left(\left(\frac{b_T \kappa_\beta}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{\beta - n}}, +\infty\right).$$

如果我们称

$$\lambda_\epsilon \doteq \left(\frac{4b_T\kappa_\beta}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{\beta-n}},$$

then

$$\min_{\lambda\in(1,+\infty)} \ln H_\epsilon(\lambda) \le \ln H_\epsilon(\lambda_\epsilon) < C_n\lambda_\epsilon^n \ln\left[1+\frac{2}{\epsilon-\sqrt{b_T\kappa_\beta}\lambda_\epsilon^{\frac{n-\beta}{2}}}\right] = \frac{C_n\left(4b_T\kappa_\beta\right)^{\frac{n}{\beta-n}}}{\epsilon^{\frac{2n}{\beta-n}}}\ln\left[1+\frac{4}{\epsilon}\right].$$

由 (5.13) 和 (5.15)，可得 $\ln C(\epsilon, I_K) = \ln C\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\|T\|_{S^1}}}, \frac{Q}{\|Q\|}\right)$，其中 $\|T\|_{S^1} = \sum_{[\xi]\in\hat{}G} d_\xi \mathrm{Tr}[\sigma_T(\xi)]$。因此，如果

$$\mathrm{Tr}\left[\sigma_T(\xi)\right] \le b_T\|T\|_{S^1} d_\xi \langle\xi\rangle^{-\beta}$$

对于 $\beta\in(n, +\infty)$，我们得到上界

$$\ln C\left(\epsilon, I_K\right) = \ln C\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\|T\|_{S^1}}}, \frac{Q}{\|Q\|}\right) \tag{5.21}$$

$$\le \frac{C_n\left(4b_T\kappa_\beta\|T\|_{S^1}\right)^{\frac{n}{\beta-n}}}{\epsilon^{\frac{2n}{\beta-n}}}\ln\left[1+\frac{4\sqrt{\|T\|_{S^1}}}{\epsilon}\right], \tag{5.22}$$

对所有 $\epsilon\in\left(0, \frac{\sqrt{\|T\|_{S^1}}}{\sqrt{3}}\right)$。 ■

为了求算子 $I_K\colon \mathcal{H}_K\to C(G)$ 的覆盖数下界估计，我们考虑符号 σ_T 的行列式，其阶大于或等于 γ，如下所示。

定理 5.6. 设 T 是由 *(2.9)* 给出的有界迹类不变算子，K 是定义在 n 维紧李群 G 上、由级数展开式 *(2.10)* 表示的正定对称核。如果符号 σ_T 的行列式的阶大于或等于 γ，那么存在正实常数 $c_{0,\,n}$、ω_T、a_T 和 μ_γ，使得

$$\ln C\left(\epsilon, I_K\right) \ge \left(\frac{c_{0,n}}{\omega_T\mu_\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{\gamma}} \frac{c_{0,n}}{1+\frac{n}{\gamma}}\left(\ln\left[\frac{a_T\sqrt{\|T\|_{S^1}}}{\epsilon}\right]\right)^{1+\frac{n}{\gamma}},$$

for all $\epsilon\in\left(0, a_T\sqrt{\|T\|_{S^1}}e^{-\frac{\omega_T\mu_\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{c_{0,n}}}\right)$.

证明。设 A_λ 如（5.16）所示，我们考虑如下复合算子

$$L_{A_\lambda}: l^2(A_\lambda) \xrightarrow{\jmath_\lambda} l^2(\hat{G}) \xrightarrow{Q} C(G) \xrightarrow{\jmath} L^2(G) \xrightarrow{P_\lambda} F_\lambda,$$

其中 $\jmath_\lambda$ 和 $\jmath$ 分别表示由 $\ell^2(A_\lambda)\hookrightarrow\ell^2(\hat{}G)$和 $C(G)\hookrightarrow L^2(G)$给出的嵌入，而 P_λ 是 $L^2(G)$在 $F_\lambda \doteq \jmath Q\jmath_\lambda(\ell^2(A_\lambda))$上的正交投影。显然，$\|P_\lambda\|_{op} = \|\jmath\|_{op} = \|\jmath_{A_\lambda}\|_{op} = 1$ 以及算子

$$L_{A_\lambda} = P_\lambda\circ\jmath\circ Q\circ\jmath_\lambda : \ell^2(A_\lambda)\to F_\lambda$$

是双射的。根据覆盖数的性质2.和4.,

$$C\left(\epsilon, L_{A_\lambda}\right) \leq C(1, P_\lambda) C(1, \jmath) C\left(\epsilon, Q\right) C\left(1, \jmath_\lambda\right) = C\left(\epsilon, Q\right),$$

对所有 $\epsilon \in (0, +\infty)$，由于 $\dim \ell^2(A_\lambda) = \dim(F_\lambda)$，我们可以在不等式 (5.11) 中使用覆盖数的下界，从而

$$\frac{\sqrt{\det\left(L_{A_\lambda}^* L_{A_\lambda}\right)}}{\epsilon^{\dim \ell^2(A_\lambda)}} \leq C\left(\epsilon, L_{A_\lambda}\right),$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$ 和 $\epsilon \in (0, +\infty)$。
通过直接计算,

$$L_{A_\lambda}^* L_{A_\lambda} C = \sigma_T C,$$

对所有满足 $\lambda \in (1, +\infty)$ 的 $C \in \ell^2(A_\lambda)$，由此

$$\det\left(L_{A_\lambda}^* L_{A_\lambda}\right) = \prod_{[\xi] \in A_\lambda} \left(\det \sigma_T(\xi)\right)^{d_\xi},$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$，并且

$$\frac{\prod\limits_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} \left(\det \sigma_T(\xi)\right)^{\frac{d_\xi}{2}}}{\epsilon^{\dim \ell^2(A_\lambda)}} \leq C\left(\epsilon, L_{A_\lambda}\right),$$

对所有 $\lambda \in (1, +\infty)$ 和 $\epsilon \in (0, +\infty)$。
根据公式 (5.17)，其中 $\alpha = 0$,

$$\dim \ell^2(A_\lambda) = \sum_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} d_\xi^2 \geq c_{0,n} \lambda^n,$$

对于所有 $\lambda \in (1, +\infty)$，以及某个常数 $c_{0,n} \in (0, +\infty)$。若假设符号 σ_T 的行列式的阶大于或等于 γ，则

$$\left(\det \sigma_T(\xi)\right)^{\frac{1}{d_\xi}} \geq a_T^2 e^{-2\omega_T \langle \xi \rangle^\gamma}, \quad \gamma \in (0, +\infty),$$

对于某些常数 $a_T, \omega_T \in (0, +\infty)$，并且由 (5.17)（若 $\alpha = \gamma / n$）可得

$$\begin{aligned}
\ln\left[\prod_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} \left(\det \sigma_T(\xi)\right)^{\frac{d_\xi}{2}}\right] &= \sum_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} d_\xi^2 \ln\left[\left(\det \sigma_T(\xi)\right)^{\frac{1}{2 d_\xi}}\right] \\
&\geq \ln a_T \sum_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} d_\xi^2 - \omega_T \sum_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} d_\xi^2 \langle \xi \rangle^\gamma \\
&\geq c_{0,n} (\ln a_T) \lambda^n - \omega_T \mu_\gamma \lambda^{n+\gamma},
\end{aligned}$$

对所有的 $\lambda \in (1, +\infty)$ 以及某个常数 $\mu_\gamma \in (0, +\infty)$ 均成立。因此,

$$\ln\left[\frac{\prod_{\langle \xi \rangle \leq \lambda} \left(\det \sigma_T(\xi)\right)^{\frac{d_\xi}{2}}}{\epsilon^{\dim \ell^2(A_\lambda)}}\right] \geq -\omega_T \mu_\gamma \lambda^{n+\gamma} + c_{0,n} \lambda^n \ln\left[\frac{a_T}{\epsilon}\right],$$

对所有的 $\lambda \in (1,\ +\infty)$，我们需要最大化函数 $G_\epsilon\colon\ (1,\ +\infty) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$G_\epsilon(\lambda) \doteq -\omega_T \mu_\gamma \lambda^{n+\gamma} + c_{0,n}\lambda^n \ln\left[\frac{a_T}{\epsilon}\right], \quad \lambda \in (1, +\infty).$$

于是，对于

$$\epsilon < a_T e^{-\frac{\mu_\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{c_{0,n}}},$$

通过最大化可得

$$\max_{\lambda\in(1,+\infty)} G_\epsilon(\lambda) = \left(\frac{c_{0,n}}{\omega_T\mu_\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{\gamma}} \frac{c_{0,n}}{1+\frac{n}{\gamma}} \left(\ln\left[\frac{a_T}{\epsilon}\right]\right)^{1+\frac{n}{\gamma}}.$$

因此，若

$$(\det \sigma_T(\xi))^{\frac{1}{d_\xi}} \geq a_T^2 \|T\|_{S^1} e^{-2\omega_T \langle\xi\rangle^\gamma},$$

满足 $\omega_T,\ a_T,\ \gamma \in (0,\ +\infty)$，最终可得下界估计

$$\begin{aligned}\ln C\left(\epsilon, I_K\right) = \ln C\left(\epsilon, Q\right) &= \ln C\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\|T\|_1}}, \frac{Q}{\|Q\|_{op}}\right) \\ &\geq \left(\frac{c_{0,n}}{\omega_T\mu_\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{\gamma}} \frac{c_{0,n}}{1+\frac{n}{\gamma}} \left(\ln\left[\frac{a_T\sqrt{\|T\|_1}}{\epsilon}\right]\right)^{1+\frac{n}{\gamma}},\end{aligned}$$

for all $\epsilon \in \left(0, a_T\sqrt{\|T\|_{S^1}} e^{-\frac{\omega_T\mu_\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{c_{0,n}}}\right)$. ■

致谢。 第一作者和第三作者获得了FWO高级研究资助G022821N以及根特大学专项研究基金（BOF）的Methusalem计划资助（资助编号01M01021）。第二作者的研究工作获得了亚美尼亚共和国高等教育科学委员会（研究项目编号23RL-1A027）的资助，以及魏茨曼科学研究所Mor´a Miriam Rozen Gerber奖学金的资助。第二作者还谨向Duv´an Cardona博士致以诚挚谢意，感谢她在访问比利时根特分析与偏微分方程中心期间进行的宝贵讨论。

参考文献

[1] N. Aronszajn。再生核理论。《美国数学学会汇刊》，68:337–404，1950年。[2] Nachman Aronszajn。再生核理论。《美国数学学会汇刊》，68:337–404，1950年。[3] D. Azevedo、K. Gonzalez 和 T. Jord˜ao。魏尔斯特拉斯分形核覆盖数的精确估计。《复杂性杂志》，74：论文编号101692，2023年。

[4] N. Cristianini 和 J. Shawe-Taylor。《支持向量机及其他基于核的学习方法导论》。剑桥大学出版社，2000年。[5] F. Cucker 和 S. Smale。论学习的数学基础。《美国数学会通报》（新系列），39(1):1–49，2002年。[6] F. Cucker 和 D.X. Zhou。《学习理论：逼近理论的视角》。剑桥应用与计算数学专著。剑桥大学出版社，2007年。[7] J. Delgado 和 M. Ruzhansky。紧李群上的 L^p-核性、迹与格罗滕迪克-利茨基公式。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑），102(1):153–172，2014年。[8] J. Delgado 和 M. Ruzhansky。紧群上的薛定谔类与迹。《数学研究快报》，24(4):979–1003，2017年。[9] J. Delgado 和 M. Ruzhansky。紧李群上伪微分算子的 L^p-界。《朱西厄数学研究所杂志》，18(3):531–559，2019年。[10] J. Delgado 和 M. Ruzhansky。积分算子的薛定谔-冯诺依曼类。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑），154:1–29，2021年。[11] C. Ferreira。由正 ´定核生成的积分算子的特征值衰减。¸硕士 ˜论文，ICMC-USP，2008年。[12] J. Ferreira 和 V Menegatto。由光滑正定核定义的积分算子的特征值。《积分方程与算子理论》，64:61，2009年05月。[13] V. Fischer 和 M. Ruzhansky。幂零李群上的量子化，《数学进展》第314卷。Birkh¨auser/施普林格， [Cham], 2016。[14] K. Gonzalez 和 T. Jord˜ao。深入考察各向同性正定核的再生希尔伯特空间单位球的熵数。《数学分析及其应用杂志》，534(2):17，2024年。[15] K. Gonzalez 和 T. Jord˜ao。紧致两点齐性空间上带状正定核的再生希尔伯特空间熵数，arXiv，2025年。即将发表于《傅里叶分析与应用杂志》。[16] T. Jord˜ao 和 V. A. Menegatto。通过H¨older积分算子的特征值估计研究球面上的柯尔莫哥洛夫宽度。《数学结果》，74(2):论文编号74，18页，2019年。[17] M. Koeber 和 U. Sch¨afer。半正定矩阵的唯一平方根。《科学与技术中的数学教育国际期刊》，37(8):990–992，2006年。[18] A. N. Kolmogorov 和 V. M. Tikhomirov。函数空间中集合的 ε-熵与 ε-容量。《数学科学进展》，14(2 (86)):3–86，1959年。[19] T. K¨uhn。高斯再生核希尔伯特空间的覆盖数。《复杂性杂志》，27(5):489–499，2011年。

[20] J. Mercer。正型与负型函数及其与积分方程理论的联系。英国皇家学会哲学汇刊*A*辑，209:415–446，1909年。[21] H.Q. Minh、P. Niyogi 和 Y. Yao。Mercer定理、特征映射与光滑化。载于学习理论，计算机科学讲义第4005卷，第154–168页。施普林格，柏林，2006年。[22] E. H. Moore。关于真正定埃尔米特矩阵。《美国数学会通报》，23:59，1916年。[23] E. H. Moore。一般分析，美国哲学学会纪要第1卷。美国哲学学会，1935年。第一部分，1935年；第二部分，1939年。[24] M. B. Ruskai。冯·诺依曼代数上的迹不等式。数学物理通讯，26:280–289，1972年。[25] M. Ruzhansky 和 V. Turunen。伪微分算子与对称性，伪微分算子：理论与应用第2卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2010年。背景分析与高级主题。[26] Bernhard Sch¨olkopf 和 Alexander J. Smola。核学习：支持向量机、正则化、优化及其他。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，2002年。[27] I. Steinwart 和 A. Christmann。支持向量机。信息科学与统计学。施普林格，纽约，2008年。[28] I. Steinwart、D. Hush 和 C. Scovel。高斯径向基函数核的再生核希尔伯特空间的明确描述。*IEEE*信息论汇刊，52(10):4635–4643，2006年。[29] V.N. Vapnik。统计学习理论。Wiley-Interscience，1998年。[30] R. C. Williamson、A. J. Smola 和 B. Sch¨olkopf。通过紧算子的熵数研究正则化网络和支持向量机的泛化性能。*IEEE*信息论汇刊，47(6):2516–2532，2001年。[31] D.X. Zhou。学习理论中的覆盖数。《复杂性杂志》，18(3):739–767，2002年。[32] D.X. Zhou。学习理论中的再生核空间容量。*IEEE*信息论汇刊，49(7):1743–1752，2003年。