arXiv:2602.02324v1 [math.DS] 2 Feb 2026

由 H´énon 型映射生成的若干高秩自由群的全纯与随机动力学*

Andres Quintero Santander

关键词： 全纯动力系统、群作用、Fatou 集、平稳测度与不变测度；MSC2020：37F80, 37H10,37F10

摘要 我们研究由两个 H´énon 型映射生成的若干秩 2 自由群的全纯与随机动力学。对于这些简单构造的例子，我们证明 Fatou 集非空，且平稳测度的支撑位于某个紧集上。进一步谨慎处理后，我们可以构造出不存在平稳测度的例子。这些例子展示了研究非紧流形上的全纯群作用时可能出现的现象类型。

1 引言

经典全纯动力学通常研究单个映射的迭代。文献中有许多关于非紧复流形映射的例子。最早研究的例子是从 $\mathbb{C}$ 到其自身的多项式映射；在更高维情形中，最早的例子是 $\mathbb{C}^2$ 上的 H´énon 映射，参见例如[Hub86], [BS91]和 [FS92]。由更复杂的映射群[2] （或半群）所产生的作用会带来新的有趣现象。

历史上，这类研究通常针对紧流形/曲面开展（例如参见 [Can01]）。近年来，底流形的紧致性在

Andres QuinteroSantander 印第安纳大学印第安纳波利斯分校，420 University Boulevard，印第安纳波利斯，IN 46202 电子邮箱：ae-quinte@iu.edu

* 这是作者已接受的稿件。本文的最终出版版本将收录于 [《发展中国家的分析与偏微分方程：ISAAC-ICMAM 会议论文集》， 2025]。最终出版版本将在发表后于[https://doi.org/[insert DOI]] 在线发布。[2] 本文余下部分中的“群作用”均指比 $\mathbb{Z}$更复杂的群作用。

Cantat-Dujardin 最近的深入研究中发挥了重要作用，参见 [CD25] 及其中的参考文献。另一方面，非紧流形上的全纯群作用有许多自然的例子，其中包括广受关注的马尔可夫型曲面例子，见 [Can09], [CL09], [CDMB24] 和 [RR24]。在这类情形中，非紧性会带来有趣的现象，例如对于大多数参数，存在非空的 Fatou 集（参见 [RR24] 中的定理 E，以及 [Can09]中的第 4.1 节），或者不存在平稳测度（参见 [CDMB24]中的主定理和定理 8.3）。本文研究了一些利用经典 H´enon 映射构造的简单例子，用以展示这两种现象。

定义 1 设 $P \in \mathbb{C}[y]$，其中 $\deg P \geq 2$，且 $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。广义 H´enon 映射是定义在 $\mathbb{C}^2$ 上、具有以下形式的映射：

$$h(x, y) = (y, P(y) - \delta x)\,.$$

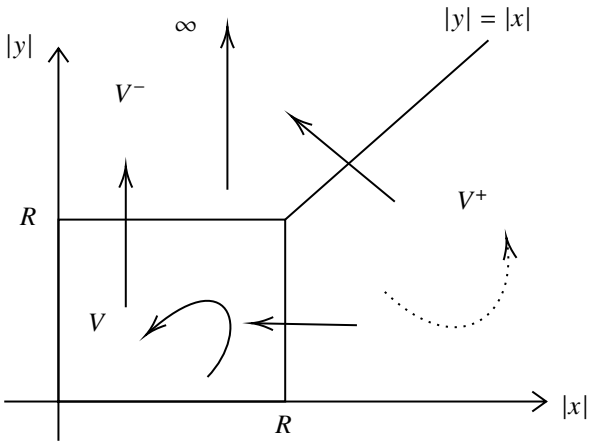
广义 H´enon 映射的有限复合的任意仿射共轭称为 H´enon 型映射。在本文中，我们将考察由 H´enon 型映射生成的以下群：

$$G = \langle h_1, h_2 \rangle \text{ where } h_1(x, y) = (y, P(y) - \delta x) \text{ and } h_2 := R_\theta^{-1} \circ h_1 \circ R_\theta. \quad (1)$$

这里，$R_\theta\colon\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是由矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 诱导的线性变换，其中 $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$；这一条件意味着群 G 不同构于 $\mathbb{Z}$；事实上，稍后我们将看到 $G \cong F_2$。我们研究该群在 $\mathbb{C}^2$ 上的作用及其轨道的行为。我们将证明 G 的 Fatou 集非空，并探讨该群 G 所诱导的随机动力学与遍历理论。我们关注关于被 G 保持不变的集合、轨道闭包，以及有关随机轨道统计性质的更定量问题。对于后者，我们需要描述平稳测度。这一概念在随机游走研究中十分常见（例如参见 [CDMB24]）。特别地，我们给出平稳测度不存在的充分条件，换言之，即随机动力学平凡的条件。这表明需要采用其他方法来研究 G 的轨道闭包。

2 H´enon 映射、复动力系统与 Fatou-Julia 分解

单个 H´enon 映射（在 $\mathbb{C}^2$ 上）的动力学由下列出现在 [Bed18] 上的过滤描述：



其中：
1. $h(V \cup V^-) \subset V \cup V^-$；2. $h(V^-) \subset V^-$；3. 对所有 $(x, y) \in V^-$，我们有 $\lim_{n\to\infty} \|h^n(x, y)\| = \infty$；以及4. 虚线箭头表示，点 $(x, y) \in V^+$ 在h 作用下的正向轨道只能停留有限时间，之后该轨道必须前往 V，或进入 V^- 区域并逃向无穷远。

复动力系统中的一个经典工具是 Fatou 集（及其对应的 Julia 集）。接下来我们定义正规性和 Fatou 集（参见 [Zal98]）：

定义 2 若映射族 $\mathrm{A} = \{ f_\alpha : X \to Y | \alpha \in I\}$ 满足：对于任意序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{A}$，要么存在一个子序列在紧子集上一致收敛到某个函数 $f : X \to Y$，要么适当地发散到无穷远，则称该映射族是正规族。仅当 Y 非紧致时，才需要考虑后一种情况。

定义 3 Fatou 集 F (A) 是定义域 X 的最大开子集，在该子集上，映射族 $\mathrm{A} = \{ f_\alpha : X \to Y | \alpha \in I\}$ 是正规的。A 的 Julia 集 J (A) 定义为 Fatou 集的补集。

Fatou 集的研究通常与单个映射的所有迭代所成的集合相关，这方面在文献中已有大量研究；但正如定义所示，这一概念也可以推广到更一般的映射族，例如群或映射半群，甚至更一般的情形。其核心思想是，Julia 集代表了在（半）群作用的迭代下呈现混沌行为的区域。在 Julia 集中，轨道行为难以预测，并且对初始条件敏感。相反，Fatou 集是动力学表现得更加稳定的区域。

定理 A 设 G 如(1)中所定义。则存在某个无界开集$\emptyset \neq U \subset \mathcal{F}(G)$，使得每个$(x, y) \in U$ 在任意序列$(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1}\}^{\mathbb{N}}$ 下的轨道都趋于无穷远，其中序列满足 $length(S_k(\omega)) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$。这里，$S_k(\omega) := \omega_k \circ \omega_{k-1} \circ \cdots \circ \omega_1$，其长度按约化后的结果计算。

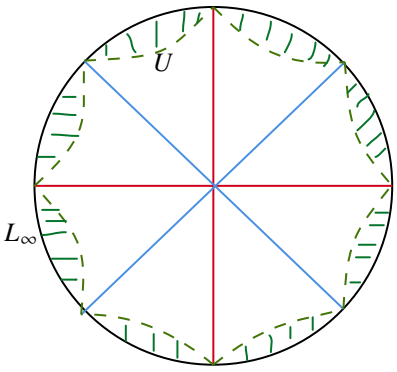
备注 *1* 注意，定理 A 意味着不存在这样的 $p \in \mathbb{C}^2$，其轨道在 $\mathbb{C}^2$ 中稠密。一个有趣的问题是，Julia 集 J (*G*) 中是否存在一点 p，使其轨道在 Julia 集 J(*G*) 中稠密（参见 [RR24] 的定理 A）。

由于 H´enon 映射是可逆的，原则上，我们可以研究由两个任意 H´enon 映射生成的群，并探索其群作用在 $\mathbb{C}^2$ 上的动力学。我们通过假设第二个生成元 h_2 是 h_1 经旋转共轭得到的，缩小了问题的范围。此外，我们要求该旋转的角度为 $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$，从而使 $\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2$，的不定点及其逆映射作为 $\mathbb{CP}^2$ 的映射时彼此分离。更准确地说，设 $\mathrm{h}_1(x, y) = (y, P(y) - \delta x)$ 是一个次数 $\deg(P) = d \geq 2$ 的广义 H´enon 映射，那么若 $\tilde{P}(x_1, x_2) = x_2^d P(x_1/x_2)$，则 h_1 可扩展为射影平面 $\mathbb{CP}^2$（在齐次坐标下）上的映射，如下所示：

$$h_1[x_0 : x_1 : x_2] = [x_1 x_2^{d-1} : \tilde{P}(x_1, x_2) - \delta x_0 x_2^{d-1} : x_2^d]. \tag{2}$$

我们为相空间获得了紧致性，但代价是现在 h_1 并非处处有定义。令 $L_\infty = \{x_2 = 0\}$ 为无穷远直线。注意，点 $p = [1 : 0 : 0] \in L_\infty$ 是这个双有理映射唯一的不定点，而无穷远直线 $L_\infty \setminus \{p\}$ 经 h_1 映射到不动点 $q = [0 : 1 : 0]$。类似地，q 是 h_1^{-1}唯一的不定点，且 h_1^{-1}将 $L_\infty \setminus \{q\}$ 压缩到 p。由于 R_θ 是旋转，我们可以计算其齐次坐标，并注意到 h_2 在无穷远直线上也有一个超吸引不动点 $\tilde{q}$，并且那里还有唯一的不定点 $\tilde{p}$；与前面类似，其逆映射的行为正好相反。因此，我们选取 $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$，使得 $\mathrm{h}_2 := R_\theta^{-1} \circ \mathrm{h}_1 \circ R_\theta$ 的不定点 $\tilde{p}$与 h_2^{-1} 的不定点 $\tilde{q}$ 满足集合 $\{p, q, \tilde{p}, \tilde{q}\}$ 中有 4 个互不相同的元素。如前所述，在此背景下，我们希望证明群 $G = \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2$ 的 Fatou 集非空。

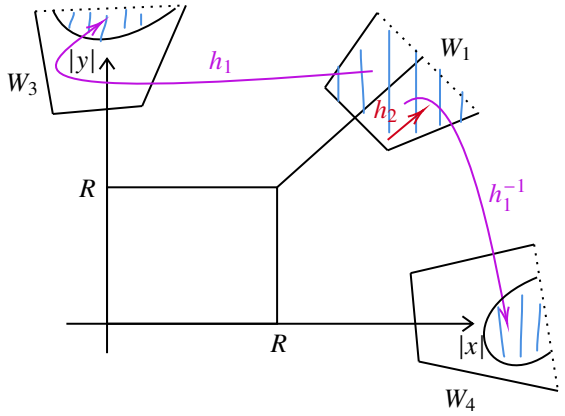
我们的策略如下：我们断言存在 Fatou 集 F (*G*) 的一个无界连通分支，其中包含 $L_\infty \setminus \{p, q, \tilde{p}, \tilde{q}\}$ 的一个邻域 U，使得对于每个 $(x, y) \in U \cap \mathbb{C}^2$，以及每个 $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1}\}^{\mathbb{N}}$，只要 $\mathrm{length}(S_k(\omega)) \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$，就有 $\lim_{k \to \infty} \|S_k(\omega) \cdot (x, y)\| = \infty$。以下是 $\mathbb{CP}^2$ 与 Fatou 集子集 U 的示意图：



这里，圆的边界就是无穷远直线，绿色区域是 Fatou 集的子集U，红色射线的端点表示 h_1 和 h_1^{-1} 的不定点，蓝色射线的端点则表示 h_2 和 h_2^{-1} 的不定点。这幅图是假设我们旋转了 $R_{\frac{\pi}{4}}$ 后绘制的，但读者可以看出，我们的推理适用于任何能将 h_1、h_2 及其逆映射的不定点分开的旋转。

首先要指出的是，证明 Markov 型示例存在 Fatou 集，需要更为细致的处理，并运用了 Teichm¨uller 理论中的思想；例如，参见 RR24] 中定理 E 的证明及相关评述。然而，要证明定理 A，我们只需要运用拓扑学思想。

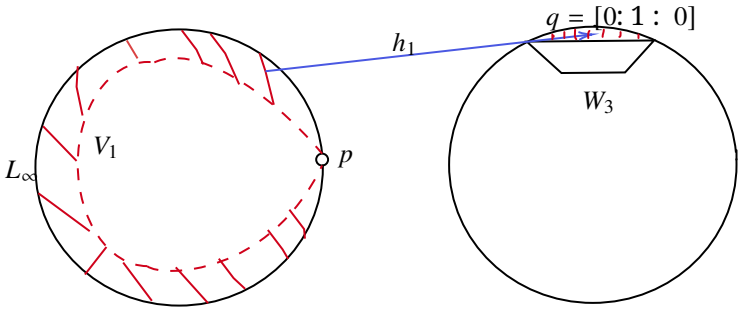
证明：首先考虑集合 $W_1 \subset V_{h_2}^-$（即通过迭代 h_2 逃向无穷远），使得对于所有 $(x,y) \in W_1$（对 h_2 也如此，只需取足够远处），都有 $\|\mathrm{h}_1(x,y)\| > 2\|(x,y)\|$，且 $\|\mathrm{h}_1^{-1}(x,y)\| > 2\|(x,y)\|$。换句话说，$W_1$ 是一个开集，其中每个点在 4 个映射中的 3 个作用下，其范数都会增至两倍以上。这个集合显然存在：只需取一个围绕 h_2 的吸引方向的截断锥，并要求该锥离 h_1 和 h_1^{-1} 的不定点足够远。事实上，为此我们可以利用 $\deg(P) \geq 2$ 这一事实，使其在 h_1 和 h_1^{-1} 的作用下范数都增加。



以类似的方式，存在截断锥 W_2、W_3 和 W_4，其中的点分别在施加 $\{\mathrm{h}_2^{-1}, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_1^{-1}\}$、$\{\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_2^{-1}\}$ 和 $\{\mathrm{h}_1^{-1}, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_2^{-1}\}$ 后范数增大。不失一般性，鉴于 H´énon 映射的逃逸行为，我们可以按如下意义将这些集合视为周期性的：如果 $\{a、\ b、\ b^{-1}\}$ 是使 W_i 中的点的范数加倍的三个映射（其中 a 给出主要的吸引方向），那么 $b(W_i) \subset W_j$，其中 W_j 在 $\{b、\ a、\ a^{-1}\}$ 作用下长度增加；对 b^{-1} 也有类似结论。这些截断锥如上图所示。特别地，如果 $(x、\ y) \in W_1$ 且 $\omega_1 \in \{\mathrm{h}_2, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_1^{-1}\}$，并且复合映射 $S_n(\omega)$ 中不存在平凡约简，则有：

$$\|S_n(\omega) \cdot (x,y)\| > 2^n \|(x,y)\|. \tag{3}$$

对每个 W_i 都有类似的结果。现在考虑映射 h_1，它以 q 为超吸引不动点，而 p 是其不定点。由于 $\mathbb{CP}^2$ 是紧致的且 h_1 连续，我们可以去掉不定点 p 的一个邻域 A，并利用其外部的一致连续性，得到无穷远直线上不属于 A 的部分的一个邻域 B，使得 $h_1(B) \subset W_3$。通过去掉 p 的更小邻域并重复这一论证，改进集合 B，使其包含 L_∞ 的更大部分。这样，通过穷尽法，我们可以得到一个开集 V_1，它包含 $L_\infty \setminus \{p\}$，使得 $h_1(V_1) \subset W_3$，其中 W_3 是围绕 q 的截断锥。



当我们趋近于 p 时，这个集合可能会变得更稀疏，但这对我们的目的影响不大。注意，这一推理源于 h_1 将无穷远直线压缩到 q，而 W_3 可以理解为 q 的一个邻域。类似地，存在一个邻域 V_2，它属于 $L_\infty \setminus \{q\}$，且 $\mathrm{h}_1^{-1}(V_2) \subset W_4$；还存在邻域 V_3 和 V_4，分别属于 $L_\infty \setminus \{\tilde{p}\}$ 和 $L_\infty \setminus \{\tilde{q}\}$，并具有类似性质。设 $U = \bigcap_{i=1}^4 V_i$，它是开且非空的，因为它包含 $L_\infty \setminus \{p, q, \tilde{p}, \tilde{q}\}$。此外，请注意，$U$ 的构造使得 $(x, y) \in U \cap \mathbb{C}^2$ 的轨道在任意行走$S_n(\omega) = \omega_n \circ \cdots \circ \omega_1$ 下都趋向无穷远，其中有限词 $S_n(\omega)$ 的长度随 $n \to \infty$ 趋于无穷。更精确地说：对所有 $(x, y) \in U$，以及所有满足 $\mathrm{length}(S_n(\omega)) = k$ 的 $\omega \in G^{\mathbb{N}}$，我们有

$$\|S_n(\omega) \cdot (x, y)\| > 2^{k-1}\|(x, y)\|. \tag{4}$$

显然，存在长度为 $\not\to \infty$ 的序列 $\omega \in G^{\mathbb{N}}$，其中 $\mathrm{length}(S_n(\omega)) \not\to \infty$，当 $n \to \infty$ 时。然而，由于 $\mathrm{length}(S_n(\omega))$ 受上界限制，且我们使用的是有限字母表，根据鸽巢原理，这类序列中 $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子序列（事实上是常值子序列）。由于正规性还包括映射序列局部趋于无穷大的情形，因此对于任意 $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ 和任意 U 中的点，总存在一个局部一致收敛子序列，这意味着 $U \subset \mathrm{F}(G)$。□

注 *2* 此外，请注意，如果 $\mathrm{length}(S_n(\omega)) \to \infty$，我们可以取一个子序列 $_{n\to\infty}$，使得：

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(\omega)[x : y : 1] \in \{p, q, \tilde{p}, \tilde{q}\}.$$

这是另一种运用鸽巢原理的论证，利用生成元仅将 L_∞ 收缩到这 4 个点。

3 平稳测度

研究轨道闭包的一种方法，是考虑关于空间上随机游走的更定量的问题。Breiman大数定律在 [CDMB24] 中的表述意味着，可以通过描述由作用于 X 的群 Γ 上的测度所诱导的相空间 X 上的平稳测度，来研究点的随机轨道的分布。类似的论述也可见于 [Fur02] 。有鉴于此，我们来定义平稳测度：

定义 4 [EW11，第 8] 章 设 Γ 为一个配备概率测度 ν的 σ-紧致可度量群。假设 Γ 连续作用于一个 $\sigma-$ 紧致度量空间 X 上。若 $\mu \in \mathrm{M}(X)$ 是 ν- **平稳**的，则称

$$\mu = \int_{\Gamma} g_{*}\mu d\nu(g)$$

或等价地

$$\int_{X} f(x)d\mu(x) = \int_{\Gamma}\int_{X} f(g\cdot x)d\mu(x)d\nu(g)$$

对所有 $f \in C_c(X)$。

特殊情形：

(i) 如果 μ 是 ν-平稳测度集合的一个极值点，我们称其为 ν-遍历测度。

(ii) 如果对于所有的 $g \in G$，我们都有 $g_{*}\mu = \mu$，则称 μ 为 $G-$不变测度。

我们以很一般的方式定义了平稳测度，但其基本思想如下：考虑一个赋有测度 ν 的群 Γ，它作用于一个带有Borel测度 μ 的概率空间 X。要求 μ 在群的每个元素作用下都保持不变，是一个非常强的假设，因此我们改为要求一个较弱的条件： μ 在平均意义下保持不变。理解这一条件的另一种方式如下：

引理 1（[Fur02，命题 2.2。2]） 测度 μ 是 ν-平稳/遍历的，当且仅当空间 $\Gamma^{\mathbb{N}} \times X$ 上的测度 $\nu^{\mathbb{N}} \times \mu$ 是 T-不变/遍历的，其中T： $G^{\mathbb{N}} \times X \to G^{\mathbb{N}} \times X$ 是映射 $T\left(\left(\omega_n\right)_{n=1}^{\infty}, x\right) := \left(\sigma\left(\omega_n\right)_{n=1}^{\infty}, \omega_1 \cdot x\right)$，而 σ 是左移位算子。

我们的具体问题如下：为由 H´énon 映射生成的群 G 赋予概率测度 $\nu = a_1\delta_{h_1} + a_2\delta_{h_2} + a_3\delta_{h_1^{-1}} + a_4\delta_{h_2^{-1}}$，其中$\sum_{i=1}^{4} a_i = 1$，且对每个 i都有 $a_i > 0$；也就是说，该测度支撑在这个对称生成元集上。证明：若 μ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的一个 $\nu-$平稳测度，则测度的支撑 μ 是紧致的。

4 关于 G的平稳测度结果

现在我们转向随机动力学。首先介绍一个有用的引理:

引理 2 满足 $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ 使得（长度（S_n（ω））$_{n\in\mathbb{N}}$ 无界的序列集合，其测度为 *1*。事实上，（长度（ S_n （ ω））$_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎处处具有线性增长。

特别地，这告诉我们，对于 G 中的几乎每个映射序列，集合 U 中点的轨道都会趋于无穷远（见方程（4））。该引理直接由经典的 Kesten 判据关于可 amen 性的结论得到， [Kes59], 更准确地说，得到以下该判据的推论（见 [Qui14]）：

定理 1（Kesten）

设 G 为一个离散群， ν 为 G上的博雷尔概率测度。假设由 ν 的支撑在 G 中生成的子群不是可 *amen* 群。令 K 为 G 的有限对称子集，满足 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K^n$ ，并在 G 上定义距离为$dist$（g, h）：=最小值$\{n : \ g^{-1}h \in K^n\}$。则存在 $\epsilon > 0$ ，使得如果（g_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是取自 G 、服从分布 ν 的独立随机元素序列，那么几乎处处有：当 n 足够大时， $dist$（Id, $g_k \ldots\ldots g_2 g_1$） $\geq \epsilon n$。

在我们的语境中，这意味着，如果 $G = h_1, h_2$ 是一个非 amenable 群，那么存在某个 $\epsilon > 0$ ，使得几乎必然地，对于 $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ ，当 n 足够大时，有 length($S_n(\omega)$) $\geq \epsilon n$。这对我们的测度 ν 成立，因为它支撑在一个生成元集合上。事实上，我们的群 G 是非 amenable 的，而且， $G \cong \mathbb{F}_2$:

引理 3 群 $G = \langle h_1, h_2 \rangle$ 同构于由两个生成元生成的自由群。

注意到，互不相交的截断锥 $\{W_i\}_{1\leq i\leq 4}$ 的周期行为形成了乒乓引理的情形（见 [Loh17] 第 4.3 章），因为我们借助适当的映射在截断锥之间来回跳转。因此， G 是秩 2 的自由群。另一种理解方式是考察 H´énon 映射在多项式微分同胚群的 Bass-Serre 树上诱导的平移。这种方法稍微复杂一些，因此关于 Bass-Serre 理论的详细内容请参阅 [Lam00]。

我们的第二个主要定理如下:

定理 B 如果 μ 是 ν-平稳博雷尔概率测度，在 $\mathbb{C}^2$ 上，那么 支集 μ 是紧致的。

为证明这一点，我们需要以下版本的遍历定理:

定理 2（[Fur02，随机遍历定理 4.1.1]）

设 (X, μ) 是一个概率空间，且 Γ 是一个在 X上连续作用的群。若 μ是 ν-遍历的，且 $f \in L^1(X, \mu)$ ，则对于 $\nu^{\mathbb{N}}$-几乎处处的 $\omega \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ 以及 μ-几乎处处的 x ，有:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(s_n(\omega) \cdot x) = \int_X f d\mu. \tag{5}$$

现在我们可以概述定理 B 的证明:

证明：情形 $\nu = \frac{1}{4}\left(\delta_{h_1} + \delta_{h_1^{-1}} + \delta_{h_2} + \delta_{h_2^{-1}}\right)$ 的证明思路如下。注意，只需证明集合 U、 W_1， W_2， W_3 和 W_4 的测度为零，因为它们的并集是 L_∞ 的一个邻域。对于 U，这是因为我们可以利用 ν-平稳性质，将 μ 写成对任意长度的约化词在平均意义下不变的形式，特别是:

$$\mu(U) = \frac{1}{|\Omega_n|} \sum_{\omega \in \Omega_n} \mu(\omega U) \tag{6}$$

其中 Ω_n 是长度为 n 的约化词集合（这是由于权重[3]的对称性）。给定 $\epsilon > 0$, 我们可以利用内正则性，找到原点的某个球 $B_R(0)$，使得 $\mu(\mathbb{C}^2 \setminus B_R(0)) < \epsilon$。由 (4) 可知：对所有 $t > 0$，都存在某个 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得若 $(x,\ y) \in U$，且 $w = \omega_k \dots \omega_1 \in G$ 是满足 $k \geq k_0$ 的约化词，则 $w(x,\ y) \notin B_t(0)$。因此，

$$\mu(U) \leq \frac{1}{|\Omega_n|} \sum_{\omega \in \Omega_n} \mu(\mathbb{C}^2 \setminus \overline{B}_R(0)) < \frac{1}{|\Omega_n|} \sum_{\omega \in \Omega_n} \epsilon = \epsilon.$$

因此，由于 $\epsilon > 0$ 是任意的， $\mu(U) = 0$。要证明截断锥也满足同样的结论则更为微妙：假设 $\mu(W_1) > 0$, 并且不失一般性地假设 μ 是 ν-遍历的（因为我们可以对 μ 作遍历分解）。由 $\epsilon > 0$ 的内正则性，存在一个紧集 $K_\epsilon \subset W_1$，使得 $0 < \mu(W_1) - \epsilon < \mu(K_\epsilon)$。于是，根据随机遍历定理：对于 $\nu^{\mathbb{N}}$-几乎处处的 ω 以及 μ-几乎处处的 $(x,\ y)$，我们有

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{K_\epsilon}(s_n(\omega) \cdot (x, y)) = \mu(K_\epsilon) \tag{7}$$

不失一般性地假设 $(x,\ y) \in K_\epsilon$ （因为其测度非零），并考虑以 h_2 开始的序列。这是可行的，因为 $\nu^{\mathbb{N}}(\{h_2\} \times G^{\mathbb{N}}) > 0$, 于是几乎所有此类序列都满足 (7)。我们强调，对于典型的 ω，根据定理 1， $S_n(\omega)$ 的长度呈线性增长。这保证了几乎必然地，最终 $(x,\ y)$ 会离开 K_ϵ 且不再返回，矛盾。因此， $\mu(W_1) = 0$; 对其他锥也可作类似推理。

对于一般情形的证明：我们可以像处理截断锥时那样使用定理 2，证明在一般情形下也有 $\mu(U) = 0$。请注意，关于截断锥的推理并不依赖权重的对称性，因此这一方法在一般情形下同样适用。

□

回顾一下，映射h 的填充 Julia 集是 $K(h) = \{(x, y) : (h^n(x, y))_{n \in \mathbb{Z}}$ 有界$\}$。我们最后指出以下直接推论:

定理 C 如果填充 *Julia* 集 $K(h_1)$ 与 $K(h_2)$ 不相交，那么就不存在ν-平稳测度。

[3] 这并不难证明，简单的归纳论证即可。

事实上，假设 $(x, y) \in \operatorname{supp} \mu$，其中 ν 是某个平稳测度。由于 $K(\mathrm{h}_1) \cap K(\mathrm{h}_2) = \emptyset$，因此 (x, y) 不在这个交集中。不失一般性，设 $(x, y) \notin K(\mathrm{h}_1)$，这意味着在 h_1 作用下，(x, y) 的 $\mathbb{Z}$-轨道中存在一些点，它们可以不断趋向无穷远。由于 $\operatorname{supp} \mu$ 是紧致的（特别是有界的），因此存在某个 $n \in \mathbb{Z}$，使得 $\mathrm{h}_1^n(x, y) \notin \operatorname{supp} \mu$；于是 (x, y) 不可能属于 μ 的支撑，这就导致矛盾。

5 结论

˜ ˜注意，如果我们考虑群 $G = h_1, h_2$˜，其中 h_2 是 H´énon 映射 $h \neq h_1$ 的一般共轭旋转，满足 h 对 q 也是超吸引的，并且与 h_1 具有相同的不定点，那么相同的思想和结果同样适用。但可以预期，在一般情形下需要更复杂的思想。

致谢

作者在完成这项工作期间获得了美国国家科学基金会 DMS-2154414 资助的部分支持。感谢我的导师 Roland Roeder 博士一直以来的指导，以及他与我分享的有趣问题。此外，我非常感谢 Julio Rebelo 博士提出的有益建议并参与讨论。最后，我也感谢 Arnaud Nerriere；他独立研究了同一个问题（最近也成功证明了更一般情形下的结果），感谢他提供的宝贵帮助，以及许多有趣的讨论，这些讨论帮助本项工作逐渐成形。

参考文献

[Bed18] Eric Bedford. 讲义：多项式自同构的动力学，作用于$\mathbf{C}^2$。讲义，2016–2018年。[BS91] Eric Bedford 和 John Smillie。$\mathbf{C}^2$上的多项式微分同胚：流、平衡测度与双曲性。《数学发明》，103(1):69–99，1991年。[Can01] S. Cantat。关于曲面自同构群的动力学。《变换群》，6(3):201–214，2001年。[Can09] Serge Cantat。Bers 与 H´énon、Painlev´é 与 Schr¨odinger。《杜克数学杂志》，149(2):411–460，2009年。[CD25] Serge Cantat 和 Romain Dujardin。射影曲面上大型自同构群的双曲性。*J. ´Ec. polytech. Math.*，12:421–480，2025年。[CDMB24] Serge Cantat、Christophe Dupont 和 Florestan Martin-Baillon。马尔可夫曲面上的动力学：平稳测度的分类。*arXiv* 预印本 *arXiv:2404.01721*，2024年4月。[CL09] Serge Cantat 和 Frank Loray。特征簇上的动力学与 Painlev

´ 59 7 2927 2978, é VI 方程 2009

的 Malgrange 不可约性。《傅里叶研究所年刊》*(*格勒诺布尔*)*，( ): – 。[EW11] Manfred Einsiedler 和 Thomas Ward。遍历理论：以数论为视角，《数学研究生教材》第259卷。施普林格伦敦有限公司，伦敦，2011年。

[FS92] John Erik Fornaess 和 Nessim Sibony。$\mathbf{C}^2$ 上的复 H´énon 映射与 Fatou-Bieberbach 定义域。《杜克数学杂志》，65(2):345–380，1992年。[Fur02] Alex Furman。群上的随机游走与随机变换。载于 Boris Hasselblatt 和 Anatole Katok 编，《动力系统手册》第1A卷，第549–616页。爱思唯尔，2002年。[Hub86] John H. Hubbard。复域中的 H´énon 映射。载于《混沌动力学与分形（亚特兰大，佐治亚州，*1985*年）》，《数学科学与工程笔记报告》第2卷，第101–111页。学术出版社，奥兰多，佛罗里达州，1986年。[Kes59] Harry Kesten。群上的对称随机游走。《美国数学会会刊》，92:336–354，1959年。[Lam00] St´ephane Lamy。复平面上的多项式自同构： ´代数研究´与动力学。博士论文，图卢兹第三保罗·萨巴蒂埃大学，图卢兹，2000年。博士论文，NNT：2000TOU30005。[Loh17] Clara Loh。几何群论。Universitext。施普林格，查姆，2017年。导论。[Qui14] Jean-François Quint。群上随机游走导论。讲义，信息与随机性学校，智利瓦拉斯港，2014年12月。[RR24] Julio Rebelo 和 Roland Roeder。特征簇自同构群的动力学与 Painlev´é 6 的 Fatou/Julia 分解。《印第安纳大学数学杂志》，73(6):1967–2038，2024年。[Zal98] Lawrence Zalcman。正规族：新视角。《美国数学会通报》*(*新系列*)*，35(3):215–230，1998年。