拟提交至 JINST

分箱与非分箱横向单自旋不对称性提取，包括背景扣除与展开

S.F. Pate,[1] **H. Arachchige**, **C. Kuruppu**, **D. Nawarathne**

美国新墨西哥州拉斯克鲁塞斯市新墨西哥州立大学物理系，邮编 *88003*

电子邮件：spate@nmsu.edu

摘要：在涉及极化靶和/或束流的实验中确定横向单自旋不对称度时，可能会遇到一些挑战，例如：（1）极化幅度随时间变化很大；（2）不同自旋态的极化幅度不相同；（3）不同自旋态或不同靶材料对应的积分亮度不同；和/或（4）某些运动学变量需要进行展开；这只是其中几个例子。我们提出了基于分箱分析和非分箱最大似然优化确定不对称性的一般方法，其中纳入了对受探测器效应影响而发生展宽的运动学变量进行展开，同时也考虑了背景扣除的可能性。

关键词：分析与统计方法；数据处理方法；数据约简方法

arXiv:2602.02325v2 [hep-ex] 26 Feb 2026

[1]通讯作者

目录

1 引言 **1**

2 不经展开的不对称性的分箱估计 **2**

3 不经展开的不对称度估计 **4**

3.1 修正光度和/或极化不平衡的实验权重 5

3.2 小不对称度下的对数似然近似 6

3.3 必须扣除背景时的非分箱对数似然 6

4 生成用于测试方法的事件 **7**

5 方法测试结果 **8**

5.1 分箱分析 8

5.2 非分箱对数似然分析 8

6 展开：分箱与非分箱 **12**

6.1 使用 EventClassification 的似然比估计 13

6.2 使用 OmniFold 的非分箱展开 15

7 结论 **19**

8 致谢 **19**

1 引言

在核物理和粒子物理的许多情况下，粒子之间的相互作用包含自旋-动量关联，会在散射角分布中产生方位角调制。可以使用自旋极化束流和/或靶来研究此类关联，其中极化方向垂直于束流轴。此时，角分布的方位角分量通常具有以下形式，

$$A(\phi) \propto 1 + P A_N \sin(\phi_{\text{pol}} - \phi), \tag{1.1}$$

其中，ϕ 是探测到散射粒子时的方位角，ϕ_{pol} 是极化方向的方位角，P 是极化的大小，而 A_N 是横向单自旋不对称度[1]，由自旋-动量关联背后的物理机制所产生。实验旨在根据散射角分布确定 A_N。为了消除与探测器缺陷相关的一类系统效应，通常会

[1]也称为分析功率。

不时地“翻转自旋”；例如，按照既定计划，$\phi_{\rm pol}$ 可能会从 $+\pi/2$（自旋“向上”）变为 $-\pi/2$（自旋“向下”）。通常也应尽量使极化大小 P 保持近乎恒定，但这并非总是可行；无论如何，经常测量极化都很重要。此外，感兴趣的事例（称为“信号”或“前景”）可能伴有运动学特征相同但不对称性不同的本底事例。必须使用某种模型（基于模拟数据和/或数据）消除背景的影响，才能正确确定前景的不对称性。最后，探测器和分析软件重建方位角 ϕ 的能力可能并不完善，从而产生需要进行反卷积处理的“展宽”或“区间迁移”效应。

在本手稿中，我们将首先建立用于确定横向单自旋不对称性的分箱和非分箱分析方法，其中包括进行背景扣除的必要性。所呈现的部分内容属于“常识”，但也有一些结果是本文首次发表。接下来，我们将介绍在展宽效应大到需要进行展开时所需的额外步骤，分别适用于分箱和非分箱分析。

2 不对称性的分箱估计：不进行展开

我们将建立一种通用的分箱分析方法，用于确定存在需要扣除的背景时的 A_N。若要涵盖最一般的情况，即每种自旋态下的极化 P 和积分光度 L 可能并不相同，则应从按方位角 ϕ 分箱的前景产额的最基本表达式入手。

$$Y_F^{\pm}(\phi) = L^{\pm}\sigma_F[1 + P^{\pm}A_F \sin(\pm\pi/2 - \phi)] \tag{2.1}$$

我们调整了符号表示，以区分前景和背景； A_F 对应于引言中提到的A_N。下标 F 表示这是前景过程（即关注的过程）的产额（Y_F）、截面（σ_F）和不对称性（A_F）。“±”表示数据采集时极化靶处于自旋向上（+）还是自旋向下（–）状态。背景过程对应的产额（下标 B）为:

$$Y_B^{\pm}(\phi) = L^{\pm}\sigma_B[1 + P^{\pm}A_B \sin(\pm\pi/2 - \phi)] \tag{2.2}$$

在实验中，这些前景和背景产额出现在同一个运动学区间内，无法彼此区分。我们测量总产额（下标 T），它是前景和背景之和。

$$Y_T^{\pm}(\phi) = Y_F^{\pm}(\phi) + Y_B^{\pm}(\phi) \tag{2.3}$$

为去除背景的影响，我们必须建立背景过程模型，该模型可以通过实验本身确定，也可以依据对背景过程的详细了解进行模拟。为便于讨论，我们假设根据相邻运动学区间的产额对背景建模；这种方法通常称为“旁带”法，因为背景位于“前景峰”下方，而旁带则是峰左右两侧的运动学区间。我们假设旁带中的不对称性与

峰下背景中的不对称性相同。我们将基于旁带对背景产额的估计记为 Y_{SB}。

$$Y_{SB}^{\pm}(\phi) = L^{\pm}\sigma_B[1 + P^{\pm}A_B \sin(\pm\pi/2 - \phi)] \tag{2.4}$$

产额 Y_{SB} 是一个测量量，与 Y_T一样，因为它基于边带运动学区间中的产额；要根据这些边带区间中的产额确定估计值 Y_{SB} ，需要采用某种模型，而该模型中的不确定性将成为最终结果中系统不确定度的来源。

现在，我们可以计算总产额中的亮度归一化实验不对称性，

$$a_T(\phi) = \left(\frac{Y_T^+(\phi)}{L^+} - \frac{Y_T^-(\phi)}{L^-}\right)\Bigg/\left(\frac{Y_T^+(\phi)}{L^+} + \frac{Y_T^-(\phi)}{L^-}\right) \tag{2.5}$$

$$= \frac{(P^+ + P^-)(\sigma_F A_F \cos\phi + \sigma_B A_B \cos\phi)}{2[\sigma_F + \sigma_B] + (P^+ - P^-)(\sigma_F A_F \cos\phi + \sigma_B A_B \cos\phi)} \tag{2.6}$$

$$= \frac{(P^+ + P^-)(A_F \cos\phi + f_B(\phi) A_B \cos\phi)}{2[1 + f_B(\phi)] + (P^+ - P^-)(A_F \cos\phi + f_B(\phi) A_B \cos\phi)} \tag{2.7}$$

其中我们利用了 $\sin(\pm\pi/2 - \phi) = \pm\cos\phi$这一性质。因子 $f_B(\phi) = \sigma_B/\sigma_F$ 是本底/前景比；如果背景过程和/或探测器效率具有独立于自旋相关效应的某种 ϕ依赖性，该比值可能随 ϕ 区间而变化。我们通过将基于边带估算的本底产额 $Y_{SB}(\phi)$ 除以估算的前景产额 $Y_T(\phi) - Y_{SB}(\phi)$，并对自旋求和，来确定因子 $f_B(\phi)$：

$$y_R(\phi) = \left(\frac{Y_{SB}^+(\phi)}{L^+} + \frac{Y_{SB}^-(\phi)}{L^-}\right)\Bigg/\left(\frac{Y_T^+(\phi) - Y_{SB}^+(\phi)}{L^+} + \frac{Y_T^-(\phi) - Y_{SB}^-(\phi)}{L^-}\right) \tag{2.8}$$

$$= \frac{2\sigma_B + (P^+ - P^-)\sigma_B A_B \cos\phi}{2\sigma_F + (P^+ - P^-)\sigma_F A_F \cos\phi} \tag{2.9}$$

$$= f_B(\phi)\frac{2 + (P^+ - P^-)A_B \cos\phi}{2 + (P^+ - P^-)A_F \cos\phi} \tag{2.10}$$

于是我们可以求出前景/本底比，

$$f_B(\phi) = y_R(\phi)\frac{1 + \frac{1}{2}(P^+ - P^-)A_F \cos\phi}{1 + \frac{1}{2}(P^+ - P^-)A_B \cos\phi} \tag{2.11}$$

$$\approx y_R(\phi)\left[1 + \frac{1}{2}(P^+ - P^-)(A_F - A_B)\cos\phi\right] \tag{2.12}$$

其中我们作了如下假设：$\left|\frac{1}{2}(P^+ - P^-)\, A_B \cos\phi\right| \ll 1$。若情况确实如此，则我们也可以稳妥地得出结论：$f_B(\phi) \approx y_R(\phi)$。只有当极化度 P^+ 与 P^- 彼此差异很大时，该假设才会成为问题；在展示该方法的检验时，我们将检查由此假设产生的偏差。

在求得前景/本底比 $f_B(\phi)$ 后，我们现在来关注背景不对称性项 $A_B \cos\phi$。该项由边带中的不对称性确定

产额。

$$a_{SB}(\phi) = \left(\frac{Y^{+}_{SB}(\phi)}{L^{+}} - \frac{Y^{-}_{SB}(\phi)}{L^{-}}\right) \Bigg/ \left(\frac{Y^{+}_{SB}(\phi)}{L^{+}} + \frac{Y^{-}_{SB}(\phi)}{L^{-}}\right) \tag{2.13}$$

$$= \frac{(P^{+} + P^{-})\sigma_B A_B \cos\phi}{2\sigma_B + (P^{+} - P^{-})\sigma_B A_B \cos\phi} \tag{2.14}$$

$$= \frac{(P^{+} + P^{-}) A_B \cos\phi}{2 + (P^{+} - P^{-}) A_B \cos\phi} \tag{2.15}$$

然后求解 $A_B \cos\phi$,

$$A_B \cos\phi = \frac{2a_{SB}(\phi)}{(P^{+} + P^{-}) - (P^{+} - P^{-})a_{SB}(\phi)} \equiv a'_{SB}(\phi) \tag{2.16}$$

现在，凡是出现 $A_B \cos\phi$ 的地方，我们都可以代入直方图 $a'_{SB}(\phi)$。总产额中的实验不对称性现在可以写成如下形式。

$$a_T(\phi) = \frac{(P^{+} + P^{-})[A_F \cos\phi + y_R(\phi)a'_{SB}(\phi)]}{2[1 + y_R(\phi)] + (P^{+} - P^{-})[A_F \cos\phi + y_R(\phi)a'_{SB}(\phi)]} \tag{2.17}$$

由此我们可以求解 $A_F \cos\phi$，这正是我们的目标。

$$A_F \cos\phi = \frac{a_T(\phi)\left[2[1 + y_R(\phi)] + (P^{+} - P^{-})y_R(\phi)a'_{SB}(\phi)\right] - (P^{+} + P^{-})y_R(\phi)a'_{SB}(\phi)}{(P^{+} + P^{-}) - (P^{+} - P^{-})a_T(\phi)} \tag{2.18}$$

将方程 2.18 的右侧简单拟合到余弦函数，即可得到前景不对称性 A_F。

3 不经分箱的不对称度估计：不进行展开

给定的散射事件 i 将具有特定的极化幅度 P_i、极化方向 $\phi_{\text{pol},\,i}$ 以及方位角 ϕ_i。基于角分布中方位角分量的形式，此类事例的归一化概率分布函数 P_i 将为

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2\pi}\left[1 + P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)\right]. \tag{3.1}$$

将所有事件合并起来，我们构造出似然 L，用于表示在给定 A_N 的特定取值时，这组事件发生的可能性。

$$\mathcal{L} = \prod_i \frac{1}{2\pi}[1 + P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)] \tag{3.2}$$

出于数值计算方面的考虑，通常更常用似然的自然对数。

$$\ln\mathcal{L} = \sum_i \ln\left(\frac{1}{2\pi}[1 + P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)]\right) \tag{3.3}$$

ˆ 根据我们的一组测量值，通过最大化对数似然确定不对称性的最佳值 A_N。

$$\frac{d}{dA_N}\ln\mathcal{L} = \sum_i \frac{d}{dA_N}\ln\left([1 + P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)]\right)\Big|_{\hat{A}_N} = 0 \tag{3.4}$$

不确定度 $\sigma_{\hat{A}_N}$ 由似然在极值点处的曲率确定。

$$\sigma^2_{\hat{A}_N} = \left(-\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{dA_N^2} \right)^{-1} \Bigg|_{\hat{A}_N} = \left(\sum_i P_i^2 \sin^2(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i) \right)^{-1} \tag{3.5}$$

每个事例可能都需要具有不同的权重， w_i^{exp} 。例如，如果自旋向上的事例集对应的积分光度与自旋向下的事例集不同，那么自旋向上的事例应与自旋向下的事例采用不同的权重，权重之比应与自旋向上和自旋向下数据集的光度比成正比。我们用上标“exp”表示这些权重由实验确定。此时，似然的形式如下。

$$\ln \mathcal{L} = \sum_i w_i^{\text{exp}} \ln \left(\frac{1}{2\pi} [1 + P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)] \right) \tag{3.6}$$

使用权重时，方程 3.5 并不是计算不确定度的正确公式。Langenbruch [1]推导出了使用权重时不确定度的正确形式；在我们的情况下，结果如下：

$$\sigma^2_{\hat{A}_N} = \frac{\sum_i \left(w_i^{\text{exp}} \frac{P \sin(\phi_{\text{pol}} - \phi)}{1 + P A_N \sin(\phi_{\text{pol}} - \phi)} \Big|_{\hat{A}_N} \right)^2}{\left(\sum_i w_i^{\text{exp}} \frac{P^2 \sin^2(\phi_{\text{pol}} - \phi)}{[1 + P A_N \sin(\phi_{\text{pol}} - \phi)]^2} \Big|_{\hat{A}_N} \right)^2}. \tag{3.7}$$

3.1 用于修正光度和/或极化不平衡的实验权重 ces

回顾一下，在提取单自旋不对称性的分箱分析中会出现什么情况。对于某个特定的 ϕ 分箱，我们预期的事件数为：

$$Y^{\pm}(\phi) = L^{\pm} \sigma [1 + P^{\pm} A_N \sin(\pm\pi/2 - \phi)] \tag{3.8}$$

其中， L 为积分光度， σ 为自旋平均截面，上标“±”表示自旋向上（+）或自旋向下（–）的事件集。在分箱分析中，我们根据光度对产额直方图 $Y^{\pm}$ 进行归一化： $Y_N^{\pm}(\phi) = Y^{\pm}(\phi)/L^{\pm}$ 将用于后续分析。在非分箱分析中，我们使用事件权重（w^{exp}）来实现同样的目标。这些权重的形式应满足某些约束。我们希望权重与光度成反比；如果某个自旋态的光度是另一个自旋态的两倍，那么该自旋态的权重就应是另一个自旋态的一半。权重应为数量级为 O (1) 的数值，以避免数值问题。如果两种自旋态的光度相同，那么权重应为 1。满足这三个约束的一种形式为：

$$w^+ = \frac{L^+ + L^-}{2L^+} \qquad w^- = \frac{L^+ + L^-}{2L^-}. \tag{3.9}$$

如果极化度大小 $P^{\pm}$ 彼此不相等呢？权重也必须对此加以考虑。在产额表达式（方程 3.8）中，我们看到乘积 LPA_N 出现了；为了消除对 A_N 测定中的偏差，我们需要根据乘积 LP 进行加权。因此，同时考虑 $L^{\pm}$ 和 $P^{\pm}$ 不平衡的权重为

$$w^+ = \frac{L^+P^+ + L^-P^-}{2L^+P^+} \qquad w^- = \frac{L^+P^+ + L^-P^-}{2L^-P^-}. \tag{3.10}$$

这些将是我们用于自旋向上和自旋向下事件的权重 w^{exp} 。我们将证明，这些权重能够使对数似然分析返回 A_N 的正确估计值。

3.2 小不对称性情况下的对数似然近似

不对称性 A_N 的绝对值远小于 1，这种情况十分常见。在这种情况下，我们可以利用 ln(1 + x) 关于小量 x 的展开。

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots \qquad |x| << 1 \tag{3.11}$$

此时，似然的对数可以用以下形式进行近似。

$$\ln \mathcal{L} = \sum_i w_i^{\text{exp}} \frac{1}{2\pi} \left[P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i) - \frac{1}{2} P_i^2 A_N^2 \sin^2(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i) \right] \tag{3.12}$$

随后，可以通过求似然的极值，以确定性方式求得 A_N 的最优值。

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{dA_N} = \frac{1}{2\pi} \sum_i w_i^{\text{exp}} \left[P_i \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i) - A_N P_i^2 \sin^2(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i) \right] = 0 \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_N = \frac{\sum_i w_i^{\text{exp}} P_i \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)}{\sum_i w_i^{\text{exp}} P_i^2 \sin^2(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)} \tag{3.14}$$

不确定度 $\sigma_{\hat{A}_N}$ 通过方程 3.7求得。

3.3 必须扣除背景时的非分箱对数似然

为了确定感兴趣事例的真实产额，通常需要去除背景。背景可能来自另一个物理过程、组合本底或其他原因。这里我们不对背景的成因作任何假设；我们只假设已使用某种模型估算背景事件。

如前所述，为便于讨论，我们考虑这样一种情况：背景位于谱中的一个“峰”下方，并利用峰左侧和右侧的“旁带”来估算峰下方的背景事件。必须使用某种模型，根据旁带事件确定背景事件的估计值；这里我们不对该模型作任何假设，只假设它已被正确使用。当然，需要改变该模型的参数，以确定与该模型相关的系统不确定度；这里开发的方法也可用于进行这项测定。

由于需要扣除背景，因此在加权对数似然方法中，我们为本底事例赋予负权重。我们将展示这一非常简单的方案行之有效。

4 生成事件以检验该方法

为检验分箱分析和非分箱对数似然技术，我们根据模型生成事例。假设某实验中的典型情况：使用自旋极化靶测量事例，靶有两种自旋取向："自旋向上"和"自旋向下"分别用 $\phi_{\text{pol}} = +\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$ 表示。记录的事例 i 将包含自旋方向、方位角和测得的极化值：$(\phi_{\text{pol},\ i},\ \phi_i,\ P_i)$。自旋向上（$L^+$）和自旋向下（$L^-$）数据集的积分亮度已知。

- ϕ_i - 在范围 $[-\pi, \pi]$ 内按照均匀分布随机抽取。
- $\phi_{\text{极化},\ i}$ - 根据与两种自旋态相关的相对光度，随机分配为 $-\frac{\pi}{2}$ 或 $+\frac{\pi}{2}$。
- P_i - 这些值可能会随时间变化；目前我们将使用固定的自旋向上 (P^+) 和自旋向下 (P^-) 极化度值，不应假定二者相等。

实验在探测事例时会有接受度和/或效率 $e(\phi)$，其取决于 ϕ。生成模拟事件时需要考虑这一点。然而，在分析这些事件时，我们不会假定已知效率的具体形式。在测试中，我们使用了三种简单的效率形式。

- $e(\phi) = 1$ 理想探测器
- $e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\phi\right]$ 包含正弦 ϕ 依赖性
- $e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\ \phi\right]$ 包含余弦 ϕ 依赖性

效率的第三种形式包含一个 $\cos\phi$ 项，这一点至关重要，因为它与我们的物理信号具有相同的方位角依赖性：$\sin(\pm\pi/2 - \phi) = \pm\cos\ \phi$。因此，这种效率形式是对我们分析方案最严格的检验。

现在需要将方位角调制嵌入这组事件中。具体做法是计算一个权重 W_i，其表达式为

$$W_i = \left[1 + P_i A_N \sin(\phi_{\text{pol},i} - \phi_i)\right] e(\phi) \tag{4.1}$$

并将其与在 $[0, 2]$ 范围内均匀生成的随机数进行比较；如果随机数小于权重 W_i，我们就保留该事例。通过这种方式，不对称性 A_N、极化 P 和效率 $e(\phi)$ 都会影响是否保留某个事例。

如果要纳入背景，我们就需要修改生成测试事例的方法。对于感兴趣的事例（前景），需要设定一个"真值"产额和不对称性；对于背景，需要设定一个真值产额和不对称性；对于基于旁带的背景模型，也需要设定一个真值产额和不对称性。我们假设旁带事件的不对称性与真实背景相同。此外，我们还需要假设一个积分前景/本底比，并用它在每次生成数据时随机决定要生成哪种事例。必须将真值前景事例列表和背景事例列表合并为一个"总"事件列表，因为在实际实验中，我们无法区分它们；它们都会对

峰的感兴趣区域内的总产额作出贡献。旁带事件仍保留在各自的事件列表中。

为测试所有分析方法，构建了四个标准数据集。这些数据集定义于表1中。还创建了其他数据集，用于各种目的，并在需要时另行说明。

表1：用于测试展开的各数据集参数列表。从左到右，测试的复杂程度逐渐增加。“偏振/亮度不平衡”指靶的两种自旋态之间的极化度大小和积分亮度不相等。

测试名称	“简单”	“背景不对称性”	“偏振/亮度不平衡"	“余弦效率”
事件数	200,000	200,000	200,000	200,000
背景与前景比	0.2	0.2	0.2	0.2
前景不对称性	0.2	0.2	0.2	0.2
背景不对称性	0.0	-0.1	-0.1	-0.1
极化度	$P^+ = 1.0$ $P^- = 1.0$	$P^+ = 1.0$ $P^- = 1.0$	$P^+ = 0.9$ $P^- = 0.7$	$P^+ = 0.9$ $P^- = 0.7$
光度 上升与下降比率	1:1	1:1	3:7	3:7
效率	1	1	1	$\frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2}\cos\ \phi]$

5 方法测试结果

5.1 分箱分析

对于分箱分析，我们使用第4节中所述的事件列表，创建总产额 $Y_T^{\pm}(\phi)$ 和背景的基于旁带的估计 $Y_{SB}^{\pm}(\phi)$ 的直方图，然后按照第2节所述开展分析。

5.2 非分箱对数似然分析

在加权对数似然分析中，总列表（真实前景加真实背景）中的事件获得一个形如方程 3.10的正权重，而旁带列表中的事件则获得一个类似的负权重。接着，我们可以最大化 $\ln\mathcal{L}$ ，也可以使用方程 3.14 来求出最优前景 A_N。无论采用哪种方法，我们都继续使用方程 3.7 来计算 A_N 的不确定度。

我们首先使用表 1 中定义的标准数据集，展示分箱（第 2 节）和非分箱（第 3 节）分析方法的统计性质。每种方法均使用了 1000

表2：列出每项测试各重复1000次后的结果。“均值 A_N”是针对前景不对称性的1000次测试结果直方图的均值，σ_{1000} 是该直方图的宽度，而 σ_1 是单次结果对应的统计不确定度。分析方法为：(a) 分箱（第2节）和(b) 非分箱对数似然（第3节）。

	分析方法	均值 A_N	σ_{1000}	σ_1
“简单”	(a)	0.1977	0.0044	0.0044
	(b)	0.1999	0.0044	0.0044
“背景不对称性”	(a)	0.1976	0.0046	0.0044
	(b)	0.1999	0.0046	0.0044
“偏振/亮度不平衡”	(a)	0.1975	0.0061	0.0060
	(b)	0.1999	0.0061	0.0060
“余弦效率”	(a)	0.1971	0.0057	0.0060
	(b)	0.1968	0.0056	0.0060

次，随后将结果绘制成直方图，并测量直方图的均值和宽度。结果如表 2 所示。可以看到，结果分布的宽度与单次测量的不确定度一致，且均值 A_N 值与注入值 0.2 相差不到一个标准差。这证明了这两种方法是正确的。值得注意的是，当两个自旋态的极化度和积分亮度不平衡时，结果的统计显著性会降低，这正如预期；因此，大多数实验都尽量保持极化幅度相同、积分亮度相同。即便如此，仍应注意，当极化度和光度不平衡时，结果并无任何偏差的迹象；这为我们在第 $f_B(\phi) \approx y_R(\phi)$2 节中使用近似 提供了依据。

有了我们的测试装置，我们可以展示对数似然技术在提取不对称性 A_N 方面的诸多性质。目前，我们的测试中不会包含任何本底事例。

- 如果效率中不包含类似物理信号的项（在我们的例子中，即$\cos\phi$ 项），那么就没有必要翻转自旋。对数似然技术将返回正确的 A_N值。表3中的几个示例对此进行了说明。当效率包含$\cos\phi$ 项且不存在自旋翻转时，该技术会失效。值得注意的是，翻转自旋可以显著提高统计显著性。当然，在实际中，我们永远无法绝对确定接受度和/或效率不包含会模仿物理信号的成分。基于这些原因，所有涉及极化束流或靶的实验都会不时反转自旋方向。

- 如果两个自旋态的光度相等，并且极化幅度P^+ 和 P^- 也相等，那么方程3.10 中的权重都等于 1，此时对数似然方法将适用于任意效率模型。表4中的几个示例对此进行了说明。

- 如果两个自旋状态的光度和/或极化度大小不相等（$L^+ \neq$

表 3：使用公式 3.14 在三种不同探测器效率模型下提取的不对称性$e(\phi)$，以及相对光度的两种不同取值：自旋向上占 100%，或 50−50% 自旋向上-向下。所有事件的极化均设为 $P = 1$ 。嵌入不对称性为 $A_N = 0$。2。这组测试中没有背景。每个模拟数据样本包含 500,000 个事件。请注意，当效率包含 $\cos\phi$ 项时，100% 自旋向上的情况下该技术会失效。

效率模型	100% 自旋向上	50 – 50% 自旋向上-向下
理想探测器： $e(\phi_i) = 1.0$	0.199 ± 0.031	0.201 ± 0.002
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\phi\right]$	0.199 ± 0.031	0.200 ± 0.002
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\phi\right]$	0.650 ± 0.002	0.199 ± 0.002

表 4：使用方程 3.14 在三种不同探测器效率模型$e(\phi)$下提取的不对称性；各自旋态的光度相等，且极化度大小均为 $P^{\pm} = 0.9$。嵌入不对称性为 $A_N = 0.1$。每个模拟数据样本均包含 50,000 个事件。

效率模型	提取不对称性
理想探测器： $e(\phi_i) = 1.0$	0。103 ± 0。007
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}$正弦$\phi\right]$	0。106 ± 0。007
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}$余弦$\phi\right]$	0。104 ± 0。007

L^- 和/或 $P^+ \neq P^-$），那么必须使用方程 3.10 中的权重，以确保对任何效率模型，对数似然方法都能奏效。表 5列举了许多例子来说明这一点。请注意，如果光度或极化的不平衡非常严重，统计显著性就会降低。

表5：使用方程3.14 在三种不同探测器效率模型下提取的不对称性$e(\phi)$，各自旋态的光度不相等，极化幅度也不相等。嵌入不对称性为 $A_N = 0$。1。每个模拟数据样本包含 50,000 个事件。

效率模型	相对光度	P^+	P^-	提取不对称性
$e(\phi_i) = 1.0$	40:60 上旋:下旋	0.9	0.7	0.105 ± 0.008
$e(\phi_i) = 1.0$	上旋:下旋 30:70	0.6	0.7	0.109 ± 0.011
$e(\phi_i) = 1.0$	上旋:下旋 20:80	0.9	0.4	0.110 ± 0.012
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}$正弦$\phi\right]$	40:60 上： 下	0.9	0.7	0.105 ± 0.008
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}$正弦$\phi\right]$	30:70 向上:向下	0.6	0.7	0.103 ± 0.011
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\phi\right]$	20:80 向上:向下	0.9	0.4	0.104 ± 0.012
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\phi\right]$	上旋:下旋 40:60	0.9	0.7	0.105 ± 0.008
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\phi\right]$	上旋:下旋 30:70	0.6	0.7	0.103 ± 0.010
$e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\phi\right]$	20:80 上行:下行	0.9	0.4	0.099 ± 0.012

在一些实验中，极化幅度可能随时间变化；例如，靶材受到辐射损伤可能导致极化降低。为考虑这种可能性，我们在一个范围内引入了均匀变化的极化，例如 [0。75，0。95]„ 且自旋向上和自旋向下事件的变化范围可能不同。方程3.10中的权重使用平均极化值。提取的不对称度（见表6）始终处于注入值的一个标准差范围内。极化变化不会降低该技术的提取能力。同样，当光度或极化的不平衡较大时，统计显著性会受到影响。

表6：使用均匀变化的极化度从数据集中提取的不对称度。所有情况下的效率模型均为 $e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\phi\right]$。嵌入不对称性为 $A_N = 0.2$。每个模拟数据集包含 50,000 个事件。

极化范围	相对光度	提取不对称性
[0.75,0.95] 上 [0.70,0.90] 下	50:50 上旋:下旋	0.203 ± 0.008
[0.75,0.95] 上旋 [0.60,0.80] 下旋	70:30 上旋:下旋	0。205 ± 0。009
[0.75,0.95] 上 [0.60,0.80] 下	30:70 上:下	0.196 ± 0.009
[0.75,0.95] 上 [0.75,0.95] 下	自旋向上:自旋向下 = 50:50	0。202 ± 0。007

为了估计将幂级数截断至二阶所引入的系统误差 $\ln(1 + x)$，我们比较了使用确定性公式（方程3.14）计算的结果与通过最大化方程3.6所示似然得到的结果，其中 A_N 逐渐增大。对于大小为 10^5, 的数据集，幂级数截断造成的偏差仅在小数点后第四位显著，见表7。对于这一规模的数据集，这一偏差远小于统计误差。

表7：通过最大化 $\ln\mathcal{L}$ 以及使用方程3.14提取的不对称度。所有情况下采用的效率模型为 $e(\phi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\phi\right]$。测试采用在 [0.75,0.95] 范围内均匀变化的极化，自旋向上和自旋向下事件的光度相等，数据集大小为 10^5。

嵌入不对称性 A_N	ln L 最大化	使用公式3.14	不确定度
0.1	0.0950	0.0950	0.0052
0.2	0.1959	0.1960	0.0052
0.3	0.2966	0.2967	0.0051
0.4	0.3981	0.3981	0.0050
0.5	0.5020	0.5022	0.0049
0.6	0.6016	0.6018	0.0047
0.7	0.7033	0.7038	0.0044
0.8	0.8025	0.8027	0.0041

现在，我们将带有不对称性的背景 A_B 引入事例中。表 8 展示了

一系列复杂程度不断提高的测试结果；在每种情况下， A_N 返回值与嵌入值的偏差都在一个标准差之内。

表8：在各种条件下扣除背景后提取的不对称性值。“事件数”是前景、背景和旁带事件的总和。

	简单测试	Add 背景 不对称性	Add 极化和 光度 不平衡	添加一个 效率
事件数 事件	50,000	50,000	50,000	50,000
背景到 前景 比率	0.2	0.2	0.2	0.2
前景 不对称性	0.2	0.2	0.2	0.2
背景 不对称性	0.0	0.1	0.1	0.1
极化 范围：向上	[0.75,0.95]	[0.75,0.95]	[0.75,0.95]	[0.75,0.95]
极化 范围：向下	[0.75,0.95]	[0.75,0.95]	[0.65,0.85]	[0.65,0.85]
光度 上升与下降比率	1:1	1:1	3:7	3:7
效率	1	1	1	$\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2}$余弦 $\phi]$
提取的 前景 A_N	0。2046 ± 0。0103	0。2017 ± 0。0103	0.2059 ± 0.0119	0.1911 ± 0.0118

6 展开：分箱和非分箱

前几节所述的技术适用于方位角的重建 ϕ （以及其他运动学可观测量）质量足够高、不会对不对称性的确定产生任何显著影响的情况。遗憾的是，实际情况往往并非如此；为了提取所关注物理量的良好估计值，通常有必要对重建运动学变量中的畸变进行“展开”。在分箱分析技术中，有许多可用的展开技术，例如 Wiener-SVD [2] 和迭代贝叶斯法 [3]。我们还将探讨非分箱最大似然法背景下的展开技术。

6.1 使用 EventClassification 进行似然比估计

作为介绍，了解一些关于展开及其相关事件重新加权的基本概念是很有帮助的。似然比可用于将一个概率分布映射到另一个概率分布。在分箱情形下，似然比可以简单地估计为靶直方图与源直方图之比。然而，在非分箱情形下，以解析形式构造似然比往往是一项具有挑战性的任务。一种常见方法是使用特设函数来近似似然比，但这种方法可能会引入较大的系统不确定性。为克服这一挑战，可以采用二元分类器来近似似然比。

为展示此方法，我们使用方程 3.1 中给出的概率分布。我们将 $p(\phi|A_N = 0.0)$ 定义为源分布，将 $p(\phi|A_N = 0.2)$ 定义为目标分布。目标是估计似然比 $r(\phi) = \frac{p(\phi|A_N = 0.2)}{p(\phi|A_N = 0.0)}$。设 $s(\phi)$ 为一个二元分类器，经过训练后可区分从 $\phi \sim p(\phi|A_N = 0.0)$（标记为 $y = 0$）和$\phi \sim p(\phi|A_N = 0.2)$（标记为 $y = 1$）中抽取的样本。于是，似然比估计器可定义为：

$$\hat{r}(\phi) = \frac{s(\phi)}{1 - s(\phi)} \tag{6.1}$$

这种技术通常被称为“似然比技巧” [4–7]。此方法计算事件权重，将 $p(\phi|A_N = 0.0)$ 映射到 $\rightarrow p(\phi|A_N = 0.2)$。

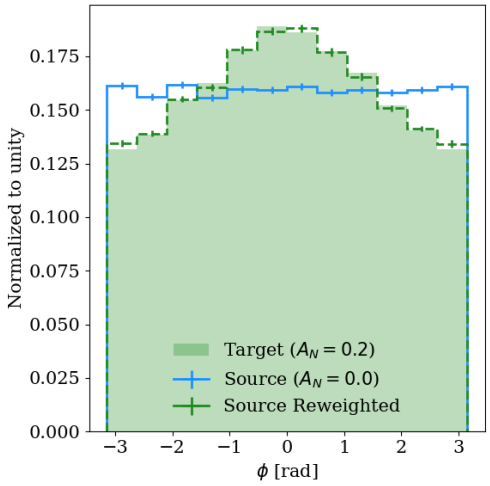
事件按照第4节所述方式生成，自旋向上与自旋向下构型的光度比分别为60:40，极化比为0.9:0.7。为简便起见，我们假设 $\epsilon(\phi) = 1$。我们采用由三个隐藏层组成的前馈神经网络（前馈神经网络），每个隐藏层包含64个神经元。隐藏层使用修正线性单元（ReLU）激活函数，而输出层使用Sigmoid 激活函数，$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$。

训练采用Adam 优化器，初始学习率为 1×10^{-4}，并使用ReduceLROnPlateau 调度器。批次大小设为2048。二元分类器训练了30个训练轮次，并保存验证损失最低的模型状态。为估计不确定性，训练共进行100次运行次数，每次运行次数均对源事件进行有放回重采样。取这100次运行次数中箱内容的均值作为最终箱内容，并将各次运行次数间的标准差作为箱误差。重新加权后的分布见图1。

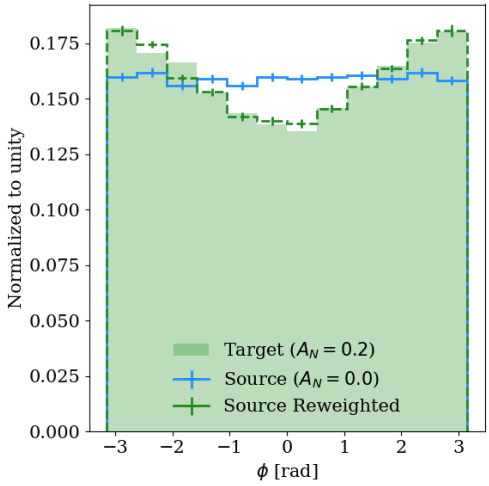
我们使用公式 3.14从重加权源分布中提取 A_N 值。由于源事件在每次运行中都会重新采样，因此这 100 次运行的标准差代表提取的统计不确定度（图2a）。为考虑前馈神经网络的随机初始化以及批次选择的随机性，我们使用不同的随机初始化分别训练神经网络 100 次，并将这些运行结果的标准差视为模型不确定度（图 2b）。[2]

这种似然比估计方法可以扩展到粒子物理和核物理中的反卷积问题。OmniFold 算法 [4, 8] 使用这种似然比方法，在重建级别和真值级别迭代地对源分布和目标分布重新加权。

[2] GitHub: https://github.com/dinupa1/NeuralLikelihoodRatio

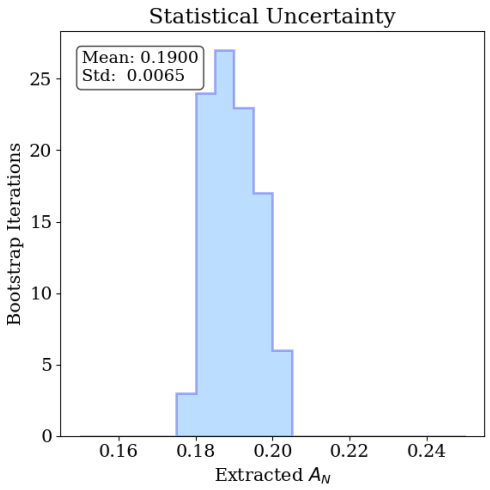


(a) 自旋向上构型。

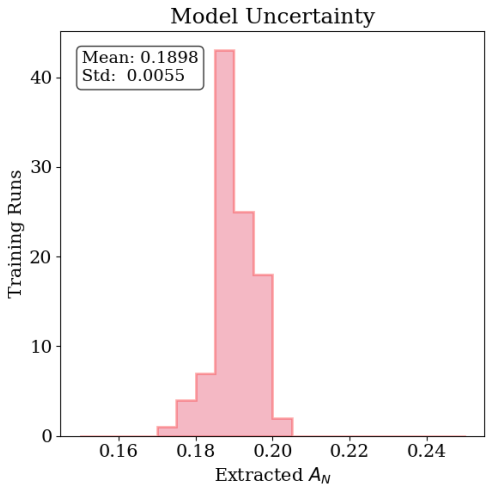


(b) 自旋向下构型。

图 1：使用似然比方法得到的重新加权后的分布。蓝线表示源分布，填充区域表示目标分布，绿色虚线表示权重根据公式计算得到的重加权源分布 6.1。



(a) 使用以下设置，在 100 次运行中提取的 A_N 值：重采样源事件。



(b) 使用以下设置，在 100 次运行中提取的 A_N 值：不同的随机初始化。

图 2：统计不确定性和模型不确定性。

6.2 使用OmniFold的非分箱反卷积

在本手稿中，将阐述三种涉及展开的不对称性提取方法。

（1）分箱数据的展开，随后使用第2节所述技术提取不对称性。（2）无分箱数据的展开，随后对数据进行分箱，并如第2节所述提取不对称性。（3）无分箱数据的展开，随后使用未分箱似然优化提取不对称性，如第3节

对于分箱数据和无分箱数据的展开，我们将使用由Milton等人 [9] 开发的软件包，可在 https://github.com/rymilton/unbinned_unfolding获取。他们所使用的非分箱反卷积技术是OmniFold [4], ，这是一项相对较新的进展，能够同时对多个可观测量进行非分箱反卷积。他们使用提升决策树（借助Scikit-learn [10]机器学习库）实现了OmniFold技术，并将其封装到常用的RooUnfold [11] 框架中。该软件包还包含展开分箱数据的功能；他们所使用的分箱反卷积技术基于RooUnfold中已有的迭代贝叶斯展开。

为了说明该软件包的测试，简要回顾 OmniFold 技术，并用相同的术语描述我们的工作会很有帮助。取自 [4]并在图 3中重现的一张示意图，有助于解释 OmniFold。这里有四个值得关注的数据集。

- 粒子层级的**真值**：这是我们希望从数据中估计的信息。
- 探测器层级的**数据**：这是我们通过探测器测量得到的信息。
- 粒子层级的**生成数据**：利用模型和事件生成器，我们得到对**真值**的估计。我们将使用权重调整这一估计。
- 探测器层级的**模拟数据**：将**生成数据**经过探测器响应模拟后，得到**模拟数据**。

我们对比数据和模拟数据，并对模拟数据中的事例重新赋权，使其更好地匹配数据。这些权重会被“拉”到生成数据一侧，并用于为生成数据中的事例赋予一组权重。随后，我们对比初始和修订后的生成数据事例，以生成一组新的权重；这些权重会被“推”到模拟数据一侧，从而得到新的模拟数据。这个过程会反复进行。最终分析使用的是重新赋权后的生成数据事例，而非原始数据。牢记这一点非常重要，因为这意味着生成数据的统计显著性必须与数据的统计显著性相近；否则，最终结果中的统计不确定度将被错误计算。

用于测试展开的人工数据集按照第4节所述的相同方式生成，只是我们对已探测粒子的 ϕ 角度进行了展宽，以模拟径迹重建的影响。我们采用了简单的高斯展宽；从均值为 0.0、宽度为 σ_{smear}的高斯分布中随机抽取一个数，并将该数加到真值 ϕ上。我们使用了

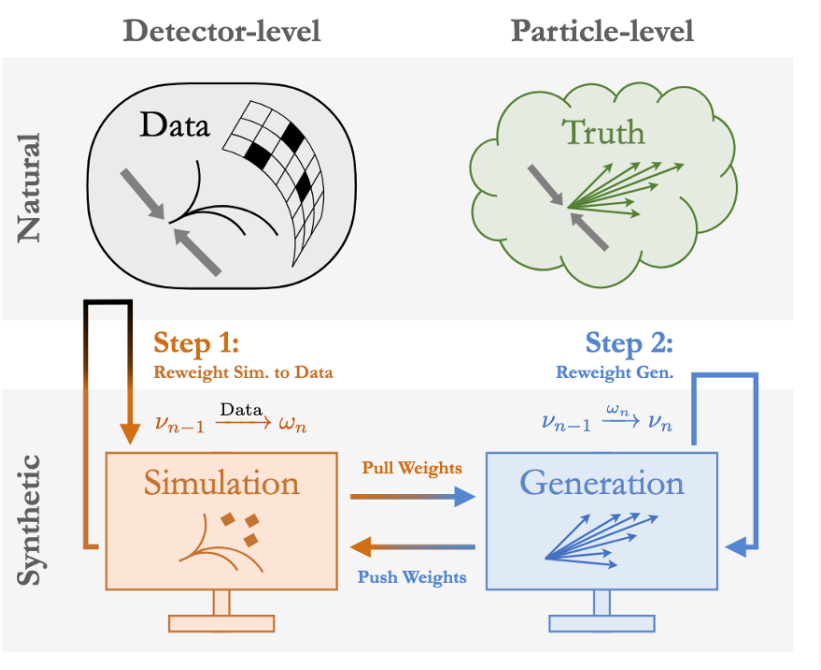


图3：说明OmniFold技术的示意图。取自 [4]。

测试中使用了 σ_{smear} 的两个不同值： $\sigma_{\text{smear}} = 0$。45 弧度，我们将其称为“弱涂抹”情形；以及 $\sigma_{\text{smear}} = 0$。90 弧度，我们将其称为“强展宽”情形。更具体地说，我们使用 OmniFold 语言描述四个数据集各自的来源。

- **真值**：我们使用特定的不对称度 A_F 和 A_B取值、某一本底/前景比、某种极化度分布，以及自旋向上与自旋向下光度之比来生成真值数据。

- **数据**：我们对真值中的 ϕ 角进行涂抹，从而得到数据。

- **生成数据**：其以与真值相同的方式独立生成，但不对称度 A_F 和 A_B 设为0.0。

- **模拟数据**：我们对生成数据中的 ϕ 角进行涂抹，从而得到模拟数据。

为准备测试样本，需要指定若干测试参数，如事件数、极化幅度等。表1 列出了我们测试中所用的日益复杂的参数组合。

在检验展开方案的可靠性时，我们关注展开的收敛速率，以及结果中出现偏差或系统不确定度的可能性。对于九项独立测试，我们通过观察TSSA提取结果随展开迭代次数的变化来检验这两个问题。这些结果显示于图4中。在这些测试中，使用“简单”参数组（见表1）生成事例。可以看出，在弱涂抹（$\sigma_{\text{smear}} = 0.45$ 弧度）情况下，展开在四次迭代后已经收敛；而在强展宽（$\sigma_{\text{smear}} = 0.90$ 弧度）情况下，则需要八次迭代。在这两种情况下，

除统计不确定度外，还存在系统不确定度，这一点可由每个展开步骤中结果的离散程度体现出来。强展宽情况下的系统不确定度更大。

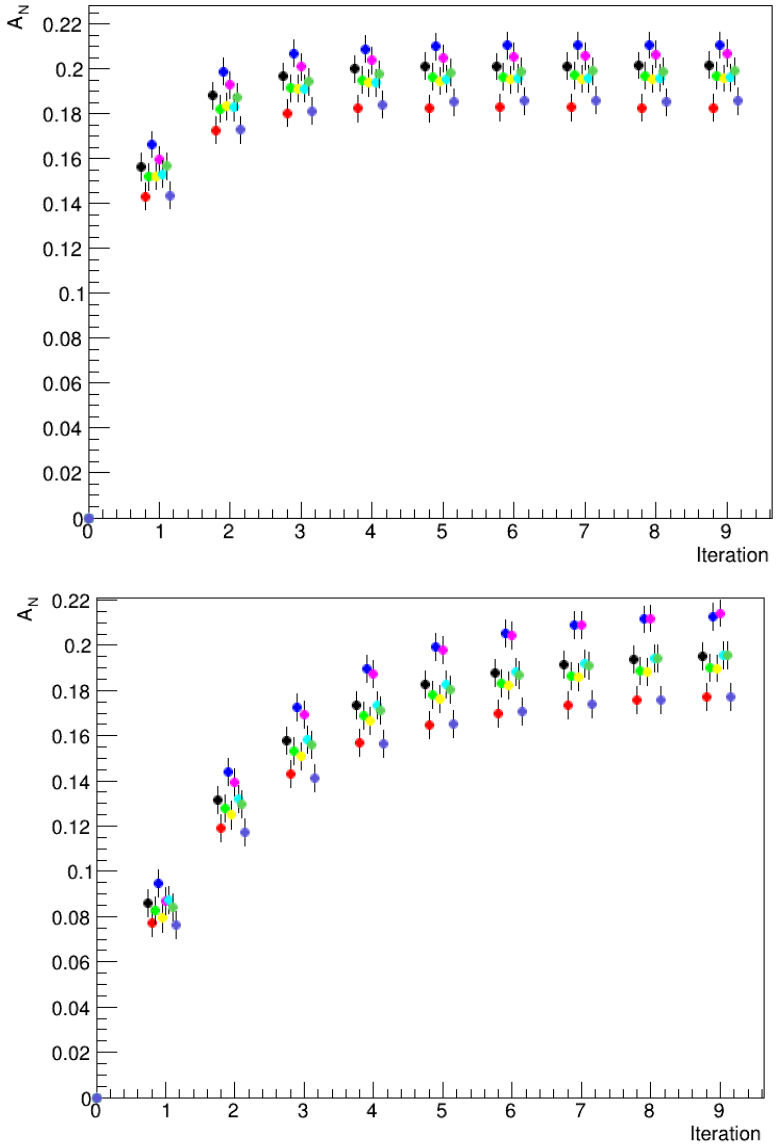


图4：无分箱对数似然TSSA提取的收敛速率。顶部展示弱涂抹的情况，底部展示强展宽的情况。每种颜色（黑色、红色、蓝色等）代表一个用于测试展开的统计独立数据集，且所有情况下嵌入的不对称度值均为 $A_N = 0.2$。

为量化与展开相关的系统不确定度，我们在表中列出的四组条件下，分别对弱涂抹和强展宽进行了 50 次独立测试 1。强展宽采用 8 次展开迭代，弱涂抹采用 4 次展开迭代。我们使用前文提到的三种不同方法分析数据：分箱数据展开、先展开无分箱数据再进行分箱分析，以及对数似然

表9：每项单独测试重复进行50次后的结果列表。“均值 A_N”是50次测试结果的直方图均值，针对的是前景不对称性； σ_{50} 是该直方图的宽度，而 σ_1 是单次结果对应的统计不确定度。分析方法包括：(1) 分箱数据的展开；(2) 展开后非分箱数据的分箱分析；(3) 展开后非分箱数据的非分箱对数似然分析。

测试（Weak 展宽	分析）方法	均值 A_N	σ_{50}	σ_1
“简单”	(1)	0.2011	0.0040	0.0044
	(2)	0.1932	0.0044	0.0043
	(3)	0.1954	0.0041	0.0043
“背景不对称性”	(1)	0.2014	0.0040	0.0044
	(2)	0.1926	0.0044	0.0043
	(3)	0.1949	0.0042	0.0043
“偏振/亮度不平衡”	(1)	0.2020	0.0070	0.0060
	(2)	0.1934	0.0076	0.0059
	(3)	0.1954	0.0073	0.0059
“余弦效率”	(1)	0.2013	0.0156	0.0038
	(2)	0.1905	0.0146	0.0059
	(3)	0.1923	0.0141	0.0059
使用强涂抹	分析方法	均值 A_N	σ_{50}	σ_1
“简单”	(1)	0.1984	0.0055	0.0044
	(2)	0.1895	0.0072	0.0044
	(3)	0.1917	0.0072	0.0043
“背景不对称性”	(1)	0.1990	0.0051	0.0044
	(2)	0.1888	0.0070	0.0044
	(3)	0.1910	0.0070	0.0044
“偏振/亮度不平衡”	(1)	0.2004	0.0084	0.0060
	(2)	0.1901	0.0106	0.0059
	(3)	0.1922	0.0103	0.0060
“余弦效率”	(1)	0.1980	0.0151	0.0041
	(2)	0.1863	0.0183	0.0059
	(3)	0.1875	0.0187	0.0060

分析展开后的未分箱数据。每种情况下，我们都将 50 次测试的结果绘制成直方图（示例见图 5），并将该直方图的宽度与单次结果报告的统计不确定度进行比较。这些测试结果列于表 9。

在弱涂抹测试中，可以看出三种分析方法的表现相对相同。随着测试数据变得更加复杂，从“简单”测试逐步发展到“余弦效率”测试，三种方法都会产生一些额外的系统误差（反映在 σ_{50} as 的数值中

与 σ_1 相比）。另一方面，在强展宽测试中，随着测试变得更加复杂，非分箱反卷积的系统误差会更大。

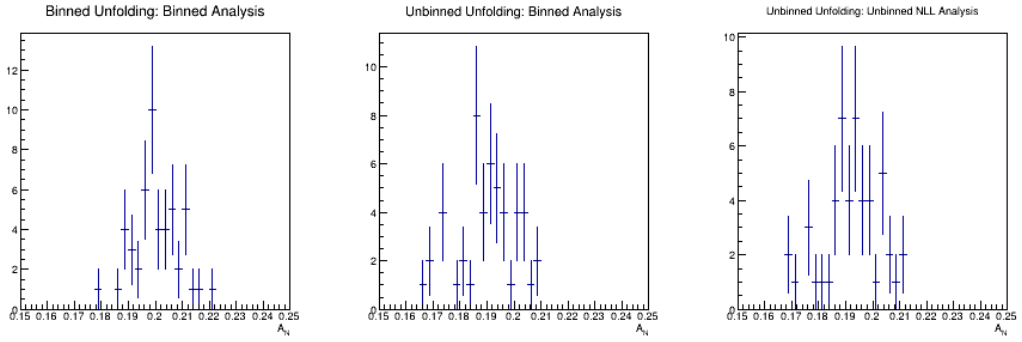


图5：展开和分析方法 50 次测试结果的直方图示例。从左到右依次为：对分箱数据进行分箱展开（分析方法 1）、非分箱展开后进行分箱分析（方法 2），以及非分箱展开后进行对数似然分析（方法 3）。这些情况下使用的测试样本是“偏振/亮度不平衡”，并采用了强展宽。

7 结论

我们提出了一种完全通用的方法，用于确定横向单自旋不对称性，其中包括自旋向上和自旋向下极化幅度和/或光度不相等的情况，也包括具有自身不对称性的背景。我们证明，分箱和非分箱方法都可以使用，并展示了该方法在展开和不展开情况下的有效性。

我们在此未考虑的另一类背景是组合背景，例如在观测双轻子的实验中会遇到的背景（例如 e^+e^- 或 $\mu^+\mu^-$）。这种背景可以采用此处所述的相同技术进行处理。在分箱方法中，只需将其扣除；在非分箱方法中，则可在对数似然处理中赋予其负权重。

8 致谢

本研究得到美国能源部科学办公室实验中能核物理计划 DE-FG02-94ER40847号资助。我们感谢 R. Milton 就使用其 GitHub 网站上的软件提供的建议。

参考文献

[1] C. Langenbruch，《加权非分箱最大似然拟合中的参数不确定性》，欧洲物理学杂志 C 82（2022） 393, [1911。01303].[2] W. Tang、X. Li、X. Qian、H. Wei 和 C. Zhang，《使用 Wiener-SVD 方法进行数据反卷积》，JINST 12（2017）P10002, [1705。03568].[3] G. D'Agostini，《基于贝叶斯定理的多维反卷积方法》，《核仪器与物理研究方法》A辑：加速器、能谱仪、探测器及相关设备 362（1995）487–498。[4] A. Andreassen、P. T. Komiske、E. M. Metodiev、B. Nachman 和 J. Thaler，《OmniFold：同时对所有可观测量进行反卷积的方法》，《物理评论快报》124（2020） 182001, [1911。09107].[5] K. Cranmer、J. Pavez 和 G. Louppe，《使用校准判别分类器近似似然比》，1506.02169。[6] A. Andreassen 和 B. Nachman，《用于全相空间重新加权和参数调优的神经网络》，《物理评论 D》101（2020） 091901, [1907。08209].[7] S. Rizvi、M. Pettee 和 B. Nachman，《使用神经网络分类器学习似然比》，高能物理杂志 02（2024） 136, [2305。10500].[8] R. G. Huang、A. Cudd、M. Kawaue、T. Kikawa、B. Nachman、V. Mikuni 等，《使用 OmniFold技术进行中微子截面测量的机器学习辅助反卷积》，《物理评论 D》112（2025） 012008, [2504。06857].[9] R. Milton、V. Mikuni、T. Lee、M. Arratia、T. Wamorkar 和 B. Nachman，《非分箱反卷积工具》，JINST 20（2025）P 05034, [2503。09720].[10] F. Pedregosa、G. Varoquaux、A. Gramfort、V. Michel、B. Thirion、O. Grisel 等，《Scikit-learn：Python 中的机器学习》，《机器学习研究杂志》12（2011）2825–2830。[11] L. Brenner、R. Balasubramanian、C. Burgard、W. Verkerke、G. Cowan、P. Verschuuren 等，《使用 RooFitUnfold 比较反卷积方法》，《国际现代物理学杂志》A辑 35（2020）2050145，[1910.14654]。