arXiv:2602.02328v1 [math.AP] 2 Feb 2026

气象学中出现的方程组：适定性与数据同化

Eduard Feireisl * Piotr Gwiazda † Agnieszka ´Swierczewska-Gwiazda

捷克科学院数学研究所，ˇZitn´a 25, CZ-115 67 布拉格 1, 捷克共和国
feireisl@math.cas.cz

波兰科学院数学研究所´Sniadeckich 8, 00-956 华沙, 波兰，以及华沙大学数学与计算建模跨学科中心 Pawi´skiego 5a, 02-106 华沙, 波兰 pgwiazda@mimuw.edu.pl

华沙大学应用数学与力学研究所 Banacha 2, 02-097 华沙, 波兰
aswiercz@mimuw.edu.pl

摘要

数据同化在现代天气预报中发挥着至关重要的作用，为将观测数据纳入复杂动力学模型提供了一种系统的方法。本文研究了一个模型的连续数据同化问题，该模型是由温度梯度驱动并包含旋转的三维可压缩 Navier-Stokes-Fourier 系统在奇异极限下得到的。极限系统保留了原模型的基本物理机制，同时呈现出一种简化的、实质上具有二点五维结构的形式。这一简化框架使我们能够对数据同化过程进行严格的解析研究，同时保持与完整可压缩模型的直接物理联系。我们证明了全局时间解的适定性以及紧轨道吸引子的存在性，并进一步给出了应用于极限系统的推挽方案的稳定性和收敛结果。最后，

*E.F. 的工作部分获得了捷克科学基金会（GAˇCR）资助，资助协议编号为 24–11034S。捷克科学院数学研究所获 RVO:67985840 资助。本工作还部分获得了华沙大学卓越倡议研究型大学主题研究计划的资助。

†P. G. 和 A. ´S.-G. 的工作部分获得了波兰国家科学中心资助，协议编号为 2024/54/A/ST1/00159。

我们展示了如何将这些结果与相对熵论证相结合，将同化框架扩展到完整的三维可压缩情形，从而在简化模型与物理上完整的模型之间建立严格的联系。

关键词： 瑞利-贝纳德对流、整体存在性、吸引子、连续数据同化

1 引言

数据同化是提高数值模拟准确性的一种重要方法，尤其适用于大气方程等复杂非线性系统。可靠的预测高度依赖初始条件的精确性，但在实践中，这些条件只能通过离散测量获得。例如，天气观测来自卫星、地面站、激光雷达和雷达，但这些测量仅提供大气真实状态的部分快照。遗憾的是，这些测量的空间分辨率不足以在计算网格上准确重建初始条件。数据同化提供了一套系统的方法，使模型轨迹逐步逼近观测数据。由于观测是在一段时间内收集的，而非仅在某一时刻获取，因此有助于弥补空间信息的缺失，并重建出能够导向物理上合理的模型演化的初始条件。

耗散系统数据同化背后的一个核心数学思想是，仅需有限数量的参数或模态，便可能足以确定系统的长期行为。

解的存在性与唯一性等性质在数据同化中至关重要，它们确保模型动力学是适定的，从而能够毫无歧义地将观测数据一致地纳入模型。对于广泛的一类模型，解的长期行为仅用有限个自由度即可刻画；关于二维纳维–斯托克斯方程的首个严格证明归功于 [20]。该结果表明，当两个纳维–斯托克斯方程解的前N 个傅里叶模态在足够大的 N下相一致时，随着时间趋于无穷，这两个整体解必然收敛到相同的极限。为明确足够大 N的含义，论文 [19]给出了一个显式判据，随后该判据在 [27]中得到改进。有趣的是，[21] 证明，当自由度取为傅里叶模态以外的量时，类似的结果同样成立；在他们的研究中，解在选定节点处的取值发挥了这一作用。后续研究 [22, 26] 用有限体积上的平均值取代了节点值。此外， [10] 证明，对于二维纳维–斯托克斯方程，存在一大类由自由度构成的决定集，其中包括有限元离散中自然产生的决定集。

为实现这一目标，人们开发了多种数据同化方法，包括变分方法，例如四维变分数据同化（4D-Var）方法，以及基于集合的技术，例如集合卡尔曼滤波（EnKF）。另一类重要方法基于 Azouani、Olson 和 Titi（AOT）框架，参见 [3], ，该框架提出了一种

直接在演化方程层面表述的连续数据同化方案。Azouani、Olson 和 Titi 指出，只要对测量数据的有限维分辨率施加适当约束，就足以保证其算法重构出的解随时间推移收敛到未知的参考状态。该方法并不将观测直接纳入模型的非线性动力学，而是引入一种反馈控制机制，使系统朝着与数据一致的参考解演进。这种方法的动机在于，将原始测量数据嵌入控制方程在实践中存在困难。为更详细地说明这一思路，令 $u(t)$ 表示系统的参考解

$$\frac{du}{dt} = F(u), \qquad u(0) = u_0, \tag{1.1}$$

其中，初始条件 u_0 未知。通过 $I_h(u(t))$，可以在粗空间分辨率下获得观测数据，适用于 $t \in [0, T]$。目标是构造一个近似解 $v(t)$，它从任意初始数据 $v(0) = v_0$出发，使得随着 t 增大，$v(t)$收敛到 $u(t)$，从而恢复适用于在 T之后进行预测的初始状态。

该算法定义如下：

$$\frac{dv}{dt} = F(v) - \mu I_h(v) + \mu I_h(u), \qquad v(0) = v_0, \tag{1.2}$$

其中，$\mu > 0$ 是一个松弛参数。反馈项 $\mu(I_h(u) - I_h(v))$促使 v 的粗尺度空间结构趋近于观测数据的粗尺度空间结构；只要适当选取 μ 和空间分辨率 h，就能确保收敛到参考解。

上述分析预期促使研究者关注二维纳维–斯托克斯系统的严格理论结果，例如 [3]中的工作。后续结果 [14] 表明，对于二维瑞利–贝纳德对流，只需测量并同化（nudging）单个速度分量，就足以恢复完整速度场和温度的精确参考解。换言之，无需测量或 nudging 温度，另见 [16]。此外，[2]中的作者表明，对于同一模型，仅对温度进行 nudging 不足以恢复速度场。尽管如此，[15] 表明，对于行星地转模型，仅观测并 nudging 温度，就足以重构完整的速度场和温度。这凸显了应当观测和 nudging 哪些状态变量，本质上取决于具体模型。后续研究 [9] 探讨了敏感性分析，并为二维纳维–斯托克斯方程的数据同化确立了超指数收敛速率。同时，[28] 将同化框架扩展到具有部分可观测性以及对决定参数进行反馈控制的情形。[6]– [8]的研究进一步拓展了该理论，引入了无网格插值观测量和局部观测量方案，并将 nudging 方法扩展至不涉及温度效应的二维和三维不可压纳维–斯托克斯系统。请注意，[8] 所考虑的三维情形中，同化过程只有在观测量满足某些附加条件时才是有条件的；例如，由 Leray–Hopf解生成的观测量可能不满足这些条件。

在本研究中，我们考察旋转奥伯贝克–布辛涅斯克系统，并展示如何通过相对熵框架实施连续数据同化，从而

深入了解完整的三维可压缩模型。我们关注一个方程组，它是由温度梯度驱动的三维快速旋转可压缩黏性流体在奇异极限下得到的。该系统在连续数据同化的背景下尤为有趣，因为它源自三维模型的极限，并且由于离心力的作用，归结为一种二点五维表述；参见 [13]，其中给出了基于相对熵的严格估计。这一特点对数据同化技术尤其重要，因为它使得证明唯一解和全局吸引子的存在成为可能。值得注意的是，这种有效的降维并非人为施加，而是由于系统的快速旋转，自然而然地从底层动力学中涌现。此外，科里奥利力确实存在于天气预报实际使用的模型中，而数据同化在其中发挥着关键作用；例如，英国国家气象服务英国气象局发布的统一模式，参见 [30]，，以及其地方版本，例如由华沙大学数学与计算建模跨学科中心提供的波兰气象服务（https://www.meteo.pl/）。尽管科里奥利力仅出现在此处考察的原始系统中，而不在目标系统中，但它对渐近行为有着显著影响，甚至有效地从极限动力学中消除了所有垂直运动。

奥伯贝克-布辛涅斯克近似为旋转分层流建模提供了一个物理上自洽、在数学和数值上又易于处理的框架。它捕捉了大气动力学的基本特征，在物理真实性与数学可处理性之间取得平衡，同时避免了可压缩纳维–斯托克斯系统的全部复杂性。本文着重研究所谓的旋转奥伯贝克–布辛涅斯克系统，该系统为不可压缩系统，包含速度场的水平分量以及温度的三个分量。因此，我们通常将其称为二维半模型。

该系统是三维可压缩纳维–斯托克斯–傅里叶系统的一个奇异极限。不过，也可以认为，描述大气行为最贴近现实的模型是三维可压缩方程，因此理想情况下应在这一层面上进行数据同化。有趣的是，我们并不需要采用这种观点：相对熵方法与本文关于旋转奥伯贝克–布辛涅斯克系统的结果相结合表明，对于良备初始数据，可以完全借助所考虑的二维半模型，对三维模型进行数据同化，同时只需控制同化误差。第 5 节将详细讨论这种联系；此前，第 2 至 4 节已针对较简单的系统进行了详细分析（定理 2.1 和 3.4），并给出了严格的数据同化过程（定理 4.1）。避免直接在三维情形下进行数据同化的一项重要优势，是能够显著降低计算成本，因为数据同化本身可能占总计算开销的很大一部分。这种降低有望大幅减少能源消耗，进而降低天气预报的总体成本。

1.1 原始系统

此处及下文中，空间变量记为

$$x = (x_h, x_3),\ x_h \in R^2,\ x_3 \in R.$$

考虑被限制在旋转圆柱中的黏性、可压缩、导热流体

$$\Omega = B_r \times (0,1),\ B(r) = \left\{ x_h \in R^2 \ \middle|\ |x_h| < r \right\} \tag{1.3}$$

流体的密度 ϱ、绝对温度 ϑ和速度$\mathbf{u}$ 由旋转参考系中的纳维-斯托克斯-傅里叶系统控制：

$$\begin{aligned}
\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\
\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varrho \mathbf{u} \times e_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_x p(\varrho, \vartheta) &= \mathrm{div}_x \mathbb{S}(\vartheta, \mathbb{D}_x \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \varrho \nabla_x F, \\
\partial_t(\varrho e(\varrho, \vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho e(\varrho, \vartheta) \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)) &= \varepsilon^2 \mathbb{S}(\vartheta, \mathbb{D}_x \mathbf{u}) : \mathbb{D}_x \mathbf{u} - p(\varrho, \vartheta) \mathrm{div}_x \mathbf{u},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

满足边界条件

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= 0 \text{ for } |x_h| = r,\ x_3 \in (0,1), \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0,\ (\mathbb{S}(\vartheta, \mathbb{D}_x \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = 0 \text{ for } x_h \in B(r),\ x_3 = 0, 1, \\
\vartheta|_{\partial\Omega} &= \overline{\vartheta} + \varepsilon \vartheta_B,\ \overline{\vartheta} > 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

且给定总质量

$$\int_\Omega \varrho \ \mathrm{d}x = \overline{\varrho} |\Omega|. \tag{1.6}$$

强迫势 F 的形式为

$$F = \mathbf{g} \cdot x + |x_h|^2, \tag{1.7}$$

其中向量 $\mathbf{g}$ 决定引力场的方向和大小，而 $|x_h|^2$表示离心力的势；有关状态方程以及其他相关本构方程的详细信息，请参见 [13] 。

流体运动由三种力的共同作用驱动：重力、由温度梯度引起的浮力，以及由科里奥利力和离心力表示的旋转。此类模型经常出现在气象学、地球物理学或天体物理学中。方程组 **(1.4)** 由一个小参数 ε 进行缩放：

- 热对流的起因是流体的可压缩性 。马赫数与 ε 成正比且很小，这意味着流体几乎不可压缩。在不可压缩极限下，压力变为常数，此时密度变化可用符号相反的温度变化来代替，从而得到著名的布西内斯克关系。

• 要让极限系统感受到这种变化，必须对马赫特征数和弗劳德特征数进行适当缩放，参见 [17]。

• 如果极限系统受到离心力的影响，就必须采用相同的尺度变换。然而，经过尺度变换的离心力迫使科里奥利力中的罗斯贝数必须足够小。

• 在罗斯贝数较小的情况下，泰勒–普劳德曼定理适用，它要求流体运动完全沿水平方向。这与埃克和Shishkina [12] 倡导的传统且常用的奥伯贝克–布西内斯克近似形成鲜明对比，相关参考文献亦见其中。

1.2 奇异极限与目标系统

本文所研究的问题是解的奇异极限（ϱ_ε， ϑ_ε， $\mathbf{u}_\varepsilon$），其中$\varepsilon \to 0$。如 [13],所示

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_\varepsilon \to [\mathbf{u}_h, 0], \ \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h(t, x_h) \\ \frac{\vartheta_\varepsilon - \overline{\vartheta}}{\varepsilon} - \lambda(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta}) \fint_\Omega \frac{\vartheta_\varepsilon - \overline{\vartheta}}{\varepsilon} \,\mathrm{d}x \to \theta, \ \lambda(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta}) = 1 - \frac{c_v(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})}{c_p(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})} \in (0, 1) \end{gathered} \tag{1.8}$$

其中，极限速度$\mathbf{u}_h = [u_h^1, u_h^2, 0]$ 完全沿水平方向，并满足不可压缩 Navier–Stokes 系统

$$\begin{gathered} \mathrm{div}_h \mathbf{u}_h = 0, \\ \overline{\varrho}\partial_t \mathbf{u}_h + \overline{\varrho}\mathrm{div}_h(\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla_h \Pi = \mu \Delta_h \mathbf{u}_h - \langle \theta \rangle \nabla_h F, \ \mu > 0, \end{gathered} \tag{1.9}$$

在 $(0, \ T) \times B_r$ 中，满足无滑移边界条件

$$\mathbf{u}_h|_{\partial B_r} = 0. \tag{1.10}$$

这里，我们已记

$$< \theta > (t, x_h) = \int_0^1 \theta(t, x_h, x_3) \,\mathrm{d}x_3. \tag{1.11}$$

温度偏差 θ 满足一个扰动热方程

$$\partial_t \theta + \mathrm{div}_x(\theta \mathbf{u}_h) = \kappa \Delta_x \theta + a \mathrm{div}_x(F \mathbf{u}_h), \ \kappa > 0, \ a \in R, \tag{1.12}$$

在 $\times \Omega$ 中的 $(0, T)$ 内，并满足 [4] 中所述的非局部边界条件：

$$\theta|_{\partial\Omega} = \vartheta_B - \alpha \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \theta \ \,\mathrm{d}x, \ \alpha = \frac{c_p(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})}{c_v(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})} - 1. \tag{1.13}$$

我们假设边界温度 ϑ_B 是定义在 $\partial\Omega$ 上的光滑函数的限制，

$$\vartheta_B \in C^2(R^3). \tag{1.14}$$

常数 c_p 和 c_v 分别表示在热平衡态（$\underline{\varrho}$、$\underline{\vartheta}$）下测得的定压比热和定容比热。

我们称问题（1.9）–（1.13）为旋转奥伯克–布*oussinesq*（*rOB*）系统。

1.3 旋转奥伯克–布oussinesq系统的数学理论

我们的主要目标是为 rOB 系统建立一套数学理论。

- 在第 2 节中，我们证明，对于任意大的初始/边界数据，rOB 系统在强解类中适定。
- 在第 3 节中，我们讨论解的长期行为。我们证明，该系统在 Levinson 的意义下是耗散的（参见 Haraux [25]），这意味着它存在一个有界吸收集以及相应的轨迹吸引子。
- 在第4节中，我们提出一种遵循 Azouani、Olson 和 Titi 思路的连续数据同化方法 [3]。
- 最后，在第5节中我们证明，对于良备初始数据，可以利用 rOB 系统对三维模型进行完全同化，但仅能在有限时间区间上控制同化误差。

2 适定性

我们的首要目标是证明 rOB 系统时间全局强解的存在性。请注意，该问题与 [1]中研究的“真正的”奥伯克–布oussinesq系统具有一定相似性。我们考虑一种一般情形，其中流体被限制在圆柱形区域内。

$$\Omega = \Omega_h \times (0,1), \tag{2.1}$$

其中

$$\Omega_h \subset R^2 \text{ is bounded and smooth of class } C^2. \tag{2.2}$$

2.1 变换

不失一般性，我们可以假设

$$\overline{\varrho} = 1, \ \int_\Omega F \ \mathrm{d}x = 0. \tag{2.3}$$

引入

$$\Theta = \theta - aF + 2ax_3^2 - C,\ C = 2a\left\langle x_3^2 \right\rangle,$$

我们可以将方程组 (1.9)、(1.12) 改写为以下形式

$$\begin{gathered} \mathrm{div}_h \mathbf{u}_h = 0, \\ \partial_t \mathbf{u}_h + \mathrm{div}_h(\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla_h \Pi = \mu \Delta_h \mathbf{u}_h - \langle \Theta \rangle \nabla_h F \end{gathered} \tag{2.4}$$

在 $(0,T) \times \Omega_h$ 中，且

$$\partial_t \Theta + \mathrm{div}_x(\Theta \mathbf{u}_h) = \kappa \Delta_x \Theta \tag{2.5}$$

在 $(0,T) \times \Omega$ 中，满足边界条件

$$\mathbf{u}_h|_{\partial\Omega_h} = 0,\ \Theta|_{\partial\Omega} = \vartheta_B - \alpha \fint_\Omega \Theta \,\mathrm{d}x, \tag{2.6}$$

其中我们已将边界数据替换为

$$\vartheta_B \approx \vartheta_B - aF + 2ax_3^2 - C.$$

2.2 整体存在性

问题 (2.4)–(2.6)，补充初始数据

$$\mathbf{u}_h(0,\cdot) = \mathbf{u}_{h,0},\ \Theta(0,\cdot) = \Theta_0 \tag{2.7}$$

在强解类中是适定的。

定理 2.1 (**适定性**)。 设$\Omega_h \subset R^2$ 是一个 C^2 类的有界区域。假设边界温度是某个光滑函数 $\vartheta_B \in C^2(R^3)$的限制。设初始数据属于该类

$$\mathbf{u}_{0,h} \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h),\ \Theta_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p} \cap W^{2,2}(\Omega)\ \textit{for some}\ p \geq 2, \tag{2.8}$$

并满足相容性条件

$$\mathbf{u}_{0,h}|_{\partial\Omega_h} = 0,\ \Theta_0|_{\partial\Omega} = \vartheta_B - \alpha \fint_\Omega \Theta_0 \,\mathrm{d}x.$$

那么，问题 (2.4)、(2.5) 存在一个全局时间解 $\mathbf{u}_h$，Θ，该问题附有边界条件 (2.6) 和初始条件 (2.7)，且在最大正则性类中唯一

$$\mathbf{u}_h \in L^p(0,T; W^{2,p}(\Omega_h; R^2)),\ \partial_t \mathbf{u}_h \in L^p(0,T; L^p(\Omega_h; R^2)),$$

$$\Theta \in L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W^{2,2}(\Omega)),\ \partial_t \Theta \in L^p(0,T;L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ (2.9)$$

$T > 0$.

本节余下部分将用于证明定理 2.1。我们只关注先验界，随后即可通过 [1] 中详细介绍的方法构造该解。

2.3 先验界

我们为问题 (2.4)–(2.6) 推导出适当的 先验估计。

2.3.1 边界数据的调和延拓

首先，我们引入边界数据的（唯一）调和延拓

$$\widehat{\vartheta}_B|_{\partial\Omega} = \vartheta_B,\ \Delta_x \widehat{\vartheta}_B = 0 \text{ in } \Omega. \tag{2.10}$$

由于 Ω 仅仅是 Li $\widehat{\ }$pschitz，无法 先验保证 ϑ_B 的正则性。不过，我们可以写 e

$$\widehat{\vartheta}_B = \vartheta_B + \eta,$$

其中

$$\Delta_x \eta = -\Delta_x \vartheta_B \text{ in } \Omega,\ \eta|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.11}$$

将 $-\Delta_x \vartheta_B$ 延拓为关于 x_3周期的奇函数后，我们可以求解问题，使 η 成为奇的 x_3-周期解

$$\Delta_x \eta = -\Delta_x \vartheta_B \text{ in } \Omega_h \times [-1,1]_{\{-1,1\}}. \tag{2.12}$$

由于 ϑ_B 光滑， $\Delta_x \vartheta_B$ 的延拓属于 $L^q\left(\Omega_h \times [-1,1]_{\{-1,1\}}\right)$，对任意 $1 \le q < \infty$均成立。因此，我们得出

$$\widehat{\vartheta}_B \in W^{2,q}(\Omega) \text{ for any } 1 \le q < \infty, \tag{2.13}$$

特别地，

$$\|\nabla_x \widehat{\vartheta}_B\|_{L^\infty(\Omega;R^3)} \stackrel{<}{\sim} 1. \tag{2.14}$$

在此及下文中，我们使用符号 $a \stackrel{<}{\sim} b$ 来表示存在正常数 C，使得 $a \le Cb$。$\widehat{\ }$我们不区分边界数据 ϑ_B 及其调和延拓 ϑ_B，而是用同一符号 ϑ_B表示。

2.3.2 能量界

为消除非局部边界条件的问题，我们引入一个新量

$$Z = \Theta + \alpha \fint_{\Omega} \Theta \,\mathrm{d}x - \vartheta_B \tag{2.15}$$

计算

$$\partial_t Z = \partial_t \Theta + \alpha \fint_{\Omega} \partial_t \Theta \,\mathrm{d}x \;\Rightarrow \partial_t \Theta = \partial_t \left(Z - \frac{\alpha}{1+\alpha} \fint_{\Omega} Z \,\mathrm{d}x \right)$$

我们可以将方程 (2.5) 改写为

$$\begin{aligned} \partial_t \left(Z - \frac{\alpha}{\alpha+1} \fint_{\Omega} Z \,\mathrm{d}x \right) + \mathrm{div}_x(\mathbf{u}_h(Z + \vartheta_B)) = \kappa \Delta_x Z \text{ in } (0,T) \times \Omega, \\ Z|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

将 (2.14) 乘以 Z 并在 Ω 上积分，可得标准的“热”能量平衡

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\fint_{\Omega} Z^2 \,\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\fint_{\Omega} Z \,\mathrm{d}x \right)^2 \right] + \kappa \fint_{\Omega} |\nabla_x Z|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad = \fint_{\Omega} \vartheta_B \mathbf{u}_h \cdot \nabla_x Z \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.17}$$

类似地，与 $\mathbf{u}_h$ 作标量积，并对动量方程 (2.4) 进行分部积分，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_h} \frac{1}{2} |\mathbf{u}_h|^2 \,\mathrm{d}x_h + \mu \int_{\Omega_h} |\nabla_h \mathbf{u}_h|^2 \,\mathrm{d}x_h = \int_{\Omega_h} \langle \Theta \rangle \nabla_h F \cdot \mathbf{u}_h \,\mathrm{d}x_h. \tag{2.18}$$

C结合 (2.17)、(2.18)，我们得到标准的能量先验 界

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [0,T]} \|\mathbf{u}_h(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega_h; R^2)} &\lesssim C \left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^2(\Omega)}, T, \mathrm{data} \right), \\ \sup_{\tau \in [0,T]} \|\Theta(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim C \left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^2(\Omega)}, T, \mathrm{data} \right), \\ \|\mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega_h; R^2))} &\lesssim C \left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^2(\Omega)}, T, \mathrm{data} \right), \\ \|\Theta\|_{L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))} &\lesssim C \left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^2(\Omega)}, T, \mathrm{data} \right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

此处及下文中，“数据”仅包括

$$\|\nabla_h F\|_{L^\infty(\Omega, R^2)}, \;\; \|\vartheta_B\|_{W^{2,q}(\Omega)}, \alpha, a \tag{2.20}$$

以及依赖于 Ω_h 的几何的各种常数。

2.3.3 温度的最大值原理

鉴于 (2.19)，函数

$$t \mapsto \fint_{\Omega} \Theta(t,x)\,\mathrm{d}x$$

在紧时间区间上有界。因此，回到方程 (2.5)，我们可以使用标准最大值原理，得到

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \|\Theta(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, T, \mathrm{data}\right). \tag{2.21}$$

2.3.4 速度场的正则性

鉴于一致有界性 (2.21)，速度场 $\mathbf{u}_h$ 满足 $2-D$ 纳维–斯托克斯系统 (2.4)，其驱动力一致有界。因此，我们可以使用如今标准的 L^p–理论（参见 Gerhardt [23], Giga、Miyakawa [24], Solonnikov [29]），从而得出

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathbf{u}_h\|_{L^p(0,T;L^p(\Omega_h;R^2))} &\stackrel{<}{\sim} C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, T, \mathrm{data}\right)\\
\|\mathbf{u}_h\|_{L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega_h;R^2))} &\leq C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, T, \mathrm{data}\right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

只要 $2 \leq p < \infty$。

2.3.5 温度时间导数的正则性

接下来，我们推导关于 Θ 时间导数的估计。记 $V = \partial_t Z$，其中 Z 已在 (2.15) 中引入，对 (2.16) 求导可得

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(V - \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega V\ \mathrm{d}x\right) + \mathrm{div}_x(\mathbf{u}_h V) &= \kappa\Delta_x V - \mathrm{div}_x(\partial_t\mathbf{u}_h(Z+\vartheta_B)),\\
V|_{\partial\Omega} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

利用在 (2.22) 中得到的正则性$\mathbf{u}_h$，我们得到标准的“能量”估计

$$V \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega;R^3)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;R^3)),$$

由此可得

$$\partial_t\Theta \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega;R^3)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;R^3)).$$

当然，要进行这一步，我们需要 $\partial_t\Theta(0,\ \cdot)$ 平方可积。因此，估计依赖于 $\|\Theta_0\|_{W^{2,\ 2}(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau\in[0,T]} \|\partial_t\Theta(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{W^{2,2}(\Omega)}, T, \mathrm{data}\right)\\
\|\Theta\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} &\leq C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{W^{2,2}(\Omega)}, T, \mathrm{data}\right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.3.6 L^p-温度的正则性

回到 (2.16)，我们推得

$$\begin{aligned} \partial_t Z - \kappa \Delta_x Z &= -\mathrm{div}_x(\mathbf{u}_h Z) + \xi, \\ Z|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

其中，

$$Z = \Theta + \alpha \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \Theta \ \mathrm{d}x - \vartheta_B.$$

此外，根据前面的估计

$$Z \in L^q((0,T) \times \Omega) \text{ for any } 1 \leq q < \infty. \tag{2.26}$$

现在，与第 2.3.1 节类似，我们可以将 (2.25) 的右端延拓为区域 $\Omega_h \times [-1,1]|_{\{-1;1\}}$ 上的奇函数，从而依次得到以下估计

$$\begin{aligned} \|\partial_t \Theta\|_{L^p(0,T;L^p(\Omega))} &\stackrel{<}{\sim} C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega)}, T, \mathrm{data} \right), \\ \|\Theta\|_{L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega))} &\stackrel{<}{\sim} C\left(\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega_h;R^2)}, \|\Theta_0\|_{W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega;R^2)(\Omega)}, T, \mathrm{data} \right), \ 2 \leq p < \infty. \end{aligned} \tag{2.27}$$

我们已经得到了与定理 2.1 中所述强解正则性相符的所有先验估计。解可以完全按照 [1]中的方法，通过混合 Faedo-Galerkin 方法构造。我们已经证明了定理 2.1。

3 长期行为

我们证明，rOB 系统具有 Levinson 意义下的耗散性，即存在一个有界吸收集，其大小与初始数据无关。为此，我们对边界条件（1.13）作出一个额外假设

$$0 < \alpha < 1 \tag{3.1}$$

在边界条件 (1.13) 中。由于

$$\alpha = \frac{c_p(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})}{c_v(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})} - 1$$

（见 [13]），假设（3.1）至少对气体而言在物理上是可接受的。

3.1 重新审视最大值原理

将标准最大值原理应用于抛物型方程（2.5），可推得 Θ 在 $[0,T]\times\Omega$中的最大值要么在 $t=0$处取得，此时

$$\max_{t\in[0,T],x\in\overline{\Omega}}\Theta(t,x)=\max_{x\in\overline{\Omega}}\Theta_0, \tag{3.2}$$

或者存在 $0<\tau\le T$, $x\in\partial\Omega$，使得

$$\max_{t\in[0,T],x\in\overline{\Omega}}\Theta(t,x)=\Theta(\tau,\overline{x})=\vartheta_B(\overline{x})-\alpha\fint_\Omega\Theta(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x\le\max_{x\partial\Omega}\vartheta_B(x)+\alpha\max_{t\in[0,T],x\in\overline{\Omega}}\Theta(t,x).$$

由于 $\alpha<1$ 和 T 任意，我们得到

$$\max_{t\ge0,\ x\in\overline{\Omega}}\Theta(t,x)\le\max\left\{\|\Theta_0\|_{L^\infty(\Omega)};\frac{1}{1-\alpha}\|\vartheta_B\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}.$$

对最小值重复相同的论证，我们得出

$$\|\Theta\|_{L^\infty((\tau,\infty)\times\Omega)}\le\max\left\{\|\Theta(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)};\frac{1}{1-\alpha}\|\vartheta_B\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}. \tag{3.3}$$

与 (2.21) 不同，估计 (3.3) 在时间上是全局的。

3.2 $L^2\times L^2$ 中的有界吸收集

首先，我们证明解最终在 L^2 中有界。

命题 3.1 ($L^2\times L^2$ **中的吸收集)**。设

$$0<\alpha<1.$$

在定理 *2.1* 的假设下，存在一个普适常数 $\mathcal{E}_{2,\ 2}$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\|\mathbf{u}_h(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}+\|\Theta(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\right]\le\mathcal{E}_{2,2} \tag{3.4}$$

对于 *rOB* 系统的任意全局时间解，常数 $\mathcal{E}_{2,\ 2}$ 仅取决于式 (2.20) 中指定的数据。特别是，它与初始数据无关。

命题 3.1 的证明基于 Levinson 耗散性的性质，该性质可以完全按照 [18,定理 4.1]中的方法证明。

命题 3.2 （Levinson 耗散性）。设

$$0 < \alpha < 1.$$

设$(\mathbf{u}_{h,n}, \Theta_n)_{n=1}^{\infty}$ 是在时间区间(T_n, ∞)上定义的系统(2.4)–(2.6) 的一列解， $T_n \to -\infty$ 满足

$$\|\mathbf{u}_{h,n}(T_n, , \cdot)\|_{L^2(\Omega_h;R^2)} + \|\Theta_n(T_n, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \mathcal{F}_0 \ \textit{uniformly for } n \to \infty.$$

那么，取适当的子序列后，

于$_n \to$于$_h$ 在$C_{\text{weak, loc}}(R;\ L^2(\Omega;\ R^d))$ 并且弱收敛于 $L^2_{\text{loc}}(R;\ W^{1,\ 2}{}_0(\Omega;\ R^d))$,

$$\Theta_n \to \Theta \ \textit{in } C_{\text{loc}}(R; L^2(\Omega)),\ \textit{weakly-(*) in } L^\infty_{\text{loc}}(R \times \overline{\Omega}),\ \textit{and weakly in } L^2_{\text{loc}}(R; W^{1,2}(\Omega)) \tag{3.5}$$

其中$(\mathbf{u}_h, \Theta)$ 是(2.4)–(2.6) 系统在 $R \times\Omega$ 中定义的一个（弱）解，并满足 g

$$\|\mathbf{u}_h(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_h;R^2)} + \|\Theta(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \mathcal{E}_{2,\infty}, \tag{3.6}$$

where $\mathcal{E}_{2,\ \infty}$ 仅取决于数据。特别是，它与 $\mathcal{F}_0$ 无关。

注 3.3. 与命题 3.1 相比，命题 (3.2) 的假设包括初始数据在 T_n 处有常数 $\mathcal{F}_0$ 给出的有界性。因此，正如 [18, 第 4], 节所指出的，命题 3.2 并非关于 $L^2 \times L^\infty$ 中有界吸收集的结论，而是关于全局吸引子的正则性。

As 如 [18, 推论 4.3], 所示，命题 3.2 推出命题 3.1。

3.3 速度的最终有界性

命题 3.1 中所述的一致有界性与能量平衡 (2.17) 一起给出 (2.18)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\fint_\Omega Z^2\,\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega Z\,\mathrm{d}x\right)^2\right] + \kappa \fint_\Omega |\nabla_x Z|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_h} \frac{1}{2}|\mathbf{u}_h|^2\,\mathrm{d}x_h + \mu\int_{\Omega_h} |\nabla_h \mathbf{u}_h|^2\,\mathrm{d}x_h \le K(t),\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中

$$\limsup_{t\to\infty} K(t) \le K_\infty,\ K_\infty = K_\infty(\text{data}). \tag{3.8}$$

由此以及命题 3.1，我们推得

$$\limsup_{T\to\infty}\left[\int_T^{T+1} \|\mathbf{u}_h\|^2_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)}\,\mathrm{d}t + \int_T^{T+1} \|\Theta\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right] \le \mathcal{E}_{1,2;1,2} \tag{3.9}$$

3.3.1 $2D$中的 Navier–Stokes 系统的最大正则性估计

我们利用 Gerhardt [23, 定理 3] 推导出的精确公式：

$$\begin{aligned}
&\int_T^{T+1} \left[\|\mathbf{u}_h\|^2_{W^{2,2}(\Omega_h;R^2)} + \|\partial_t \mathbf{u}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;R^2)} \right] \mathrm{d}t \\
&\leq c_1 \left(\|\mathbf{u}_h(T)\|_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)} + \int_T^{T+1} \int_{\Omega_h} |\langle \Theta \rangle|^2 |\nabla_h \mathbf{G}|^2 \,\mathrm{d}x_h \,\mathrm{d}t \right) \times \\
&\times \left[1 + c_0 c_1 \left(\sup_{t\in[T,T+1]} \|\mathbf{u}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;R^2)} \int_T^{T+1} \|\mathbf{u}_h\|^2_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)} \right) \times \right. \\
&\left. \times \exp\left(c_0 c_1^2 \left(\sup_{t\in[T,T+1]} \|\mathbf{u}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;R^2)} \int_T^{T+1} \|\mathbf{u}_h\|^2_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)} \right) \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中， c_0、 c_1 仅取决于区域 Ω_h。结合此估计以及 (3.4)、(3.9)，可得

$$\limsup_{T\to\infty} \left[\|\mathbf{u}_h(T,\cdot)\|^2_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)} + \int_T^{T+1} \left[\|\mathbf{u}_h\|^2_{W^{2,2}(\Omega_h;R^2)} + \|\partial_t \mathbf{u}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;R^2)} \right] \mathrm{d}t \right] \leq \mathcal{E}_{u,1,2}. \tag{3.11}$$

3.4 温度偏差的最终有界性

最后，利用估计 (3.11)，并将 (2.25) 乘以 $\Delta_x Z$，可得

$$\limsup_{T\to\infty} \int_T^{T+1} \|\Theta\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} \leq \mathcal{E}_{2,2}. \tag{3.12}$$

由于 $W^{2,2} \hookrightarrow L^\infty$，结合估计 (3.12) 和最大值原理，可得

$$\limsup_{t\to\infty} \|\Theta(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{E}_\infty. \tag{3.13}$$

我们来总结本节得到的结果。

定理 3.4 (W^1**中的吸收集**, $^2 \times L^\infty$**)**。设

$$0 < \alpha < 1.$$

在以下假 设下，定理 *2.1* 表明存在一个普适常数 $\mathcal{E}_{1,2;\infty}$ 使得 t

$$\limsup_{t\to\infty} \left[\|\mathbf{u}_h(t,\cdot)\|_{W^{1,2}_0(\Omega_h;R^2)} + \|\Theta(t,\cdot)\|_{L^\infty\cap W^{1,2}(\Omega)} \right] \leq \mathcal{E}_{1,2;\infty} \tag{3.14}$$

对于任何由满足以下假设的初始数据产生的全局时间解：

定理 *2.1*。常数 $\mathcal{E}_{1,\ 2;\infty}$ 仅取决于 (2.20) 中规定的数据。特别是，它与初始数据无关。

利用定理 3.4，并结合命题 3.2 以及在 (3.11)、(3.12) 中建立的一致有界性，我们完全按照 [18], 中的方法推得，rOB 系统存在一个全局轨迹吸引子

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \Big\{ & (\mathbf{u}_h, \Theta) \in BC\Big(R; W_0^{1,2}(\Omega_h; R^2) \times (W^{1,2} \cap L^\infty)(\Omega)\Big) \ \Big| \\ & (\mathbf{u}_h, \Theta) \text{ solves the rOB system in } R \times (\Omega_h \times \Omega) \\ & \sup_{\tau \in R} \left[\|\mathbf{u}_h(\tau, \cdot)\|_{W^{1,2}(\Omega_h; R^2)} + \|\Theta(\tau, \cdot)\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\Theta(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \right] \leq \mathcal{E}(\text{data}), \\ & \sup_{\tau \in R} \int_\tau^{\tau+1} \left[\|\partial_t \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h; R^2)} + \|\mathbf{u}_h\|_{W^{2,2}(\Omega_h; R^2)} + \|\partial_t \Theta\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\Theta\|_{W^{2,2}(\Omega)} \right] \mathrm{d}t \leq \mathcal{E}(\text{data}) \Big\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

吸引子 $\mathcal{A}$ 非空且时间平移不变。

4 旋转 Oberbeck–Boussinesq 系统的连续数据同化方法

遵循 Azouani、Olson 和 Titi 的思路 [3], ，另见 Carlson、Larios 和 Titi [9], ，以及 Farhat、Jolly、M.S. 和 Titi [14], ，我们为 rOB 系统构建了一种数据同化方法。

首先介绍插值算子

$$\begin{aligned} & I_\delta[\mathbf{v}],\ \|I_\delta[\mathbf{v}]\|_{L^2(\Omega_h; R^2)} \leq \overline{I}\Big(\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)}\Big),\ \|I_\delta[\mathbf{v}] - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)} \leq \mathcal{O}(\delta)\|\mathbf{v}\|_{W^{1,2}(\Omega_h; R^2)}, \\ & \qquad \mathcal{O}(\delta) \to 0 \text{ as } \delta \to 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

接下来，考虑 rOB 系统的一个整体解（$\mathbf{u}_h, \Theta$） $\in \mathcal{A}$，其含义是

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_h \mathbf{u}_h &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u}_h + \mathrm{div}_h(\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla_h \Pi &= \mu \Delta_h \mathbf{u}_h - \langle \Theta \rangle \nabla_h F \end{aligned} \tag{4.2}$$

在 $R \times \Omega_h$ 中,

$$\partial_t \Theta + \mathrm{div}_x(\Theta \mathbf{u}_h) = \kappa \Delta_x \Theta \tag{4.3}$$

在 $R \times \Omega$ 中,

$$\mathbf{u}_h|_{\partial\Omega_h} = 0,\ \Theta|_{\partial\Omega} = \vartheta_B - \alpha \fint_\Omega \Theta \,\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

现在，我们引入一个“受迫”rOB 系统

$$\mathrm{div}_h \widetilde{\mathbf{u}}_h = 0,$$

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{u}}_h + \mathrm{div}_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_h) + \nabla_h \widetilde{\Pi} = \mu \Delta_h \widetilde{\mathbf{u}}_h - \Lambda I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h] - \left\langle \widetilde{\Theta} \right\rangle \nabla_h G \tag{4.5}$$

在 $(0,T) \times \Omega_h$ 中，

$$\partial_t \widetilde{\Theta} + \mathrm{div}_x(\widetilde{\Theta} \widetilde{\mathbf{u}}_h) = \kappa \Delta_x \widetilde{\Theta} \tag{4.6}$$

在 $(0,T) \times \Omega$ 中，并带有边界条件

$$\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{\partial\Omega_h} = 0, \ \widetilde{\Theta}|_{\partial\Omega} = \vartheta_B - \alpha \fint_\Omega \widetilde{\Theta} \, \mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

以及初始数据

$$\widetilde{\mathbf{u}}_h(0,\cdot) = \widetilde{u}_{0,h}, \ \widetilde{\Theta}(0,\cdot) = \widetilde{\Theta}_0. \tag{4.8}$$

鉴于 (4.1)，受迫问题 (4.5)–(4.8) 的整体可解性可通过重复定理 2.1 证明中的论证加以证明。这里 $\Lambda > 0$ 是所谓的 nudging 参数，将在下文确定。

~我们的最终任务是比较解 $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \Theta)$ 与 $(\mathbf{u}_h, \Theta)$ 之间的距离。与第 2.3.2 节类似，我们引入

$$Z = \Theta + \alpha \fint_\Omega \Theta \, \mathrm{d}x - \widehat{\vartheta}_B, \ \widetilde{Z} = \widetilde{\Theta} + \alpha \fint_\Omega \widetilde{\Theta} \, \mathrm{d}x - \vartheta_B$$

将 (4.3)、(4.6) 改写为如下形式

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\widetilde{Z} - \frac{\alpha}{\alpha+1} \fint_\Omega \widetilde{Z} \, \mathrm{d}x \right) + \mathrm{div}_x(\widetilde{\mathbf{u}}_h(\widetilde{Z} + \vartheta_B)) &= \kappa \Delta_x \widetilde{Z} \text{ in } R \times \Omega, \\ \widetilde{Z}|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(Z - \frac{\alpha}{\alpha+1} \fint_\Omega Z \, \mathrm{d}x \right) + \mathrm{div}_x(\mathbf{u}_h(Z + \vartheta_B)) &= \kappa \Delta_x Z \text{ in } (0,T) \times \Omega, \\ Z|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

将对应的方程相减，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) &= 0, \\ \partial_t(\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \nabla_h P &= \mu \Delta_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - \Lambda I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h] - \left\langle \widetilde{Z} - Z \right\rangle \nabla_h G \\ &\quad + \mathrm{div}_h(\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) - \mathrm{div}_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_h), \\ (\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)|_{\partial\Omega_h} &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

and,

$$\partial_t \left((\widetilde{Z} - Z) - \frac{\alpha}{\alpha+1} \fint_\Omega (\widetilde{Z} - Z) \, \mathrm{d}x \right) + \mathrm{div}_x(\widetilde{\mathbf{u}}_h(\widetilde{Z} - Z)) = \kappa \Delta_x(\widetilde{Z} - Z) + \mathrm{div}_x(\widetilde{Z}(\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)),$$

$$(\widetilde{Z}-Z)|_{\partial\Omega}=0. \tag{4.12}$$

将方程 (4.11) 乘以 ($\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h$)，并分部积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;R^2)}+\mu\|\nabla_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\|^2_{L^2(\Omega_h;R^4)}+\Lambda\int_{\Omega_h}I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h]\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x\\ =\int_{\Omega_h}\left\langle Z-\widetilde{Z}\right\rangle\nabla_h G\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x\\ +\int_{\Omega_h}\mathrm{div}_h(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h\otimes\widetilde{\mathbf{u}}_h)\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.13}$$

同样，将 (4.12) 乘以 ($Z-Z$) 并分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]+\kappa\fint_\Omega|\nabla_x(\widetilde{Z}-Z)|^2\,\mathrm{d}x\\ =\fint_\Omega Z(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\cdot\nabla_x(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.14}$$

根据 (4.1)，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_h}I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h]\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x=\int_{\Omega_h}(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)^2\ \mathrm{d}x\\ &+\int_{\Omega_h}\Big(I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h]-(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\Big)\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x,\\ &\left|\int_{\Omega_h}\Big(I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h]-(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\Big)\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x\right|\le\mathcal{O}(\delta)\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)}\|\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

此外，我们改写为

$$\int_{\Omega_h}\mathrm{div}_h(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h\otimes\widetilde{\mathbf{u}}_h)\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x=\int_{\Omega_h}\nabla_h\mathbf{u}_h:(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\otimes(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x,$$

其中，根据 Ladyzhenskaya 插值不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega_h}\nabla_h\mathbf{u}_h:(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\otimes(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\ \mathrm{d}x\right|\le\|\nabla_h\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^4)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|^2_{L^4(\Omega_h;R^2)}\\ &\le C_L\|\nabla_h\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^4)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}\|\nabla_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega_h;R^4)}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

最后，我们回顾庞加莱不等式

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega_h;R^2)}\le C_P\int_{\Omega_h}|\nabla_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)|^2\ \mathrm{d}x,\ \|\widetilde{Z}-Z\|^2_{W^{1,2}_0(\Omega)}\le C_P\int_{\Omega_h}|\nabla_x(\widetilde{Z}-Z)|^2\ \mathrm{d}x.$$

将恒等式 (4.13)、(4.14) 相加，并利用估计 (4.15)、(4.16)，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}^2+\left[\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]\right)\\
&\quad+\mu\|\nabla_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega_h;R^4)}^2+\Lambda\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}^2+\kappa\fint_\Omega|\nabla_x(\widetilde{Z}-Z)|^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad\le\mathcal{O}(\delta)\Lambda\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{W^{1,2}(\Omega_h;R^2)}\,\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}\\
&\quad+C_L\|\nabla_h\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^4)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}\|\nabla_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega_h;R^4)}\\
&\quad+\|Z\|_{L^\infty(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}\|\nabla_x(\widetilde{Z}-Z)\|_{L^2(\Omega;R^3)}\\
&\quad+\|\nabla_hF\|_{L^\infty(\Omega_h;R^2)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}\|\widetilde{Z}-Z\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

因此，我们可以先将 $\Lambda=\Lambda(\mathcal{E},\ C_L,\ C_P,$ 数据) 取足够大，并将 $\delta=\delta(\Lambda)$ 取足够小，使得不等式 (4.17) 化为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}^2+\left[\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]\right)\\
&\quad+\beta\left[\|\widetilde{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h\|_{W_0^{1,2}(\Omega_h;R^2)}^2+\|\widetilde{Z}-Z\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2\right]\le 0,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

其中 $\beta=\beta(\delta,\ \Lambda,\ \mathcal{E},\ C_L,\ C_P,$ 数据) >0。

注意到

$$
\begin{aligned}
\fint_\Omega(\Theta-\widetilde{\Theta})^2\,\mathrm{d}x&=\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x-\frac{2\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2\\
&\le\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

此外，由詹森不等式可得

$$
\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{1}{1+\alpha}\fint_\Omega(\widetilde{Z}-Z)^2\,\mathrm{d}x
\tag{4.20}
$$

我们得到了以下结果。

定理 4.1（数据同化方法的收敛性）。设 $(\mathbf{u}_h,\Theta)\in\mathcal{A}$ 是一个整体$\widetilde{\ }$解，并设 $(\widetilde{\ }\mathbf{u}_h,\Theta)$ 是受迫 *rOB* 系统 (4.5)–(4.8) 的一个解，该解源于$\widetilde{\ }$初始数据 $(\widetilde{\ }\mathbf{u}_{0,\ h},\Theta_0)$。

那么就存在 $\Lambda=\Lambda(\mathcal{E},C_L,C_P,$ 数据) >0 较大的、 $\delta=\delta(\Lambda)>0$ 较小的，使得

$$
\|(\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h)(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega_h;R^2)}+\|(\Theta-\widetilde{\Theta})(\tau,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}
$$

$$\lesssim \left(1 + \|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h;R^2)} + \|\widetilde{\Theta}_0\|_{L^2(\Omega)}\right) \exp(-\beta\tau),\ \tau > 0,$$

对于某个 $\beta = \beta(\mathcal{E}, C_L, C_P, \text{数据}) > 0$。

5 通过原始可压缩模型进行数据同化

我们假设，受迫 rOB 系统 (4.5)、(4.6) 中使用的插值算子的取值由处于 $\varepsilon \to 0$ 状态的原始系统 (1.4)–(1.8) 提供。因此，我们将受迫 rOB 系统 (4.5)–(4.7) 替换为

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_h \widetilde{\mathbf{u}}_h &= 0, \\ \overline{\varrho}\partial_t \widetilde{u}_h + \overline{\varrho}\mathrm{div}_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_h) + \nabla_h \Pi &= \mu\Delta_h \widetilde{\mathbf{u}}_h - \Lambda I_\delta[\widetilde{\mathbf{u}}_h - (\mathbf{u})_h] - \left\langle \widetilde{\theta} \right\rangle \nabla_h F \end{aligned} \tag{5.1}$$

在 $(0,T) \times \Omega_h$ 中，

$$\partial_t \widetilde{\theta} + \mathrm{div}_x(\widetilde{\theta}\widetilde{\mathbf{u}}_h) = \kappa\Delta_x \widetilde{\theta} + a\mathrm{div}_x(F\widetilde{\mathbf{u}}_h),\ \kappa > 0,\ a \in R, \tag{5.2}$$

在 $(0,T) \times \Omega$ 中，满足边界条件

$$\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{\partial\Omega_h} = 0,\ \widetilde{\theta}|_{\partial\Omega} = \vartheta_B - \alpha\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \widetilde{\theta}\ \mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

这里，符号 $(\mathbf{u})_h = (u^1, u^2)$ 表示由原始系统 (1.4) – (1.5) 确定的速度 $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ 的水平分量。

5.1 原始系统的初始数据

原始系统所满足、并决定 (5.1) 中速度场 $(\mathbf{u})_h$ 的初始数据先验地未知。由于我们研究的是小 ε 情形下的原始系统，因此假设初始数据准备良好，即它们不支持声波。对于气象学中的大气模型而言，这一假设十分自然。因此，我们假设存在参考密度 $\varrho > 0$ 和参考温度 ϑ，使得原始系统的解 $(\varrho,\ \vartheta,\ \mathbf{u})$ 满足

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varrho(0,\cdot) - \overline{\varrho}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\lesssim 1,\ \left\| \frac{\varrho(0,\cdot) - \overline{\varrho}}{\varepsilon} - \mathcal{R}_0 \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon, \\ \left\| \frac{\vartheta(0,\cdot) - \overline{\vartheta}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\lesssim 1,\ \left\| \frac{\vartheta(0,\cdot) - \overline{\vartheta}}{\varepsilon} - \mathcal{T}_0 \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon, \\ \|\mathbf{u}(0,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega;R^3)} &\lesssim 1,\ \|\mathbf{u}(0,\cdot) - \mathbf{u}_{0,h}\|_{L^1(\Omega;R^3)} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{5.4}$$

对于某些函数 $\mathcal{R}_0$、 $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathbf{u}_{0,\ h}$ ，满足

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0 \in W^{2,\infty}(\Omega),\ \mathcal{T}_0|_{\partial\Omega} = \vartheta_B, \\ [\mathbf{u}_{0,h}, 0] \equiv \mathbf{u}_{0,h} \in W^{2,\infty}(B(r); R^2),\ \mathbf{u}_{0,h}|_{\partial B(r)} = 0,\ \mathrm{div}_h \mathbf{u}_{0,h} = 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

and

$$\frac{\partial p(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})}{\partial \varrho} \nabla_x \mathcal{R}_0 + \frac{\partial p(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})}{\partial \vartheta} \nabla_x \mathcal{T}_0 = \overline{\varrho} \nabla_x F. \tag{5.6}$$

5.2 近似数据同化

在初始数据满足假设 (5.4)–(5.5) 的条件下，原始系统 (1.4)–(1.5) 的解在紧时间区间上一致趋近于 (1.9)–(1.12) 的解 $\varepsilon \to 0$ ，参见 [13]。因此，将这一结果与定理 4.1 结合，可得以下结论。

定理 5.1 (近似数据同化）。设 $\Omega_h = B_r$。设 $(\varrho, \mathbf{u}\ \vartheta)$ 为原始系统 (1.4)–(1.7) 的一个弱解，其初始数据为 (5.4)–(5.5)。设 $\widetilde{\mathbf{u}}_h$, θ 为受迫 *rOB* 系统 (5.1)–(5.2)的解，其初始数据为 $\widetilde{\mathbf{u}}_h(0, \cdot) = \widetilde{u}_{0,h}$, $\theta(0, \cdot) = \theta_0$。

于是存在 $\Lambda > 0, \delta = \delta(\Lambda) > 0$，以及 $\beta > 0$ ，使得

$$\begin{aligned} \|(\varrho \mathbf{u} - \overline{\varrho} \widetilde{\mathbf{u}}_h)(\tau, \cdot)\|_{L^1(\Omega_h; R^2)} + \left\| \frac{\vartheta(\tau, \cdot) - \vartheta_B}{\varepsilon} - \lambda \fint_\Omega \frac{\vartheta(\tau, \cdot) - \vartheta_B}{\varepsilon} \,\mathrm{d}x - \widetilde{\theta}(\tau, \cdot) \right\|_{L^1(\Omega)} \\ \lesssim \left(1 + \|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,h}\|_{L^2(\Omega_h; R^2)} + \|\widetilde{\theta}_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \exp(-\beta\tau) + \chi(\varepsilon, \tau) \end{aligned}$$

其中，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\chi(\varepsilon, \cdot) \to 0$ 在紧时间区间上一致收敛。

参考文献

[1] A. Abbatiello 和 E. Feireisl。《奥伯贝克-Boussinesq 系统及其非局部边界条件》。《应用数学季刊》,81(2):297–306, 2023.

[2] M. U. Altaf、E. S. Titi、T. Gebrael、O. M. Knio、L. Zhao、M. F. McCabe 和 I. Hoteit。利用连续数据同化对二维 B´énard 对流方程进行降尺度。《计算地球科学》,21(4):879–897, 2017.

[3] A. Azouani、E. Olson 和 E. S. Titi。使用一般插值观测量进行连续数据同化。《非线性科学杂志》，24(2):277–304，2014。

[4] P. Bella、E. Feireisl 和 F. Oschmann。揭示意外项的奥伯贝克-布辛涅斯克近似的严格推导。《数学物理通讯》，403(3):1245–1273，2023。[5] A. Biswas、Z. Bradshaw 和 M. S. Jolly。利用局部观测量对纳维–斯托克斯方程进行数据同化。《SIAM应用动力系统杂志》，20(4):2174–2203，2021。[6] A. Biswas、K. Brown 和 V. R. Martinez。用于连续数据同化的无网格插值观测量。《应用数学年刊》，38(3):1–60，2022。[7] A. Biswas 和 V. R. Martinez。二维纳维–斯托克斯方程数据同化算法的高阶同步。《非线性分析：现实世界应用》，35:132–157，2017。[8] A. Biswas 和 R. Price。三维纳维–斯托克斯方程的连续数据同化。《SIAM数学分析杂志》，53(6):6697?6723，2021。[9] E. Carlson、A. Larios 和 E. S. Titi。非线性连续数据同化算法的超指数收敛速率：二维纳维–斯托克斯方程范例。《非线性科学杂志》，34(2):第37号论文，41，2024。[10] B. Cockburn、D. A. Jones 和 E. S. Titi。确定非线性耗散方程的自由度。C. R. Acad. Sci. Paris S ´er. I Math.，321(5):563–568，1995。[11] P. Constantin、C. Foias、O. P. Manley 和 R. Temam。湍流的决定模态和分形维数。《流体力学杂志》，150:427–440，1985。[12] R. A. Ecke 和 O. Shishkina。湍流旋转瑞利–贝´纳德对流。《流体力学年度评论》，55:603–638，2023。[13] F. Fanelli 和 E. Feireisl。关于旋转流体的瑞利–贝´纳德对流问题。2025。arXiv 预印本编号 2508.02933。[14] A. Farhat、M. S. Jolly 和 E. S. Titi。仅通过速度测量对二维贝´纳德对流进行连续数据同化。《物理学D辑》，303:59–66，2015。[15] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。关于仅使用温度测量进行数据同化的查尼猜想：三维行星地转模型范例。《数学气候与天气预报》，2:61–74，2016。[16] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅通过水平速度测量对二维贝´纳德对流系统进行连续数据同化。《非线性科学杂志》，27(3):1065–1087，2017。[17] E. Feireisl 和 A. Novotn´y。黏性流体热力学中的奇异极限。数学流体力学进展。Birkh¨auser/Springer，尚贝里，2017。第二版。

[18] E. Feireisl、E. Rocca与G. Schimperna。再论奥伯贝克-布辛涅斯克近似与瑞利-B´enard对流。离散与连续动力系统，44(8):2387–2402，2024。[19] C. Foias、O. P. Manley、R. Temam与Y. M. Tr`eve。纳维–斯托克斯方程的渐近分析。《物理学D辑》，9(1–2):157–188，1983。[20]C. Foias与G. Prodi。关于二维纳维–斯托克斯´方程非定常解的整体性态。帕多瓦大学数学研讨会报告，39:1–34，1967。[21] C. Foias与R. Temam。纳维–斯托克斯方程的渐近数值分析。载于A. Barenblatt、G. Iooss与D. Joseph（编），非线性动力学与湍流，皮特曼高级出版计划，波士顿，1983。[22] C. Foias与E. S. Titi。确定节点、有限差分格式与惯性流形。《非线性》，4(1):135–153，1991。[23] C. Gerhardt。二维非定常纳维-斯托克斯方程解的 L^p-估计。《太平洋数学杂志》，79(2):375–398，1978。[24] Y. Giga与T. Miyakawa。纳维-斯托克斯初值问题在 L_r 中的解。《理性力学与分析档案》，89(3):267–281，1985。[25] A. Haraux。一类二阶非线性演化方程在Levinson意义下的耗散性。《非线性分析》，6(11):1207–1220，1982。[26] D. A. Jones与E. S. Titi。二维纳维–斯托克斯方程的确定有限体积元。《物理学D辑》，60(1?4):165–174，1992。[27] D. A. Jones与E. S. Titi。纳维–斯托克斯方程的决定模态、节点与体积元数目的上界。《印第安纳大学数学杂志》，42(3):875–887，1993。[28] E. Lunasin与E. S. Titi。分布式非线性耗散系统的有限决定参数反馈控制——一项计算研究。《演化方程与控制理论》，6(4):535?5[29] V. A. Solonnikov。纳维-斯托克斯方程非定常线性化系统解的估计。斯捷克洛夫数学研究所论文集，70:213–317，1964。[30] A.A. White、B.J Hoskins、I. Roulstone与A. Staniforth，全球大气的相容近似模型：浅层、深层、静力、准静力与非静力。《英国皇家气象学会季刊》，131: 2081-2107，2005。