arXiv:2602.02346v1 [math.PR] 2 Feb 2026

小偏差和无穷方差条件下临界 Galton-Watson 过程的种群规模*

Vladimir Vatutin†，Elena Dyakonova‡

摘要

我们研究后代数具有无穷方差的临界 Galton-Watson 过程的种群规模分布演化，并假设在遥远的观测时刻 n，种群规模异常小。

关键词：Galton-Watson 分枝过程、无穷方差、种群演化

AMS 学科分类：一级学科 60J80，二级学科 60E07

1 引言

我们考虑一个从时刻 0 开始的 Galton-Watson 分枝过程 $\mathcal{Z} = \{Z(n)\ n \geq 0\}$。设 $f(s) := \mathbf{E}s^{\xi}$ 为单个粒子的后代数 ξ 的概率生成函数。我们假设粒子的繁殖律满足条件

$$\mathbf{E}\xi = 1,\ f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha}\, L(1-s), \quad 0 \leq s \leq 1, \tag{1}$$

其中 $\alpha \in (0,1]$ 且 $L(z)$ 是一个缓变函数（当 $z \downarrow 0$ 时）。记 $f_0(s) := s$，并通过以下等式定义 $f(s)$ 的迭代

$$f_n(s) = f(f_{n-1}(s)),\ n = 1, 2, \ldots.$$

已知 [9]，给定 (1)

$$(1 - f_n(0))^{\alpha} L\left(1 - f_n(0)\right) \sim \frac{1}{\alpha n} \tag{2}$$

*本研究得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号 24-11-00037 https://rscf.ru/en/project/24-11-00037/

†俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科市古布金街 8 号，邮编 119991。电子邮箱：vatutin@mi-ras.ru

‡俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科市古布金街 8 号，邮编 119991。电子邮箱：elena@mi-ras.ru

如 $n \to \infty$，因此（例如，参见 [7, 第 1.5 节，第 5^0] 点或 [6]）

$$Q(n) := \mathbf{P}\left(Z(n) > 0 | Z(0) = 1\right) = 1 - f_n(0) \sim \frac{L^*(n)}{n^{1/\alpha}} \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{3}$$

其中 $L^*(n)$ 是在无穷远处缓慢变化的函数。此外，对任意 $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_n(0))Z(n)} | Z(n) > 0, Z(0) = 1\right] &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dM(x) \\ &= 1 - \frac{1}{\left(1+\lambda^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $M(x)$ 是一个适当的非退化分布，使得对任意 $x > 0$，$M(x) > 0$。

由 (4) 可知，对任意 $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(0 < (1 - f_n(0))Z(n) \le x | Z(0) = 1\right) \approx M(x)\mathbf{P}\left(Z(n) > 0 | Z(0) = 1\right)$$

当 $n \to \infty$ 时。因此，存活到较远时刻 n 的种群的典型规模为 $(1 - f_n(0))^{-1}$。

下文中，除非另有说明，我们均假设 $Z(0) = 1$，并研究在事件成立的条件下临界 Galton–Watson 分枝过程的种群规模的渐近行为

$$\mathcal{H}(l, r) := \left\{0 < (1 - f_r(0))Z(l) \le 1\right\}$$

在关于参数 l 与 r 之比的各种假设下。我们主要讨论如下情形

$$\mathcal{H}(n, \varphi(n)) := \left\{0 < (1 - f_{\varphi(n)}(0))Z(n) \le 1\right\} \tag{5}$$

其中 $\varphi(n)$ $n = 1, 2, \ldots\ldots$，是一个确定性函数，满足

$$\varphi(n) \to \infty \text{ and } \frac{\varphi(n)}{n} \to 0 \tag{6}$$

当 $n \to \infty$ 时。

我们的主要结果如下。

定理1 设条件 *(1)* 对 $\alpha \in (0, 1)$ 成立，且假设 *(6)* 成立。那么，对于任意 $\lambda > 0$

1) 若 $m \to \infty$ 且 $m = o(n)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)} | \mathcal{H}(n, \varphi(n))\right] = \frac{1}{\left(1+\lambda^\alpha\right)^{1/\alpha+1}};$$

2) 若 $m \sim \theta n$ 对于某个 $\theta \in (0,1)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)} | \mathcal{H}(n, \varphi(n))\right] = \frac{1}{\left(1 - \theta + \left(\lambda(1-\theta)^{1/\alpha} + \theta^{1/\alpha}\right)^\alpha\right)^{1/\alpha+1}};$$

3) 若 $m = n - \psi(n)$，其中 $n \gg \psi(n) \gg \varphi(n)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_{\psi(n)}(0))Z(m)}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+1}};$$

4) 若 $m = n - y\varphi(n)$，其中 $y \in (0,\ \infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_{n-m}(0))Z(m)}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma(j+\alpha)}{j!\,(1+\lambda)^{\alpha+j}} yM^{*j}(y^{-1/\alpha}),$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是标准伽马函数，而 $M^{*j}(x)$ 是 j 次卷积，即 $M(x)$ 与自身的卷积；

5) 若 $m = n - \chi(n)$ 其中 $n \gg \varphi(n) \gg \chi(n) \geq 0$，则

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda\left(1-f_{\varphi(n)}(0)\right)Z(m)}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx.$$

特别地，若 $T \to \infty$ 且 $T = o\left((1-f_n(0))^{-1}\right)$，则

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\left(Z(n) < xT | 0 < Z(n) \leq T\right) = x^{\alpha}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

乍看之下，条件 (5) 显得相当严格且不自然。我们来说明事实并非如此。我们知道，若 $Z(n) > 0$，则根据如今已成为经典的 Yaglom-Slack结果 (4)，临界 Galton-Watson过程在较远时刻 n 的种群规模为$1/(1-f_n(0))$量级。因此，若我们想要考察时刻 n，种群规模异常偏小的情形，在给定 $Z(n) > 0$ 的条件下，就需要施加以下假设

$$0 < (1 - f_{\varphi(n)}(0))Z(n) \leq w, \tag{7}$$

其中 $w > 0$ 和 $\varphi(n) = o(n)$。根据（3）以及缓变函数的性质，对于任意 $w > 0$，我们有

$$\frac{1-f_{\varphi(n)}(0)}{w} \sim \frac{L^*(\varphi(n))}{w\varphi^{1/\alpha}(n)} \sim \frac{L^*(w^{\alpha}\varphi(n))}{(w^{\alpha}\varphi(n))^{1/\alpha}} \sim 1 - f_{w^{\alpha}\varphi(n)}(0).$$

因此，我们可以将条件（7）替换为条件

$$0 < (1 - f_{w^{\alpha}\varphi(n)}(0))Z(n) \leq 1.$$

现在注意到，替换 $\varphi(n) \to w^{\alpha}\varphi(n)$ 保持了假设（6）的有效性，从而也保持了定理1所有结论的有效性。

定理1中我们没有提及情形 $\alpha = 1.$。关于该情形的补充说明，请参见下一节。

2 辅助结果

定理1的证明基于 [10]中确立的以下结论。

定理2 设条件 *(1)* 对 $\alpha \in (0,1)$ 成立，且 $\varphi(n)\ \ n = 1,2,...$ 是满足假设 *(6)* 的确定性函数。那么

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right) \sim \frac{1-f_n(0)}{\alpha n}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\varphi(n). \tag{8}$$

注1 令 $T = \left(1-f_{\varphi(n)}(0)\right)^{-1}$，并注意到

$$\frac{L(1/T)}{T^{\alpha}} = \left(1-f_{\varphi(n)}(0)\right)^{\alpha} L\left(1-f_{\varphi(n)}(0)\right) \sim \frac{1}{\alpha\varphi(n)}$$

由 *(2)*，当 $n\to\infty$ 时，我们可以将 *(8)* 改写为

$$\mathbf{P}\left(0 < Z(n) \le T\right) \sim \frac{1-f_n(0)}{\alpha n}\frac{1}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\frac{T^{\alpha}}{L(1/T)}. \tag{9}$$

注2 若

$$f'(1) = 1, \quad \sigma^2 = f''(1) \in (0,\infty), \tag{10}$$

那么 $L(x)\ \to \sigma^2/2$ 当 $x\downarrow 0$ 时成立（例如参见 *[1],* 第*1*章，第*9*节）

$$1-f_n(0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}, \quad n\to\infty.$$

因此可知，若 $n \gg \varphi(n)\ \to\infty$，则（*8*）替换为

$$\mathbf{P}\left(0 < Z(n) < T\right) \sim \frac{4}{\sigma^4 n^2}T,$$

且这是 *[5]* 中主要结果的一个显然推论。

然而，若 $\alpha = 1$ 且 $\sigma^2 = \infty$，则目前仅在以下情形下，才已知有类似于（*9*）的$\mathbf{P}\left(0 < Z(n) \le T\right)$渐近表示

$$\mathbf{P}\left(\xi \ge j\right) = \frac{\bar{L}(1/j)}{j^2}, \tag{11}$$

¯其中 $L(z)$ 是在零点处缓慢变化的函数（见 *[10]* 中的注*2*）。由于在接下来的论证中，我们只使用（*9*）右侧的形式，因此可以验证，只要条件（*10*）或条件（*11*）成立，定理*1*的所有结论仍然有效。

我们固定 $n \in \{1,2,...\}$，并引入所谓的约化的 Galton-Watson 过程 $\{Z(m,\ n)\ 0 \le m \le n\}$，其中 $Z(m,\ n)$ 表示原过程 $\mathcal{Z}$ 中在世代 n 具有非空后代的此类世代 m 粒子数（约定 $Z(n,\ n) = Z(n)$）。

定理 3（见 *[10]*）设条件 *(1)* 对 $\alpha \in$（0，1）有效，且假设 *(6)* 成立。那么，对于任意 $y \in$（0，∞）以及任意 $j \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Z(n - y\varphi(n), n) = j | \mathcal{H}(n, \varphi(n))\right) = \frac{\alpha\Gamma\left(j+\alpha\right)}{j!} y M^{*j}(y^{-1/\alpha}). \quad (12)$$

Let

$$\beta(n) := \max\left(0 \leq m < n : Z(m, n) = 1\right)$$

是时刻 n 种群中所有个体的最近共同祖先（MRCA）的出生时刻，并令 $d(n) := n - \beta(n)$ 表示从观测时刻 n 到 MRCA 出生时刻的距离。关于随机变量 $d(n)$ 分布的以下结论是定理 3 的一个显然推论。该结论在后续论证中发挥着重要作用。

推论1 在定理 *3* 的条件下，对于任意 $y \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Z(n - y\varphi(n), n) = 1 | \mathcal{H}(n, \varphi(n))\right) \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(d(n) \leq y\varphi(n) | \mathcal{H}(n, \varphi(n))\right) = \alpha\Gamma(1+\alpha) y M(y^{-1/\alpha}).\end{aligned}$$

由 **(4)** 可得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} dM\left(x\right) = 1 - \frac{1}{\left(1+\lambda^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}} \sim \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\lambda^a},$$

当 $\lambda \to \infty$时。因此，根据陶伯定理（例如参见 [3,第 XIII 章第 5 节定理 2 和 3]），可得

$$M\left(x\right) \sim \frac{1}{\alpha\Gamma\left(1+\alpha\right)} x^\alpha$$

当 $x \to 0$时。因此，

$$\lim_{y\to\infty} \alpha\Gamma\left(1+\alpha\right) y M(y^{-1/\alpha}) = 1. \quad (13)$$

这一事实结合推论1表明，给定 $\mathcal{H}(n, \varphi(n))$，第 n 世代所有个体到 MRCA 的距离为 $\varphi(n)$ 量级。我们将在后文使用这一结果。

我们还需要一个与MRCA有关的结论。具体而言，我们证明由(12)右端所确定的极限分布是正常的。

引理 1 对于任意 $y > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma\left(j+\alpha\right)}{j!} y M^{*j}(y^{-1/\alpha}) = 1.$$

证明。只需证明，对于任意$x > 0$

$$U(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma(j+\alpha)}{j!} M^{*j}(x) = x^{\alpha}, \tag{14}$$

或者，由于 $U(\cdot)$ 是一个测度（参见 [3], 第 XIII 章第 1 节定理 1a），对任意$\lambda > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma(j+\alpha)}{j!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dM^{*j}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha}}. \tag{15}$$

由 (4) 可得

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dM^{*j}(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{(1+\lambda^{\alpha})^{1/\alpha}}\right)^{j}.$$

现在我们令

$$1 - \frac{\lambda}{(1+\lambda^{\alpha})^{1/\alpha}} = t. \tag{16}$$

不难验证

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma(j+\alpha)}{j!} t^{j} = \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{1}{(1-t)^{\alpha}} - 1\right). \tag{17}$$

另一方面，将 (16) 关于 λ^{α} 求解，得到

$$\lambda^{-\alpha} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha}} - 1. \tag{18}$$

(16)、(17) 和 (18) 合起来证明了 (15)，因此也证明了 (14)。

引理 1 得证。

我们注意到，在条件 (10) 下， [4] 中证明了一个与定理 3 类似的结论。

作为进一步的参考，我们想指出，若 $mn^{-1} \to 0$ 当 $n \to \infty$时，则由 (3) 以及缓变函数的性质可得

$$\frac{1 - f_n(0)}{1 - f_m(0)} \to 0 \tag{19}$$

当 $n \to \infty$时。事实上，由于 (3) 中的函数 $L^*(n)$ 是缓变函数，存在一个 $a > 0$ 以及函数 $\gamma(x)$ 和 $\theta(x)$，满足 $\gamma(x) \to \gamma \in (0, \infty)$ 且$\theta(x) \to 0$ 当 $x \uparrow \infty$，使得（见 [7, 第 1.5] 节）

$$L^*(x) = \gamma(n) \exp\Big[\int_a^n \frac{\theta(x)}{x}\, \mathrm{d}x\Big].$$

因此，很容易得出，对任意 $\epsilon > 0$，，存在 $w = w(\epsilon)$ 使得

$$\Big(\frac{n}{m}\Big)^{-\epsilon} \le \frac{L^*(n)}{L^*(m)} \le \Big(\frac{n}{m}\Big)^{\epsilon} \quad \text{as } m/n \le w.$$

显然，将这些估计与（3）结合即可推出（19）。

3 种群规模

现在证明定理1。由推论1和（13）可知，如果 $n-m \gg \varphi(n) \to \infty$ 那么

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n)=1|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] + o(1) \tag{20}$$

对任意 $T>0$ 以及任意满足 $Re\lambda > 0$ 的 λ。此外，我们注意到，如果 $Z(m, n) = 1$，那么第 n世代的所有粒子都是第 m世代中唯一粒子的后代。因此，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n)=1, \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right]\\ &\qquad = \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T} f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right]\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n-m,\varphi(n))\right).\end{aligned}$$

因此，利用定理2，我们得出：若条件 (6) 成立且 $n-m \gg \varphi(n) \to \infty$，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right]\\ &\quad = \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T} f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right]\frac{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n-m,\varphi(n))\right)}{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right)} + o(1)\\ &\quad = \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T} f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right]\frac{1-f_{n-m}(0)}{1-f_n(0)}\frac{n}{n-m} + o(1).\end{aligned} \tag{21}$$

我们将利用 (21) 证明定理1的第1—3点。

3.1 在 $Z(m)$ 给定 $m = o(n)$ 和 $n \gg \varphi(n)$时的分布我们设 T^{-1}: $= 1 - f_m(0)$，并注意到

$$\frac{1-f_{n-m}(0)}{1-f_n(0)}\frac{n}{n-m} \to 1$$

若 $m = o(n)$ 且 $n \to \infty$，将 (21) 改写为

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = (1+o(1))\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T} f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right] + o(1).$$

此外，

$$\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T} f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right] = \frac{1}{f_{n-m}(0)}\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(\lambda - T\log f_{n-m}(0))Z(m)/T}\right].$$

鉴于等价关系 $-\log f_{n-m}(0) \sim 1 - f_{n-m}(0)$ 为 $n-m \to \infty$，以及该关系

$$T\left(1-f_{n-m}(0)\right) = \frac{1-f_{n-m}(0)}{1-f_m(0)} \to 0$$

根据 (3) 在 $m = o(n)$, 成立时有效，我们得出，对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_{n-m}(0)}\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(\lambda+\varepsilon)Z(m)/T}\right] &\leq \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T}f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right] \\ &\leq \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T}\right] \qquad (22)\end{aligned}$$

对于充分大的 n 和 m。由(4)可知

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)}|Z(m)>0\right] = 1 - \frac{1}{\left(1+\lambda^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}} \qquad (23)$$

对于所有 $\lambda > 0$。由于(23)左端的预极限函数在定义域 $Re\lambda > 0$ 内是解析函数，而函数

$$G(\lambda) := 1 - \frac{1}{\left(1+\lambda^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}}$$

如果取满足$G(1) = 1 - 2^{-1/\alpha}$的分支，则在同一定义域内存在解析延拓，因此根据解析函数唯一性定理，对于所有满足 $Re\lambda > 0$的 λ ，(23)对该分支成立。这反过来又意味着，预极限函数的一阶导数在定义域 $Re\lambda > 0$. 内收敛于选定分支 $G(\lambda)$的一阶导数。特别地，

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)}|Z(m)>0\right] \\ &\quad= \lim_{m\to\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)}\right]-f_m(0)}{1-f_m(0)} \\ &\quad= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{1-f_m(0)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)}\right] \\ &\quad= -\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)}\right] \\ &\quad= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(1-\frac{1}{\left(1+\lambda^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}}\right) = -\frac{1}{\left(1+\lambda^{a}\right)^{1/\alpha+1}} \qquad (24)\end{aligned}$$

对于任意 $\lambda > 0$。因此，利用(22)并令 ε 趋于零，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\gg m\to\infty}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] &= \lim_{n\gg m\to\infty}\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T}f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right] \\ &= \frac{1}{\left(1+\lambda^{a}\right)^{1/\alpha+1}}.\end{aligned}$$

这就证明了定理1的第1点。

3.2 当 $m \sim \theta n$ 且 $\theta \in (0,\ 1)$时 $Z\ (m)$ 的分布

在本节及后续章节中，我们考虑形如θn 和 $(1-\theta)n$ 的乘积，其中 $[\theta n]$ 且 $[(1-\theta)n]$。与前面一样，令 $T^{-1} := 1 - f_m(0)$，我们

由 (3) 可推得，若 $m \sim \theta n \to \infty$，则

$$T \log f_{n-m}(0) \sim -\frac{1-f_{n-m}(0)}{1-f_m(0)} \sim -\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1/\alpha}.$$

现在注意到，若 $m \sim \theta n$ for some$\theta \in \in$(0,1)，关系式 (20) 和 (21) 仍然成立。利用这些关系式，我们得出，要证明定理1的第 2) 点，只需对每个 $\lambda > 0$ 求出乘积的极限

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(\lambda - T\log f_{n-m}(0))Z(m)/T}\right]\frac{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n-m,\varphi(n))\right)}{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right)} \\
&\sim \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\left(\lambda+\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1/\alpha}\right)Z(m)(1-f_m(0))}\right]\frac{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n-m,\varphi(n))\right)}{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right)} \quad (25)
\end{aligned}$$

当 $m \sim \theta n \to \infty$ 时。由于

$$\frac{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n-m,\varphi(n))\right)}{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right)} \sim \frac{1-f_{n-m}(0)}{n-m}\frac{n}{1-f_n(0)} \sim \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{1/\alpha+1}$$

鉴于定理2和 (3)，由 (24) 中最后两行及关系式 (25)，我们推得

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\sim\theta n\to\infty}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_m(0))Z(m)}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] \\
&\quad=\lim_{m\sim\theta n\to\infty}\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(\lambda-T\log f_{n-m}(0))Z(m)/T}\right]\frac{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n-m,\varphi(n))\right)}{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right)} \\
&\quad=\frac{1}{\left(1+\left(\lambda+\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha+1}}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{1/\alpha+1} \\
&\quad=\frac{1}{\left(1-\theta+\left(\lambda(1-\theta)^{1/\alpha}+\theta^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha+1}}
\end{aligned}$$

这就证明了定理1的第 2) 点。

3.3 给定 $m = n - \psi(n)$ 和 $n \gg \psi(n) \gg \varphi(n)$ 时 (m) 的分布

本节首先证明以下命题。

引理2 设条件*(1)*成立，且 $\rho > 0$ 为一个固定数。若 $l \to \infty$，则满足以下不等式的参数 r

$$1 - f_{r+1}(0) \le 1 - f_l^{\rho}(0) < 1 - f_r(0) \quad (26)$$

具有渐近表示

$$r \sim l\rho^{-\alpha}, \quad l \to \infty. \quad (27)$$

证明。根据（3）以及缓变函数的性质，$1-f_l^{\rho}(0) \sim \rho(1-f_l(0)) \sim 1-f_{l\rho^{-\alpha}}(0)$ 当 $l \to \infty$ 时成立。因此可得，若 r 满足（26），则 $r \to \infty$。此外，

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1-f_{r+1}(0)}{1-f_r(0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1-f(f_r(0))}{1-f_r(0)} = \mathbf{E}\xi = 1.$$

因此，

$$1-f_{l\rho^{-\alpha}}(0) \sim 1-f_r(0)$$

如 $l \to \infty$。再次使用（3），可得（27）。

引理2得证。

我们的目标是证明 $m = n-\psi(n)$ 和 $n \gg \psi(n) \gg \varphi(n) \to \infty$ 那么，对于任意 $\lambda > 0$

$$\lim_{n\gg\psi(n)\gg\varphi(n)\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_{n-m}(0))Z(m)}|\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+1}}. \tag{28}$$

注意，根据定理2

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(l,r)\right) \sim \frac{1-f_l(0)}{\alpha l}\frac{r}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}$$

若 $l \gg r \to \infty$。此外，给定 $n \gg \varphi(n) \to \infty$，表示式（21）成立。现在令

$$T = -\frac{1}{\log f_{n-m}(0)} \sim \frac{1}{1-f_{n-m}(0)} \tag{29}$$

并对任意复数 λ 与 $Re\lambda > 0$ 写出该等式

$$\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-\lambda Z(m)/T} f_{n-m}^{Z(m)-1}(0)\right] = \frac{1}{f_{n-m}(0)}\mathbf{E}\left[Z(m)\left(f_{n-m}^{1+\lambda}(0)\right)^{Z(m)}\right].$$

为研究等式右端期望的渐近行为，我们首先考虑函数

$$\mathbf{E}\left[e^{(1+\lambda)Z(m)\log f_{n-m}(0)}\right] = f_m\left(f_{n-m}^{1+\lambda}(0)\right)$$

并求出对 $\lambda > 0$ 满足如下条件的参数 $r = r(\lambda)$

$$1-f_{r+1}(0) \le 1-f_{n-m}^{1+\lambda}(0) < 1-f_r(0). \tag{30}$$

根据引理2

$$r \sim \frac{n-m}{(1+\lambda)^{\alpha}} \tag{31}$$

如同 $n-m \to \infty$。利用 (30) 以及迭代的性质，我们得出，对于$\lambda > 0$

$$f_{m+r}(0) - f_m(0) \le \mathbf{E}\left[e^{(1+\lambda)Z(m)\log f_{n-m}(0)}\right] - f_m(0) \le f_{m+r+1}(0) - f_m(0).$$

Set

$$\Delta(k) = \frac{1 - f_k(0)}{\alpha k},\ k = 1, 2, ...$$

鉴于 (3) 以及缓变函数的性质

$$\frac{\Delta(m + k + 1)}{\Delta(n)} \to 1$$

当 $n,\ m \to \infty$ 在 $k \leq n - m = \psi(n) = o(n)$ 上一致成立。此外,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{f_{k+1}(0) - f_k(0)}{\Delta(k+1)} &= \lim_{k\to\infty} \frac{f(f_k(0)) - f_k(0)}{\Delta(k+1)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha k (1 - f_k(0))^{1+\alpha} L(1 - f_k(0))}{1 - f_k(0)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \alpha k (1 - f_k(0))^{\alpha} L(1 - f_k(0)) = 1
\end{aligned}$$

根据 (1) 和 (2)。因此，利用 (31) 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-m} \left[\frac{f_m(f_r(0)) - f_m(0)}{\Delta(n)} \right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f_m(f_{k+1}(0)) - f_m(f_k(0))}{\Delta(n)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta(m+k+1)}{\Delta(n)} \left[\frac{f_{m+k+1}(0) - f_{m+k}(0)}{\Delta(m+k+1)} \right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{r-1} 1 = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-m} \frac{\mathbf{E}\left[e^{(1+\lambda)Z(m)\log f_{n-m}(0)}\right] - f_m(0)}{\Delta(n)} = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha}} \tag{32}$$

对任意 $\lambda > 0$ 均成立。现在我们采用与之前相同的论证。由于 (32) 左侧的极限前函数在复数域 $Re\lambda > 0$ 中是解析函数，而函数

$$G(\lambda) := \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha}},\ \lambda > 0,$$

若取满足$G(1) = (1/2)^{\alpha} > 0$的分支，则可解析延拓至同一定义域。根据解析函数唯一性定理，(32) 对该分支在定义域 $Re\lambda > 0$ 中成立。进而，这意味着初步函数关于 λ 的一阶导数收敛,

当 $n \to \infty$ 时，收敛至 $Re\lambda > 0.$ 的选定分支的一阶导数。因此，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{1}{n-m} \frac{\mathbf{E}\left[e^{(1+\lambda)Z(m)\log f_{n-m}(0)}\right] - f_m(0)}{\Delta(n)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{1}{n-m} \left[\frac{f_m(f_r(0)) - f_m(0)}{\Delta(n)}\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-m)\Delta(n)} \frac{\partial}{\partial\lambda} f_m\left(e^{(1+\lambda)\log f_{n-m}(0)}\right) \\
&\quad = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-m)\Delta(n)\,T} \mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(1+\lambda)Z(m)/T}\right] = -\frac{\alpha}{(1+\lambda)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(1+\lambda)Z(m)/T}\right] \sim \frac{\alpha}{(1+\lambda)^{\alpha+1}} \frac{(n-m)\Delta(n)\,T}{1}.$$

Now

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[Z(m)e^{-(1+\lambda)Z(m)/T}\right] \frac{1-f_{n-m}(0)}{n-m} \frac{n}{1-f_n(0)} \\
&\qquad \sim \frac{\alpha}{(1+\lambda)^{\alpha+1}} \frac{1-f_{n-m}(0)}{n-m} \frac{n}{1-f_n(0)} \frac{T(n-m)\Delta(n)}{1} \\
&\qquad = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

因此，利用 (21) 中的 $T^{-1} = -\log\ f_{n-m}(0)$ 和 (29)，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(1-f_{n-m}(0))Z(m)} | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+1}},\ \lambda > 0,$$

如所需。

3.4 当 $n - m \sim y\varphi(n)$，$y > 0$ 时 $Z(m)$ 的分布

本节考虑 n 与 m 之间的间隔为 $\varphi(n)$ 阶的情形，并将 $y\varphi(n)$ 视为 $[y\varphi(n)]$。我们用 $Z_1^*(l) \ldots, Z_j^*(l)$ $j, l \in \mathbb{N}$, 表示独立随机变量，它们各自服从 $\{Z(l)|Z(l) > 0\}$,集

$$\hat{Z}_j^*(l) = \sum_{r=1}^{j} Z_r^*(l),$$

并引入独立随机变量 $\eta_1, \ldots, \eta_j$，每个变量的分布 $M(x)$ 均由式 (4) 指定。

对于 $Re\lambda > 0$ 和 $T > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n)=j, \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n)=j\right] \mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))|Z(m,n)=j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n)=j\right] \mathbf{P}\left(\left(1-f_{\varphi(n)}(0)\right)\hat{Z}_j^*(y\varphi(n)) < 1\right).
\end{aligned}$$

利用 (4) 和 (3) 不难验证，对于任意 $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))|Z(m,n)=j\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left((1-f_{\varphi(n)}(0))\hat{Z}_j^*(y\varphi(n)) \leq 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{r=1}^{j}\left(1-f_{y\varphi(n)}(0)\right) Z_r^*(y\varphi(n)) \leq \frac{1-f_{y\varphi(n)}(0)}{1-f_{\varphi(n)}(0)}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\eta_1+\cdots+\eta_j \leq y^{-1/\alpha}\right) = M^{*j}(y^{-1/\alpha}).
\end{aligned}$$

现在取 $T^{-1} = -\log\ f_{y\varphi(n)}(0)$，我们对每个 j 计算以下量

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n)=j\right] \\
&= \sum_{k=j}^{\infty} e^{-\lambda k/T} \mathbf{P}\left(Z(m)=k\right) \binom{k}{j} f_{y\varphi(n)}^{k-j}(0)\left(1-f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j \\
&= \frac{\left(1-f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j}{j!} e^{-\lambda j/T} \sum_{k=j}^{\infty} e^{-\lambda(k-j)/T} \mathbf{P}\left(Z(m)=k\right) k^{[j]} f_{y\varphi(n)}^{k-j}(0) \\
&= \frac{\left(1-f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j}{j!} e^{-\lambda j/T} \sum_{k=j}^{\infty} \mathbf{P}\left(Z(m)=k\right) k^{[j]} \left(f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0)\right)^{k-j}.
\end{aligned}$$

显然,

$$\sum_{k=j}^{\infty} k^{[j]} \mathbf{P}\left(Z(m)=k\right)\left(f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0)\right)^{k-j} = \frac{d^j f_m(s)}{ds^j}\Big|_{s=f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0)} = f_m^{(j)}\left(f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0)\right).$$

根据 (32)，如果 $n-m = y\varphi(n)$ $y>0$, 且当 $n\to\infty$ 时， $\varphi(n) = o(n)$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_m(e^{(1+\lambda)\log f_{y\varphi(n)}(0)}) - f_m(0)}{y\varphi(n)\Delta(n)} = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha}}, \quad \lambda > 0. \tag{33}$$

由于等式（33）左端的预极限函数在定义域 $Re\lambda > -1$ 上具有解析延拓，函数

$(1+\lambda)^{-\alpha}$，并约定 $1^{-\alpha}=1$，预极限函数关于 λ 的任意阶导数，当 $n\to\infty$ 时，均收敛到极限函数相应阶数的导数，对任意 $Re\lambda>-1$ 均成立。因此可知，对于所有 $\lambda>0$ 及每个 $J\geq 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y\varphi(n)\Delta(n)}\frac{\partial^J}{\partial^J\lambda}\left[f_m(e^{(1+\lambda)\log f_{y\varphi(n)}(0)})\right]=(-1)^J\frac{\Gamma(\alpha+J)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+J}}. \tag{34}$$

特别是，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{y\varphi(n)\Delta(n)}\frac{d}{d\lambda}\left[f_m(e^{(1+\lambda)\log f_{y\varphi(n)}(0)})\right]\\&\qquad=\frac{\log f_{y\varphi(n)}(0)}{y\varphi(n)\Delta(n)}f_m'(f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0))f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0)\\&\qquad\sim\frac{\log f_{y\varphi(n)}(0)}{y\varphi(n)\Delta(n)}f_m'(f_{y\varphi(n)}^{1+\lambda}(0))\\&\qquad\sim\frac{(-1)\alpha}{(1+\lambda)^{\alpha+1}}=\frac{(-1)}{(1+\lambda)^{\alpha+1}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned} \tag{35}$$

当 $n\to\infty$ 时。

现在我们证明，对任意 $k\geq 1$

$$\frac{\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^k}{y\varphi(n)\Delta(n)}f_m^{(k)}\left(f_{x\varphi(n)}^{1+\lambda}(0)\right)\sim\frac{(-1)^k}{(1+\lambda)^{\alpha+k}}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \tag{36}$$

当 $n\to\infty$ 时。为此，我们采用 Fa`a di Bruno 公式，将函数 $F(\cdot)$ 与 $G(\cdot)$ 的复合函数的导数写成如下形式：

$$\frac{d^J}{dz^J}\left[F(G(z))\right]=\sum_{k=1}^{J}F^{(k)}(G(z))B_{J,k}\left(G'(z),G''(z),\ldots,G^{(J-k+1)}(z)\right),$$

其中，对于 $1\leq k\leq J$

$$B_{J,k}(x_1,\ldots,x_{J-k+1}):=\sum_{\Pi(J,k)}\frac{J!}{i_1!\cdots i_{J-k+1}!}\prod_{r=1}^{J-k+1}\left(\frac{x_r}{r!}\right)^{i_r}$$

称为第二类贝尔多项式。这些多项式具有以下性质：

对于任意 a 和 b

$$B_{J,k}(ab,ab^2,\ldots,ab^{J-k+1})=a^kb^JB_{J,k}(1,1,\ldots,1)$$

and

$$B_{J,k}(1,1,\ldots,1)=S(J,k)=\frac{1}{k!}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}r^J, \tag{37}$$

其中， $S(J,\ k)$ $k=1$，2，.....， J表示第二类斯特林数。令 $F(z):=f_m(z)$ 和 $G(\lambda):=f^{1+\lambda}_{y\varphi\ n()}(0)$，并注意到

$$\frac{d^rG(\lambda)}{d^r\lambda}=f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0)\log^r f_{y\varphi(n)}(0),r=1,2,...,$$

因此，

$$\begin{aligned}&B_{J,k}\left(G'(z),G''(z),\ldots,G^{(J-k+1)}(z)\right)\\=&\left(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0)\right)^kB_{J,k}\left(\log f_{y\varphi(n)}(0),\log^2 f_{y\varphi(n)}(0),\ldots,\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^{J-k+1}\right)\\=&\left(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0)\right)^k\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^JB_{J,k}\left(1,1,\ldots,1\right),\end{aligned}$$

我们得出结论：对于任意固定的 $y>0$

$$\frac{d^J}{d^J\lambda}\left[f_m(e^{(1+\lambda)\log f_{y\varphi(n)}(0)})\right]=\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^J\sum_{k=1}^{J}f_m^{(k)}(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0))\left(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0)\right)^kS(J,k).$$

现在我们用归纳法证明 (36)。由 (35) 可知，当 $k=1$ 时，该等价关系成立；如果它对所有 $k<J$ 都成立，那么利用 (34)，以及 $f_{y\varphi(n)}(0)$ 收敛到 1、$\log f_{y\varphi(n)}(0)$ 在 $n\to\infty$ 时收敛到 0，我们得出结论：对于任意 $y>0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y\varphi(n)\Delta(n)}\frac{d^J}{d^J\lambda}\left[f_m(e^{(1+\lambda)\log f_{y\varphi(n)}(0)})\right]&=\frac{\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^Jf_m^{(J)}(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0))}{y\varphi(n)\Delta(n)}\\&\quad+\sum_{k=1}^{J-1}\frac{\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^Jf_m^{(k)}(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0))}{y\varphi(n)\Delta(n)}S(J,k)\\&=\frac{\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^Jf_m^{(J)}(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0))}{y\varphi(n)\Delta(n)}+O\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)\\&\sim\frac{(-1)^J}{(1+\lambda)^{\alpha+J}}\frac{\Gamma(\alpha+J)}{\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

如 $n\to\infty$。这些估计完成了归纳法的这一步，并证明了 (36)。

现在，对于任意固定的 $y>0$ 和 $j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T};Z(m,n)=j\right]\\&\quad=\frac{\left(1-f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j}{j!}\frac{1}{f^{\lambda j}_{y\varphi(n)}(0)^j\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j}\frac{d^j}{d^j\lambda}f_m\left(f^{1+\lambda}_{y\varphi(n)}(0)\right)\\&\quad\sim\frac{\left(1-f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j}{j!f^{\lambda j}_{y\varphi(n)}(0)}(-1)^j\frac{y\varphi(n)\Delta(n)}{\left(\log f_{y\varphi(n)}(0)\right)^j}\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+j}}\\&\quad\sim\frac{y\varphi(n)\Delta(n)}{j!}\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+j}}\end{aligned}$$

如 $n \to \infty$。由于

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right) \sim \frac{1-f_n(0)}{\alpha n}\frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\varphi(n) = \Delta(n)\frac{\varphi(n)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}$$

由 $n \to \infty$，我们看到，如果 $\varphi(n) = o(n)$ $n-m = y\varphi(n)$ $y > 0$，那么对于每个固定的$j = 1$，2，.....

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varphi(n)\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n) = j | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] \\
&\quad = \lim_{\varphi(n)\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n) = j\right] \frac{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n)) | Z(m,n) = j\right)}{\mathbf{P}\left(\mathcal{H}(n,\varphi(n))\right)} \\
&\quad\quad = \frac{1}{(1+\lambda)^{\alpha+j}} \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(j+\alpha\right)}{j!\Gamma\left(\alpha\right)} y M^{*j}(y^{-1/\alpha}) \\
&\quad\quad = \frac{\alpha\Gamma\left(j+\alpha\right)}{j!\left(1+\lambda\right)^{\alpha+j}} y M^{*j}(y^{-1/\alpha})
\end{aligned}$$

进一步地，利用引理 1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{J\to\infty} \limsup_{\varphi(n)\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m,n) > J | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] \\
&\quad \le \lim_{J\to\infty} \limsup_{\varphi(n)\to\infty} \mathbf{P}\left(Z(m,n) > J | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right) \\
&\quad\quad = 1 - \lim_{J\to\infty} \lim_{\varphi(n)\to\infty} \mathbf{P}\left(Z(m,n) \le J | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right) \\
&\quad\quad = \lim_{J\to\infty} \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma\left(j+\alpha\right)}{j!} y M^{*j}(y^{-1/\alpha}) = 0.
\end{aligned}$$

因此我们得出

$$\lim_{\varphi(n)\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T} | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha\Gamma\left(j+\alpha\right)}{j!\left(1+\lambda\right)^{\alpha+j}} y M^{*j}(y^{-1/\alpha}),$$

正如所需。

3.5 当 $m = n - \chi(n)$ 时 $Z(m)$ 的分布，其中 $n \gg \varphi(n) \gg \chi(n) \ge 0$

我们需要证明，如果 $m = n - \chi(n)$，其中 $n \gg \varphi(n) \gg \chi(n) \ge 0$，那么

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda\left(1-f_{\varphi(n)}(0)\right)Z(m)} | \mathcal{H}(n,\varphi(n))\right] = \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx.$$

首先注意，若

$$T = 1/(1-f_{\varphi(n)}(0)) = o\left(1/\left(1-f_n(0)\right)\right)$$

那么我们可以利用估计式（9）和缓变函数的性质得出，对于任意 $x \in (0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(0 < Z(n) < xT \,|\, 0 < Z(n) < T\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(0 < Z(n) < xT\right)}{\mathbf{P}\left(0 < Z(n) < T\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(xT)^{\alpha}}{L\left(1/xT\right)} \frac{L\left(1/T\right)}{T^{\alpha}} = x^{\alpha} \quad (38)$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(n)/T} | 0 < Z(n) < T\right] = \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx. \quad (39)$$

现在考虑 $m = n - \chi(n)$ 的情形，其中 $n \gg \varphi(n) \gg \chi(n) \geq 1$。固定 $\varepsilon \in (0, 1)$，并写出分解

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; 0 < Z(n) < T\right] = \mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; 0 < Z(m) < \varepsilon T, 0 < Z(n) < T\right]$$
$$+\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m) > NT, 0 < Z(n) < T\right]$$
$$+\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; \varepsilon T \leq Z(m) \leq NT, 0 < Z(n) < T\right].$$

首先注意到

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; 0 < Z(m) < \varepsilon T, 0 < Z(n) < T\right]$$
$$\leq \mathbf{P}(0 < Z(m) < \varepsilon T) = k_{m,n}(\varepsilon)\mathbf{P}(0 < Z(n) < T), \quad (40)$$

其中（见 (3) 和 (9)）

$$k_{m,n}(\varepsilon) = \frac{\mathbf{P}(0 < Z(m) < \varepsilon T)}{\mathbf{P}(0 < Z(n) < T)} \sim \frac{n}{m} \frac{1 - f_m(0)}{1 - f_n(0)} \frac{L(1/T)}{L(1/(\varepsilon T))} \varepsilon^{\alpha} \to \varepsilon^{\alpha}$$

当 $m \sim n \to \infty$ 时。此外，对于任意 $N > 1$

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; Z(m) > NT, 0 < Z(n) < T\right] \leq e^{-N}\mathbf{P}(0 < Z(n) < T). \quad (41)$$

由于 (40) 和 (41) 中的右端分别为 $o(\mathbf{P}(0 < Z(n) < T))$，先$T \to \infty$ 再 $\varepsilon \downarrow 0$ 且 $N \uparrow \infty$，因此只需计算这一项

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Z(m)/T}; \varepsilon T \leq Z(m) \leq NT, 0 < Z(n) < T\right]$$
$$= \sum_{j=\varepsilon T}^{NT} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) \mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T | Z(0) = j)$$

对于充分小的 $\varepsilon > 0$ 以及充分大的 N。

我们注意到，若条件 (1) 成立，则对于任意$r \in (1, 1+\alpha)$，都有$\mathbf{E}\xi^r = \mathbf{E}Z^r(1) < \infty$。根据这一估计（见 [8]中的第 2 章定理 6，§ 3），可得$\mathbf{E}Z^r(n) < \infty$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。因此，由马尔可夫不等式可知

$$\mathbf{P}(|Z(\chi) - j| > \delta j | Z(0) = j) \leq \frac{\mathbf{E}\left[|Z(\chi) - j|^r | Z(0) = j\right]}{(\delta j)^r} < \infty$$

对于任意 $\delta > 0$ 和 $r \in (1, 1+\alpha)$。显然，

$$Z(\chi) - j = \sum_{k=1}^{j} \varsigma_k(\chi),$$

其中，$\varsigma_k(\chi)$ $k = 1, 2, ..., j$是独立随机变量，且每个变量均服从 $\varsigma(\chi)$：在给定 $Z(0) = 1$ 的条件下，$= Z(\chi) - 1$。由于$\mathbf{E}\varsigma(\chi) = 0$，由冯·巴尔–埃森不等式（见 [2]）可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[|Z(\chi) - 1|^r | Z(0) = j\right] &\leq 2j\mathbf{E}\left[|Z(\chi) - 1|^r | Z(0) = 1\right] \\ &\leq 2j(1 + \mathbf{E}\left[Z^r(\chi) | Z(0) = 1\right]) \\ &\leq 4j\mathbf{E}\left[Z^r(\chi) | Z(0) = 1\right]. \end{aligned}$$

文献 [11] 中的引理 11 表明，对于任意 $r \in (1, 1+\alpha)$，存在$C = C(r) \in (0, \infty)$，使得对所有 $\chi \geq 1$

$$\mathbf{E}\left[Z^r(\chi) | Z(0) = 1\right] \leq \frac{C}{Q^{r-1}(\chi)}.$$

因此

$$\mathbf{P}(|Z(\chi) - j| > \delta j | Z(0) = j) \leq \frac{4C}{\delta^r \left(jQ(\chi)\right)^{r-1}}.$$

根据式（19）

$$jQ(\chi) \geq \varepsilon T Q(\chi) = \varepsilon \frac{1 - f_\chi(0)}{1 - f_{\varphi(n)}(0)} \to \infty.$$

因此我们得出

$$\mathbf{P}(|Z(\chi) - j| > \delta j | Z(0) = j) \to 0$$

在 $j \in [\varepsilon T, NT]$上一致成立。因此，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=\varepsilon T}^{NT} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) \mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T | Z(0) = j) \\ &= \sum_{j=\varepsilon T}^{NT} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) \mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T, |Z(\chi) - j| \leq \delta j | Z(0) = j) \\ &\qquad + o\left(\mathbf{P}\left(0 < Z(m) \leq NT\right)\right). \end{aligned}$$

Now

$$\mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T, j - \delta j \le Z(\chi) \le j + \delta j | Z(0) = j) = 0$$

如果 $T < j(1-\delta)$。于是,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=\varepsilon T}^{NT} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) \mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T, |Z(\chi) - j| \le \delta j | Z(0) = j) \\
&= \sum_{j=\varepsilon T}^{T/(1-\delta)} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) \mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T, |Z(\chi) - j| \le \delta j | Z(0) = j).
\end{aligned}$$

由于

$$\mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T, |Z(\chi) - j| \le \delta j | Z(0) = j) = \mathbf{P}(|Z(\chi) - j| \le \delta j | Z(0) = j),$$ 若 $j \le T/(1+\delta)$, 且由 (3.5)

$$\mathbf{P}(|Z(\chi) - j| \le \delta j | Z(0) = j) = 1 - \mathbf{P}(|Z(\chi) - j| > \delta j | Z(0) = j) \to 0$$

对 $j \in [\varepsilon T, NT]$ 一致成立, 我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=\varepsilon T}^{T/(1-\delta)} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) \mathbf{P}(0 < Z(\chi) < T, \, |Z(\chi) - j| \le \delta j | Z(0) = j) \\
&\qquad = \sum_{j=\varepsilon T}^{T/(1+\delta)} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) + o\left(\mathbf{P}\left(\varepsilon T < Z(m) < T/\left(1+\delta\right)\right)\right) \\
&\qquad\quad + O\left(\mathbf{P}\left(T/\left(1+\delta\right) < Z(m) < T/\left(1-\delta\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

由于 $m \sim n$, 由 (9) 可得

$$\mathbf{P}\left(\varepsilon T < Z(m) < T/\left(1+\delta\right)\right) \le C\mathbf{P}\left(0 < Z(n) < T\right)$$

and

$$\lim_{m \sim n \to \infty} \frac{\mathbf{P}\left(T/\left(1+\delta\right) < Z(m) < T/\left(1-\delta\right)\right)}{\mathbf{P}\left(0 < Z(n) < T\right)} = \frac{1}{(1-\delta)^{\alpha}} - \frac{1}{(1+\delta)^{\alpha}}.$$

此外,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\varepsilon T}^{T/(1+\delta)} e^{-\lambda j/T} \mathbf{P}\left(Z(m) = j\right) &= \sum_{j=\varepsilon T}^{T/(1+\delta)} e^{-\lambda j/T} d\mathbf{P}\left(\varepsilon T \le Z(m) \le j\right) \\
&= \int_{\varepsilon}^{1/(1+\delta)} e^{-\lambda x} d\mathbf{P}\left(\varepsilon \le \frac{Z(m)}{T} \le x\right).
\end{aligned}$$

因此，利用 (38)、(39)，并回顾 $m \sim n \to \infty$，我们得到

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^{1/(1+\delta)} e^{-\lambda x} d\mathbf{P}\left(\varepsilon < \frac{Z(m)}{T} \le x\right) \\ = \; & \mathbf{P}\left(0 < Z(m) < T\right) \int_{\varepsilon}^{1/(1+\delta)} e^{-\lambda x} d\mathbf{P}\left(\varepsilon < \frac{Z(m)}{T} \le x | 0 < Z(m) < T\right) \\ \sim \; & \mathbf{P}\left(0 < Z(n) < T\right) \alpha \int_{\varepsilon}^{1/(1+\delta)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

结合上述估计，并令 δ 和 ε 趋于零，我们完成了定理1中第5)点的证明。

参考文献

[1] Athreya, K. B. 和 Ney, P. E. (1972) 分支过程。 Springer–Verlag，柏林-海德堡-纽约。[2] B. von Bahr 和 C-.G. Esseen，《随机变量和的第 r 阶绝对矩不等式》，$1 \le r \le 2$，《数理统计学年刊》，36 (1965)，299-303。[3] Feller W.《概率论及其应用导论》。第2卷。纽约：John Wiley&Sons (1966)。[4] M. Liu，V. A. Vatutin，《小总体下的约化临界分支过程》。《概率论及其应用》，63:4 (2019)，648–656[5] 457–479；Nagaev, S.V. 和 Vakhtel, V.I. (2006)《临界 Galton–Watson过程的局部极限定理》。《概率论及其应用》，**50**，400–419。[6] Seneta, E. (1967)《均值为1的 Galton-Watson过程》。《应用概率杂志》，**4**，489–495。[7] Seneta E.《正则变化函数》。Eugene Seneta。— 柏林 [等]：Springer-Verl.，1976。— VI，112 —（《数学讲义》）。[8] Sewastjanow B. A. 分支过程，R. Oldenbourg Verlag，慕尼黑，1975，xi+326 页。[9] R. S. Slack，《均值为1且方差可能无穷大的分支过程》，Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete，9 (1968)，139–145

[10] V. A. Vatutin、E. E. Dyakonova、Ya. M. Khusanbaev，《后代直接后代数具有无穷方差的临界 Galton–Watson 过程的小偏差概率》，Sb. Math., 216:11 (2025),

[11] V. A. Vatutin, V. I. Vakhtel', K. Fleischmann, “临界 Galton–Watson 过程：大窗口内总后代数的最大值”, 《概率论及其应用》, 52:3 (2008年), 470–492