arXiv:2602.02349v1 [math.NT] 2 Feb 2026

关于极小曲面的整边长长方体

Jonathan Rotgé & Gérald Tenenbaum

摘要

作为二维情形的推广，我们给出了具有给定体积和最小表面积的整边长长方体各棱长平均值的估计。

关键词 局部化因子、算术函数平均值**2020年数学主题分类** 11
N25, 11N37

1 引言与结果陈述

给定一个整数 $k \geqslant 2$，对每个整数 n，考虑一个具有整数棱长、体积为 n 的 k 维长方体。应如何选取棱长 d_1、……、d_k，使长方体的表面积最小？由于棱长为 d_1、……、d_k 的 k 维长方体的表面积为

$$\sigma(d_1,\dots,d_k) := 2\sum_{1\leqslant h\leqslant k}\prod_{\substack{1\leqslant m\leqslant k\\ m\neq h}} d_m \quad (k\geqslant 2),$$

显然，任何实现该最小值且按递增顺序排列的序列 $\{\varrho_h(n)\}_{1\leqslant h\leqslant k} = \{\varrho_{k,h}(n)\}_{1\leqslant h\leqslant k}$，都是该优化问题的解

$$(P_{n,k}) \quad \begin{cases} \displaystyle\prod_{1\leqslant h\leqslant k}\varrho_h(n) = n, \\ \varrho_1(n)\leqslant \varrho_2(n)\leqslant\cdots\leqslant\varrho_k(n), \\ \displaystyle\sum_{1\leqslant h\leqslant k}\frac{1}{\varrho_h(n)} = \min_{d_1\dots d_k=n}\sum_{1\leqslant h\leqslant k}\frac{1}{d_h}. \end{cases}$$

这一设定推广了第二作者在 [6] 中引入的情形 $k=2$。在这种情形下，我们有

$$\varrho_1(n) = \max\{d|n : d\leqslant\sqrt{n}\}, \quad \varrho_2(n) = \min\{d|n : d\geqslant\sqrt{n}\}, \tag{1.1}$$

因此，数对 $(\varrho_1(n)\ \varrho_2(n))$ 是唯一的。顺便指出，在一般情形下，问题 $(P_{n,k})$ 的解不一定唯一。我们暂且将这一问题留待以后研究，仅指出数值测试表明，当 $k\in\{3,4,5\}$ 和 $n\leqslant 10^8$ 时，解是唯一的。

文献 [6] 给出了 $\varrho_{2,1}(n)$ 和 $\varrho_{2,2}(n)$ 的平均值估计。本文旨在给出维数为 k 的一般情形下的相应估计。本文始终固定这一参数，因此将省略对它的依赖关系。

我们将看到，与 $j\geqslant 2$ 相比，计算 ϱ_j 的平均值对于 $j=1$ 而言要微妙得多。由[6,定理 2],可得

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_{2,2}(n) = \frac{\pi^2x^2}{12\log x}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\} \quad (x\geqslant 2). \tag{1.2}$$

在改进 [6,定理 1] 以及（隐含地） [7], Ford [1, 推论 6] 中确立的估计后，证明了

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_{2,1}(n)\asymp\frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\delta}(\log_2 x)^{3/2}}\quad(x\geqslant 3),\tag{1.3}$$

with

$$\delta:=1-\frac{1+\log_2 2}{\log 2}\approx 0.086071.\tag{1.4}$$

此处及下文中，我们用 $\log_j$ 表示第 j 个迭代对数。

De Koninck 和 Razafindrasoanaivolala（[2],[3]）估算了比值 $\varrho_{2,\,1}(n)/\varrho_{2,\,2}(n)$ 和 $\varrho_{2,\,2}(n)/\varrho_{2,\,1}(n)^r$, $r>-1$ 的平均值，以及涉及这些函数对数的比值的平均值。

Haddad [4] 最近的一项结果给出了如下公式

$$\sum_{n\leqslant x}\log\varrho_{2,1}(n)=cx\log x+O(x)$$

对于适当的常数 $c\in]0,\ \frac{1}{2}]$。 –

我们将结果表述为以下两个定理。记黎曼ζ函数为 $\zeta(s)$。此外，令

$$Q(v):=v\log v-v+1\quad(v>0),\quad \delta_k:=Q\Big(\frac{k-1}{\log k}\Big)\quad(k\geqslant 2).\tag{1.5}$$

定理1.1。 若序列 $\{\varrho_h(n)\}_{h=1}^k$ 满足 $(P_{n,k})$，则有

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_1(n)\asymp_k\frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{\delta_k}(\log_2 x)^{3/2}}\quad(x\geqslant 3).\tag{1.6}$$

定理1.2。 设 $2\leqslant j\leqslant k$ 和 $\gamma_j:=k+1-j$。若序列 $\{\varrho_h(n)\}_{h=1}^k$ 满足 $(P_{n,k})$，则有

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_j(n)=\frac{x^{1+1/\gamma_j}}{(\log x)^{\gamma_j}}\bigg\{\frac{\gamma_j^{2\gamma_j}}{(\gamma_j+1)!}\zeta\Big(1+\frac{1}{\gamma_j}\Big)+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\bigg\}\quad(x\geqslant 2).\tag{1.7}$$

注。 (i) 如果在任意一种表示 $n=d_1\cdots d_k$ 中，将 $\varrho_1(n)$ 替换为最小因数 d_1，则 (1.6) 中的上界实际上仍然成立。

(ii) 平凡上界 $\varrho_j(n)^{k+1-j}\leqslant n$ 可直接推出

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_j(n)\leqslant\frac{2x^{1+1/\gamma_j}}{1+\gamma_j}\quad(1\leqslant j\leqslant k).$$

(iii) 推广 [6] 中针对情形 $k=2$ 所作的一项观察，我们将看到， $\varrho_j(n)$ 的平均值由恰好含有 $k+1-j$ 个“大”素因子的整数所主导，具体含义将在后文精确定义。

(iv) 对于 $k=j=2$，(1.7) 与 (1.2) 一致。

(v) 对于 $2\leqslant j\leqslant k$ 和 $0\leqslant h\leqslant j-2$，我们有

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_{k-h,j-h}(n)\sim\sum_{n\leqslant x}\varrho_{k,j}(n)\qquad(x\to\infty).$$

2 一个引理

对于任意 $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_k)\in(\mathbb{N}^*)^k$，令

$$S(\boldsymbol{v}):=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{1}{v_j}\cdot$$

并令我们赋予

$$E_n := \{\boldsymbol{v} \in (\mathbb{N}^*)^k : v_1 \leqslant \cdots \leqslant v_k,\, v_1 v_2 \cdots v_k = n\},$$

满足全预序关系 $\preccurlyeq$ 的条件为

$$\boldsymbol{v} \preccurlyeq \boldsymbol{w} \Leftrightarrow S(\boldsymbol{v}) \leqslant S(\boldsymbol{w}) \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in E_n).$$

以下结果给出了 k-元组具有最优性的必要条件。我们用 $P^-(n)$ 表示整数 $n > 1$ 的最小素因子，并作出标准约定： $P^-(1) = +\infty$。

引理 2.1. 设 $n \geqslant 1$ 和 $\boldsymbol{v} \in E_n$。若对于某个 $1 \leqslant j < h \leqslant k$，有 $v_j P^-(v_h) < v_h$，那么将 $\boldsymbol{v}$ 中的 v_j 替换为 $v_j P^-(v_h)$，并将 v_h 替换为 $v_h/P^-(v_h)$，得到的有序 k-元组 $\boldsymbol{w}$ 是 E_n 的一个元素，且满足 $\boldsymbol{w} \prec \boldsymbol{v}$。

证明。由于 $\boldsymbol{v} \in E_n$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是有序的，我们有 $\boldsymbol{w} \in E_n$。此外，

$$S(\boldsymbol{w}) - S(\boldsymbol{v}) = \frac{\{P^-(v_h) - 1\}\{v_j P^-(v_h) - v_h\}}{v_j v_h P^-(v_h)} < 0. \qquad \square$$

为便于后文引用，我们指出，引理 2.1 可立即推出：对于每个 $n \geqslant 1$，都有

$$\varrho_j(n) P^-(\varrho_h(n)) \geqslant \varrho_h(n) \quad (1 \leqslant j < h \leqslant k). \tag{2.1}$$

3 定理1.1的证明

Set

$$N_{j,\ell}(x) := \left\{ n \leqslant x : \frac{x^{1/k}}{2^{\ell+1}} < \varrho_j(n) \leqslant \frac{x^{1/k}}{2^{\ell}} \right\} \quad (x \geqslant 1,\, 1 \leqslant j \leqslant k,\, \ell \in \mathbb{Z}).$$

引理 3.1. 设 $x \geqslant 1$。对于每个 $n \leqslant x$，存在唯一的 $\ell \geqslant 0$，使得 $n \in N_{1,\ell}(x)$ 并且

$$\frac{x^{1/k}}{2^{\ell+1}} < \varrho_j(n) \leqslant 2^{(\ell+1)(k-1)} x^{1/k} \quad (2 \leqslant j \leqslant k). \tag{3.1}$$

证明。要求 $n \in N_{1,\ell}(x)$ 意味着 ℓ 是满足 $\varrho_1(n) \leqslant x^{1/k}/2^{\ell}$ 的最大整数。此外，根据定义， $\varrho_1(n) \leqslant x^{1/k}$，因此必有 $\ell \geqslant 0$。

当 $2 \leqslant j \leqslant k$ 时，我们有 $\varrho_j(n) \geqslant \varrho_1(n) > x^{1/k}/2^{\ell+1}$ 并且

$$\varrho_j(n) \leqslant \varrho_k(n) \leqslant \frac{x}{\{\varrho_1(n)\}^{k-1}} \leqslant 2^{(\ell+1)(k-1)} x^{1/k}. \qquad \square$$

现在我们可以开始证明定理1.1。对于 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m) \in [0, \infty[^m$ $(m \geqslant 1)$，定义

$$\tau_{m+1}(n, \boldsymbol{v}) := |\{(d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{N}^m : d_1 \ldots d_m \mid n,\, v_j < d_j \leqslant 2v_j \ (1 \leqslant j \leqslant m)\}| \quad (n \geqslant 1),$$
$$H^{(m+1)}(x, \boldsymbol{v}) := |\{n \leqslant x : \tau_{m+1}(n, \boldsymbol{v}) \geqslant 1\}| \quad (x \geqslant 1,\, m \geqslant 1).$$

由 [5,定理 1]可知

$$H^{(m+1)}(x, \boldsymbol{v}) \asymp \frac{x}{(\log x)^{Q(1/\log r)} (\log_2 x)^{3/2}}, \tag{3.2}$$

其中 $r := (m+1)^{1/m}$，条件是 $2^{m+1} \prod_{1 \leqslant h \leqslant m} v_h \leqslant x/v_1^{c_1}$ 且 $v_m \leqslant v_1^{c_2}$，其中 c_1、c_2、$0 < c_1 \leqslant 1 \leqslant c_2$ $Q(1/r) = \delta_k$ 1.5 $m = k-1$ 为适当常数。立即注意到，当时，$(\log)$ 按照 $(.)$ 中的定义。

根据引理 3.1，对每个 $n \leqslant x$，都存在唯一的 k 元组 $\boldsymbol{\ell}_n = (\ell_{n,1}, \ldots, \ell_{n,k}) \in \mathbb{Z}^k$ 使得 $n \in N_{j,\ell_{n,j}}(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, $\ell_{n,1} \geqslant 0$，且 $-(\ell_{n,1}+1)(k-1) \leqslant \ell_{n,k} \leqslant \cdots \leqslant \ell_{n,1}$。因此

$$|N_{1,\ell}(x)| \leqslant \sum_{\substack{(\ell+1)(1-k) \leqslant \ell_k \leqslant \cdots \leqslant \ell_2 \leqslant \ell \\ \ell+\ell_2+\cdots+\ell_k \geqslant 0}} H^{(k)}\Big(\frac{x}{2^{\ell+\ell_2+\cdots+\ell_k}}, \Big\{\frac{x^{1/k}}{2^{\ell_j+1}}\Big\}_{2 \leqslant j \leqslant k}\Big) \quad (\ell \geqslant 0). \tag{3.3}$$

现在，令 $L_x := \lceil 2\delta_k(\log_2 x)/\log 2\rceil$ $(x \geqslant 3)$，我们可以写成

$$\sum_{n\leqslant x}\varrho_1(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \varrho_1(n)\geqslant x^{1/k}/(\log x)^{2\delta_k}}}\varrho_1(n) + O\Big(\frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{2\delta_k}}\Big) \leqslant x^{1/k}\sum_{0\leqslant\ell\leqslant L_x}\frac{|N_{1,\ell}(x)|}{2^\ell} + O\Big(\frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{2\delta_k}}\Big).$$

由于 $v_j := x^{1/k}/2^{\ell_j+1}$ $(2\leqslant j\leqslant k)$、$0\leqslant\ell\leqslant L_x$、$\ell_j \asymp \ell+1$ 以及充分大的 x 满足 (3.2) 所需的假设，由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varrho_1(n) &\ll_k \frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{\delta_k}(\log_2 x)^{3/2}}\sum_{0\leqslant\ell\leqslant L_x}\frac{1}{2^\ell}\sum_{\substack{(\ell+1)(1-k)\leqslant\ell_k\leqslant\cdots\leqslant\ell_2\leqslant\ell\\ \ell+\ell_2+\cdots+\ell_k\geqslant 0}}\frac{1}{2^{\ell+\ell_2+\cdots+\ell_k}}\\ &\ll_k \frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{\delta_k}(\log_2 x)^{3/2}}\sum_{0\leqslant\ell\leqslant L_x}\frac{\{k(\ell+1)\}^{k-1}}{2^\ell} \ll_k \frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{\delta_k}(\log_2 x)^{3/2}}.\end{aligned}$$

还需证明 (1.6) 中包含的下界。令

$$\mathcal{A}(x) := \big|\big\{\tfrac12 x < n\leqslant x : \mu(n)^2 = 1,\, \tau_k\big(n, \{\tfrac12 x^{1/k}\}_{1\leqslant j\leqslant k-1}\big)\geqslant 1\big\}\big| \quad (x\geqslant 1),$$

其中，本文中 μ 均表示莫比乌斯函数。注意到

$$\frac{1}{\varrho_1(n)} < \sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{1}{\varrho_j(n)} < \frac{2k}{x^{1/k}} \qquad \big(n\in\mathcal{A}(x)\big),$$

因此，根据构造，$x^{1/k}/2k < \varrho_1(n)\leqslant x^{1/k}$。由 [5, 定理 2], 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varrho_1(n) &\geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ x^{1/k}/2k<\varrho_1(n)\leqslant x^{1/k}}}\varrho_1(n) \geqslant \frac{x^{1/k}}{2k}\Big|\Big\{n\leqslant x : \frac{x^{1/k}}{2k} < \varrho_1(n)\leqslant x^{1/k}\Big\}\Big|\\ &\geqslant \frac{x^{1/k}\,\mathcal{A}(x)}{2k} \gg_k \frac{x^{1+1/k}}{(\log x)^{\delta_k}(\log_2 x)^{3/2}}.\end{aligned}$$

证明至此完成。

4 定理1.2的证明

回顾定义 $\gamma_j := k+1-j$，并令

$$\alpha_j := \frac{1}{\gamma_j+1/2} = \frac{1}{k-j+3/2} \quad (1\leqslant j\leqslant k). \tag{4.1}$$

定理1.2的证明基于这样一个观察：求和式 (1.7) 主要由 $\varrho_j(n)$ 的较大取值决定。更确切地说，我们将看到，满足 $\varrho_j(n) > x^{\alpha_j}$ 的整数 $n\leqslant x$ 的结构受到很强的约束：在这种情况下，$\varrho_h(n)$ $(j\leqslant h\leqslant k)$ 都是素数。为简化记号，我们记

$$\pi_j(n) := \prod_{1\leqslant h\leqslant j}\varrho_h(n) \quad (n\geqslant 1,\, 1\leqslant j\leqslant k). \tag{4.2}$$

引理 4.1. 设 $1\leqslant n\leqslant x$ 和 $2\leqslant j\leqslant k$。若 $\varrho_j(n) > x^{\alpha_j}$，则对于 $j\leqslant h\leqslant$，$\varrho_h(n)$ 是一个素数 k.

证明。在假设 $\varrho_j(n) > x^{\alpha_j}$ 的情况下，我们有

$$\pi_{j-1}(n) \leqslant \frac{x}{\{\varrho_j(n)\}^{\gamma_j}} < x^{1-\gamma_j\alpha_j} = x^{1/(2\gamma_j+1)}. \tag{4.3}$$

如果对于某个 $h \in [j,k]$, $\varrho_h(n)$ 是合成的，那么 $\varrho_h(n) \geqslant p^2$，其中 $p := P^-(\varrho_h(n))$。然而，根据引理 2.1，我们有

$$p \geqslant \frac{\varrho_h(n)}{\varrho_{j-1}(n)} \geqslant \frac{\varrho_j(n)}{\varrho_{j-1}(n)} \geqslant \frac{\varrho_j(n)}{\pi_{j-1}(n)} > x^{1/(2\gamma_j+1)}, \tag{4.4}$$

由 (4.3) 得；而由于 $\varrho_{j-1}(n)p \geqslant \varrho_h(n) \geqslant p^2$，我们还有

$$p \leqslant \varrho_{j-1}(n) \leqslant \pi_{j-1}(n) < x^{1/(2\gamma_j+1)}, \tag{4.5}$$

再次应用 (4.3) 即得。由于 (4.4) 和 (4.5) 不相容， $\varrho_h(n)$ 必为素数。 □

注意，显然 $\varrho_j(n) \leqslant x^{1/\gamma_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$，并且对于满足 $\varrho_j(n) \leqslant x^{\alpha_j}$ 的那些整数 n，它们对 (1.7) 左侧的贡献显然是 $\ll x^{1+\alpha_j}$，这个量小于 (1.7) 的误差项。因此，我们可以聚焦于满足 $\varrho_j(n) \in]x^{\alpha_j}, x^{1/\gamma_j}]$ 的那些 n。根据引理 4.1，这些整数可以表示为 $n = mpq_1 \dots q_{k-j}$，其中 $p \leqslant q_1 \leqslant \dots \leqslant q_{k-j}$，且 p 和 q_h 都是素数。由此可得

$$\sum_{n \leqslant x} \varrho_j(n) = S_j(x) + O\big(x^{1+\alpha_j}\big), \tag{4.6}$$

with

$$S_j(x) := \sum_{x^{\alpha_j} < p \leqslant x^{1/\gamma_j}} p \sum_{\substack{p \leqslant q_1 \leqslant \dots \leqslant q_{k-j} \\ q_1 \dots q_{k-j} \leqslant x/p}} \left\lfloor \frac{x}{pq_1 \dots q_{k-j}} \right\rfloor \quad (x \geqslant 1,\ 2 \leqslant j \leqslant k). \tag{4.7}$$

我们现在计算 $S_j(x)$。令 $\Omega(n)$ 表示一个整数 n的素因子总数。我们有 ve

$$S_j(x) = \sum_{x^{\alpha_j} < p \leqslant x^{1/\gamma_j}} p \sum_{\substack{n \leqslant x/p \\ P^-(n) \geqslant p \\ \Omega(n) = k-j}} \sum_{m \leqslant x/np} 1 = \sum_{m \leqslant x^{1-\gamma_j\alpha_j}} \sum_{x^{\alpha_j} < p \leqslant (x/m)^{1/\gamma_j}} p \sum_{\substack{n \leqslant x/pm \\ P^-(n) \geqslant p \\ \Omega(n) = k-j}} 1, \tag{4.8}$$

现在由平凡估计

$$\sum_{p \leqslant x^{\alpha_j}} p \sum_{\substack{n \leqslant x/pm \\ P^-(n) \geqslant p \\ \Omega(n) = k-j}} 1 \leqslant \sum_{p \leqslant x^{\alpha_j}} p \sum_{\substack{n \leqslant x/pm \\ P^-(n) \geqslant p \\ \Omega(n) = k-j}} \frac{x}{pmn} \ll \frac{x\pi(x^{\alpha_j})(\log_2 x)^{k-j}}{m} \ll \frac{x^{1+\alpha_j}(\log_2 x)^{k-j}}{m \log x}$$

可知，在求和条件 (4.8) 中去掉 p 的下界会引入一个整体误差$\ll x^{1+\alpha_j}(\log_2 x)^{k-j}$。注意到 $1 - \gamma_j\alpha_j = \alpha_j/2$ 并定义

$$T_j(y) := \sum_{p \leqslant y^{1/\gamma_j}} p \sum_{\substack{n \leqslant y/p \\ P^-(n) \geqslant p \\ \Omega(n) = k-j}} 1 \leqslant \sum_{p \leqslant y^{1/\gamma_j}} \sum_{\substack{n \leqslant y/p \\ P^-(n) \geqslant p \\ \Omega(n) = k-j}} \frac{y}{n} \ll y^{1+1/\gamma_j}, \tag{4.9}$$

我们得到

$$S_j(x) = \sum_{m \leqslant x^{\alpha_j/3}} T_j\Big(\frac{x}{m}\Big) + O\Big(x^{1+(1-\alpha_j/3)/\gamma_j}\Big), \tag{4.10}$$

根据不等式 $\alpha_j < (1 - \alpha_j/3)/\gamma_j$。

下一个引理给出了由 (4.9) 定义的 $T_j(y)$ 的渐近公式。

引理 4.2. 令 $2 \leqslant j \leqslant k$。我们有

$$T_j(y) = \frac{\gamma_j^{2\gamma_j} y^{1+1/\gamma_j}}{(\gamma_j+1)!(\log y)^{\gamma_j}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \quad (y \geqslant 2). \tag{4.11}$$

证明. 设

$$A_h(v,t) := \sum_{\substack{q_1\geqslant\cdots\geqslant q_h\geqslant t\\ q_1\dots q_h\leqslant v}} 1 \quad (h\geqslant 1,\, 2\leqslant t\leqslant v),$$

使得

$$T_j(y) = \int_2^{y^{1/\gamma_j}} tA_{k-j}\Big(\frac{y}{t},t\Big)\,\mathrm{d}\pi(t). \tag{4.12}$$

对任意固定的 $h\geqslant 1$, 反复应用强形式的素数定理可得,

$$A_h(v,t) = \int_{\substack{u_1\geqslant\cdots\geqslant u_h\geqslant t\\ u_1\cdots u_h\leqslant v}} \mathrm{d}\pi(u_1)\cdots\mathrm{d}\pi(u_h) = \int_{\substack{u_1\geqslant\cdots\geqslant u_h\geqslant t\\ u_1\cdots u_h\leqslant v}} \frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_h}{(\log u_1)\cdots(\log u_h)} + O\Big(v\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log v}}\Big).$$

因此

$$T_j(y) = \frac{1}{(k-j)!}\int_2^{y^{1/\gamma_j}} \int_{\substack{u_1,\dots,u_{k-j}\geqslant t\\ u_1\cdots u_{k-j}\leqslant y/t}} \frac{t\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{k-j}\mathrm{d}t}{(\log t)(\log u_1)\dots(\log u_{k-j})} + O\Big(y^{1+1/\gamma_j}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\Big).$$

作变量替换 $t=y^{v_0}$, $u_h=y^{v_h}$ $(1\leqslant h\leqslant k-j)$, 得到

$$T_j(y) = \frac{1}{(k-j)!}\int_{(\log 2)/\log y}^{1/\gamma_j} \int_{\substack{v_1,\dots,v_{k-j}\geqslant v_0\\ v_1+\cdots+v_{k-j}\leqslant 1-v_0}} \frac{y^{2v_0+v_1+\cdots+v_{k-j}}\,\mathrm{d}v_0\,\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_{k-j}}{v_0v_1\cdots v_{k-j}} + O\Big(y^{1+1/\gamma_j}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\Big).$$

对于 $2\leqslant h\leqslant k-j$, 记

$$W_h := \sum_{1\leqslant m\leqslant h} w_m \quad (w_1,\dots,w_h\in\mathbb{R}).$$

进一步的变量替换

$$v_0 = \frac{1}{\gamma_j} - \frac{s}{\log y}, \quad v_h = v_0 + \frac{w_h}{\log y} = \frac{1}{\gamma_j} + \frac{w_h - s}{\log y} \quad (1\leqslant h\leqslant k-j)$$

得到

$$T_j(y) = \frac{U_j(y)}{(k-j)!} + O\bigg(\frac{y^{1+1/\gamma_j}}{\mathrm{e}^{\sqrt{\log y}}}\bigg) \tag{4.13}$$

with

$$U_j(y) := \frac{y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j}}\int_0^{\log(y^{1/\gamma_j}/2)} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{(\gamma_j+1)s}} \int_{\substack{w_1,\dots,w_{k-j}\geqslant 0\\ W_{k-j}\leqslant\gamma_j s}} \frac{\mathrm{e}^{W_{k-j}}\,\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_{k-j}}{D_j(s,y)},$$

$$D_j(s,y) := \Big(\frac{1}{\gamma_j} - \frac{s}{\log y}\Big)\prod_{1\leqslant h\leqslant k-j}\Big(\frac{1}{\gamma_j} + \frac{w_h-s}{\log y}\Big).$$

对于 $s\leqslant\log(\frac{1}{2}y^{1/\gamma_j})$, 我们有

$$\frac{1}{\gamma_j} + \frac{w_h-s}{\log y} \geqslant \frac{1}{\gamma_j} - \frac{s}{\log y} \geqslant \frac{\log 2}{\log y},$$

因此, $s\geqslant Y := (\gamma_j+2)\log_2 y$ 对 $U_j(y)$的贡献为

$$\begin{aligned} &\ll y^{1+1/\gamma_j}\int_Y^\infty \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \int_{\substack{w_1,\dots,w_{k-j}\geqslant 0\\ W_{k-j}\leqslant\gamma_j s}} \mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_{k-j}\\ &\ll y^{1+1/\gamma_j}\int_Y^\infty s^{k-j}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \ll y^{1+1/\gamma_j}Y^{k-j}\,\mathrm{e}^{-Y} \ll \frac{y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j+1}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

此外，对于 $s \leqslant Y$，我们有

$$D_j(s,y) = \gamma_j^{-\gamma_j} + \gamma_j^{1-\gamma_j}\frac{W_{k-j} - \gamma_j s + O(1)}{\log y},$$

因此

$$\frac{1}{D_j(s,y)} = \gamma_j^{\gamma_j}\Big\{1 - \gamma_j\frac{W_{k-j} - \gamma_j s + O(1)}{\log y}\Big\}.$$

由此可得

$$U_j(y) = \frac{\gamma_j^{\gamma_j} y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j}}\int_0^Y \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{(\gamma_j+1)s}}\int_{\substack{w_1,\dots,w_{k-j}\geqslant 0\\ W_{k-j}\leqslant \gamma_j s}} \mathrm{e}^{W_{k-j}}\Big\{1 + O\Big(\frac{s+1}{\log y}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_{k-1}.$$

由于误差项的贡献显然是

$$\ll \frac{y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j+1}}\int_0^\infty (s+1)^{\gamma_j}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \ll \frac{y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j+1}},$$

我们最终得到

$$U_j(y) = \frac{\gamma_j^{\gamma_j} y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j}}\int_0^Y \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{(\gamma_j+1)s}}\int_{\substack{w_1,\cdots w_{k-j}\geqslant 0\\ W_{k-j}\leqslant \gamma_j s}} \mathrm{e}^{W_{k-j}}\,\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_{k-j} + O\Big(\frac{y^{1+1/\gamma_j}}{(\log y)^{\gamma_j+1}}\Big). \tag{4.15}$$

现在可以将外层积分的范围扩展到 $[0,\infty[$，因为所涉及的误差是

$$\ll \int_Y^\infty s^{k-j}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \ll Y^{k-j}\,\mathrm{e}^{-Y} \ll \frac{1}{(\log y)^{\gamma_j+1}}.$$

Inv交换这样修改后的重积分的积分次序，得到

$$\int_{[0,\infty[^{k-j}} \mathrm{e}^{W_{k-j}}\,\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_{k-j}\int_{W_{k-j}/\gamma_j}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{(\gamma_j+1)s}} = \frac{1}{\gamma_j+1}\int_{[0,\infty[^{k-j}} \frac{\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_{k-j}}{\mathrm{e}^{W_{k-j}/\gamma_j}} = \frac{\gamma_j^{\gamma_j-1}}{\gamma_j+1}. \tag{4.16}$$

由(4.13)和(4.15)即得公式(4.11)。 □

现在我们可以完成定理1.2的证明。由(4.6)、(4.10)和(4.11)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varrho_j(n) &= \frac{\gamma_j^{2\gamma_j}x^{1+1/\gamma_j}}{(\gamma_j+1)!(\log x)^{\gamma_j}}\sum_{1\leqslant m\leqslant x^{\alpha_j/3}}\frac{1}{m^{1+1/\gamma_j}}\Big\{1+O\Big(\frac{1+\log m}{\log x}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{x^{1+1/\gamma_j}}{(\log x)^{\gamma_j+1}}\Big)\\ &= \frac{\gamma_j^{2\gamma_j}\zeta(1+1/\gamma_j)x^{1+1/\gamma_j}}{(\gamma_j+1)!(\log x)^{\gamma_j}} + O\Big(\frac{x^{1+1/\gamma_j}}{(\log x)^{\gamma_j+1}}\Big),\end{aligned}$$

证毕。

参考文献

[1] K. Ford，具有给定区间内因数的整数分布，《数学年刊》168 (2008), 367–433。

[2] J.-M. De Koninck & A. A. B. Razafindrasoanaivolala，关于整数的中间因数，《布达佩斯大学科学年刊·计算机科学辑》50(2020),113–126。

[3] J.-M. De Koninck 和 A. A. B. Razafindrasoanaivolala，《论整数中间因子的对数之商》，《非洲数学》34 (2023)，第 2 期，1–15。

[4] T. Haddad, 《素因子的 Arratia 耦合及其在因子中的应用》, 博士论文, 蒙特利尔大学, 2025年。[5] D. Koukoulopoulos, 《整数的局部化分解》, 伦敦数学会会刊(3) 101 (2010), 第 2 期, 392–426。[6] G. Tenenbaum, 《论两个因子函数》, 伦敦数学会杂志 (2) 14 (1976), 521–526; 勘误同上。 (2) 17 (1978), 第 212 页。[7] G. Tenenbaum, 《论整数在给定区间内含有因子的概率》, 组合数学 **51**(1984), 243–263。艾克斯-马赛大学, 马赛数学研究所, 法国国家科学研究中心混合研究单位7373, 卢米尼大道163号, 邮政信箱907, 马赛邮政专递9号13288, 法国电子邮箱: jonathan.rotge@etu.univ-amu.fr 洛林大学, 邮政信箱70239, F-54506 旺多夫尔莱南西邮政专递, 法国电子邮箱: Gerald.Tenenbaum@univ-lorraine.fr