arXiv:2602.02384v1 [math.LO] 2 Feb 2026

任意实数的一个公式，也许

JAMES E. HANSON 和 CONNOR WATSON

Abstract. 我们将讨论如何写出三个特定的自然数 A, B, C ，使得对于任何你可能想得到的实数 r ，在 ZFC 集合论中都与以下命题相容：$r = \log(\sup_{x_0,\ x_1\in\mathbb{R}} \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \sup_{x_3\in\mathbb{R}} \inf_{x_4\in\mathbb{R}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0,\ \ldots\ n_A\in\mathbb{N}} x_0^2[(n_0-2)^2+(n_1-m)^2+n_2+(n_B-n_C)^2 + n_3\sum_{k=0}^{4}(x_k - \frac{n_{k+5}}{1+n_4} + n_4)^2 + \sum_{i,\ j=0}^{B}(n_{9+2^i3^j} - n_i^{n_j})^2])$。我们还将讨论，为什么在假设某些大基数存在的情况下，可能存在一个实数 s ，它不可能是这个公式在我们选定的 A, B, C 下的取值。这涉及集合论鼠。

Introduction

熟悉的数学常数通常是通过某种无穷过程（例如极限或积分）来定义或计算的，该过程作用于一个明确具体、有限的公式，而公式中只涉及有理数。许多这样的表达式都可以改写为下确界和上确界的形式，例如：

$$e = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$\pi = 4 \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
$$\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{\ell=0}^{m} \frac{n}{m+\ell n+1}\right)$$

在数学语境中，这类公式十分平凡，很容易让人以为它们表示的是绝对确定的量。若说像 $\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \leq 3$ 这样的陈述无法用普通的数学推理方法解决，那简直荒谬。然而，确实存在形式相同的陈述，在这个意义上最终会变得模糊不明。运用哥德尔不完备定理、马季亚谢维奇–罗宾逊–戴维斯–普特南定理及一些相关结果，可以证明：对于任意给定的、足够强的公理系统，都存在自然数 D、 E和 F ，使得

$$(\star) \qquad \inf_{n_0,\ldots,n_D\in\mathbb{N}} \left[(n_0-2)^2 + (n_E - n_F)^2 + \sum_{i,j=0}^{E} (n_{2^i3^j} - n_i^{n_j})^2\right]$$

独立于给定的公理。[1]

本文讨论一个类似的公式，其值在某种意义上比 $(\star)$ 的值“更加独立”。具体来说，我们将证明，对于某个特定的自然

[1]这可以用一种与引理 3.1 的证明非常相似的论证来证明。

数 A、 B 和 C，公式

$$(\dagger) \qquad \sup_{x_0,x_1\in\mathbb{R}} \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \sup_{x_3\in\mathbb{R}} \inf_{x_4\in\mathbb{R}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0,\ldots,n_A\in\mathbb{N}} x_0^2 \begin{bmatrix} (n_0-2)^2+(n_1-m)^2 \\ +n_2+(n_B-n_C)^2 \\ +n_3\sum_{k=0}^{4}(x_k-\frac{n_{k+5}}{1+n_4}+n_4)^2 \\ +\sum_{i,j=0}^{B}(n_{9+2^i3^j}-n_i^{n_j})^2 \end{bmatrix}$$

数的选择，其值可以一致地是任何足够简单的非负实数。虽然正如我们将看到的，相关的“足够简单”概念实际上涵盖范围极广，例如在线整数数列百科全书*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* 中某个条目所描述的每一个实数，以及拥有自己维基百科 词条的实数中除两三个之外的所有实数。它包括所有可计算实数，以及许多不可计算实数，例如柴廷常数 Ω、停机预言机$0'$，还有 $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{1}_{\Sigma\, n()}$，其中 $\Sigma(n)$ 是忙海狸函数。概括来说，它涵盖了所有能够在 ZFC集合论中证明其存在的实数。

但我们说 (†) 的行为比 (⋆) 的行为“更独立”时，究竟是什么意思？实际上，这有两层含义。较容易理解的一层是，(†) 可以取到的值的集合更大。根据公式 (⋆) 的构造方式，它可能只能一致地取有限个较少的值，甚至可能只有两个。

(†) 的值比 (⋆) 的值更独立，这一说法较微妙的含义与独立性结果的本质有关。理解独立性结果的一种相当稳健的方式，是“多重宇宙视角”，这一视角最初由 Hamkins 在 [1] 中开创。皮亚诺算术或策梅洛–弗兰克尔集合论这样的公理系统，与群公理或域公理类似，规定的是某一类对象，而不是单个对象。不同的 ZFC 模型可以看作不同的“数学宇宙”，其中某些数学事实可能有所不同。尤其是，要看到公式 (⋆) 取不同的值，就必须进入截然不同的数学宇宙。要使宇宙 U_0 中 (⋆) 的值不同于宇宙 U_1 中 (⋆) 的值，U_0 和 U_1 对自然数是什么必须存在分歧。[2] 例如，$\mathbb{N}$ 在 U_0 中可能是 $\mathbb{N}$ 在 U_1 中的真初始段。相比之下，只需转到实数集不同的宇宙，(†) 的值就会改变。这一点对于形式化本文的核心论点很重要，因为如果 U_0 和 U_1 对自然数是什么意见不一，那么 U_0 中的实数和 U_1 中的实数甚至都不是同一类对象。U_0 和 U_1 都有它们各自认为是实数 π 的对象，因为可以在 ZFC 中证明这样一个数存在；但 π^{U_1} 中可能有一些数位由自然数索引，而这些自然数在 U_0 中甚至并不存在。

集合论往往关注所谓的良基 ZFC 模型。这些模型既足够丰富，能够涵盖多种多样的现象，又足够易于处理，可以进行深入研究。ZFC 的良基模型与诺特环在一定程度上类似：它们在各自领域中发挥的作用相似，而且在技术层面上，它们都是通过一个有限性条件来定义的。如果一个 ZFC模型不存在（外部的）无限递降集合隶属关系序列，那么它就是良基的：

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \ni x_4 \ni \ldots$$

良基模型对自然数的定义一致，但对实数集合的定义可能不同。这是（†）比（⋆）「更独立」的第二层含义；（†）的取值比（⋆）的取值变化更大，而且这种变化发生在范围更窄、性质良好的良基模型类中；这些模型会将（⋆）的取值固定下来。

[2]这类 U_0 和 U_1 的存在性，源于 G¨odel 不完备定理与 G¨odel 完备定理的结合。

0.1. 你究竟怎么证明这一点? 主定理的证明与第一作者此前在 [2], 的工作非常相似；在那项工作中，作者证明了一个类似的表达式（尽管它只涉及整系数多项式）会生成一个函数，而该函数的勒贝格可测性独立于 ZFC。本文力求大致自成一体，但若不强调本文与 [2] 的联系，便是有失公允。两种论证的大致框架都包含三个部分：

（1）一个集合论论证，证明康托空间中存在某个“可计算定义的”子集2^ω，它对集合论假设具有某种所需的敏感性（其中 ω 是集合论中表示自然数集的记号）。（2）一个运用有效描述集合论的标准论证，说明这可以转化为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^k$的某个“可计算定义的”子集。（3）一个（稍带数论色彩的）论证，说明可以借助与希尔伯特第十问题的否定解答中类似的思想，用某个（相对）简单的数学表达式实现这个定义。

这里的“可计算定义性”概念取自有效描述集合论：若存在一个计算机程序，能够输出有理向量 $\vec{x}_n \in \mathbb{R}^k$ 和有理半径 $r_n > 0$ 的列表，使得 $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}(\vec{x}_n)$（其中$B_r(\vec{x})$是以 $\vec{x}$为中心、半径为 r 的开球），则称 $\mathbb{R}^k$ 的开子集 U 是可计算开集。若存在一个计算机程序，以自然数 m 为输入，然后像之前那样输出列表$\vec{x}_{n,\,m}$ 和$r_{n,\,m}$，使得$U_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_{n,\,m}}(\vec{x}_{n,\,m})$，则称开集序列$(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 为一致可计算开（或称开集的一致可计算序列）。最后，若存在一致可计算开序列$(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 使得 $X = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m$，则称 G_δ 子集 $X \subseteq \mathbb{R}^k$ 是可计算 G_δ 的。

由此，我们可以定义一个通过投影和补集构造的集合层级（其中 $\pi_{\mathbb{R}^k}$是到 $\mathbb{R}^k$的投影）：

- 一个 Σ^1_1 集合 是形如 $\pi_{\mathbb{R}^k}(X)$ 的集合，其中 $X \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ 是可计算的 G_δ。
- 一个 Π^1_n 集合 是某个 Σ^1_n 集合的补集。
- 对于 $n > 1$，一个 Σ^1_n 集合是形如 $\pi_{\mathbb{R}^k}(Y)$ 的集合，其中 $Y \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ 是 Π^1_{n-1}。
- 一个射影的[3] 集合 是指对于某个 n，它是 Σ^1_n 或 Π^1_n 。

现在，这些定义或许显得过于具体，但这些集合类实际上相当稳健（例如，每一类都对有限并、有限交以及“可计算的”可数并和可数交封闭）；此外，我们声称（不作证明），通常认为是“显式定义”的 $\mathbb{R}^k$ 的绝大多数子集（具体而言，不使用选择公理定义的子集）都属于这个层级（而且几乎总是 Σ^1_1）。

在上文给出的粗略提纲中，我们在第 1 步从康托空间（2^ω）开始，但在前一段中我们只讨论了 $\mathbb{R}$。这是因为，从集合论和（有效）描述集合论的角度来看， 2^ω 和 $\mathbb{R}$ 本质上是同构的。[4] 具体来说，可以为 2^ω 合理地定义一个类似的集合层级（例如，可计算开集/G_δ、 Σ^1_n、 Π^1_n），然后证明存在一个双射 $f\colon\ \mathbb{R} \to 2^\omega$，满足这样的性质：任意集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是 Σ^1_n，当且仅当其像 $f(X)$ 是 Σ^1_n （因此显然，对于 Π^1_n也同样成立）。[5] 这种同构的存在，实质上就是第 2 步的内容。

使 [2] 的主要结果得以成立的关键集合论事实是：与 ZFC 相容的是，存在一个 2^ω 的良序 $<_L$，使得 $\{(x,\ y) \in (2^\omega)^2\colon\ x <_L y\}$ 既是一个 Σ^1_2 集合，也是一个 Π^1_2

[3]严格来说，我们在这里描述的是“轻面”射影集。通常，“射影”一词指的是一类更大的集合，称为“粗面”射影集；不过为求简洁，我们不讨论这类集合。[4]甚至集合论学家也经常把 2^ω 中的元素称为“实数”或“实数”。[5]f 不保持可计算开性，因为这将意味着 $\mathbb{R}$ 和 2^ω 同胚，但它们并不同胚。

集合。这是哥德尔在 20 世纪 30 年代取得的一项开创性成果，他通过定义“可构造”集合的宇宙 L 证明了这一点；从某种意义上说， L 是 ZFC 的一个极小模型。 L 及其他相关的 ZFC 模型也在本文的主要结果中发挥着关键作用，我们将在第 1 节中更深入地讨论它们。

如前所述，不同的 ZFC 模型通常会有不同的实数集合。（例如，在构造 L 时，完全有可能某个实数根本不会出现在 L_α 中，无论对于任何 α 都是如此。）假设我们有一个计算机程序 P，用来定义 $\mathbb{R}$ 的一个 Σ^1_n 子集，并且假设我们有两个集合宇宙（即 ZFC 模型） U_0 和 U_1。如果我们用 P 在 U_0 中定义一个实数集合 X_0，就无法保证这个集合与 U_1 中同样由 P 定义的实数集合 X_1 有多相似。

为了说明这个想法，暂且假设我们能够构造一个 ZFC 模型 U_0，其中[6] $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$，以及一个普通模型 U_1，其中 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的真子集。给定 $\mathbb{Q}$ 的一个合理枚举 $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$，写出一个计算机程序 P 来见证 $((-\infty, q_i)\cup(q_i,\infty))_{i\in\mathbb{N}}$ 是一致可计算开序列，这相当简单。现在，如果我们把 P 用作一个可计算开 G_δ 集合的规范，那么它在 U_0 中会得到空集，而在 U_1 中则会得到一个包含大量无理数的非空集合。

这或许看起来是个愚蠢的例子，但它与 ZFC 模型中实际发生的事情并没有相差太远。在任何 ZFC 模型中，都有一个固定的计算机程序 P，它将集合 $\mathbb{R}\cap L$（即 L 内部存在的实数组成的集合）定义为一个 Σ^1_2 集合。考虑它的补集，我们现在就有了一种构造 Π^1_2 集合的方法：它在 L 中是空的，但在 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}\cap L$ 的真超集的 ZFC 模型 U 中非空。

另一个例子（与第 4 节稍后会出现的概念有关），涉及某些无法存在于 L 内部的特定实数。实数有两种方式可以避免成为 L 的元素：它可以“过于随机”，也可以“知道得太多”。强迫可以添加“随机”或“泛型”实数（尽管具体细节很大程度上取决于所讨论的强迫类型），但这意味着由此添加的实数并不具体。

相比之下，那些“知道得太多”的实数可以非常具体。最简单的例子是 $0^\sharp$（读作“零锐”），它是一个实数，在某种意义上编码了构建 L 的“蓝图”。具体而言，这个实数使人能够计算出 L 的真谓词；这意味着，如果它是 L 的一个元素，那么 L 就能定义自身的真谓词，这与塔斯基不可定义性定理相矛盾。由于 $0^\sharp$ 非常具体，因此可以用射影方式描述它。特别是，存在一个 Π^1_2 定义：若 $0^\sharp$ 存在，该定义给出集合 $\{0^\sharp\}$；否则给出集合 $\varnothing$。

1. Encoding a real number into $\mathbb{R}$ itself

为了证明本文的主要结果，我们需要展示一个集合论事实，即可以将给定的实数 $r\in\mathbb{R}\cap L$ “可定义地编码”到实数集 $\mathbb{R}\cap M$ 中，而这个实数集位于一个特别构造的 ZFC 良基模型 M 中。

通过某种性质来定义一个实数，使得它所定义的实数独立于 ZFC，这个想法并不新鲜；如果你愿意放宽“定义”的含义，实现起来也不特别困难。例如，考虑下面对实数 $r\in 2^\omega$ 的定义：

$$r(n)=1 \iff 2^{\aleph_n}=\aleph_{n+1}.$$

根据Easton定理，对于任意集合 $X\subseteq\mathbb{N}$，都存在一个ZFC模型，使得广义连续统假设恰好在那些 $\aleph_n$上成立，而这些 $\aleph_n$满足 $n\in X$. 因此，它所定义的实数不仅独立于ZFC，而且在一致性意义下可以是任意实数。我们称之为“将 r 编码进连续统函数”。

[6]需要说明的是，这完全不可能。

当然，这感觉有点取巧。之所以会有这种感觉，一个原因可能是，这种方法利用了基数算术的性质，而基数算术显然不能定义一个射影单点集。我们主定理证明背后的核心思想，是像处理连续统函数那样对实数 r 的各个位进行编码，但把它编码进另一种结构中，而且这种编码可以用射影方式完成。为此，我们利用 L的结构。

L 与其他良基 ZFC 模型之间的关系，类似于 $\mathbb{Q}$ 与其他特征为0的域之间的关系： L 可以唯一嵌入任何具有相同序数的其他良基 ZFC 模型中。 L 通过一种受到累积层级启发的超限归纳构造来定义：

- $V_0 = \varnothing$。
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$，其中 $\mathcal{P}(X)$ 是 X的幂集。
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$，其中 λ 是一个极限序数。
- $V = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{On}} V_\alpha$，其中 On 是序数类。

这是这种形式中最大的构造，因为它在每个阶段都取完整的幂集。哥德尔最初定义 L 的想法，是构造一个 ZFC 模型的“最小”构造，尽可能保守地添加集合：

- $L_0 = \varnothing$。
- $L_{\alpha+1}$ 是 L_α所有一阶可定义子集的集合。
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ 对于 λ 这个极限序数。
- $L = \bigcup_{\alpha\in 在} L_{\alpha\cdot 上}$

从这个定义可以清楚地看出，ZFC模型需要对这些运算封闭，因为它满足分离公理模式；但令人惊讶的是，这些运算也足以构造一个ZFC模型。事实上，所得模型是绝对的，也就是说（在良基模型的语境下）， L由其序数类的长度唯一确定（长度可能变化，正如我们将在第4.1节讨论的那样）。 L具有高度的结构性，关于它可以说的内容远比关于任意ZFC模型的多。这也是本文主要结果（以及 [2]的主要结果）得以证明的重要原因。

现代集合论的一个主要课题，是研究这一构造的推广，以构建其他内模型。或许最简单的推广是 $L[X]$。

定义 1.1. 给定一个集合 X， $L_\alpha[X]$ 和 $L[X]$的定义方式分别与 L_α 和 L相同，但有以下例外：

- $L_{\alpha+1}[X]$ 是 $L_\alpha[X]$ 的所有子集中，以 X 为参数一阶可定义的那些子集所构成的集合。

尽管在此定义中 X 可以是任意集合，但它通常是一个实数。回到域的比喻：正如域扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$是包含 $\sqrt{2}$的唯一最小域，当x 是一个实数或 2^ω的一个元素时， $L[x]$是包含序数与 x的最小ZFC模型。

$L[x]$ 这一构造的一个重要方面在于，当限制到实数时，它与前文讨论的可定义性概念相容。

事实 1.2. 关系 $x \in L[y]$ 是 $\mathbb{R}^2$ *[3, Thm. 13.9]* 的 Σ^1_2 子集。

关系 $x \in L[y]$ 本身就很有意思，因为它意味着，在某种精确的意义上， y “包含了 x所包含的所有信息”。我们通过如下方式在 $\mathbb{R}$ 上定义一个预序：对于实数 x和 y，

$$x \leq_c y \iff x \in L[y].$$

称 $x \equiv_c y$ 当且仅当 $x \leq_c y$ 且 $y \leq_c x$。可以证明，这在 $\mathbb{R}$上定义了一个等价关系，因此我们可以对 $\mathbb{R}$按此等价关系取商。这些等价

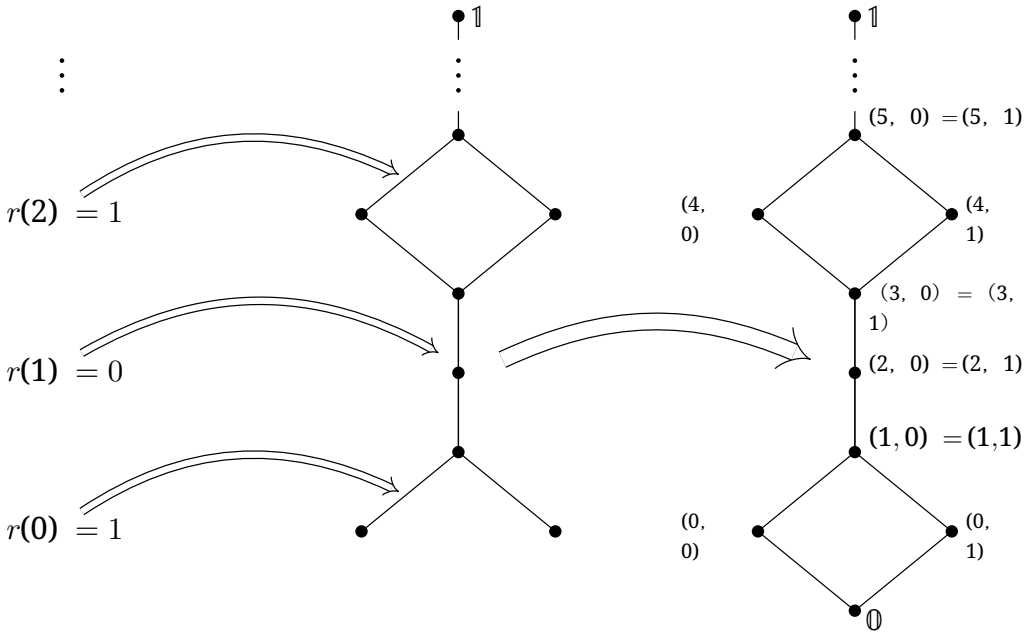


FIGURE 1. n 位决定 r 格的相应层级 $\mathcal{D}$ 的宽度是 1 还是 2。

类称为可构造性度，或称为 c-度。ZFC模型中 c-度的偏序类似于（尽管并不完全相同）域 K的子域格。 c-度也可以视为预言机可计算性的集合论版本；事实上，记号$0^\sharp$ 原本就是为了类似于停机预言机的可计算性理论记号 $0'$。与停机预言机一样，它也有一个相对化版本 $x^\sharp$，它与$L[x]$ 的关系，和 $0^\sharp$ 与 L的关系相同。特别是， $x^\sharp$ 不能是 $L[x]$ 的元素，因此 $x^\sharp$ 的 c-度严格大于 x的 c-度。

我们正是利用 c-次数的结构来定义所讨论的实数。结果表明，正如 GCH 模式可以通过强迫，在不同的 ZFC 模型中变成几乎任意我们想要的样子一样， c-次数的精确结构也具有相当大的可塑性。Adamowicz 的以下定理对此作出了精确说明，其要点是：只要格“足够简单”（即属于 L），c-次数的格就可以相容地成为任意一个带最大元的良基上半格：

事实 1.3 (Adamowicz [4])。 设 $\mathcal{D}$ 是 L 中一个带最大元 $\mathbb{1}$ 的良基上半格。那么存在 L 的一个强迫扩张 $L[G]$，其中 $L[G]$ 的 c-次数格与 $\mathcal{D}$ 加上一个最小元 $\mathbb{0}$ 后在 $L[G]$ 中同构。

正是这种可塑性，使我们能够以一种依赖于模型的无实参数射影（具体而言是 Σ^1_4）方式，对实数的各个位进行编码。现在我们可以证明主要的集合论结果了。

定理 1.4。 存在一个固定的 Σ^1_4 定义 Φ，使得对于任意 $r \in 2^\omega \cap L$，都存在一个强迫扩张 $L[G]$，其中 $\Phi^{L[G]} = \{r\}$。

证明。 固定 $r \in 2^\omega \cap L$。令 $\mathcal{D}_0$ 为偏序 $\omega \times 2_{\text{antichain}}$，配备字典序（其中 $2_{\text{antichain}}$ 是一个大小为 2 的反链）。令 E 为 $\mathcal{D}_0$ 上由集合 $\{((2n,\ 0),\ (2n,\ 1)) : r(n) = 0\} \cup \{((2n+1,\ 0),\ (2n+1,\ 1)) : n < \omega\}$ 生成的等价关系。最后，令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0/E + \{\mathbb{1}\}$，其中将 1 作为新的最大元加入。（这就是图 1 中间的格。）

$\mathcal{D}$ 显然是一个带有最大元的良基上半格，因此根据事实 1.3，存在 L 的一个强迫扩张 $L[G]$，使得 c-次数格与 $\{\mathbb{0}\}+\mathcal{D}$ 同构（即，将 $\mathcal{D}$ 扩大并添加一个最小元 0）。令 Φ 为如下公式（非正式地）陈述：在 $L[G]$ 中，“r 是最小的 c-次数， r 的各位以我们刚才所述的方式编码进 c-次数中，并且不存在其他 c-次数。”该构造保证 $\Phi^{L[G]}=\{r\}$.

我们现在更仔细地陈述公式 Φ 是什么，并证明它是 Σ^1_4. 。首先，我们将该格编码为一族实数 $(x_i)^{i\in\{\mathbb{0}\}\sqcup\omega\times 2\sqcup\{\mathbb{1}\}}$，如图 1 右侧的格所示。令$\varphi(x,(x_i))$为对每个 $n<\omega$作如下陈述的公式：

(1) $x(n)=1\Leftrightarrow x_{(2n,0)}\equiv_c x_{(2n,1)}$(2) $x(n)=0\Leftrightarrow x_{(2n,0)}\perp_c x_{(2n,1)}$ （其中 $y\perp_c z$ 表示 $y\not\leq_c z$ 且 $z\not\leq_c y$）(3) $x_{(2n+1,0)}\equiv_c x_{(2n+1,1)}$

根据事实 1.2，这是 Σ^1_2 事实的可计算可数布尔组合，因此它是 Π^1_3。

令 $\psi((x_i))$为以下条件的合取：

(1) 对所有 z，存在 $i\in\{\mathbb{0}\}\sqcup\omega\times 2\sqcup\{\mathbb{1}\}$ 使得 $z\equiv_c x_i$。(2) 对所有 $n<m<\omega$ 和 $i,\ j<2$，$x_{\mathbb{0}}<_c x_{(n,i)}<_c x_{(m,j)}<_c x_{\mathbb{1}}$。

在1中，“对所有 z”之后的条件是 Σ^1_2 条件的布尔组合，因此其本身是 Π^1_3。2中的条件是 Σ^1_2 条件的布尔组合，因此同样是 Π^1_3。这意味着 $\psi((x_i))$是一个 Π^1_3 条件。

我们用以定义实数 x的最终公式是公式

$$\Phi(x)=\exists(x_{(n,i)})\ [\varphi(x,(x_{(n,i)}))\wedge\psi((x_{(n,i)}))]$$

该公式是 Σ^1_4，因为在一个 Π^1_3 公式之前有一个存在量词，并且由于$\{y:\ \Phi(y)\}=\{x\}$，我们有 $\{x\}$ 是一个 Σ^1_4 集合。□

2. A small Diophantine computer

如果你是一位哪怕稍加留意的读者，你肯定已经注意到，引言中公式（$*$）与（†）的主体彼此极为相似。这并非巧合。这两个公式的共同要素本质上刻画了一台由（指数型）丢番图表达式构成的小型计算机。索引的变化（例如， 2^i3^j 与 $9+2^i3^j$）仅仅代表略有不同的“内存分配”选择，而（†）中的附加要素则是为了容纳一个输入值（即 m），以及与实值变量x_0，……， x_3的某些交互。自然数三元组（A， B， C）和（D， E， F）代表不同的计算机程序选择。

关于本节中的论证，有一点很重要：如果它们让人觉得有些繁琐且任意，那是因为它们确实如此。正如实际物理计算机的设计一样，在丢番图计算机的构造中存在极大的余地。例如，利用与 [2], 中类似的论证，可以将我们主公式方括号内的表达式替换为具有整数系数的多项式。此处的构造主要是为了得到一个简短的数学表达式而加以优化的。[7] 正如你将在推论 2.2 的证明中看到的，很大一部分 n_k完全没有必要。同样，变量 n_0 可以直接替换为常数2，但所得公式虽然在概念上更简单，实际写下来却更长。

以下引理 2.1 在很大程度上借鉴了早期关于希尔伯特第十问题的研究思路，特别是 Martin Davis、Hilary Putnam 和 Julia Robinson 将丢番图方程归约为

[7]当然，这并不是尽可能简短的版本。例如，若采用更长的引理 2.1 证明，就可以用 $(n_0-2-m)^2$ 替换 $(n_0-2)^2+(n_1-m)^2$。同样，也可以只用 $(x_k^2-\frac{n_{k+5}}{1+n_4})^2$,，而不必用 $(x_k-\frac{n_{k+5}}{1+n_4}+n_4)^2$。

纯指数方程（变量为 [5], ）的工作，以及 Robinson 对丢番图方程的枚举（在 [6]中）。 [5] 中的关键思想是：

- 乘法 $x \cdot y$ 可以通过指数运算来计算，底数为 $(2^x)^y = 2^{x \cdot y}$。
- 同样，加法 $x + y$ 可以通过指数运算和乘法来计算，底数为$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$；而乘法又可以仅通过指数运算来计算，底数为 $(2^{2^x})^{2^y} = 2^{2^x 2^y} = 2^{2^{x+y}}$。
- 将这些结果结合起来，我们就能只用指数运算和常数 2 来表示任意丢番图方程。例如，$x+y-2xy = 0$ 当且仅当 $(2^{2^x})^{2^y} = 2^{2^{x+y}} = 2^{2^{2xy}} = 2^{2^{xy}2^{xy}} = 2_{(2^x)^y)(2^x)^y}$。

为证明做准备，我们把自然数序列 $\vec{n} = (n_k)_{k \le A}$ 称为良构，如果$n_0 = 2$ 并且对每个 $i, j \in \mathbb{N}$，若 $9 + 2^i 3^j \le A$，则 $n_{9+2^i 3^j} = n_i^{n_j}$。注意，由于 $(i, j) \mapsto 9 + 2^i 3^j$是一个单射，任意良构序列 $(n_k)_{k \le A}$ 都可以扩展为良构序列 $(n_k)_{k \le A'}$，其中任意 $A' \ge A$都适用（通常扩展方式不唯一）。还要注意，良构序列的任何非空初始段都是良构的。关于此定义背后原理的解释，请参见图2。

令 Y为变量集合 y_k，其中 $k \notin \{0\} \cup \{9 + 2^i 3^j : i, j \in \mathbb{N}\}$。给定一个变量取自 Y 的多项式 p，以及一个序列 $(n_k)_{k \le A}$（满足对于 p中的每个变量 y_k， $k \le A$），我们将用 $p(\vec{n})$表示 p 在变量赋值 $y_k \mapsto n_k$下的值。（注意，给定序列中的并非每个 n_k都会被赋值给 p中的变量。）

引理 2.1。

(1) 对于任意多项式 $p \in \mathbb{N}[Y]$（即系数属于 $\mathbb{N}$），存在一个自然数 D，使得如果 $\vec{n} = (n_k)_{k \le D}$ 是良构的，那么 $n_D = 2^{2^{p(\vec{n})}}$。(2) 对于任意多项式 $p \in \mathbb{Z}[Y]$，存在一对自然数 B, C，满足 $B \ge C$，使得对于任意良构序列 $(n_k)_{n \le B}$， $n_B = n_C$ 当且仅当 $p(\vec{n}) = 0$。

*Pro*见。 对于 1，首先注意，如果 $p = 0$，那么我们只需取 $D = 0$（因为 $2^{2^0} = 2$）。

接下来，我们断言，如果 p 是一个系数为 1 的单项式，那么可以找到一个自然数 E_p，使得若 $\vec{n}$ 是良构的，则 $n_{E_p} = 2^{p(\vec{n})}$。这可通过对 p 的次数进行归纳法得到。对于 $p = 1$，我们可以取 $E_p = 2$。如果 $p = y_k q$ 且已知 E_q，那么我们可以取 $E_p = 9 + 2^{E_q} 3^k$。这是可行的，因为（在良构序列中），我们有 $n_{E_p} = (n_{E_q})^{n_k} = (2^{q(\vec{n})})^{n_k} = 2^{n_k q(\vec{n})}$。

最后，对于一般的非零多项式，注意任何这样的多项式都可以写成系数为 1 的单项式之和。同样，我们用归纳法。设 q 是一个系数为 1 的单项式，并设 r 是一个多项式，满足对于任意良构的 $\vec{n}$，都有 $n_{D_r} = 2^{2^{r(\vec{n})}}$。现在令$p = r + q$。我们可以取 D_p 为 $9 + 2^{D_r} 3^{E_q}$。对于任意良构的 $\vec{n}$，我们现在有

$$n_{D_p} = (n_{D_r})^{n_{E_q}} = (2^{2^{r(\vec{n})}})^{2^{q(\vec{n})}} = 2^{2^{r(\vec{n})} 2^{q(\vec{n})}} = 2^{2^{r(\vec{n})+q(\vec{n})}} = 2^{2^{p(\vec{n})}}.$$

因此，根据归纳法，对于任意多项式 $p \in \mathbb{N}[Y]$，我们都能找到所需的 D_p。

对于 2，首先注意到，根据一个初等论证，对于任意 $p \in \mathbb{Z}[Y]$，都存在q_0， $q_1 \in \mathbb{N}[Y]$ 使得 $p = q_0 - q_1$。根据第 1 部分，我们可以找到 B， $C \in \mathbb{N}$，使得对于任意良构的$\vec{n}$， $n_B = 2^{2^{q_0(\vec{n})}}$ 且 $n_C = 2^{2^{q_1(\vec{n})}}$。不失一般性，我们可以假设 $B \ge C$。现在显然，对于任意足够长的良构 $\vec{n}$，

$$p(\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow q_0(\vec{n}) = q_1(\vec{n}) \Leftrightarrow 2^{2^{q_0(\vec{n})}} = 2^{2^{q_1(\vec{n})}} \Leftrightarrow n_B = n_C. \qquad \square$$

现在利用引理 2.1 以及可计算可枚举集与丢番图集相同这一事实，我们得到以下推论。

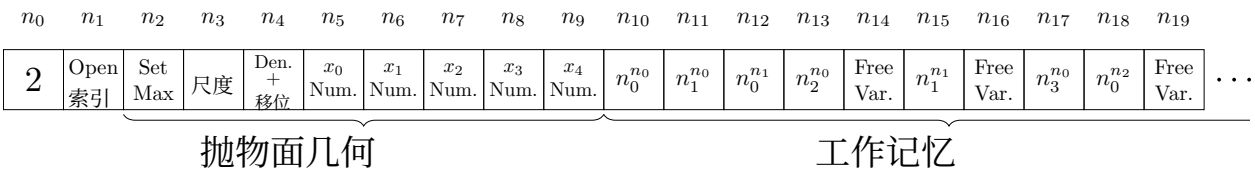


FIGURE 2. 丢番图公式的"记忆布局"。 n_0 是一个固定的参考值 2。 n_1 是正在构造的开集的索引。 n_2 有助于确保函数的最大值为 1。 n_3 是抛物面的尺度。 n_4 设定抛物面顶点坐标的分母，并将它们向负方向移位。 n_5 到 n_9 设定顶点坐标的分子。形如$n_{9+2^i3^j}$ 的地址存储$n_i^{n_j}$ 的值，其余地址则是自由变量。

推论 2.2. 对于任意可计算枚举集 $W \subseteq \mathbb{N}^9$，存在自然数 B, C，使得$B \geq C$当且仅当它可以扩展为满足 $n_B = n_C$ 的良构序列 $(n_k)_{k\leq B}$ 时，$(n_1, n_2, \ldots, n_9)$ 是 W 的一个元素。

证明。固定一个可计算可枚举集 $W \subseteq \mathbb{N}^9$。令 $J(x,y) = x+(x+y)^2,$，并回忆一下， J 是从 $\mathbb{N}^2$ 到 $\mathbb{N}$ 的单射。令 $q(y_1, y_2, \ldots, y_9) = J(y_1, J(y_2, J(y_3, J(y_4, J(y_5, J(y_6, J(y_7, J(y_8, y_9)))))))),$ 并注意这是从 $\mathbb{N}^9$ 到 $\mathbb{N}$ 的单射。令 $W' = \{q(y_1, y_2, \ldots, y_9) : (y_1, y_2, \ldots, y_9) \in W\}$。显然， W' 是 $\mathbb{N}$ 的一个可计算可枚举子集。根据希尔伯特第十问题 [7], 的否定性解决证明，我们可以找到一个多项式 $p(w, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{Z}[w, z_1, \ldots, z_m]$，使得对于任意 $w \in \mathbb{N}$, $w \in W'$，当且仅当存在 $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$，满足$r(w, z_1, \ldots, z_m) = 0$。现在考虑多项式

$$p = r(q(y_1, y_2, \ldots, y_9), y_{9+5\cdot 1}, y_{9+5\cdot 2}, \ldots, y_{9+5\cdot m}),$$

其中 $y_{9+5\cdot 1}, \ldots, y_{9+5\cdot m}$ 仅仅被选为 Y 中互不相同的变量（即其下标不具有 $9 + 2^i3^j$ 这种形式）。由构造可知，$(y_1, y_2, \ldots, y_9) \in W$ 当且仅当存在 $(y_{9+5\cdot 1}, \ldots, y_{9+5\cdot m}) \in \mathbb{N}^m$ 使得 $p = 0$。

根据引理 2.1，我们可以找到满足 $B \geq C$ 的 $B, C \in \mathbb{N}$，使得对任意良构序列 $(n_k)_{k\leq B}$， $p(\vec{n}) = 0$ 当且仅当 $n_B = n_C$。由于每个元组 $(n_1, n_2, \ldots, n_9, n_{9+5\cdot 1}, \ldots, n_{9+5\cdot m})$ 都可以延拓为一个良构序列 $(n_k)_{k\leq B}$，因此 $(n_1, n_2, \ldots, n_9) \in W$ 当且仅当它延拓为一个满足 $n_B = n_C$ 的良构序列 $(n_k)_{k\leq B}$，正如所要求的那样。□

3. MAIN THEOREM

为避免反复写出如此冗长的表达式，令

$$f_{A,B,C}(x_0, \ldots, x_4, m, n_0, \ldots, n_A) = \begin{bmatrix} (n_0-2)^2 + (n_1-m)^2 \\ +n_2 + (n_B - n_C)^2 \\ +n_3 \sum_{k=0}^{4} (x_k - \frac{n_{k+5}}{1+n_4} + n_4)^2 \\ + \sum_{i,j=0}^{B} (n_{9+2^i3^j} - n_i^{n_j})^2 \end{bmatrix}.$$

我们将其简记为 $f_{A,\ B,\ C}$。

下面的引理实质上是这样一个事实的有效版本（或可计算版本）：任意闭集的示性函数，都是一族形如 $a(\vec{x} - \vec{b})^2 + c$且满足 $a,\ c \geq 0$ 的函数的下确界。

引理 3.1。 对于任意非空开子集 $\mathbb{R}^5$的一致可计算序列$(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$，存在自然数 B 和 C，使得

$$\inf_{n_0,\ldots,n_A \in \mathbb{N}} f_{A,B,C} = 1 - \chi_{U_m}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，其中 $A = 9 + 2^B 3^C$，且 χ_{U_m} 是 U_m的示性函数。

证明。由于 U_m 是一致可计算开且非空的，我们可以找到一个由有理点和半径构成的可计算列表$((\vec{y}_{m,i}, r_{m,i}))_{m,i\in\mathbb{N}}$，使得对每个 m，$U_m = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_{m,i}}(\vec{y}_{m,i})$。设 W为所有元组$(n_1, n_2, \dots, n_9) \in \mathbb{N}^9$ 的集合，使得要么

- $n_2 = 1$ 且 $n_3 = 0$，或者
- $n_2 = 0$，并且存在一个 $i \in \mathbb{N}$，使得对任意$(x_0, x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^5_{\geq 0}$，若 $n_3 \sum_{k=0}^{4} \left(x_k - \frac{n_{k+5}}{1+n_4} + n_4\right)^2 \leq 1$,，

则$(x_0, x_1, \dots, x_4) \in B_{r_{n_1,i}}(\vec{y}_{n_1,i})$。

这并不困难，但要证明 W 也是一个可计算可枚举集，则有些繁琐。

根据推论 2.2，我们可以找到自然数 B, C，使得$(n_1, n_2, \dots, n_9) \in W$当且仅当以下任一等价条件成立：

- $(n_1, n_2, \dots, n_9)$可延拓为一个满足 $n_B = n_C$的良构序列$(n_k)_{k\leq 9+2^B 3^C}$。
- $(n_1, n_2, \dots, n_9)$可延拓为一个序列$(n_k)_{k\leq 9+2^B 3^C}$，且满足

$$(n_0 - 2)^2 + \sum_{i,j=0}^{B} (n_{9+2^i 3^j} - n_i^{n_j})^2 + (n_B - n_C)^2 = 0.$$

- 与上一条相同，但用 < 1 代替 $= 0$。

容易证明，对于任意 $m \in \mathbb{N}$、$\varepsilon > 0$ 和 $(x_0, x_1, \dots, x_4) \in U_m$，存在 $(n_1, n_2, \dots, n_9) \in W$，使得 $n_1 = m$、$n_2 = 0$，且 $n_3 \sum_{k=0}^{4} (x_k - \frac{n_{k+5}}{1+n_4} + n_4)^2 < \varepsilon$。[8] 这意味着，对于任意 m 和 $(x_0, x_1, \dots, x_4) \in U_m$，都有 $\inf_{n_0, \dots, n_A \in \mathbb{N}} f_{A,B,C} = 0$。

最后，我们需要证明，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，若 $(x_0^2, x_1^2, \dots, x_4^2) \notin U_m$，则 $\inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C} = 1$。根据我们将满足 $n_2 = 1$ 和 $n_3 = 0$ 的元组纳入 W，对于任意 $(m, x_0, \dots, x_4)$，都有 $\inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C} \leq 1$。[9] 根据 W 的构造，对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和 $(x_0, \dots, x_4,) \in \mathbb{R}^5$，若 $(x_0, \dots, x_4) \notin U_m$，则对于每个 $(n_0, \dots, n_A) \in \mathbb{N}^{A+1}$，都有 $f_{A,B,C} \geq 1$，这意味着 $\inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C} = 1$，正如所需。□

推论 3.2。对于 $\mathbb{R}$ 的任意 Σ^1_4 定义 X，存在自然数 A、B 和 C，使得

$$g(x_0) = \sup_{x_1\in\mathbb{R}} \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \sup_{x_3\in\mathbb{R}} \inf_{x_4\in\mathbb{R}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C}$$

是由 X 定义的集合的示性函数。

证明。固定 $\mathbb{R}$ 的一个 Σ^1_4 定义 X。令 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为与 X 对应的一致可计算开集序列。根据引理 2.1，$1 - \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0, \dots, n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C}$ 是集合 Y 的示性函数；该集合是某个可计算 G_δ 子集的补集，并且具有如下性质：x_0 属于由 X 定义的集合，当且仅当

- 存在一个 $x_1 \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $x_2 \in \mathbb{R}$，存在一个 $x_3 \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $x_4 \in \mathbb{R}$，$(x_0, \dots, x_4) \in Y$。

这是 e 这等价于说，$g(x_0)$ 是由 X定义的集合的示性函数 . □

现在，我们终于来到了核心结果。

[8]这依赖于这样一个事实：对于任意有理数 $(y_0, \dots, y_4)$，都存在 $(n_4, n_5, \dots, n_9) \in \mathbb{N}^6$，使得对每个 $k \leq 4$，都有 $y_k = \frac{n_{k+5}}{1+n_4} - n_4$。关于类似论证的严谨版本，参见 [2] 中引理 4.4 的证明。[9]这正是加入 n_2 项的唯一原因。

定理 3.3. 存在自然数 A、 B 和 C，使得对于任意非负实数 $r \in \mathbb{R} \cap L$，都存在一个良基模型 M，它是 ZFC 的模型，并且在 M

$$r = \sup_{x_0,x_1\in\mathbb{R}} \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \sup_{x_3\in\mathbb{R}} \inf_{x_4\in\mathbb{R}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} x_0^2 \begin{bmatrix} (n_0-2)^2+(n_1-m)^2 \\ +n_2+(n_B-n_C)^2 \\ +n_3\sum_{k=0}^{4}(x_k^2-\frac{n_{k+5}}{1+n_4}+n_4)^2 \\ +\sum_{i,j=0}^{B}(n_{9+2^i3^j}-n_i^{n_j})^2 \end{bmatrix}.$$

证明。 由定理 1.4 可知，存在一个 Σ_4^1 定义 X，使得对于任意非负的$r \in \mathbb{R} \cap L$，都存在一个强迫扩张 $L[G]$，使得 $X^{L[G]} = \{\sqrt{r}\}$。由推论 3.2，我们可以找到自然数 A、 B 和 C，使得 $\sup_{x_1\in\mathbb{R}}\inf_{x_2\in\mathbb{R}}\sup_{x_3\in\mathbb{R}}\inf_{x_4\in\mathbb{R}}\sup_{m\in\mathbb{N}}\inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C}$在 $L[G]$中求值时等于 $\chi_{\{\sqrt{r}\}}(x_0)$。这就意味着，在 $L[G]$中，

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}} x_0^2 \sup_{x_1\in\mathbb{R}} \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \sup_{x_3\in\mathbb{R}} \inf_{x_4\in\mathbb{R}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} f_{A,B,C}$$

等于 $(\sqrt{r})^2 = \bar{r}$。由于 $x_0^2 \geq 0$，这也等于

$$\sup_{x_0,x_1\in\mathbb{R}} \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \sup_{x_3\in\mathbb{R}} \inf_{x_4\in\mathbb{R}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n_0,\dots,n_A\in\mathbb{N}} x_0^2 f_{A,B,C},$$

这就是定理陈述中的公式。 □

利用 Harrington 的一个结果 [8, 第 25 章； 9], 可以将其降至一个 Σ_3^1 定义，从而得到一个 $\sup_{\mathbb{R}}\inf_{\mathbb{R}}\sup_{\mathbb{R}}\sup_{\mathbb{N}}\inf_{\mathbb{N}}$ 公式，但该结果的证明比已经相当技术性的 [4, 定理 1]的证明还要复杂得多。此外，我们认为，第 1 节中的证明更容易理解。

4. What about任意 real number?

鉴于目前为止讨论的内容，人们自然会想知道，定理 3.3 中的公式能否取到任意实数值。这个问题有一个微妙的根本之处：所谓"任意实数"的含义取决于所在的集合论宇宙，但结果本身又依赖于从一个集合论宇宙转到另一个集合论宇宙。从某种意义上说，只要存在的实数仅限于 L，该公式就能取到任意实数值；但要使它取到这些值，就必须在实数严格多于 L 的 ZFC 模型中考察它。给定这些模型 M之一的一个 $r \in \mathbb{R} \cap M \setminus L$，是否还存在另一个 ZFC 模型，使得公式的值为 r? 同样利用 [8, 第 25 章； 9], 可以将结果扩展到某些不属于 L 的 r，前提是 $L[r]$ "没有比 L 大太多"，[10] 但对于哪些实数通常能够成为射影可定义单点集的唯一元素，目前还没有精确的刻画。然而，在另一个极端，我们可以证明，如果 $\mathbb{R}$ "足够大"，那么本文使用的技巧就无法适用于所有实数。具体来说，我们有以下事实，暂且将其视为一个黑箱。

事实 4.1. 在存在足够大的大基数时，[11] 存在一个实数 x，使得对于任意 $y \geq_c x$， $L[x]$ 和 $L[y]$ 具有相同的一阶理论 *[10,* 备注 *6.4； 11]*。

$L[x]$ 和 $L[y]$ 具有相同的一阶理论，这比上述结论强得多；但与本文相关的具体推论是，$L[x]$ 和 $L[y]$ 对所有类似于定理 3.3 中公式的取值看法一致。因此，我们得到以下结论：

[10]具体而言，相关条件是 $\omega_1^{L[r]} = \omega_1^L$（即 $L[r]$ 和 L 对于第一个不可数序数是什么这一问题意见一致）。[11]只需假设 Δ_2^1-确定性成立，并且对每个实数 r， $r^\sharp$ 都存在。

命题 4.2. 如果存在一个具有事实 *4.1* 所述性质的实数 x，那么就存在一个实数 s，它不可能是在任何形如$L[y]$的ZFC模型中定理 *3.3* 中公式的取值。

证明。考虑 $L[x]$ 并通过强迫添加一个新的实数 z。（具体使用哪种强迫并不重要，只要能得到一个新的实数即可。）令 $s = x \oplus z$（即通过交错排列 x 和 z的数字得到的数，它是预序$\leq_c$中 $\{x, z\}$ 的最小上界）。现在考虑 $y \geq_c x$。反设定理 3.3 中公式的值为 s。这意味着 $s \in L[y]$。由于 $L[x]$ 和 $L[y]$ 具有相同的一阶理论，s 也是 $L[x]$ 中公式的值。但这意味着 s，因此 z 是 $L[x]$ 的元素，这就产生了矛盾。□

这就是我们的方法最终会失败的原因。一旦 x的 c次数足够大，$L[x]$ 的"可定义行为"就会稳定下来。但关于这个实数 x，我们能说些什么？它是什么？它叫作$M_1^\sharp$（读作"M 尖点"），是现代集合论中的一个重要概念——鼠的一种实例。不过，要讨论鼠，我们首先需要稍微谈谈大基数。

4.1. 什么是大基数? 大基数是现代集合论的第二个主要主题（另一个是内模型）。内模型（以及强迫）涉及通过改变集合论模型的"宽度"来修改模型，而大基数则与 ZFC 模型的"高度"（也包括宽度）有关。大基数是满足某种强无穷性性质的基数 κ。例如，满足 V_κ 是 ZFC 模型的基数 κ 称为世俗基数。这是最弱的大基数性质之一，但它在某种程度上具有代表性，因为通常所说的大基数性质大多都蕴含这一性质。

由此可得的一个结论是，通过一个非常基本的不完备性论证，可以推出 ZFC 无法证明世俗基数的存在。要看清这一点，假设存在一个世俗基数 κ。不失一般性，我们可以假设 κ 是最小的世俗基数（因为基数是良序的）。那么 V_κ 就是一个没有世俗基数的 ZFC 模型。

这是一个独立性证明，但它与连续统假设相对于 ZFC 的独立性之类的结果，在性质上有一个重要区别。对于 CH，满足 CH 的模型和满足 ¬CH 的模型能够"看到彼此"。例如，给定任意一个 ZFC 模型，M 在 M中计算得到的 L 将是一个 ZFC + CH 模型。同样，任何 ZFC 模型都有一个满足 ¬CH 的强迫扩张。这意味着，在相当弱的元理论中，可以证明 ZFC + CH 是相容理论（即不能证明矛盾）当且仅当 ZFC + ¬CH 是相容理论。

相比之下，大基数会产生一种"单向"的关系。ZFC +"存在一个世俗基数"的模型能够"看到"一个 ZFC +"不存在世俗基数"的模型，但反过来则不成立，正如我们刚才讨论的那样。第一个理论从根本上强于第二个理论。ZFC + "存在一个世俗基数"可能是不相容的，而 ZFC + "不存在世俗基数"却并非如此。这与 G¨odel 的第二不完备定理类似，但在语义上可以说更为自然。尤其是，大基数公理种类繁多，而且它们似乎处于一个自然的层级之中：一致性强度较高的大基数，其基数（通常但并非总是）远大于一致性强度较低的大基数。例如，若存在一个不可达基数，μ，则集合 $\{\kappa < \mu : \kappa \text{ 是世俗基数}\}$ 的基数为 μ。[12]

研究大基数的另一个原因是，尽管大基数通常是比 $\mathbb{R}$大得多得多的对象，但它们与描述集合论以及 $\mathbb{R}$的结构之间却有着出人意料的密切关系。可测基数最初受到测度论中的概念启发，

[12]这是一个 *reflection* 集合论中的现象示例。12



FIGURE 3. 一个鼠标 [13]。

但也可以说是巧合的是，它们的存在还意味着 $\mathbb{R}$比原本所需的更加规整。具体而言，ZFC 可以证明 Σ^1_1 集总是勒贝格可测的，但无法证明 Σ^1_2 集是勒贝格可测的。相比之下，Solovay 证明了 ZFC $+$“存在一个可测基数”确实 能证明 Σ^1_2 集总是勒贝格可测的 [3, 定理 14.3], 但 Silver 证明了，它无法证明每个 Σ^1_3 集都是勒贝格可测的 [12]。

在命题 4.2 中，我们假设存在“足够多”的大基数，以举出一个实数 s 的例子，它不能是 (†) 的值。这个实数 s 没有什么简洁明快的刻画方式：它是通过交错排列一个神秘实数 x 和一个关于 $L[x]$ 的泛型实数的数字得到的。事实证明，实数 x（如果它存在）也不能是 (†) 的值。我们认为有可能解释这个实数 x 是什么，但遗憾的是，要证明它不能是 (†) 的值，读者必须已经具备描述性内模型理论的背景知识。因此，我们将在下一节尝试解释这个实数 x 是什么，并在附录中给出证明，说明它不能是 (†) 的值。

4.2. 什么是鼠标? 鼠（见图3）出现于内模型理论的语境中，我们在前面的第 1 节中曾简要讨论过内模型理论。内模型理论的主要动机之一，是实数集 L 在大基数语境下的局限性。 L 与一致性强度足够高的大基数不相容。这个方向上的首个结果归功于 Dana Scott，他指出 L“范围过窄”，无法容纳可测基数：

定理4.3 (Scott [14])。 L 中不存在可测基数。

事实上，在最常研究的大基数中，可测基数标志着一个阶段转变：从能够存在于 L 中的大基数，转变为大到无法存在于 L 中的大基数：不可达基数和弱紧基数可以存在于 L 中，但可测基数、强基数、伍丁基数和超紧基数则不能。

在 L与类 L的ZFC模型那种紧密结构化的性质，与大基数的存在所蕴含的丰富性之间，存在着一种根本性的张力。就本文的主题而言， L 中的实数“非常稀薄”，但在大基数存在的情况下， $\mathbb{R}$ “非常充实”（并且其中尤其含有鼠）。内模型理论试图通过构造ZFC的典范模型（亦称核心模型）来化解这一张力：这些模型享有 L的某些在做集合论时有用的性质，同时又足够大，足以容纳大基数。

那么，给定一个大基数性质，我们如何构造一个使该大基数性质成立的典范模型？朴素的做法是取一个见证 X ，表明某个基数 κ具有某种大基数性质，并考虑模型 $L[X]$。这最终正是内模型理论学家构造核心模型的方式，但他们构造 $L[X]$ 的方式与定义 1.1截然不同。[13] $L[X]$ 最终通过一个非常复杂的归纳过程来构造，而这一归纳过程的部分构造本质上就是所谓的鼠。

一旦我们超越大基数层级中的可测性，测度就不足以刻画这一性质，因此我们需要借助所谓的相干扩张子序列。这些概念的确切含义超出了本文的讨论范围，但粗略地说，扩张子是测度（测度论意义上的）的一种推广，它使我们能够刻画一致性强度高于可测基数的基数；而要大致刻画事实 4.1 中那种实数存在所对应的大基数强度，就需要一个由这些扩张子组成的所谓“相干”序列，也就是伍丁基数。伍丁基数的精确定义虽超出了本文的讨论范围，但它们远强于可测基数，并且贯穿于描述集合论之中。

因此，要构造一个含有伍丁基数的核心模型，就必须构造形如 $L[\vec{E}]$ 的模型，其中 E 是相干扩张子序列，但其组织方式要比我们在定义 1.1 中采用的方法复杂得多，这样才能确保这一构造的初始段彼此“协调相容”。

由此，我们给出一个伪定义：

伪定义 4.4. 鼠标是一种形如[14] $(L_\alpha[\vec{E}], \in, \vec{E})$的结构，具有 $\vec{E}$一个相干的扩张子序列，[15] 且是归纳核心模型构造的一个初始段。[16]

鼠可以按照它们在核心模型构造中的构造顺序良序排列，这使我们能够指称某件事发生时所处的“最小鼠”。

定义 4.5. M_1 是满足 M_1 “存在一个 Woodin 基数”[17]的最小鼠。

现在我们可以构造一个对象[18] $M_1^\sharp$ ，它与 M_1 的关系和 $0^\sharp$ 与 L的关系相同。它们之间关系的确切形式超出了本文的讨论范围。[19] 要准确陈述这种类比成立的方式，就需要用鼠来重新表述 $0^\sharp$ 。考虑到这一点，我们给出第二个伪定义：

伪定义 4.6。 $M_1^\sharp$是满足“ $M_1^\sharp$中存在一个伍丁基数”的最小活跃[20] 鼠。

---

[13]定义 1.1 不充分的原因，以及运行核心模型构造究竟需要何种组织方式，是集合论的一个子领域 *fine structure theory*所研究的主题。[14]严格来说，鼠是根据对 L层级的一种修改——称为 J-*hierarchy*——来定义的；不过为了简便起见，我们略过了这一点。[15]在结构（$L_\alpha[\vec{E}]$， $\in$， $\vec{E}$）中， $\vec{E}$由一个一元谓词表示，该谓词由形如（α，E_α）的有序对满足，其中 E_α是 $\vec{E}$ 中索引为 α的扩张子。[16]鼠还需满足其他技术要求，例如 *soundness* 和 *iterability*，这些都远超本文的讨论范围。[17]需要注意的是，诸如此类的陈述并不意味着 M_1 字面上包含一个伍丁基数。它只意味着其中包含一个对象，而从 M_1的角度看，这个对象就像是一个伍丁基数。这与斯科伦悖论类似：可数的 ZFC 模型可以包含一些集合，而模型“认为”这些集合是不可数的。[18]我们想提醒读者，进行这类操作必然需要提升一致性强度。当然，ZFC 与“ M_1 存在但 $M_1^\sharp$ 不存在”相容；因此，当我们说“可以构造一个对象 $M_1^\sharp$ ”时，我们假设存在进行构造所需的必要工具。[19]例如，这并不等价于 M_1存在不可辨识集。

[20] *active* 的定义旨在确保 $M_1^\sharp$ 与 M_1 之间的关系，与 $0^\sharp$ 与 L之间的关系相同。其精确含义超出了本文的范围。

正式而言，由于 $M_1^\sharp$ 是鼠标，它不是实数，而是结构。然而，其理论可以用一个实数来编码——例如，我们可以取这样一个数：其第 n位为1，当且仅当 $M_1^\sharp$ 满足由 n编码的语句——而这个实数就是事实 4.1和命题 4.2中的实数 x 。

Appendix A. $M_1^\sharp$ cannot be its value

在命题 4.2 中，我们假设存在足够多的大基数，以给出一个实数 s，它不能是 (†) 的值。这个实数 s 没有简洁明了的刻画：它是通过交错排列 $M_1^\sharp$ 的数字与 $L[M_1^\sharp]$ 上的一个泛型实数的数字得到的。在本节中，我们证明 $M_1^\sharp$ 本身不能是 (†) 的值。

定理 A.1. 假设 ZF + $\mathsf{DC}_\mathbb{R}$ + AD。那么，对每个满足 $x \geq_T M_1^\sharp$ 的实数 x， $\mathbb{R}$∩遗传序数可定义集$^{L[x]} = \mathbb{R}^{M_1}$.

证明。 首先，我们证明 $\mathbb{R}$ ∩遗传序数可定义集$^{L[x]}$ 确实会在某个锥上稳定下来。令 $\prec_x$ 表示在 $L[x]$ 中计算所得的遗传序数可定义集$^{L[x]}$ 的规范良序，并令 $\prec_x^\mathbb{R}$ 为其限制在遗传序数可定义集$^{L[x]}$. 的实数上的（次数不变）版本。此外，令 $r_x(\alpha)$ 表示遗传序数可定义集$^{L[x]}$的 α^{th} 实数（若存在）。对每个$\alpha < \omega_1^V$，都存在一个锥 C_α 和一个实数 $r(\alpha)$，使得对所有 $x \in C_\alpha$, $r_x(\alpha) = r(\alpha)$。固定这样一个 α 和这样一个实数 $r = r(\alpha)$，使得

$$\exists b \forall x \geq_T b (r = r_x(\alpha)).$$

将这个公式记为 $\varphi_\alpha(r)$。

接下来，我们证明实际上 $\mathbb{R} \cap \mathrm{HOD}^{L[x]} = \mathbb{R}^{M_1}$ 在 $M_1^\sharp$ 上方的锥上成立。为证明包含关系的一个方向，我们希望证明：若 $\alpha < \omega_1^V$ 且 $r \in \mathbb{R}$ 满足 $\varphi_\alpha(r)$，那么 $r \in \mathbb{R}^{M_1}$. 。设 b 是见证 $\varphi_\alpha(r)$ 的基。根据伍丁泛型迭代理论，存在一个正规迭代映射π：$M_1^\sharp \to N$，其中 N 是 $M_1^\sharp$ 的一个迭代，使得对某个 $g \subseteq \mathrm{Coll}(\omega, \delta^N)$，若它是 N-泛型，则有 $b \in N[g]$. 。在 $N[g]$ 中工作。考虑公式 $\Phi_\alpha(y)$，它表示 y 是满足 $\varphi_\alpha(y)$ 的唯一实数。这是 V 中仅以 α 为参数的一阶公式。由于 $\varphi_\alpha(r)$ 在 V 中为真， $\Phi_\alpha(r)$ 在 V 中为真。由于 $N[g]$ 是形如 $L[V_\delta^N][g]$ 的模型的尖点，我们有 $N[g] \vDash \Phi_\alpha(y)$”，而那个唯一的实数必定是 r。因此， $r \in \mathrm{OD}^{N[g]}$. 。由于强迫 $\mathrm{Coll}(\omega, \delta^N)$ 在 N 上弱齐次，又因为 $r \in \mathrm{OD}^{N[g]}$，所以我们有 $r \in N$.。最后，注意到 $N \cap \mathbb{R} = M_1^\sharp \cap \mathbb{R} = M_1 \cap \mathbb{R}$，因此 $r \in M_1$.

对于另一个方向，我们希望证明，若 $x \in \mathbb{R}$ with $x \geq_T M_1^\sharp$，则 $\mathbb{R}^{M_1} \subseteq \mathbb{R} \cap \mathrm{HOD}^{L[x]}$。固定 $x \geq_T M_1^\sharp$. 。令 $\alpha < \omega_1^{M_1}$满足： $M_1 \restriction \alpha$ 投影到 ω。根据 [15], , 对于这样的 α， $M_1 \restriction \alpha$ 是高度为 α 、投影到 ω 且具有 Π^1_2-可迭代性的唯一前鼠标 N。令 $\Psi(\alpha)$ 表示命题

“N 是高度为 α 、投影到 ω 且 N 具有 Π^1_2-可迭代性的唯一前鼠标” .

命题“N 具有 Π^1_2-可迭代性”在实数编码 N中是统一 Π^1_2 的。根据肖恩菲尔德绝对性，此命题在 V与 $L[x]$之间是绝对的。由于 $x \geq_T M_1^\sharp$， $L[x]$包含一个 $M_1^\sharp$的编码，因此也包含相关可数初始段 $M_1 \restriction \alpha$ 的编码，其投影为 ω. 。特别地， $L[x]$ 包含某个见证 $\Psi(\alpha)$ 的编码，而肖恩菲尔德绝对性保证，关于这些编码的 Π^1_2-可迭代性， $L[x]$ 与 V看法一致。因此，在 $L[x]$内部， $M_1 \restriction \alpha$ 由公式 $\Psi(\alpha)$ 定义。于是， $M_1 \restriction \alpha \in \mathrm{HOD}^{L[x]}$。一个标准的精细结构事实指出， M_1 中的实数恰好出现在满足 $M_1 \restriction \alpha$ 投影到 ω 的阶段 α 。因此，每个 $y \in \mathbb{R}^{M_1}$ 都属于某个投影为 ω 的 $M_1 \restriction \alpha$， 因而 $r \in \mathrm{HOD}^{L[x]}$. □

因此，如果它存在， $M_1^\sharp$ 对于任意实数 x，都不会是 $L[x]$ 的无参数射影单元素集；因为如果它是，那么它也会属于 $\mathrm{HOD}^{L[x]}$，因此不可能是 (†) 的值。

References

[1]Hamkins JD. 集合论多重宇宙。《符号逻辑评论》。2012年8月；5(3):416–449。可访问：http://dx.doi.org/10.1017/S1755020311000359。[2] Hanson JE. 我能实际写下来的任何函数都是可测的，对吧? 《数学展论》。2025年12月；43(6):125718。可访问：http://dx.doi.org/10.1016/j.exmath. 2025.125718。[3] Kanamori A. 《高阶无穷：集合论中的大基数及其起源》。施普林格数学专著。施普林格；2003。可访问：https://books.google.com/books?id=AnycshOBAqIC。[4] Adamowicz Z. 载于：《可构造度的可构造半格》。施普林格柏林海德堡；1977。第1–43页。可访问：http://dx.doi.org/10.1007/BFb0067640。[5] Davis M, Putnam H, Robinson J. 指数丢番图方程的判定问题。《数学年刊》。1961年11月；74(3):425。可访问：http://dx.doi.org/ 10.2307/1970289。[6] Robinson J. 希尔伯特第十问题。载于：《纯粹数学研讨会论文集》。第20卷。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会；1971。第191–194页。[7]Matiyasevich YV. 可枚举集是丢番图的。《苏联科学院学报》。1970；191(2):279–282。俄文。英文译本：《苏联数学：学报》，11(2):354–358。[8] Miller AW. 《描述集合论与强迫法：如何用艰难的方法证明关于博雷尔集的定理》。剑桥大学出版社；2017。可访问：http://dx.doi.org/10. 1017/9781316716977。[9]Harrington L. 长射影良序。《数学逻辑年刊》。1977年11月；12(1):1–24。可访问：http://dx.doi.org/10.1016/0003-4843(77)90004-3。[10] Koellner P, Woodin WH. 载于：《确定性导出的大基数》。施普林格荷兰；2009。第1951–2119页。可访问：http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-5764-9_24。[11] Kechris AS, Woodin WH. 分划性质与确定性的等价性。《美国国家科学院院刊》。1983年3月；80(6):1783–1786。可访问：http://dx. doi.org/10.1073/pnas.80.6.1783。[12] Silver JH. 可测基数与良序。《数学年刊》。1971年11月；94(3):414。可访问：http://dx.doi.org/10.2307/1970765。[13] Schreber JCD, Goldfuss GA, Wagner JA. 载于：《根据自然界图像绘制并附描述的哺乳动物》。图版第166–280号。埃朗根，Schreber 哺乳动物著作与 Esper 蝴蝶著作发行处，[1774]–1855；第CLXXX.A页。可访问：http: //dx.doi.org/10.5962/bhl.title.67399。[14] Scott D. 可测基数与可构造集。《波兰科学院学报》。1961；IX(7)。[15] Steel JR. 射影良序内模型。《纯粹与应用逻辑年刊》。1995年6月；74(1):77–104。可访问：http://dx.doi.org/10.1016/0168-0072(94)00021-T。