确保随机单调性的过度零值计数模型

Hyemin Lee[a],*、Dohee Kim[a],*、Banghee So[b],**、Jae Youn Ahn[a],**

[a]梨花女子大学统计系，大韩民国首尔[b]陶森大学数学系，美国马里兰州陶森市约克路*7800*号，邮编*21252*

arXiv:2602.02398v1 [stat.AP] 2 Feb 2026

摘要

泊松模型和负二项模型等标准计数模型，往往无法捕捉保险数据中常见的大量零索赔。为解决过多零值问题，零膨胀模型和门槛模型引入额外参数，明确地对过多零值进行建模，从而更好地联合描述零索赔和正索赔结果。为适应纵向依赖和未观测异质性，这些模型还进一步扩展为包含随机效应的模型。然而，这些模型是否符合保险领域的基本概率原理，尤其是随机单调性，尚未得到正式检验。本文严谨分析表明，用于处理过多零值的标准计数随机效应模型可能违反这一性质，进而导致后验可信度不一致。随后，我们提出了新型计数随机效应模型类别，既能处理过多零值，又能确保随机单调性，从而随着理赔历史的演变，提供公平且理论上连贯的信度调整。

关键词： 零膨胀模型、障碍模型、随机序、可信度 JEL分类：C300

*第一作者

**通讯作者电子邮箱：hyemin@bok.or.kr (Hyemin Lee), doheekim22@ewha.ac.kr (Dohee Kim), bso@towson.edu (Banghee So), jaeyahn@ewha.ac.kr (Jae Youn Ahn)

1. 引言

在保险分析中，对索赔频率进行建模对于准确确定保费、分配准备金以及评估承保风险至关重要。这项任务在汽车、房主和健康保险等领域尤其具有挑战性，因为许多投保人在保险期间内不会提出任何索赔。由此产生的大量零索赔现象已在精算和统计研究中得到广泛记录。尽管基于泊松或负二项分布的标准计数模型能够处理零值，但它们缺少专门解释零值出现情况的独立组成部分。因此，当零值过于频繁时，这些模型通常难以很好地拟合数据，因为调整参数以捕捉零值部分，往往会削弱模型对正计数的拟合效果。正如 Hilbe（2011）和 Perumean-Chaney 等人（2013）所强调的，对零值过多现象进行明确建模，对于获得零值和非零结果的可靠推断至关重要。为解决这一问题，统计学文献发展出了两大类模型：**零膨胀模型**和**障碍模型**。

零膨胀模型采用由两个组成部分构成的结构，将二元过程与标准计数分布相结合（La mbert，1992），从而区分由二元过程产生的结构性零值和源自计数分布本身的抽样零。最常见的例子是零膨胀泊松模型和零膨胀负二项模型。基于这一思路，许多研究扩展并应用了保险领域的零膨胀方法（Yip 和 Yau，2005；Boucher 等，2009；Mouatassim 和 Ezzahid，2012；Chen 等，2019；So，2024；So 和 Deng，2025；So 和 Valdez，2025）。

门槛模型也称为两部分模型（Heilbron，1994），采用由障碍阶段和过障阶段组成的两阶段结构（Cragg，1971；Mullahy，1986；Winkelmann，2008）。最常见的设定是将门槛设为零：第一阶段通过二元模型判断观测值是否越过门槛；在此条件下，第二阶段使用标准计数分布对正计数建模。与零膨胀模型类似，保险领域最常用的门槛模型设定是泊松障碍模型和负二项障碍模型，这些模型已应用于各类精算研究（Boucher 等，2008a；Zhang 等，2022）。

尽管表述方式不同，零膨胀模型和障碍模型都旨在处理包含过多零值的计数数据。为便于表述，本文将二者统称为**过多零计数模型**。这类模型的一个关键特征是引入额外参数，明确控制零值的生成，从而能够更好地联合刻画零值和正值结果。在此优势的基础上，过多零计数模型还可以通过纳入随机效应进一步扩展——本文将其称为**过多零计数混合模型**——以共同解释理赔频率数据中的纵向依赖和过多零值（Boucher et al., 2007, 2008b, 2011; Aguero-Valverde, 2013; Zhang et al.,2022）。Nelder 和 Verrall（1997）对随机效应模型及其与保险费率厘定之间概念联系的开创性讨论指出了随机效应与可信度理论之间的理论联系。

尽管取得了这些进展，仍然存在一个重要空白。尽管过多零计数随机效应模型能够改善模型拟合并捕捉不可观测异质性，但其是否符合保险领域的基本概率原理，尤其是**随机单调性**，尚未得到系统考察。从精算视角来看，自然可以预期，随着过去索赔次数的增加，后验分布中的索赔频率分布应表明更高的风险水平。Purcaru 和 Denuit（2003）严格证明了泊松随机效应模型具有这一性质，并将该结论进一步扩展到广义线性混合和动态随机效应框架下更广泛的指数色散族。

然而，含过多零值的计数随机效应模型的随机单调性这一性质

在现有文献中尚未得到探讨。为弥补这一理论空白，我们作出两项主要贡献。首先，我们提供严格的数学证据，表明现有用于处理过多零值的计数随机效应模型可能违反随机单调性——这一性质不仅不理想，而且从根本上与合理的精算推理相悖。此类违背可能扭曲激励结构并造成道德风险，进而导致不公平甚至为负的信度调整（Pinquet，2020；Li 等，2021；Ahn 等，2021）。其次，我们提出了新型的、能够保证随机单调性的过多零值计数随机效应模型类别，从而确保后验信度随理赔历史的增加而持续提高，并在事后定价中维持公平性与理论一致性。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍全文所用的符号、定义和引理。第 3 节分析并通过严谨的数学验证表明，具有相关随机效应的泊松–障碍混合模型通常无法保证单调性。第 4 节推导并验证具有独立随机效应的泊松–障碍混合模型确保单调性的条件。第 5 节介绍具有共单调随机效应的泊松–障碍混合模型，并推导保证单调性的条件。附录中进一步讨论了负二项分布和零膨胀设定的扩展。第 6 节通过一个案例研究展示 LGPIF 数据集的应用。最后，第 7 节总结全文。

2. 初步结果

sec.2

我们先介绍全文将用到的分布和符号：

- Ber(θ)：成功概率为 $\theta \in [0,1]$ 的伯努利分布。
- Pois(λ)：均值为 $\lambda > 0$ 的泊松分布。
- NB(r, p)：形状参数为 $r > 0$ 、成功概率为 $p \in$ （0,1）的负二项分布，其概率质量函数为

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{n+r-1}{n}(1-p)^r p^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

均值为 $\frac{rp}{1-p}$，方差为 $\frac{rp}{(1-p)^2}$。

- MVN($(\mu_1, \mu_2)^\top, \Sigma$)：均值向量为 $(\mu_1, \mu_2)^\top$ 、协方差矩阵为 Σ 的二元正态分布。
- Beta(a, b)：定义在 (0,1) 上、均值为 $\frac{a}{a+b}$、方差为 $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ 的贝塔分布。
- Gamma(α, β)：形状参数为 $\alpha > 0$ 、速率参数为 $\beta > 0$，均值为 $\frac{\alpha}{\beta}$、方差为 $\frac{\alpha}{\beta^2}$ 的伽马分布。

我们用 $B(a, b)$ 表示贝塔函数，其定义为 $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$。我们用 $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数，其定义为 $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx$。我们用 $\sigma(x) = (1+e^{-x})^{-1}$ 表示逻辑

函数。我们用 $x_{1:t} := (x_1, \cdots, x_t) \in \mathbb{R}^t$。我们采用记号

$$\langle x_{1:t}, y_{1:t} \rangle$$

用以表示 $x_{1:t}, y_{1:t} \in \mathbb{R}^t$之间的内积。

对于随机向量 $X_{1:t}$，我们记

$$f(x_{1:t})$$

为其在绝对连续时的概率密度函数，或在纯离散时的概率质量函数。除非另有说明，无论底层分布是连续还是离散，我们都将 f 简称为密度函数。我们还用

$$f(x_{1:t} \mid y_{1:m})$$

表示在另一随机向量 $Y_{1:m} = y_{1:m}$条件下于 $X_{1:t} = x_{1:t}$ 处的条件密度函数。

对于 $x_{1:t}, y_{1:t} \in \mathbb{R}^t$，我们分别用 $x_{1:t} \wedge y_{1:t}$和 $x_{1:t} \vee y_{1:t}$表示它们的分量最小值与分量最大值，并用 $x_{1:t} \leq y_{1:t}$ 表示逐坐标不等式。称函数 $g\colon \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^k$ 上为**二阶多元全正（$\mathbf{MTP}_2$）**，如果

$$g(x_{1:t})\, g(y_{1:t}) \;\geq\; g(x_{1:t} \wedge y_{1:t})\, g(x_{1:t} \vee y_{1:t})$$

对所有满足 $x_{1:t} \wedge y_{1:t} \in D$ 且 $x_{1:t} \vee y_{1:t} \in D$的 $x_{1:t}, y_{1:t} \in \mathbb{R}^t$ 成立。若 g 是随机向量$X_{1:t}$的密度，我们便称 $X_{1:t}$ 为MTP_2。当 $t = 2$时，该性质称为TP_2。

设 X 和 Y 为一元随机变量，其密度函数分别为 f 和 g。若 X 在**似然比序**下小于 Y，记作 $X \leq_{\mathrm{LR}} Y$，则

$$f(x)g(y) \geq f(y)g(x)$$

对所有 $x \leq y$均成立。

以下是众所周知的结果。

lem.0

引理 1 (Denuit 等人（2006年）)。 设 Θ 为一个潜在随机变量，其累积分布函数为G，且其支撑集为 $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$。给定 $\Theta = \theta$，设 X_1、…、 X_t 为相互独立的随机变量，其条件分布函数为 $F_j(\cdot \mid \theta)$，相应的密度为 $f_j(\cdot \mid \theta)$，其中 $j = 1$、…、 t。我们进一步假设 $X_{1:t} = (X_1$、…、 $X_t)$ 的联合分布为

$$\mathbb{P}\left(X_{1:t} \leq x_{1:t}\right) = \int_{\mathcal{T}} \prod_{j=1}^{t} F_j(x_j \mid \theta)\, \mathrm{d}G(\theta), \qquad x_{1:t} \in \mathbb{R}^t.$$

若对每个 j， $f_j(x_j \mid \theta)$ 在$(x_j$， $\theta)$上为 TP_2，则 $X_{1:t}$ 为 MTP_2。

以下结果是 MTP_2 性质定义的直接推论。尽管这一事实广为人知，我们仍简要给出证明以求完整。

引理 1

引理 2. 假设 $X_{1:t}$ 是 MTP_2。固定一个指标 $i = 1, \cdots, t$，并记 $X_{-i} := (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_t)$，且 $x_{-i} \in \mathbb{R}^{t-1}$ 表示 X_{-i}的实现值。令

$$S := \left\{ x_{-i} \in \mathbb{R}^{t-1} \,:\, f(x_{-i}) > 0 \right\}.$$

其中 $f_{X_{-i}}(x_{-i})$ 表示在 $x_{-i} \in \mathbb{R}^{t-1}$处取值的 X_{-i} 的密度。那么，对任意满足 $x_{-i} \le x'_{-i}$的 x_{-i}, $x'_{-i} \in S$，有

$$[X_i \mid X_{-i} = x_{-i}] \le_{\mathrm{LR}} \left[X_i \mid X_{-i} = x'_{-i}\right].$$

证明。只需证明

$$f(x'_i \mid x'_{-i}) f(x_i \mid x_{-i}) \ge f(x_i \mid x'_{-i}) f(x'_i \mid x_{-i}), \qquad \text{for any} x_i \le x'_i \tag{1}$$ eqq1

对任意 $x_{-i}, x'_{-i} \in S$，其中 $x_{-i} \le x'_{-i}$。由于 (1) 等价于

$$f(x'_i, x'_{-i}) f(x_i, x_{-i}) \ge f(x_i, x'_{-i}) f(x'_i, x_{-i})$$

我们知道，$X_{1:t}$ 的 MTP_2 性质蕴含 (1)。 □

3. 泊松-障碍混合模型中可信度序的违背

第3节

考虑表示具有有限均值的保险风险的随机过程 $(X_t)_{t\ge1}$。在保险应用中，基本关注对象是**基本可信度**

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1} \mid X_{1:t} = x_{1:t}\right],$$

为简洁起见，我们将其记为 $\mathbb{E}\left[X_{t+1} \mid x_{1:t}\right]$。从费率厘定的角度来看，希望这些条件期望保持如下单调性:

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1} \mid x_{1:t}\right] \le \mathbb{E}\left[X_{t+1} \mid x'_{1:t}\right], \qquad \text{for all } x_{1:t} \le x'_{1:t}. \tag{2}$$ eq.11

鉴于保险产品的多样性，更自然的做法是要求该条件的一个推广形式:

$$\mathbb{E}\left[h(X_{t+1}) \mid x_{1:t}\right] \le \mathbb{E}\left[h(X_{t+1}) \mid x'_{1:t}\right], \qquad \text{for all } x_{1:t} \le x'_{1:t}, \tag{3}$$ eq.12

对每一个非递减函数 $h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，只要该期望存在。

我们称过程 $(X_t)_{t\ge1}$ 在满足 (2) 时具有**基本可信度序**，在满足 (3) 时具有**一般可信度序**[1]。当无需区分这两个条件时，我们统称其为**可信度序**。这些序性质在保险费率厘定中起着核心作用，Purcaru 和 Denuit（2003）以及 Denuit 等人（2006年）对此进行了讨论。

尽管泊松随机效应模型以及更一般的广义线性混合模型（GLMM）的可信度序已得到严格确立（Purcaru 和 Denuit，2003；Denuit 等人，2006），但对于零膨胀模型或障碍模型，尚未进行类似分析。本文填补了这一空白，研究含有过多零值的计数数据混合模型，并分析这些模型是否保持可信度序性质。本节聚焦于泊松–障碍混合模型，并评估其是否符合可信度序。附录 B 将分析扩展至采用更一般计数分布的障碍混合模型，并涉及零膨胀设定。我们首先提出泊松–障碍混合模型的一般形式，为本文后续研究的模型变体奠定基础。

[1] 这一性质被称为文献中的**序列条件递增**（Shaked 和 Shanthikumar，2007）.

模型 0 **模型 1**。 具有一般随机效应的泊松–障碍混合模型 适用于 $(Y_t)_{t\geq 1}$ 定义如下

$$Y_t := Z_t(1 + N_t), \quad t \geq 1,$$

在以下假设下：

i. 观测分布。 在给定 $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$的条件下，各对$(Z_t, N_t)$ 在t与 $Z_t \perp N_t \mid \Theta$之间相互独立。其条件分布为

$$Z_t \mid \Theta \sim \mathrm{Ber}\big(\eta_1(\Theta_1)\big), \qquad N_t \mid \Theta \sim \mathrm{Pois}\big(\eta_2(\Theta_2)\big), \tag{4}$$

eq.d.1

其中 $\eta_1 :\ \mathcal{R}(\Theta_1) \to (0,\ 1)$ 与 $\eta_2 :\ \mathcal{R}(\Theta_2) \to (0,\ \infty)$ 分别为伯努利分布和泊松分布的适当激活函数。此处，$\mathcal{R}(\Theta_j)$ 表示 $\Theta_j\ (j = 1,\ 2)$所取可能值的集合。

ii. 随机效应分布。 随机效应 $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ 服从一般联合分布$\mathcal{L}(\Theta)$，其支撑为 $\mathcal{R}(\Theta_1) \times \mathcal{R}(\Theta_2)$。

3.1. 具有相关随机效应的泊松–障碍混合模型的局限性 *ts*

在此，我们考虑模型1的一个特例，即具有相关随机效应的泊松–障碍混合模型，其中随机效应服从二元正态分布。我们考察其在可信度序性质方面的局限性，第3.2节给出了清晰展示这些序被违反的数值示例。该模型的正式设定如下。

mod.1 **模型2**。 该具有二元正态随机效应的泊松–障碍混合模型对于$(Y_t)_{t\geq 1}$ 由模型 *1*给出，具体如下：

i. 观测分布。 (4) 中的条件分布规定为

$$Z_t \mid \Theta \sim \mathrm{Ber}\big(\sigma(\Theta_1)\big), \qquad N_t \mid \Theta \sim \mathrm{Pois}\big(\exp(\Theta_2)\big).$$

ii. 随机效应分布。 随机效应服从二元正态分布 *n,*

$$\Theta \sim \mathrm{MVN}\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \Sigma\right),$$

具有正定协方差矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\,\sigma_1\sigma_2\\ \rho\,\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

对于 σ_1、 $\sigma_2 > 0$ 和 $\rho \in (-1,1)$。

我们首先关注的是，探究模型2是否保留基本可信度序的最基本形式；该不等式

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = y_1\right] \ \leq\ \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = y_1'\right] \quad \text{for } y_1 \leq y_1'.$$

注意到 $Y_1 = 0$ 与 $Z_1 = 0$ 等价，而对于 $y_1 = \mathbb{Z}_{\geq 1}$， $Y_1 = y_1$ 与 $Z_1 = 1$ 和 $N_1 = y_1 - 1$ 等价，我们区分两种不同的情况

i. 对于 $y_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们关注以下不等式

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = y_1 + 1\right] \;\geq\; \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = y_1\right] \tag{5}$$ eq.310

这等价于

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Z_1 = 1, N_1 = y_1\right] \;\geq\; \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Z_1 = 1, N_1 = y_1 - 1\right]. \tag{6}$$ eq.311

ii. 我们关注以下不等式

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 1\right] \;\geq\; \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 0\right] \tag{7}$$ eq.321

这等价于

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Z_1 = 1, N_1 = 0\right] \;\geq\; \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Z_1 = 0\right]. \tag{8}$$ eq.322

比较式 (6) 中的不等式，两项之间的主要区别在于 $N_1 = y_1$ 与$N_1 = y_1 - 1$。如果假设 N_1 的大小对 Y_2具有某种正向影响[2] ，那么预期式 (6) 中的不等式成立，正如引理3中正式证明的那样。引理3的证明见附录 A。

引理2

引理3。 在模型*2*下，我们进一步假设 $\rho \in [0, 1)$ 和 $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$。那么，对于任意整数 $1 \leq y_1 \leq y_1'$，有如下

i. 我们有以下似然比序

$$[\Theta \mid y_1] \leq_{\mathrm{LR}} \left[\Theta \mid y_1'\right].$$

ii. 对于所有期望存在的非递减函数 $h:\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{E}\left[h(Y_2) \mid Y_1 = y_1\right] \;\leq\; \mathbb{E}\left[h(Y_2) \mid Y_1 = y_1'\right].$$

相比之下，（8）中的比较涉及（Z_1，N_1）=（1，0）与 $Z_1 = 0$之间的比较。即使在相同的假设下，即 Z_1 和 N_1 均对 Y_2具有正向影响，也无法确定（8）中的不等式是否成立。这种模糊性源于以下事实：信息 $Z_1 = 1$（在左侧）与 $Z_1 = 0$（在右侧）支持（8）中的不等式，而信息 $N_1 = 0$（在左侧）与右侧缺少关于 N_1 的信息则表明相反的方向。因此，哪种影响占主导地位仍无法确定。事实上，定理1表明，在随机效应分布具有正相关且满足适当假设的情况下，（7）中的不等式可能反向，从而违背基本可信度序。

thm.1

定理1。 考虑模型*2*的设定。对于固定的 $\sigma_2 > 0$ 和 $\rho \in$ （-1，1），我们有

$$\lim_{\sigma_1^2 \to 0^+} \left(\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 0\right] - \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 1\right]\right) \;>\; 0.$$

[2]“正向影响”的确切含义将在下一个引理中予以阐明。

从监管和精算视角来看，违反可信度序是有问题的。这类违反可能导致不受欢迎的激励，例如策略性地提交小额索赔，以期将未来的信度成本降至最低，这类似于套利情形；或者，它们会破坏事后定价的公平性。在实践中，这可能助长道德风险，即低风险的保单持有人为避免潜在的信度上升而提交琐碎或虚假的索赔。

第3.2节

3.2. 数值示例

我们在模型2的框架下展示若干数值示例，其中基本可信度序遭到违反。我们的分析主要关注 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = y_1]$ 在 $y_1 = 0$和$y_1 = 1$下的比较，因为根据引理3的条件，涉及 $y_1 \geq 1$ 的比较必然保持有序。正如附录 C 所示，我们还注意到，当相关参数 ρ 为负时， $y_1 \geq 1$ 的这一排序未必成立。由于模型2不存在闭式后验分布，我们使用马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC）近似相关量，蒙特卡洛样本量为$S = 1000$。为评估蒙特卡洛变异性并计算标准误，该估计过程独立重复运行100次。

表1报告了通过改变 σ_1^2并固定 $\mu_1 = \mu_2 = 0$、 $\sigma_2^2 = 1$和 $\rho = 0.5$而获得的 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$ 和 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$ 的蒙特卡洛估计。随着 σ_1^2 减小，两个条件期望之间的排序发生逆转，即:

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 1\right] \leq \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 0\right].$$

这一行为与定理1一致。

表2展示了在固定 $\mu_1 = \mu_2 = 0$、 $\sigma_1^2 = 1$ 和 $\rho = 0.5$ 的同时改变 σ_2^2 所得到的蒙特卡洛估计。随着 σ_2^2 增大，再次观察到违反基本可信度序的情况。

表1：随着 σ_1^2减小， $\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 0\right]$与 $\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 1\right]$的比较

模拟

σ_1^2	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$
5.0	0.7113 (0.0085)	1.2061 (0.0064)
2.0	0.9319 (0.0101)	1.0576 (0.0052)
1.0	1.0780 (0.0091)	0.9630 (0.0046)
0.1	1.3073 (0.0110)	0.8396 (0.0032)

注：括号内报告蒙特卡罗标准误（蒙特卡洛标准误）

表2： $\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 0\right]$与 $\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = 1\right]$随 σ_2^2增大的比较

模拟

σ_2^2	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$
0.01	0.8269 (0.0036)	1.1732 (0.0034)
0.10	0.8436 (0.0040)	1.1539 (0.0037)
1.00	1.0780 (0.0091)	0.9630 (0.0046)
2.00	1.5067 (0.0309)	0.8617 (0.0042)

注：括号内报告蒙特卡洛标准误。

此外，除了协方差参数 σ_1^2 和 σ_2^2 的变化外，当 μ_2 足够大时，也可能出现违反基本可信度序的情况。表3报告了在固定 $\mu_1 = 0$、$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ 和 $\rho = 0.5$ 的同时改变 μ_2 所得到的蒙特卡洛估计。随着 μ_2 增大，可以观察到违反基本可信度序的情况。

模拟

表3：随着 μ_2 增加，$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$ 与 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$ 的比较

μ_2	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$
-2	0.4976 (0.0026)	0.6969 (0.0026)
-1	0.6526 (0.0043)	0.8061 (0.0031)
0	1.0797 (0.0099)	0.9554 (0.0056)
1	2.1982 (0.0269)	1.1227 (0.0060)
2	5.2635 (0.0705)	1.2502 (0.0068)

注：括号中报告的是蒙特卡洛标准误。

注1

注 1。 模型*2*的零膨胀 对应模型也可能出现同样的现象，见模型 *6*。附录 *C* 中展示了基础可信度序遭到违反的情形。

sec.4

4. 含独立随机效应的泊松–障碍混合模型

定理1与数值示例表明，对于泊松–障碍混合模型，不存在能够保证单调性的简单或通用的随机效应联合分布。面对这一难题，我们现在考虑一些易于处理的依赖结构子类，以便通过解析推导确定可信度序成立的条件。具体而言，我们考察随机效应依赖关系的两种极端情形：独立随机效应（本节）和共单调随机效应（第 5 节）。这两种情形提供了便于数学处理的框架，既简化了分析，也使我们能够严谨地研究可信度序。

本节介绍一种具有独立随机效应的泊松–障碍混合模型。与模型2不同，假设控制障碍部分和计数部分的随机效应相互独立，并通过共轭先验指定：伯努利障碍部分采用贝塔分布，泊松正计数部分采用伽马分布。这种设定构成了一个易于处理的框架，可得出封闭形式的预测分布，为考察满足基本可信度序的条件提供了便利。不过需要强调的是，如下文例 1 所示，该模型仅满足 基本可信度序 ，而不满足 一般可信度序。请注意，第 5 节介绍了共单调随机效应模型，该模型满足一般可信度序。因此，本节构建的模型应视为一个启发性示例 ，用于初步阐释主要思想。

模型2

模型 3。 具有独立随机效应的泊松–障碍混合模型，针对 $(Y_t)_{t\geq 1}$ 由模型 *1* 按以下具体设定给出：

i. 观测分布。 (4) 中的条件分布由下式指定

$$Z_t \mid \Theta \sim \mathrm{Ber}(\Theta_1), \qquad N_t \mid \Theta \sim \mathrm{Pois}(\Theta_2).$$

ii. 随机效应分布。 随机效应 Θ_1 与 Θ_2 相互独立，并具有如下设定

$$\Theta_1 \sim \mathrm{Beta}\big(a,\, b\big), \qquad \Theta_2 \sim \mathrm{Gamma}\big(\alpha,\, \beta\big),$$

对于某些常数 a、 b、 α、 $\beta > 0$。

伯努利–贝塔族和泊松–伽马族的共轭结构确保模型 3 具有如下形式的后验分布。

命题 1

推论 1。 考虑模型 *3* 的设定。对于理赔历史 $Y_{1:t} = y_{1:t}$，定义

$$r_t := \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}_{\{y_s>0\}}, \qquad \textit{and} \quad m_t := \sum_{s=1}^{t} (y_s - 1)\, \mathbf{1}_{\{y_s>0\}}.$$

其中 $\sum_{s=1}^{0}$ 定义为零。则 $\Theta =$ （Θ_1、 Θ_2）的后验分布为

$$\pi(\theta_1, \theta_2 \mid y_{1:t}) = \frac{1}{B(a_t^*, b_t^*)}\, (\theta_1)^{a_t^*-1}(1-\theta_1)^{b_t^*-1} \cdot \frac{(\beta_t^*)^{\alpha_t^*}}{\Gamma(\alpha_t^*)}\, (\theta_2)^{\alpha_t^*-1} e^{-\beta_t^* \theta_2},$$

其更新后的参数为

$$a_t^* = a + r_t, \quad b_t^* = b + t - r_t, \quad \alpha_t^* = \alpha + m_t, \quad \beta_t^* = \beta + r_t.$$

因此，一步预测均值为

$$\mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid y_{1:t}\right] = \frac{a + r_t}{a + b + t} \left(1 + \frac{\alpha + m_t}{\beta + r_t}\right).$$

特别地，在观测一次 $Y_1 = y_1$后，

$$\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = y_1\right] = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b+1}\left(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right), & y_1 = 0, \\ \dfrac{a+1}{a+b+1}\left(1 + \dfrac{\alpha + (y_1 - 1)}{\beta + 1}\right), & y_1 > 0. \end{cases} \tag{9}$$

eq:BGoneahea

证明。 证明由伯努利–贝塔共轭性和泊松–伽马共轭性可得。 □

由推论 1 可得以下结果，它给出了基本可信度序的充要条件。

prop.2

命题 1. 模型 *3* 中的过程 $(Y_t)^{t\geq 1}$ 满足基本可信度序；即，

$$\mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y_{1:t}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y'_{1:t}\right], \qquad \forall y_{1:t} \leq y'_{1:t} \tag{10}$$

eq.5

对所有 $t \geq 1$，当且仅当

$$\alpha_t^*\, a_t^* \;\leq\; \beta_t^*\, (\alpha_t^* + \beta_t^* + 1) \tag{11}$$

eq.53

对于所有 $t \geq 1$（此前为 $t \geq 0$，请检查此更改是否正确），其中 α_t^*、 β_t^*、 a_t^*、 $b_t^* > 0$ 由推论 *1*定义。

证明。 固定 $t \geq 0$。根据推论 1，对于历史 $y_{1:t}$，一步预测均值可写为

$$\Phi_t(r_t, m_t) \;:=\; \mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid y_{1:t}\right] \;=\; \frac{a + r_t}{a + b + t}\left(1 + \frac{\alpha + m_t}{\beta + r_t}\right),$$

其中非负整数 r_t 和 m_t 在推论 1中定义。

对于固定的非负整数 r，我们有

$$\Phi_t(r_t, m_t + 1) - \Phi_t(r_t, m_t) = \frac{a + r_t}{(a + b + t)\,(\beta + r_t)} \;>\; 0.$$

因此， Φ_t 关于非负整数 m_t（严格）递增。

接下来，对于固定的非负整数 m_t，我们有

$$\Phi_t(r_t + 1, m_t) - \Phi_t(r_t, m_t) = \frac{(\beta + r_t)^2 + \beta + r_t + (\alpha + m_t)(\beta + r_t) - (\alpha + m_t)(a + r_t)}{(a + b + t)\,(\beta + r_t)(\beta + r_t + 1)}. \qquad (12)$$ eq.p3

由于分母为正，该差值非负当且仅当

$$(\alpha + m_t)(a + r_t) \;\leq\; (\beta + r_t)((\alpha + m_t) + (\beta + r_t) + 1) \qquad (13)$$ eq.p4

这恰好是(11)中的不等式。

因此，如果我们假设不等式 (11) 对所有 $t \geq 1$ 都成立，那么 Φ_t 在两个自变量上均为非递减函数。由于 $y_{1:t} \leq y'_{1:t}$ 蕴含 $r_t \leq r'_t$ 和 $m_t \leq m'_t$，我们得到

$$\mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid y_{1:t}\right] = \Phi_t(r_t, m_t) \;\leq\; \Phi_t(r'_t, m'_t) = \mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid y'_{1:t}\right],$$

这就是 (10)。

反过来，假设 (10) 对所有 t 和所有历史都成立。对于固定的 $t \geq 1$，考虑至少有一个 $y_1, \cdots, y_t$ 为零的理赔历史 $Y_{1:t} = y_{1:t}$。另选一个与 $Y_{1:t} = y_{1:t}$ 完全相同的理赔历史，但其中一个分量从 0 变为 1；此时 r_t 增至 r_t+1，而 m_t 保持不变。将 (10) 应用于这对历史，可得 $\Phi_t(r_t, m_t) \leq \Phi_t(r_t+1, m_t)$；根据 (12) 与 (13) 之间的等价关系，这等价于

$$\alpha_t^*\, a_t^* \;\leq\; \beta_t^*\,(\alpha_t^* + \beta_t^* + 1).$$

As (r_t, m_t)，因此 $(\alpha_t^*, \beta_t^*, a_t^*)$，且 t 是任意的，所以该条件必须对所有 $t \geq 1$ 都成立 . □

虽然模型 3 能得到方便的闭式后验分布，但基本可信度序并非普遍成立；其成立与否由命题 1 中的必要充分条件 (11) 精确决定。由于必须对所有 $t \geq 1$ 验证该条件，因此在实践中检查起来可能较为繁琐。为克服这一困难，下面的推论给出了一个易于验证的充分条件。此外，该条件可以直接在模型设定阶段加以约束，从而确保所得模型自动满足基本可信度序。

thm.3 **推论 2**。 考虑模型 *3* 中的设定。如果

$$a < \beta, \qquad (14)$$ ass.1

那么，对于任意 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意历史 $y_{1:t}$、 $y'_{1:t} \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$，若满足 $y_{1:t} \leq y'_{1:t}$，则有

$$\mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y_{1:t}\right] \;\leq\; \mathbb{E}\left[Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y'_{1:t}\right]. \tag{15}$$ eq.51

证明。 首先，注意到条件 (14) 意味着

$$\alpha_t^* \, a_t^* \;\leq\; \beta_t^* \, (\alpha_t^* + \beta_t^* + 1), \quad \text{for all} \quad t \geq 1$$

其中

$$\alpha_t^*, \quad \beta_t^*, \quad a_t^*, \quad b_t^*$$

由推论 1 定义。于是，命题 1 得证。

□

虽然条件 (11) 或 (14) 保证了基本可信度序，但并不能确保一般可信度序成立。以下数值示例表明，即使满足这些条件，一般可信度序仍可能遭到违反。

ex.1 **例 1**。 在模型 *3* 下，我们固定 $a = 0.5$、 $b = 1$、 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 1$，使基本可信度序成立。我们比较不同免赔额 下的免赔额调整后的条件期望

$$\mathbb{E}\left[(Y_2 - d)^+ \,\middle|\, Y_1 = 0\right] \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}\left[(Y_2 - d)^+ \,\middle|\, Y_1 = 1\right]$$

如表 *4* 所示。结果表明，随着 d 增大，一般可信度序遭到违反的程度也愈发严重。

表4：不同免赔额下 $\mathbb{E}\left[(Y_2 - d)^+ \,\middle|\, Y_1\right]$ d 的比较

odel3 MGCO_

	d								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbb{E}[(Y_2 - d)^+ \mid Y_1{=}0]$	0.200	0.100	0.050	0.025	0.013	0.006	0.003	0.002	0.001
$\mathbb{E}[(Y_2 - d)^+ \mid Y_1{=}1]$	0.300	0.100	0.033	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000

5. 具有共单调随机效应的泊松–障碍混合模型

第5节

在上一节中，我们表明，在假设独立随机效应的模型 3 下，(2) 中的基本可信度序是否成立可能取决于随机效应分布的设定，而 (3) 中的一般可信度序一般并不成立。我们现在考虑具有共单调随机效应的泊松–障碍混合模型。类似于模型 3 中独立性所带来的简化，共单调性提供了一种简单的依赖结构，从而使可信度序的分析更为容易。我们从共单调随机效应下的模型设定开始。

模型.05 **模型 4**。 对于给定的外生变量

$$(c_t)_{t\geq 1} \subset \mathbb{R} \quad \textit{and} \quad (d_t)_{t\geq 1} \subset \mathbb{R},$$

该带有共单调随机效应的泊松–障碍混合模型对于$(Y_t)_{t\geq 1}$ 由模型 ***1*** 给出，具体如下：

i. 观测分布。 (4) 中的条件分布由下式给出

$$Z_t \mid \Theta \;\sim\; \mathrm{Ber}(\sigma(c_t+\Theta))\,, \qquad N_t \mid \Theta \;\sim\; \mathrm{Pois}(\lambda\,(d_t+\Theta))\,,$$

其中 $\lambda:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ 是可微的非递减函数。

ii. 随机效应分布。 设 Θ 是一个实值随机变量，其分布为 $\mathcal{L}(\Theta)$，支撑集为 $\mathcal{R}(\Theta)\subseteq\mathbb{R}$。

TP2-time-s

引理 4。 考虑模型 ***4*** 的设定。对于固定时间 $t\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，定义

$$\eta_t(y,\theta) := \mathbb{P}(Y_t=y\mid\theta) = \begin{cases} 1-\sigma(c_t+\theta), & y=0;\\ \sigma(c_t+\theta)\,e^{-\lambda(d_t+\theta)}\dfrac{\big(\lambda(d_t+\theta)\big)^{y-1}}{(y-1)!}, & y\geq 1; \end{cases}$$

其中 $\lambda(\theta)\colon=e^{\psi(\theta)}>0$。那么 η_t 在 (y,θ) 上是 TP_2，当且仅当

$$0\;\leq\;\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda(d_t+\theta)\;\leq\;1$$

对于 $d_t\in\mathbb{R}$ 以及 Θ支集上的所有 θ。

证明。 要证明 $\eta_t(y,\theta)$ 在 (y,θ) 上是 TP_2，只需证明

$$\frac{\eta_t(y+1,\theta)}{\eta_t(y,\theta)}$$

对于所有 $y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，它们都是 $\theta\in\mathcal{R}(\Theta)$ 的非递减函数。

当 $y=0$ 时，我们有

$$\frac{\eta_t(y+1,\theta)}{\eta_t(y,\theta)} = \exp\left(c_t+\theta-\lambda(d_t+\theta)\right)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\eta_t(y+1,\theta)}{\eta_t(y,\theta)} = \exp\left(c_t+\theta-\lambda(d_t+\theta)\right)\left(1-\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda(d_t+\theta)\right). \tag{16}$$ eq.pf.1

当 $y\geq 1$ 时，我们有

$$\frac{\eta_t(y+1,\theta)}{\eta_t(y,\theta)} = \frac{\lambda(d_t+\theta)}{y}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\eta_t(y+1,\theta)}{\eta_t(y,\theta)} = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda(d_t+\theta)}{y}. \tag{17}$$ eq.pf.2

最后结合 (16) 和 (17) 中的不等式，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\eta_t(y+1,\theta)}{\eta_t(y,\theta)}\geq 0$$

对于所有 $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和所有 $\theta \in \mathcal{R}$（Θ），当且仅当

$$0 \;\leq\; \frac{\partial}{\partial \theta_1}\lambda(d_t + \theta) \;\leq\; 1$$

对于 $d_t \in \mathbb{R}$ 以及所有 $\theta \in \mathcal{R}$（Θ）。 □

定理 2

定理 2. 考虑模型 *4* 的设定。对于给定的 $d_t \in \mathbb{R}$，假设

$$0 \;\leq\; \frac{\partial}{\partial \theta}\lambda(d_t + \theta) \;\leq\; 1, \qquad \forall \theta \in \mathcal{R}(\Theta). \tag{18}$$

eq:scaled-Lip

那么，对于任意 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意满足 $y_{1:t} \leq y'_{1:t}$的历史 $y_{1:t}$、 $y'_{1:t} \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$，有

$$\big[\, Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y_{1:t} \,\big] \;\leq_{\mathrm{LR}}\; \big[\, Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y'_{1:t} \,\big].$$

证明。 根据引理 4，条件 (18) 蕴含条件分布 $\mathbb{P}(Y_s = y \mid \theta)$ 在 $(y,\ \theta)$ 上为 TP_2。应用引理 1 可知，$(Y_1, \ldots, Y_{t+1})$ 的联合分布为 MTP_2。最后，根据引理 2，MTP_2 性质蕴含所需的似然比序：

$$\big[\, Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y_{1:t} \,\big] \;\leq_{\mathrm{LR}}\; \big[\, Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y'_{1:t} \,\big], \quad \text{for all } y_{1:t} \leq y'_{1:t}.$$

□

注 1

注 2. λ 的一种实用选择： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是***softplus*** 函数，其定义为

$$\lambda(d_t + \theta) = \ln\Big(1 + e^{d_t + \theta}\Big),$$

该函数广泛应用于统计学和机器学习，是指数响应函数的一种平滑、正值且数值稳定的替代方案；例如，参见 *Weiß* 等人（*2022*）；*Wiemann* 等人（*2024*）。容易验证，

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\lambda(d_t + \theta) = \frac{e^{d_t + \theta}}{1 + e^{d_t + \theta}} \in (0, 1)$$

对所有 $d_t \in \mathbb{R}$和 $\theta \in \mathbb{R}$，均有。

关于随机效应分布的选择，任何设定都是允许的，因为它不会影响定理 *2* 中确立的一般可信度序。例如，可以考虑

$$\Theta \sim \mathcal{N}(0, \kappa^2)$$

对于某个 $\kappa^2 > 0$。

在附录 B 中，我们进一步考察了共单调随机效应框架的两种扩展：计数部分的负二项版本和零膨胀对应模型。

sec.6

6. 实证研究：LGPIF 保险数据

为进行实证分析，我们使用威斯康星州地方政府财产保险基金（LGPIF）提供的保险理赔数据。LGPIF 为多种公共

实体提供财产保险，包括县、市、镇、村、学区和消防部门，以及归入“其他”类别的组织。该数据集包含 2006年 至 2011 的理赔信息和多种保险保障（抵押品）的保单特征。其中，我们在分析中使用了一部分与理赔信息相关的变量。本研究聚焦于 LGPIF 数据中有关新旧车辆碰撞保险的部分。碰撞保险是指针对车辆与物体相撞、与另一辆车相撞或发生侧翻所造成损失的保险。模型拟合时，我们使用 2006年至2010年的观测数据，并将 2011年的观测数据作为验证集，以比较所估计模型的预测性能。

用于模型拟合的 2006–2010 年数据集由纵向观测组成，共包含 1,234 个地方政府实体。我们剔除了新车碰撞保险和旧车碰撞保险均为零的投保人观测。因此，分析使用最终包含 $k = 497$ 个实体的纵向数据集。有关数据集的详细说明，请参见 Frees 等（2016）。我们使用两个分类变量作为协变量：实体类型（六个类别：其他、城市、县、学校、城镇和村）以及对数保障额（三个类别）。对数保障额的区间定义如下：保障额 $1 \in (0,\ \ 0.17]$，保障额 $2 \in (0。17,\ \ 0.75]$，保障额 $3 \in (0。75,\ \ \infty)$。实体类型和保障水平的分布汇总于表 5。为简化起见，我们假设这些协变量不随时间变化。

表 5：分析中使用的协变量特征

ristics en_

分类变量		**比例（%）**
变量	**描述**	
实体类型	地方政府实体类型	
	其他	5.03
	City	9.66
	县	11.47
	学校	36.42
	Town	16.90
	村	20.52
保障水平	新旧车辆的碰撞险保额	
	区间（$0,\ \ 0.14] = 1$	33.40
	区间（$0。14,\ \ 0.74] = 2$	33.20
	区间（$0。74,\ \ \infty) \ = 3$	33.40

6.1. 模型设定

为便于比较，我们引入以下基准模型（BM）：

• (BM 1) 泊松广义线性混合模型:

$$Y_{i,t} \mid R_i, \mathbf{x}_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Pois}\big(\lambda_i \exp(R_i)\big),$$

where $\lambda_i = \exp(\langle \mathbf{x}_i,\ \ \boldsymbol{\beta} \rangle)$，并假设随机效应先验为 $R_i \sim N\left(-\frac{1}{2}d^2,\ \ d^2\right)$ – .

• (BM 2) 泊松广义线性模型:

$$Y_i \mid \mathbf{x}_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Pois}(\lambda_i),$$

其中 $\lambda_i = \exp(\langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta} \rangle)$。

- (BM 3) 泊松障碍模型：

$$Y_i \mid \mathbf{x}_i \overset{\text{iid}}{\sim} I_i \, Y_i^+,$$

其中 $I_i \sim \text{Ber}(\pi_i)$ 和 $Y_i^+ \sim \text{TPois}(\lambda_i)$，且 $\pi_i = \sigma\big(\langle \mathbf{x}_i, \ \boldsymbol{\beta}_1 \rangle\big), \quad \lambda_i = \exp\big(\langle \mathbf{x}_i, \ \boldsymbol{\beta}_2 \rangle\big).$

- (BM 4) 泊松零膨胀模型：

$$Y_i \mid \mathbf{x}_i \overset{\text{iid}}{\sim} I_i \, Y_i^*,$$

其中 $I_i \sim \text{Ber}(\pi_i)$ 和 $Y_i^* \sim \text{Pois}(\lambda_i)$，且 $\pi_i = \sigma\big(\langle \mathbf{x}_i, \ \boldsymbol{\beta}_1 \rangle\big), \quad \lambda_i = \exp\big(\langle \mathbf{x}_i, \ \boldsymbol{\beta}_2 \rangle\big).$

现在，我们讨论如何将协变量（$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{p+1}$）纳入模型2、3和4。尽管这些模型是针对单个投保人构建的，但将模型应用于横截面数据或面板数据时，我们引入额外的下标 $i = 1, \ldots, k$ 以表示第 i 位投保人。对于模型2，我们设定

$$\mu_{1,i} = \langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle, \qquad \mu_{2,i} = \langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle,$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1, \ \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p+1}$。

对于模型 3，我们通过如下设定，将协变量纳入随机效应先验的选定超参数中：

$$b_i = \exp\big(\langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}_b \rangle\big), \qquad \alpha_i = \exp\big(\langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}_\alpha \rangle\big),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_b, \ \boldsymbol{\beta}_\alpha \in \mathbb{R}^{(p+1)\times 1}$。由于具有便捷的共轭性质，泊松–伽马随机效应模型被广泛应用于保险应用中。在此背景下，针对每位投保人特定的先验速率参数通过解释性协变量来捕捉可观测异质性（不要与通过随机效应建模的不可观测异质性混淆）。在标准的泊松–伽马表述中，典型设定为

$$N_{i,t} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Pois}(\lambda_i \, \Theta_{i,2}), \qquad \Theta_{i,2} \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta).$$

由于 $\lambda_i \Theta_i^{[2]} \sim \text{伽马}\big(\alpha, \ \beta/\lambda_i\big)$，该设定等价于

$$N_{i,t} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Pois}(\Theta_{i,2}^*), \qquad \Theta_{i,2}^* \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta/\lambda_i).$$

因此，协变量通过伽马分布的速率参数进入模型。相比之下，模型 3 中的协变量与形状参数 α_i 以及贝塔先验中的 b_i相关联。这一选择大大简化了预测均值的单调性分析，详见第 4 节。

对于模型 4，我们将 λ 取为注 1 中引入的 softplus 函数。条件分布指定为

$$Z_{i,t} \mid \Theta \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Ber}\big(\sigma(c_i + \Theta_i)\big), \qquad N_{i,t} \mid \Theta \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Pois}\big(\lambda(d_i + \Theta_i)\big),$$

并且协变量通过以下方式纳入

$$c_i = \langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}_c \rangle, \qquad d_i = \langle \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}_d \rangle.$$

对于模型2、模型 3、模型 4 和 BM 1，没有可用的闭式似然表达式，因此难以进行经典的极大似然估计。因此，后验分布推断通过马尔可夫

链蒙特卡罗方法实现，该方法在 R 的 NIMBLE 包中实现。NIMBLE 为指定和拟合分层贝叶斯模型提供了灵活的框架（de Valpine 等人，2017，2024）。

6.2. 可信度序的数值研究

在评估预测性能之前，我们首先考察各个拟合模型是否满足可信度序。对于某些模型，基本可信度序和／或一般可信度序可通过在模型设定中明确施加约束来保证。对于 BM 1，Purcaru 和 Denuit （ 2003 ）证明了一般可信度序。模型 3 在推论 2 的充分条件下进行拟合，该条件保证基本可信度序，但不保证一般可信度序。对于模型 4，采用注 2 中 λ 的 softplus 设定满足定理 2 的条件，因此可以确保一般可信度序。相比之下，BM 2、BM 3 和 BM 4 不包含随机效应。因此，它们的预测分布不依赖于已观测协变量之外的既往理赔历史。因此，下文所考察的可信度序比较显然成立，无法为这些基准模型提供有意义的诊断。

对于其余模型，我们通过数值方法评估基本可信度序和一般可信度序。为实证检验基本可信度序，我们固定 $t = 5$，并针对每位保单持有人 i，比较在两种反事实的上一期结果 $Y_{i,\ 5} = 0$ 和 $Y_{i,\ 5} = 1$ 下的一步后验预测均值，同时保持较早观测到的历史 $Y_{i,\ 1:4} = y_{i,\ 1:4}$ 不变：

$$\mathbb{E}\left[Y_{i,6} \,|\, Y_{i,1:4} = y_{i,1:4},\, Y_{i,5} = 0\right] \;\leq\; \mathbb{E}\left[Y_{i,6} \,|\, Y_{i,1:4} = y_{i,1:4},\, Y_{i,5} = 1\right].$$

表 6 报告了违例率，即上述不等式不成立的保单持有人所占比例。

在模型2下，观察到的违例率最高可达 9.29%。也就是说，存在这样的情况：过去理赔历史较少的个人，其预期未来理赔次数反而高于过去理赔历史较多的个人。这种逆转现象在保险实务中是不可接受的。

表 6：各模型在不同可信度序下的单调性违例比例

tab.1

		$(Y-d)^+$		$(Y \wedge d)$	
	基本 (Y)	$d=1$	$d=2$	$d=1$	$d=2$
(模型2) 高斯泊松门槛模型	0.0929	0.1076	0.1272	0	0.0098
(模型 3) 独立泊松门槛模型	0	0.2421	1.0000	0	0
(模型 4) 共单调泊松障碍模型	0	0	0	0	0

为评估一般可信度序，我们使用保险定价中常用的两种标准非递减损失变换进行类似比较，分别对应免赔额保险和保额上限保险。具体而言，对于每位投保人 i（同样在 $t = 5$），我们检查是否

$$\mathbb{E}\left[(Y_{i,6}-d)^+ \,\middle|\, Y_{i,1:4} = y_{i,1:4},\, Y_{i,5} = 0\right] \;\leq\; \mathbb{E}\left[(Y_{i,6}-d)^+ \,\middle|\, Y_{i,1:4} = y_{i,1:4},\, Y_{i,5} = 1\right],$$

and

$$\mathbb{E}\left[Y_{i,6} \wedge d \,|\, Y_{i,1:4} = y_{i,1:4},\, Y_{i,5} = 0\right] \;\leq\; \mathbb{E}\left[Y_{i,6} \wedge d \,|\, Y_{i,1:4} = y_{i,1:4},\, Y_{i,5} = 1\right].$$

表 6 汇总了不同免赔额和保单限额水平下，各保单持有人对应的违例率。

对于免赔额变换后的索赔次数的后验期望 $(Y_6 - d)^+$，模型2下的反转率会随着免赔额 d 增大而上升。不过，它仍低于模型 3 下对应的反转率。尽管模型 3 保证了基本可信度序，但当 $d = 1$ 时，$(Y_6 - d)^+$ 的后验期望的反转率已经很高，约为 24%；而当 $d = 2$ 时，所有情况下都观察到了反转。与此同时，对于封顶索赔金额的后验期望 $(Y_6 \wedge d)$，只在模型2下观察到反转现象。

6.3. 样本外验证

根据表7报告的 LGPIF 数据集样本外验证结果，含随机效应的模型通常具有更优的预测性能。我们将预测均方误差（均方误差）定义为

$$\mathrm{MSE} := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\big(y_{i,6} - \hat{y}_{i,6}\big)^2,$$

其中，$\hat{}y_{i,\ 6}$ 表示预测均值

$$\hat{y}_{i,6} := \hat{\mathbb{E}}[Y_{i,6} \mid y_{i,1:5}]$$

$\hat{}$ 表示拟合模型所隐含的值。这里，$\mathbb{E}[\cdot \mid y_{i,1:5}]$ 表示估计的预测期望，该期望使用拟合模型参数计算得出。

在随机效应模型中，模型 4 的均方误差最低，同时也是唯一能够保证基本可信度序和一般可信度序的设定。模型 3（独立随机效应）也取得了较低的均方误差，并保证基本可信度序，但无法保证一般可信度序。相比之下，尽管模型2的均方误差具有相当的竞争力，却无法保证基本可信度序和一般可信度序，因此不适用于基于可信度的费率厘定。

表7：样本外验证结果

tab.2

模型	**预测指标**	**保证的可信度序**	
	MSE	**Base**	**一般**
(模型2) 高斯随机效应泊松门槛模型	1.0489	No	No
(模型 3) 独立随机效应泊松门槛模型	0.9466	Yes	No
(模型 4) 共单调随机效应泊松门槛模型	0.9382	Yes	Yes
(BM 1) 泊松广义线性混合模型	1.1171	Yes	Yes
(BM 2) 泊松广义线性模型	2.0241	-	-
(BM 3) 泊松障碍	2.4239	-	-
(BM 4) 泊松零膨胀模型	1.9762	-	-

总之，若同时考虑预测准确度与有保证的单调性——即满足基本可信度序和一般可信度序，乃至似然比序——则具有共单调随机效应的泊松–障碍混合模型（模型 4）可被视为总体上的最佳选择。因此，当以门槛模型作为分析框架时，拟合模型 4 可以说是最切实可行的方案。

sec.8

7. 结论

本文考察了带随机效应的过多零值计数模型中的随机单调性，并从理论与数值两方面证明，具有相关随机效应的门槛模型设定可能违反可信度序。为阐明该性质在何种情况下得以保持，我们分析了具有共单调随机效应的泊松–门槛模型，并证明其满足可信度序。随后，我们将这一结果推广到负二项模型及其零膨胀对应模型，从而获得了平行的单调性保证。

未来研究仍有几个方向。首先，尽管将这一框架扩展到动态随机效应模型在概念上相当直接，但为使论述简洁清晰，我们聚焦于静态随机效应。一个自然的后续步骤是构建动态设定，使随机效应随时间演变，同时保持随机单调性。此外，当前的表述针对特定分布；将这一框架推广到过零模型类别中更广泛的分布族，也是未来值得探索的方向。

致谢

Jae Youn Ahn 感谢韩国政府（科学技术信息通信部）资助的信息通信技术规划与评估研究院（IITP）项目提供部分支持（编号：RS-2022-00155966，人工智能融合创新人才培养（梨花女子大学）），以及韩国国家研究基金会（NRF）项目的资助（编号：2021R1A6A1A10039823、RS-2023-00217022、RS-2025-23524530）。

参考文献

ro2013full Aguero-Valverde，J.（2013）。全贝叶斯泊松-伽马、泊松-对数正态及零膨胀随机效应模型：比较事故频率估计的精度。《事故分析与预防》，50：289–297。

21ordering Ahn, J. Y.、Jeong, H. 和 Lu, Y.（2021）。论可信度因子的排序。《保险：数学与经济学》，101：626–638。

obability Bølviken, E.（1982）。非负偏相关下多元正态分布的概率不等式。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，第49–58页。

er2007risk Boucher, J.-P.、Denuit, M. 和 Guillén, M.（2007）。索赔次数的风险分类：各种零膨胀混合泊松模型和门槛模型的比较分析。《北美精算学报》，11(4)：110–131。

smodelling Boucher, J.-P.、Denuit, M. 和 Guillén, M.（2008a）。基于面板数据的门槛分布保险索赔次数建模。载于《数学与统计建模进展》，第45–59页。施普林格。

008models Boucher, J.-P.、Denuit, M. 和 Guillén, M.（2008b）。基于泊松分布和负二项分布推广的具有时间依赖性的保险索赔次数模型。*Variance*，2(1)：135–162。

009number Boucher, J.-P.、Denuit, M.和Guillen, M.（2009）。事故次数还是索赔次数？一种面向面板数据的零膨胀泊松模型方法。《风险与保险杂志》，76(4):821–846。

orrelated Boucher, J.-P.、Denuit, M.和Guillén, M.（2011）。应用于索赔次数的障碍模型的相关随机效应。*Variance*，5(1):68–79。

9subgroup Chen, K.、Huang, R.、Chan, N. H.和Yau, C. Y.（2019）。零膨胀泊松回归模型的亚组分析及其在保险数据中的应用。《保险：数学与经济学》，86:8–18。

g1971some Cragg, J. G. (1971). 关于受限因变量的若干统计模型及其在耐用品需求中的应用。*Econometrica*，39(5)：829–844。

nimble de Valpine, P.、Paciorek, C.、Turek, D.、Michaud, N.、Anderson-Bergman, C.、Obermeyer, F.、Cortes, C. W.、Rodriguez, A.、Lang, D. T. 和 Paganin, S. (2024)。*NIMBLE*：*MCMC*、粒子滤波和可编程分层建模。R软件包1.1.0版。

ogramming de Valpine, P.、Turek, D.、Paciorek, C. J.、Anderson-Bergman, C.、Lang, D. T. 和 Bodik, R. (2017)。使用模型编程：针对通用模型结构编写统计算法，并应用于 nimble。《计算与图形统计学杂志》，26(2)：403–413。

actuarial Denuit, M.、Dhaene, J.、Goovaerts, M. 和 Kaas, R.（2006年）。相关风险的精算理论：度量、序关系与模型。约翰·威立父子公司。

tivariate Frees, E. W.、Lee, G. 和 Yang, L.（2016年）。保险中的多元频率-严重度回归模型。*Risks*，4(1):4。

n1994zero Heilbron, D. C.（1994年）。针对增加零值的计数数据的零值调整及其他回归模型。生物计量学杂志，36(5)：531–547。

1negative Hilbe, J. M.（2011）。负二项回归。剑桥大学出版社。

arlin1983m Karlin, S. 和 Rinott, Y.（1983）。M-矩阵作为多元正态分布的协方差矩阵。线性代数及其应用，52：419–438。

rt1992zero Lambert, D.（1992）。零膨胀泊松回归及其在制造业缺陷中的应用。《技术计量学》，34(1)：1–14。

21dynamic Li, H.,Lu, Y., 和 Zhu, W.（2021）。动态贝叶斯费率厘定：一种马尔可夫链近似方法。《北美精算学报》，25(2)：186–205。

12poisson Mouatassim, Y. 和 Ezzahid, E. H.（2012）。泊松回归与零膨胀泊松回归：在私人健康保险数据中的应用。《欧洲精算学报》，2(2)：187–204。

cification Mullahy, J.（1986）。若干修正计数数据模型的设定与检验。《计量经济学杂志》，33(3)：341–365。

edibility Nelder, J. A. 和 Verrall, R. J.（1997）。可信度理论与广义线性模型。*ASTIN Bulletin:The JournaloftheIAA*，27(1)：71–82。

an2013zero Perumean-Chaney, S. E.、Morgan, C.、McDowall, D. 和 Aban, I.（2013）。零膨胀且过度离散：该怎么办？*JournalofStatisticalComputation and Simulation*，83(9)：1671–1683。

20poisson Pinquet, J.（2020）。具有动态随机效应和非负期间可信度的泊松模型。*ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*，50(2)：585–618。

ependence Purcaru, O. 和 Denuit, M.（2003）。动态索赔频率可信度模型中的依赖。*ASTIN Bulletin*：国际精算师协会期刊，33(1)：23–40。

tochastic Shaked, M. 和 Shanthikumar, J. G.（2007）。随机序。施普林格。

24enhanced So, B.（2024）。面向零膨胀保险索赔的增强型梯度提升，以及对 CatBoost、XGBoost 和 LightGBM 的比较分析。*Scandinavian ActuarialJournal*，2024(10)：1013–1035。

5advancing So, B. 和 Deng, M.（2025）。推进零膨胀 Tweedie 模型，并评估用于汽车理赔的梯度提升库。《北美精算学报》，第 1–18 页。

Tweedie So, B. 和 Valdez, E. A.（2025）。使用 CatBoost 构建用于保险损失分析的零膨胀 Tweedie 提升树。应用软计算，177:113226。

2softplus Weiß, C. H., Zhu, F. 和 Hoshiyar, A.（2022）。softplus INGARCH 模型。统计学报，32(2):1099–1120。

n2024using Wiemann, P. F., Kneib, T., 和 Hambuckers, J.（2024）。使用 softplus 函数在广义线性模型及其他模型中构建替代链接函数。《统计学论文》，65(5)：3155–3180。

onometric Winkelmann, R.（2008）。计数数据的计量经济分析。施普林格。

5modeling Yip, K. C. 和 Yau, K. K.（2005）。关于在一般保险中对含有额外零值的理赔频率数据建模。《保险：数学与经济学》，36(2)：153–163。

ang2022new Zhang, P.、Pitt, D. 和 Wu, X.（2022）。一种新的多变量零膨胀障碍模型及其在汽车保险中的应用。*ASTIN Bulletin*：*The Journal of the IAA*，52(2)：393–416。

app:proofs

附录 A. 证明

附录 *A.1.* 引理*3*的证明

证明。 我们首先证明第 i 部分。第 i 部分的证明等价于

$$f(\theta \mid y_1)f(\theta^* \mid y_1') \leq f(\theta \wedge \theta^* \mid y_1)f(\theta \vee \theta^* \mid y_1') \tag{A.1}$$ eq.1

对于任意整数 $1 \leq y_1 \leq y_1'$ 和 $\theta, \theta^* \in \mathbb{R}^2$。注意，(A.1) 等价于

$$f(y_1 \mid \theta)\pi(\theta)f(y_1' \mid \theta^*)\pi(\theta^*) \leq f(y_1 \mid \theta \wedge \theta^*)\pi(\theta \wedge \theta^*)f(y_1' \mid \theta \vee \theta^*)\pi(\theta \vee \theta^*). \tag{A.2}$$ eq.2

为证明 (A.2)，我们首先有

$$\pi(\theta)\pi(\theta^*) \leq \pi(\theta \wedge \theta^*)\pi(\theta \vee \theta^*). \tag{A.3}$$ eq.3

$\theta, \theta^* \in \mathbb{R}^2$ 这来自众所周知的结果： $\Theta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ 是 MTP_2 当且仅当 $\rho \geq 0$ (Bølviken, 1982; Karlin and Rinott, 1983)。

现在我们证明

$$f(y_1 \mid \theta)f(y_1' \mid \theta^*) \leq f(y_1 \mid \theta \wedge \theta^*)f(y_1' \mid \theta \vee \theta^*) \tag{A.4}$$ eq.4

对于任意整数 $1 \leq y_1 \leq y_1'$ 和 $\theta,\ \theta^* \in \mathbb{R}^2$。将每一项移到右边，该等式等价于只需证明

$$1 \leq \frac{f(y_1 \wedge y_1^* | \theta \wedge \theta^*)f(y_1 \vee y_1^* | \theta \vee \theta^*)}{f(y_1|\theta)f(y_1^*|\theta^*)}.$$

注意，对于整数 $y_1 \geq 1$，我们有

$$f(y_1|\theta) = f(z_1 = 1, n_1 = y_1 - 1 \mid \theta) = \sigma(\theta_1)\frac{e^{-\exp(\theta_2)}e^{\theta_2(y_1-1)}}{(y_1-1)!}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_1 \wedge y_1^* | \theta \wedge \theta^*)f(y_1 \vee y_1^* | \theta \vee \theta^*)}{f(y_1|\theta)f(y_1^*|\theta^*)} &= \frac{\left(e^{\theta_2} \wedge e^{\theta_2^*}\right)^{y_1 \wedge y_1^* - 1}}{e^{\theta_2(y_1-1)}} \frac{\left(e^{\theta_2} \vee e^{\theta_2^*}\right)^{y_1 \vee y_1^* - 1}}{e^{\theta_2^*(y_1^*-1)}} \\
&= \begin{cases} 1, & \theta_2 \leq \theta_2^*, \quad y_1 \leq y_1^* \\ \left(\frac{e^{\theta_2^*}}{e^{\theta_2}}\right)^{y_1 - y_1^*} \geq 1, & \theta_2 \leq \theta_2^*, \quad y_1 \geq y_1^* \\ \left(\frac{e^{\theta_2}}{e^{\theta_2^*}}\right)^{y_1^* - y_1} \geq 1, & \theta_2 \geq \theta_2^*, \quad y_1 \leq y_1^* \\ 1, & \theta_2 \geq \theta_2^*, \quad y_1 \geq y_1^* \end{cases}
\end{aligned}$$

这就完成了 (A.4) 的证明。

最后，结合 (A.3) 和 (A.4)，我们完成了第 i 部分的证明。

现在我们证明第 ii 部分。根据塔式性质，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_2 \mid y_1\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_2 \mid y_1, \Theta\right] \mid y_1\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_2 \mid \Theta\right] \mid y_1\right]
\end{aligned}$$

其中第二个等式来自 Y_1 与 Y_2 在给定 Θ条件下的条件独立性。因此，由

第i部分以及似然比序蕴含随机序这一事实，只需证明

$$g(\theta) := \mathbb{E}\left[h(Y_2) \mid \Theta = \theta\right]$$

对于所有使期望存在的非递减函数 h， $\theta \in \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 的非递减函数。根据塔式性质，我们有

$$\begin{aligned} g(\theta) &= h(0)\mathbb{P}\left(Y_2 = 0 \mid \theta\right) + \mathbb{E}\left[h(Y_2) \mid \theta, Y_2 \geq 1\right]\mathbb{P}\left(Y_2 \geq 1 \mid \theta\right) \\ &= h(0)\mathbb{P}\left(Y_2 = 0 \mid \theta\right) + \mathbb{E}\left[h(Y_2) \mid \theta, Z_2 = 1\right]\mathbb{P}\left(Y_2 \geq 1 \mid \theta\right) \\ &= h(0)\mathbb{P}\left(Y_2 = 0 \mid \theta\right) + \mathbb{E}\left[h(Y_2) \mid \theta\right]\mathbb{P}\left(Y_2 \geq 1 \mid \theta\right) \\ &= h(0)(1 - \sigma(\theta_1)) + \sigma(\theta_1)\mathbb{E}\left[h(1 + N_2) \mid \theta\right] \\ &= h(0)(1 - \sigma(\theta_1)) + \sigma(\theta_1)\mathbb{E}\left[h(1 + N_2) \mid \theta_2\right]. \end{aligned}$$

其中，第三个等式源于给定 Θ 时 Z_t 与 N_t 的条件独立性。我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} &= \sigma'(\theta_1)\left(\mathbb{E}\left[h(1 + N_2) \mid \theta_2\right] - h(0)\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为 $h(1 + N_2) \geq h(0)$ 几乎必然成立。此外，我们还有

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_2} = \sigma(\theta_1)\frac{\partial}{\partial \theta_2}\mathbb{E}\left[h(1 + N_2) \mid \theta_2\right] \quad \geq 0$$

其中，不等式源于泊松分布的似然比。因此， $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是 $\theta \in \mathbb{R}^2$ 的非递减函数，由此完成第 ii 部分的证明。 □

附录 *A.2.* 定理*1*的证明

证明。 首先，我们注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1 = y_1\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_2 \mid \Theta\right] \mid Y_1 = y_1\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma(\Theta_1)(1 + \exp(\Theta_2)) \mid Y_1 = y_1\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\sigma(\Theta_1)(1 + \exp(\Theta_2))1_{[Y_1 = y_1]}\right]}{\mathbb{P}\left(Y_1 = y_1\right)} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\sigma(\Theta_1)(1 + \exp(\Theta_2))\mathbb{P}\left(Y_1 = y_1 \mid \Theta\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(Y_1 = y_1 \mid \Theta\right)\right]} \end{aligned} \tag{A.5}$$

eq.p1

其中，第一个等式由塔式性质以及在给定 Θ的条件下 Y_1 与 Y_2 之间的条件独立性得到，最后一个等式同样由塔式性质得到。

随机效应的特征函数（Θ_1, Θ_2）为

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= \mathbb{E}\left[e^{i\,(t_1, t_2)\Theta}\right] \\ &= \exp\left(i(\mu_1, \mu_2)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(t_1, t_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

对于 $t=(t_1,t_2)^\top \in \mathbb{R}^2$。由于 $\sigma_1 \to 0^+$，我们有

$$\lim_{\sigma_1\to 0^+} \varphi(t) = \exp\Big(i(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2) - \tfrac{1}{2}\,\sigma_2^2 t_2^2\Big), \qquad t\in\mathbb{R}^2.$$

注意，$\exp\Big(i(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2) - \tfrac{1}{2}\,\sigma_2^2 t_2^2\Big)$ 是 (μ_1,Θ_2^*) 的特征函数，其中 $\Theta_2^* \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$；也就是说，第一个坐标是退化的。因此，根据列维连续性定理，我们有

$$\Theta \xrightarrow{d} \Theta^* \qquad \text{as } \sigma_1 \to 0^+ \tag{A.6}$$ eq.p2

其中 $\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛。结合 (A.5) 和 (A.6)，并应用控制收敛定理，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma_1\to 0^+} \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1=0\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[\sigma(\mu_1)(1+\exp(\Theta_2^*))(1-\sigma(\mu_1))\right]}{1-\sigma(\mu_1)} \\ &= \sigma(\mu_1)\left(1+\exp\left(\mu_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma_1\to 0^+} \mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1=1\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[\sigma(\mu_1)(1+\exp(\Theta_2^*))\sigma(\mu_1)\exp\left(-e^{\Theta_2^*}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\sigma(\mu_1)\exp\left(-e^{\Theta_2^*}\right)\right]} \\ &= \sigma(\mu_1)\frac{\mathbb{E}\left[(1+\exp(\Theta_2^*))\exp\left(-e^{\Theta_2^*}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\exp\left(-e^{\Theta_2^*}\right)\right]}\end{aligned}$$

因此，对于 $W := e^{\Theta_2^*}$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma_1\to 0^+}\left(\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1=0\right]-\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1=1\right]\right) &= \lim_{\sigma_1\to 0^+}\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1=0\right]-\lim_{\sigma_1\to 0^+}\mathbb{E}\left[Y_2 \mid Y_1=1\right] \\ &= \sigma(\mu_1)\left(\mathbb{E}\left[W\right]-\frac{\mathbb{E}\left[We^{-W}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-W}\right]}\right) \\ &= -\sigma(\mu_1)\left(\frac{\mathbb{E}\left[We^{-W}\right]-\mathbb{E}\left[W\right]\mathbb{E}\left[e^{-W}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-W}\right]}\right) \\ &= -\sigma(\mu_1)\left(\frac{\operatorname{cov}\left[W,e^{-W}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-W}\right]}\right) \\ &> 0\end{aligned}$$

其中，该不等式源于以下事实：e^{-W} 是关于 W 的严格递减函数，且 W 是非退化的，因此 $\operatorname{Cov}(X,e^{-X}) < 0$。

□

附录 B. 扩展

app:ext

在第 5 节中，我们研究了具有共单调随机效应的泊松—门槛模型，并证明该模型满足一般可信度序。本节将从两个方向扩展这一框架：首先，

以负二项分布设定替代泊松分量；其次，引入零膨胀对应模型。对于每种扩展形式，我们都推导出其保持一般可信度序性质所需满足的相应条件。

附录 *B.1.* 负二项模型的扩展

以下设定通过将泊松正计数分量替换为负二项分量，对模型 4 进行了修改；随后的结果证明，该模型满足一般可信度序。

mod.6 **模型 5**。 对于给定的外生变量

$$(c_t)_{t\geq 1} \subset \mathbb{R} \quad \textit{and} \quad (d_t)_{t\geq 1} \subset \mathbb{R},$$

负二项 分–障碍混合模型，具有共单调随机效应对于$(Y_t)_{t\geq 1}$ 定义如下 s

$$Y_t := Z_t(1 + N_t), \quad t \geq 1,$$

在以下假设下：

i. 观测分布。 给定 Θ，各 t 对应的配对项 (Z_t, N_t) 相互独立，且 $Z_t \perp N_t \mid \Theta$。其条件分布为

$$Z_t \mid \Theta \sim \mathrm{Ber}\big(\sigma(c_t + \Theta)\big), \qquad N_t \mid \Theta \sim \mathrm{NB}\Big(r, \sigma\big(d_t + \Theta/r\big)\Big). \tag{B.1}$$ eq.d.10

ii. 随机效应分布。假设

$$\Theta \sim \mathrm{N}(0, s^2).$$

其中 $s^2 > 0$ 为常数。

thm.22 **定理 3**。 考虑模型 *5* 的设定。那么，对于任意 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及满足 $y_{1:t} \leq y'_{1:t}$ 的任意历史 $y_{1:t}$，$y'_{1:t} \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$，有

$$\big[\, Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y_{1:t} \big] \leq_{\mathrm{LR}} \big[\, Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y'_{1:t} \big].$$

证明。 按照与定理 2 的证明类似的逻辑，只需证明

$$\gamma(\theta, y_j) := \frac{\mathbb{P}\left(Y_j = y_j + 1 \mid \Theta = \theta\right)}{\mathbb{P}\left(Y_j = y_j \mid \Theta = \theta\right)}$$

是固定 $y_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 时 θ 的非递减函数。

我们首先考察情形 $y_j = 0$。根据模型 5，我们有

$$\mathbb{P}\left(Y_j = 0 \mid \Theta = \theta\right) = 1 - \sigma(c_j + \theta),$$

and

$$\mathbb{P}\left(Y_j = 1 \mid \Theta = \theta\right) = \sigma(c_j + \theta)\left(1 - \sigma(d_j + \theta/r)\right)^r.$$

因此，

$$\gamma(\theta, 0) = \frac{\sigma(c_j + \theta)}{1 - \sigma(c_j + \theta)}\left(1 - \sigma(d_j + \theta/r)\right)^r = \exp(c_j + \theta)\left(1 - \sigma(d_j + \theta/r)\right)^r.$$

由于 $\gamma(\theta,\ 0)\ >0$，$\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma(\theta,\ 0)\ \geq 0$ 等价于

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\gamma(\theta,0)\geq 0.$$

由于我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\gamma(\theta,0)&=\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{(c_j+\theta)+r\log\big(1-\sigma(d_j+\theta/r)\big)\Big\}\\&=1+r\,\frac{\partial}{\partial\theta}\log\big(1-\sigma(d_j+\theta/r)\big)\\&=1-\sigma(d_j+\theta/r),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 $\frac{\partial}{\partial x}\log(1-\sigma(x))\ =-\sigma(x)$ 得出。因此，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\gamma(\theta,0)\geq 0,\qquad \text{for all }\theta\in\mathbb{R},$$

这意味着 $\gamma(\theta,0)$ 关于 θ 是非递减的。

In 对于 $y_j\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的情形，根据负二项分布的递推关系，我们有

$$\gamma(\theta,y_j)=\frac{y_j+r-1}{y_j}\,\sigma(d_j+\theta/r),$$

它是 $\theta\in\mathbb{R}$的增函数。

因此，对所有 $y_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\gamma(\theta,y_j)$ 关于 θ 都是非递减的，从而完成证明。 □

附录 *B.2.* 零膨胀模型的扩展

以下设定通过用零膨胀形式替代障碍结构，对模型 4 进行了修改；在这种形式中，结构性零值与标准计数组分混合。随后的结果表明，该模型满足一般可信度序。

mod.7 **模型 6.** 对于给定的外生变量

$$(c_t)_{t\geq 1}\subset\mathbb{R}\quad \textit{and}\quad (d_t)_{t\geq 1}\subset\mathbb{R},$$

该 具有共单调随机效应的泊松–零膨胀混合模型对于 $(Y_t)^{t\geq 1}$ 定义如下

$$Y_t:=Z_tN_t,\quad t\geq 1,$$

在以下假设下：

i. 观测分布。 在给定 Θ 的条件下，配对 (Z_t, N_t) 在 t 上相互独立，且 $Z_t\perp N_t\mid\Theta$。它们的条件分布为

$$Z_t\mid\Theta\ \sim\ \mathrm{Ber}\big(\sigma\left(c_t+\Theta\right)\big),\qquad N_t\mid\Theta\ \sim\ \mathrm{Poisson}\big(\lambda(d_t+\Theta)\big),\tag{B.2}$$ eq.d.11

其中 $\lambda:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ 是一个非递减的可微函数。

ii. 随机效应分布。 设 Θ 是一个分布为 $\mathcal{L}(\Theta)$ 且支撑集位于 $\mathcal{R}(\Theta)\ \subseteq\mathbb{R}$上的实值随机变量。

thm.201

定理 4。 考虑模型 *6* 的情形。假设对 Θ 支撑集上的所有 θ ，均满足(18)中的假设。那么，对任意 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意满足 $y_{1:t} \leq y'_{1:t}$ 的历史 $y_{1:t}, y'_{1:t} \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0}$ ，我们有

$$\left[Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y_{1:t}\right] \leq_{\mathrm{LR}} \left[Y_{t+1} \mid Y_{1:t} = y'_{1:t}\right].$$

证明。 按照定理 2 证明中的类似推理，只需证明 th at

$$\gamma(\theta, y) := \frac{\mathbb{P}\left(Y_j = y+1 \mid \theta\right)}{\mathbb{P}\left(Y_j = y \mid \theta\right)}$$

对于固定的 $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，它是 $\theta \in \mathcal{R}(\Theta)$ 的非递减函数。

对于 $y \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们有

$$\gamma(\theta, y) = \frac{\lambda(d_j + \theta)}{y+1}$$

这显然是 $\theta \in \mathcal{R}(\Theta)$ 的非递减函数。

接下来只需证明 $y = 0$ 的情形。当 $y = 0$ 时，我们有

$$1/\gamma(\theta, y) = \frac{\mathbb{P}\left(Z_j = 0 \mid \theta\right)}{\mathbb{P}\left(Z_j = 1 \mid \theta\right)\mathbb{P}\left(N_j = 1 \mid \theta\right)} + \frac{\mathbb{P}\left(N_j = 0 \mid \theta\right)}{\mathbb{P}\left(N_j = 1 \mid \theta\right)} \tag{B.3}$$

eq.p12

由于 (B.3) 中的第二项是 θ 的非增函数，因此只需证明 (B.3) 中的第一项是 θ 的非增函数。(B.3) 中的第一项可写为

$$\frac{\mathbb{P}\left(Z_j = 0 \mid \theta\right)}{\mathbb{P}\left(Z_j = 1 \mid \theta\right)\mathbb{P}\left(N_j = 1 \mid \theta\right)} = \left(\frac{\mathbb{P}\left(Z_j = 0 \mid \theta\right)}{\mathbb{P}\left(Z_j = 1 \mid \theta\right)\mathbb{P}\left(N_j = 0 \mid \theta\right)}\right)\frac{1}{\lambda(d_t + \theta)}. \tag{B.4}$$

eq.p13

根据假设 (18) 和引理 4，(B.4) 中的第一个乘法项

$$\frac{\mathbb{P}\left(Z_j = 0 \mid \theta\right)}{\mathbb{P}\left(Z_j = 1 \mid \theta\right)\mathbb{P}\left(N_j = 0 \mid \theta\right)}$$

是 θ 的非增函数。由于 (B.4) 中的第二个乘法项也是 θ 的非增函数，因此我们得出 (B.4) 也是 θ 的非增函数，进而意味着 (B.3) 也是 θ 的非增函数。

□

附录 C. 补充示例

pp:Example

附录 *C.1.* 引理*2*的反例

当随机效应之间存在负相关时，也会违反基本可信度序。表 C.8 报告了通过改变 ρ 并固定 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$、$\mu_1 = 0$ 和 $\mu_2 = -2$ 得到的蒙特卡洛估计（$S = 300{,}000$）。当 ρ 变为负值时，会观察到后验期望的反转，这为引理 2 提供了一个反例。

附录 *C.2.* 注释 *1* 的示例

如注 1 中简要提及的，在零膨胀模型模型 6 中，可信度序也会因随机效应方差的大小而遭到违反。下面的示例展示

表 C.8： $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$ 与 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$ 随 ρ 减小的比较

模拟

ρ	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 2]$
-0.8	0.6277 (0.0013)	0.5711 (0.0011)
-0.5	0.6311 (0.0014)	0.6104 (0.0014)
0	0.6399 (0.0015)	0.6874 (0.0021)
0.5	0.6447 (0.0019)	0.7566 (0.0020)
0.8	0.6493 (0.0023)	0.7930 (0.0025)

注：括号中报告的是蒙特卡洛标准误。

了零膨胀模型的模拟结果，其中随机效应 Θ_1 和 Θ_2 假设服从二元正态分布，与模型2中的设定相同。表 C.9 报告了在固定 $\mu_1 = \mu_2 = 0$、 $\sigma_2^2 = 1$和 $\rho = 0.5$的同时改变 σ_1^2 时得到的 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$ 和$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$ 的蒙特卡洛估计。随着 σ_1^2 减小，两个条件期望之间的次序会反转，即 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1] \leq \mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$。表 C.10 展示了在固定 $\mu_1 = \mu_2 = 0$、 $\sigma_1^2 = 1$和$\rho = 0.5$的同时改变 σ_2^2 时得到的蒙特卡洛估计。随着 σ_2^2 增大，再次观察到对基本可信度序的违反。

表 C.9： 随着 σ_1^2 减小， $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$ 与 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$ 的比较

模拟

σ_1^2	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$
2.00	0.5426 (0.0077)	0.8240 (0.0067)
1.00	0.5988 (0.0081)	0.7503 (0.0056)
0.10	0.6846 (0.0094)	0.6032 (0.0041)
0.01	0.6849 (0.0097)	0.5675 (0.0033)

注：括号内报告的是蒙特卡洛标准误。

表 C.10： 随着 σ_2^2 增加，比较 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$ 和 $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$

模拟

σ_2^2	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 0]$	$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1]$
0.1	0.4742 (0.0027)	0.6740 (0.0030)
1.0	0.5988 (0.0081)	0.7503 (0.0056)
2.0	0.8857 (0.0282)	0.7278 (0.0053)
3.0	1.2649 (0.0489)	0.6958 (0.0052)

注：括号内报告蒙特卡洛标准误。