arXiv:2602.02404v1 [math.RT] 2 Feb 2026

异质与增强模中的层、Jordan 类与诱导轨道

FILIPPO AMBROSIO、GIOVANNA CARNOVALE、FRANCESCO ESPOSITO、NEIL SAUNDERS 与 LEWIS TOPLEY

Abstract. Kato 基于其奇异幂零锥，利用 C 型多参数仿射黑克代数的一个几何模型，建立了奇异德利涅–朗兰兹对应。Achar–Henderson 与 Springer 表明，这一奇异幂零锥与另一个看似更为简单的簇——增强幂零锥——密切相关。二者分别被定义为一个极模的希尔伯特零锥，即奇异 Sp_{2n}-模与增强 GL_n-模。

本文通过引入若尔当分层，对这两个模的几何作了细致研究，同时推广了关于伴随表示以及与 $(\mathfrak{gl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ 相关联的对称空间的经典结果。我们发展的关键工具之一，是遵循 Lusztig–Spaltenstein 的工作，在增强与奇异幂零锥中建立诱导轨道理论。我们的主要应用是受 Borho 的一个定理启发，对这些模中的层进行分类。

1. Introduction

1.1.奇异与增强模。在整个引言中，我们固定一个代数闭域$\mathbb{k}$。

固定 $n > 0$ 和 $G := \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$。在 [24]，Kato 将 ℓ-奇异模（针对 $\mathbf{k} = \mathbb{C}$）定义为G-模 $(\mathbb{k}^{2n})^{\oplus \ell} \oplus (\bigwedge^2 \mathbf{k}^{2n})$，其中 $\mathbf{k}^{2n}$ 是 G的向量表示。随后，他将ℓ-奇异幂零锥定义为 ℓ-奇异模的希尔伯特零锥。Kato 的目的是为 2-奇异幂零锥定义斯坦贝格簇的一个类比，并以此获得 $\mathbf{C}_n^{(1)}$型三参数黑克代数的几何实现，从而推广卢斯蒂格和 Chriss–Ginzburg 的工作（参考 [24]和 [17, 第 7] 章）。Kato 在[24, 定理 1.2] 中证明，1-奇异幂零锥具有许多良好的几何性质，让人联想到伴随表示的幂零锥。不久之后，在 [25]，Kato 证明伴随零锥 $\mathcal{N}(\mathrm{Lie}(G))$ 实际上可视为特征 $p = 2$下奇异1-幂零锥的平坦形变。本文将 1-奇异模记为 $\mathbb{V}$，并称之为奇异模。其希尔伯特零锥记为 $\mathcal{N}(\mathbb{V})$。

现在令 $\mathbf{G} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$。在 [1] Achar–Henderson 将 增强模 定义为 $\mathbf{G}$-模 $\mathbf{V} := \mathbb{k}^n \oplus \mathfrak{gl}_n$，并对其希尔伯特零锥进行了全面研究，他们将其命名为增强幂零锥。他们利用半小分辨率研究了增强幂零锥中轨道闭包的几何性质。他们的主要结果之一是通过 Shoji 的双分拆 Kostka 多项式描述轨道闭包的交叉上同调。他们以及 Springer 分别在 [1, §6] 和 [37, §4] 中观察到，对于 $\mathrm{char}(\mathbb{k}) \neq 2$，增强

幂零锥 $\mathcal{N}(\mathbf{V})$　　包含到奇异幂零锥中，从而诱导出轨道空间之间的双射

$$\mathcal{N}(\mathbf{V})/\mathbf{G} \xrightarrow{1\text{-}1} \mathcal{N}(\mathbb{V})/G \tag{1.1}$$

Achar–Henderson 证明了 $\mathbf{G}$-轨道在 $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 可由双分拆参数化，并利用双射（1.1）描述 G-轨道在 $\mathcal{N}(\mathbb{V})$ 中的支配序。文献 $\mathcal{N}(\mathbb{V})$ 以标记分拆为参数，给出了其中轨道的参数化，见 [24, 定理 8。3]。本文的核心主题之一，是比较 $\mathbf{V}$与 $\mathbb{V}$ 的几何，并将（1.1）推广。

在 [37] Springer 研究了（$\mathbf{V}$，$\mathbf{G}$）和（$\mathbb{V}$，G）的不变量理论，描述了 $\Bbbk[\mathbf{V}]^{\mathbf{G}}$ 和 $\Bbbk[\mathbb{V}]^{G}$ 的基本齐次生成元，所采用的 char($\Bbbk$) 条件与 [1]相同。他独立证明了（1.1），并通过证明该双射会使轨道维数加倍，扩展了这一结果。异质与增强幂零锥所引出的几何、组合学和表示论，与 Sp_{2n}的伴随表示理论极为相似；然而，在许多方面，增强与异质情形下的理论更为优雅，其几何与 GL_n的伴随表示几何有相似之处。

1.2. 伴随表示中的层、Jordan 类与诱导轨道。 暂且假设 G =GL_n 或 G 是一个非 A 型的连通、单连通的单代数群，且 char($\Bbbk$) 对 G而言是好特征。其李代数记作 $\mathfrak{g}$ =Lie(G)。本节所述理论由 Borho [11]在 $\mathbb{C}$上开创，后来由 Spaltenstein [35, 36] 在正特征域上加以研究，并由 Premet–Stewart [34]（在我们的假设下）进一步发展。

伴随表示的层是秩簇的不可约分支

$$\mathfrak{g}_{(k)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim Gx = k\} \quad \text{for } k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

它们是 $\mathfrak{g}$ 的局部闭子集，且数量有限。这些层的分类是 [11] 的主要结果，其方法是通过 Jordan 类（亦称分解类）进行的。

令 $x = x_s + x_n$ 表示 $x \in \mathfrak{g}$ 的 Jordan 分解。若存在一个元素 $g \in G$ 使得 $gx_n = y_n$ 且 $g\mathfrak{g}^{y_s} = \mathfrak{g}^{x_s}$，其中$\mathfrak{g}^z$ 表示 $z \in \mathfrak{g}$ 的中心化子，则称两个元素 x、$y \in \mathfrak{g}$ Jordan 等价。Jordan 类是 $\mathfrak{g}$ 中关于此关系的等价类。

容易看出，Jordan 类由 G-轨道的配对 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$ 分类，其中 $\mathfrak{l}$ 是 Levi 子代数，而 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{N}(\mathfrak{l})$ 是一个幂零轨道。若 $x = x_s + x_n$，则 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$ =$(\mathfrak{g}^{x_s}, G^{x_s}x_n)$ 是这样一个配对，而 x 的 Jordan 类为

$$G(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}} + \mathcal{O}) = G(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}} + x_n), \tag{1.3}$$

其中 $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}}$ 表示中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ 中满足 $\mathfrak{g}^z = \mathfrak{l}$的元素 z，或者等价地，表示在 $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ 上达到最大 G-轨道维数的元素。

在我们的假设 [22, §2.5&§2.6] 下，幂零轨道只有有限多个；又由于 Levisubalgebras 的 G-共轭类由 G 的 Dynkin 图的子图分类，因此 Jordan 类也只有有限多个。

Jordan 类中的 G-轨道维数恒定，因此每个层都是若干 Jordan 类的并集。所以每个层都包含一个稠密类。要对这些层进行分类，就必须说明一对 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$ 何时对应于一个在某层中稠密的类。进而，要描述这一类特殊的类，就必须运用诱导轨道理论；该理论最早由卢斯蒂格–Spaltenstein 提出 [28]。

设 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$ 为如上所述的一对，并令 $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$。若我们选取一个具有无穷小 Levi 分解 $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{l} \ltimes \mathfrak{u}_P$ 的抛物子群 $P \subseteq G$，则可在部分旗簇上构造相伴纤维丛，并带有由 G-作用诱导的到 $\mathfrak{g}$ 的塌缩映射

$$\begin{array}{ccc} G \times^P (z + \mathcal{O} + \mathfrak{u}_P) & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \downarrow & & \\ G/P & & \end{array} \tag{1.4}$$

水平箭头是真且有限的（因而为闭），其像包含唯一的稠密轨道，称为诱导轨道，记为 $\mathrm{Ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{l},z}(\mathcal{O})$。正如记号所示，它不依赖于 P 的选取。若一个幂零轨道不能由真 Levi 子代数中的某个轨道诱导而来，则称其为刚性的。结果表明，与 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$ 相伴的 Jordan 类在某个层中稠密，当且仅当 $\mathcal{O}$ 在 $\mathfrak{l}$ 中是刚性的，见 [11, Satz 4.3] 与 [34, 定理 2.8]。因此，$\mathfrak{g}$ 的层由形如 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$ 的对分类，其中 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{l}$ 为刚性幂零轨道。

1.3. 主要结果。 沿用第 G、$\mathbf{G}$ $\mathbb{V}$、$\mathbf{V}$ 节中的记号。本文旨在将第1.2 节所述的理论推广到增强模和奇异模。本文其余部分中，令$\Bbbk$ 为特征为 ≥ 0 的代数闭域。每当我们处理 $(\mathbb{V}, G)$ 时，均假设 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。

轨道空间 $\mathbf{V}/\mathbf{G}$ 和 $\mathbb{V}/G$ 都带有偏序集结构（即“优势序”），该结构由轨道闭包的包含映射决定。我们的第一个定理涉及 $\mathbf{V}$和 $\mathbb{V}$的商模，见定理 2.7 和定理2.9。第一部分推广了（1.1），而第二部分推广了 Kostant 关于伴随商映射的定理（见 [22]中的命题 7.13 和 8.5）。

定理 A。 *(1)* 包含映射 $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{V}$ 诱导出一个偏序集同构，使轨道的维数加倍

$$\mathbf{V}/\mathbf{G} \to \mathbb{V}/G.$$

(2) 商映射

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V}//\mathbf{G}, \\ \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}//G, \end{aligned}$$

是忠实平坦的。纤维是不可约的正规完全交，每个都由有限多个轨道组成。

在 [20] Gatti–Viniberghi 提出了 Jordan 分解的一种恰当推广，这一推广适用于代数群上的任意模。其在特征 0 下的存在性已在 [23, 附录], 中证明，而利用 [5]可将证明改编至正特征情形。

我们称之为 Jordan–Kac–Vinberg 分解。奠基性著作 [24, 37] 在$\mathbf{V}$ 和 $\mathbb{V}$中提出了半单元与幂零元的恰当概念，我们将在第2.3节回顾这些概念。在第2.4 节，我们将说明这由此为增强模和奇异模导出了 Jordan–Kac–Vinberg 分解。尽管这种分解并非唯一（备注 2.6），但它是典范的，因为它是唯一与自然的 $\mathbf{G}$-模包含映射 $\mathfrak{gl}_n \hookrightarrow \mathbf{V}$以及自然的 G-模包含映射 $\mathbb{V} \hookrightarrow \Bbbk^{2n} \oplus \mathfrak{gl}_{2n}$相容的分解。

在第3 节中，我们引入增强与奇异 Jordan 类。若 $(v,x) \in \mathbf{V} \cong \Bbbk^n \oplus \mathfrak{gl}_n$，且 $x = x_s + x_n$ 是 Jordan 分解，则 (v,x) 的增强 *Jordan* 类 为

$$\mathfrak{J}(v,x) := \mathbf{G}(v, (\mathbf{V}^{\mathbf{G}^{x_s}})^{\mathrm{reg}} + x_n), \tag{1.5}$$

其中，$(\mathbf{V}^{\mathbf{G}^{x_s}})^{\mathrm{reg}}$ 表示不动点集$\mathbf{V}^{\mathbf{G}^{x_s}}$ 中具有最大维数$\mathbf{G}$-轨道的元素集合。类似地，若 $(v,x) \in \mathbb{V} \cong \Bbbk^{2n} \oplus \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$，则我们可以利用 $\bigwedge^2 \Bbbk^{2n} \subseteq \mathfrak{gl}_{2n}$分解 $x = x_s + x_n$，并将 (v,x) 的奇异 *Jordan* 类 定义为

$$J(v,x) := G(v, (\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{\mathrm{reg}} + x_n). \tag{1.6}$$

同样，子集 $(\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{\mathrm{reg}}$ 不动点子集 $\mathbb{V}^{G^{x_s}}$ 中 $\mathbb{V}$ 由具有G-轨道最大维数的元素构成。请读者比较 (1.3) 与 (1.5) 和 (1.6)。

在命题 3.2 中，我们记录 Jordan 类的组合分类，并在第 3.1 节对增强与奇异 Jordan 类进行局部研究。根据定理 5.1(1)&(2)，Jordan 类的闭包是若干 Jordan 类的并，因此可以在 Jordan 类集合上赋予优势序。我们将关于类的几何与组合学结果总结如下。

定理 *B. (1)* 增强 *Jordan* 类由一对 (L, O) 的 G-轨道分类，其中 $L = G^{x_s} \subseteq G$ 是 V 中某个半单元的稳定子，而 $O \subseteq \mathcal{N}(V_L)$ 是增强 L-模中的一个轨道。奇异 *Jordan* 类也有相同的结论。*(2)* $\mathbb{V}$和 V 中的类均由一对 $(\lambda, \mathcal{O}_\mu)$ 分类，其中 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 是 n 的一个分拆，其中 $i \in \mathbb{N}$ 的重数为 $d_i(\lambda)$；$\mathcal{O}_\mu$ 是对称群 $\mathbb{S}_{d_i(\lambda)}$ 的直积在由序列 $(\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(m)})$ 组成的集合上的自然作用下的一个轨道，其中 $\mu^{(i)}$ 是 λ_i 的一个双分拆。特别地，类的数量有限。*(3)* V 和 $\mathbb{V}$ 中的 *Jordan* 类是局部闭且光滑的，其维数可利用 *(3.7)* 和 *(3.8)* 计算。*(4)* 包含映射 $V \subseteq \mathbb{V}$ 诱导出一个偏序集同构，将 V 中的 *Jordan* 类对应到 $\mathbb{V}$ 中的 *Jordan* 类。

在第4 节中，我们按照 (1.4)（参见 (4.1)）所述的形式体系，引入增强情形下诱导轨道的概念。接着，我们证明在$\mathbf{V}$ 中的轨道归纳满足经典 Lusztig–Spaltenstein 诱导的所有理想性质。

与增强情形不同，我们在奇异情形中使用 Jordan 类来定义轨道归纳。Borho [11] 的一个结果 $\mathfrak{g}$ 表明，在伴随表示中，诱导的幂零轨道可刻画为一个唯一的轨道：它在由诱导数据参数化的 Jordan 类与幂零锥的交集中稠密（另见 [34, §2.5]）。

我们利用这一刻画来定义奇异与增强幂零轨道的归纳；只有在对由半单自同态和向量构成的元素的增强轨道进行归纳时，才使用形式体系（1.4）。后者足以描述增强类的闭包，而根据定理 B(4)，奇异情形也自然包含在内。

以下概述我们关于诱导轨道的结果。具体陈述见第4 节和第5节。

定理 C。设 $x_s \in \mathbf{V}$ 或 $x_s \in \mathbb{V}$ 为半单元素。令$\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{x_s}}$ 和 $\mathbb{V}_{G^{x_s}}$ 分别表示稳定子的增强模和诱导模。在第4&5节中，我们定义了轨道归纳

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{x_s}}}^{\mathbf{V}} &: \mathcal{N}(\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{x_s}})/\mathbf{G}^{x_s} \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{V})/\mathbf{G}, \\ \mathrm{Ind}_{\mathbb{V}_{G^{x_s}}}^{\mathbb{V}} &: \mathcal{N}(\mathbb{V}_{G^{x_s}})/G^{x_s} \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbb{V})/G. \end{aligned}$$

(1) 诱导具有传递性。*(2)* 诱导保持轨道在环境模中的余维。*(3)* $\mathcal{N}(V)$ 的刚性轨道是那些不能从形如 $\mathcal{N}(V_{G^{x_s}})$ 的真子模诱导而来的轨道；对 $\mathbb{V}$ 也类似。若 (υ, x) 属于 $\mathcal{N}(V)$ 或 $\mathcal{N}(\mathbb{V})$，则 (υ, x) 的轨道是刚性轨道，当且仅当 $x = 0$。*(4)* G^{x_s} 是 G 的 *Levi* 子群，且 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}} V_{\mathbf{G}^{x_s}}$ 与任何包含 G^{x_s} 作为 *Levi* 因子的抛物子群的选取无关。*(5)* 任意 *Jordan* 类的闭包和正则闭包均可用诱导轨道来描述，见命题 *4.10*。

正如我们在第 1.2 节所提到的，Jordan 类理论在伴随表示中的重要应用之一，就是层的分类。对于 $k \in \mathbb{N}$ 秩簇 $\mathbf{V}^{(k)}$和 $\mathbb{V}_{(k)}$，其定义与（1.2）完全相同。增强模和奇异模的层被定义为各自秩簇的不可约分支。在备注 5.3 中，我们结合关于 Jordan 类和诱导的结果，遵循 Borho [11]的方法，对这些层进行分类。

令 $\mathfrak{J}(L,\ \mathbf{O}) \subseteq \mathbf{V}$ 表示定理 B(1) 中与该对 $(L,\ \mathbf{O})$ 的 G轨道相关联的增强 Jordan 类，并令 $\mathbf{V}_L$ 表示增强 L-模。类似地，记 $J(G^{x_s},\ \mathbb{O}) \subseteq \mathbb{V}$为与该对 $(G^{x_s},\ \mathbb{O})$ 的 G-轨道相关联的奇异 Jordan 类，并记 $\mathbb{V}_{G_s^x}$ 为奇异G^{x_s}-模。

定理 D。 层$\mathbf{V}$ 恰好是以下集合

$$\{\overline{\mathfrak{J}}^{\mathrm{reg}} \mid \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(L, \mathbf{O}),\ L \subseteq \mathbf{G}\ \textit{Levi},\ \mathbf{O} \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{V}_L)\ \textit{rigid}\}. \tag{1.7}$$

$\mathbb{V}$ 的层恰好是这些集合

$$\{\overline{J}^{\mathrm{reg}} \mid J = J(G^{x_s}, \mathbb{O}),\ x_s \in \mathbb{V}\ \textit{semisimple}, \mathbb{O} \subseteq \mathcal{N}(\mathbb{V}_{G^{x_s}})\ \textit{rigid}\}. \tag{1.8}$$

包含映射 $\mathbf{V} \to \mathbb{V}$ 在集合 (1.7) 与 (1.8)之间诱导出一个双射。在定理 *B(3)* 的参数化下，这两个集合都与如下的对 (λ, μ) 构成双射：对每个 $i = 1, \ldots,\ m$我们或者有 $\mu_i = (1^{\lambda_i};\ \emptyset)$，或者有 $\mu_i = (\emptyset;\ 1^{\lambda_i})$。

1.4. 相关工作综述。在 [40]Travkin 发展了 Robinson–Schensted–Knuth 对应，旨在研究 $\mathrm{GL}_n \times \mathbb{C}^n$上的拟抛物特征层。第一步中，他对双射 (1.1) 给出了概念性的解释；该双射是他独立得到的。 $\mathcal{N}$(V) 中轨道的有限性此前已由 Gan–Ginzburg [19, 推论 2.2], 观察到，并且这是 Berstein 在 [8, §4.1]中的一个结果的推论。Springer 研究了增强模和奇异模中元素的稳定子 [37]；Sun 研究了增强幂零锥中的稳定子 [39],，Kato 则研究了奇异幂零锥中的稳定子 [24]。Bellamy 和 Boos 以箭图表示的术语给出了增强幂零锥中幂零轨道的另一种参数化，见 [7, §4], ，其目的是处理增强循环幂零锥，以及相关带框循环箭图的表示空间上的可容许 $\mathcal{D}$-模。在 [1]Achar–Henderson 提出，增强 Springer 纤维可以由仿射空间铺成。这一性质为计算纤维的交叉上同调提供了一种基本方法（见 [22, §11]）。后来 Mautner 证实了这一预期 [29]。在后续工作中，Achar–Henderson–Jones 猜想增强轨道闭包是正规的，并在诸多情形下证明了这一点 [2]。

Bulois [15]将层理论推广到了对称对的情形。我们的结果推广了 Bulois 关于对称对 ($\mathfrak{gl}_{2n}$， $\mathfrak{sp}_{2n}$) 的研究。后来，Bulois– Hivert 通过定义对称空间中诱导幂零轨道的一种版本，扩展了这项研究 [16] ；他们采用的技术称为切片诱导。

最后，我们指出近期的预印本 [3, 4], ： Antor 在其中研究了类型 F_4 和 G_2中的奇异幂零锥、相关的 Springer 对应及其与带不等参数的仿射 Hecke 代数之间的关系。值得探究的是，本文开展的同一研究计划能否推广到其他极化表示或异质表示。

Contents

1. 引言 1
1.1. 奇异模与增强模 1
1.2. 伴随表示中的层、Jordan 类与诱导轨道 2
1.3. 主要结果 3
1.4. 相关工作的综述 6
2. 预备知识 7
2.1. 符号与约定 7
2.2. Achar–Henderson 与 Kato 的增强模和奇异模 7
2.3. 奇异模与增强模中的幂零元素和半单元素 9
2.4. Jordan–Kac–Vinberg 分解 11
2.5. 奇异模与增强模的范畴商 15
3. 增强与奇异 Jordan 类 17
3.1. 增强 Jordan 类的局部研究 19
3.2. 奇异 Jordan 类的几何 22
4. 轨道诱导与类的闭包：增强情形 24
4.1. 中心轨道的诱导与中心增强 Jordan 类的闭包 24

4.2. (v, x_s) 的增强类的闭包 264.3. 从向量诱导的组合学 284.4. 一般增强 Jordan 类的闭包 314.5. 诱导的组合学：一般情形 345. 轨道诱导与类的闭包：奇异情形 35致谢 37参考文献 38

2. Preliminaries

2.1. 记号与约定。 对于作用于簇 X上的代数群 H，以及 $Y \subset X$，我们用 $Y^{H\text{-正则}}$ 表示 Y的正则轨迹，即由那些H-轨道维数最大的点组成的开稠密子集。当作用群可由上下文明确时，我们简记为 Y^{reg}。注意，子集 Y 中的 H-正则元素这一概念，并不要求子集 Y是 H-稳定的。此外，我们用 $N_H(Y)$表示 H 中 Y的稳定子，并用 H^Y表示 H中 Y的逐点稳定子。若 $Y = \{y\}$ 是单点，我们记作 H^y。

对于约化群 H作用于其上的仿射簇 X，定义 $X//H := \mathrm{Spec}(\Bbbk[X]^H)$。存在一个自然投影$\pi_{X,\,H}\colon X \to X//H$。若子集 $Y \subset X$ 满足$Y = \pi_{X,\,H}^{-1}\pi_{X,\,H}(Y)$，则称其为$\pi_{X,\,H}$-饱和的 。饱和集自动是 H-稳定的，但反之一般不成立。

设 H 是作用于簇 X 的代数群，$M \le H$ 是闭子群，$Y \subset X$ 是一个 M-稳定子簇。则 M 通过 $m(h,y) = (hm^{-1}, m.y)$ 对 $H \times Y$ 自由作用，其中 $m \in M$、$h \in H$ 和 $y \in Y$。该作用的商模记为 $H \times^M Y$，它是与主纤维丛 $H \to H/M$ 以及 M 在 Y 上的作用相关联的纤维丛。其元素记为 $h * y$，其中 $h \in H$ 且 $y \in Y$。群 H 通过左乘作用于 $H \times^M Y$。赋值 $Z \mapsto H \times^M Z$ 确定了 M-稳定仿射开子集与 H-稳定开子集 $H \times^M Y$、[5]之间的双射。我们有 $\mathbf{k}[H \times^M Y]^H = \mathbf{k}[Y]^M$，因此 $(H \times^M Y)//H \simeq Y//M$。我们指出，若 H 连通约化且 Y 光滑，由于投影 $H \to H/M$ 是光滑态射，且纤维丛 $H \times^M Y \to H/M$ 的纤维同构于 Y，因此纤维丛 $H \times^M Y$ 光滑。

对于正整数 n，n 的一个分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots\ldots, \mu_l)$ 是由一列非递增正整数组成的序列 $\mu_1 \ge \cdots \ge \mu_l$，其和为 n。我们用 $\ell(\mu) = l$ 表示该分拆的长度。n 上的一个双分拆是一个分拆对 $(\mu;\nu)$，满足 $|\mu| + |\nu| = n$。我们用 $(\mu \cup \mu; \nu \cup \nu)$ 表示将 μ 和 ν 中所有项加倍后得到的 $2n$ 的双分拆，并用 $\mathcal{Q}_n$ 表示 n 的双分拆集合。

2.2. Achar–Henderson 与 Kato 的增强模和奇异模。 固定 $n > 0$，并令 $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$，其李代数为 $\mathfrak{gl}_n$。本文中，我们令 $e_1, \ldots, e_n$为自然表示 $V = \Bbbk^n$的标准基，并令 $e_1^*, \ldots, e_n^*$为 V^*的对偶基。我们考虑带有辛结构的余切向量空间 $T^*V = V \oplus V^*$，并通过将基排列为 $\{e_1, \ldots, e_n, e_1^*, \ldots, e_n^*\}$来识别 $T^*V \simeq \Bbbk^{2n}$。

令 $G := \mathrm{Sp}_{2n}$ 为相应的辛群，其李代数为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$。映射$\mathbf{G} \hookrightarrow \mathrm{End}(T^*V)$通过 $A \mapsto \mathrm{diag}(A, {}^tA^{-1})$ 将 GL_n 识别为 Sp_{2n} 的子群。记$\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$（$T \subset G$则类似）为对角矩阵构成的极大环面。在嵌入$\mathbf{G} \subset G$ 下，我们选取的极大环面$\mathbf{T}$与 T 相互对应。

在 [1] Achar–Henderson 引入了增强$\mathbf{G}$-模，定义为

$$\mathbf{V} := \mathbf{V}_n = V \oplus (V \otimes V^*) \simeq \Bbbk^n \oplus \mathfrak{gl}_n.$$

Kato 的奇异模 [24] 对 G 定义为

$$\mathbb{V} := T^*V \oplus \bigwedge\nolimits^2 T^*V \simeq \Bbbk^{2n} \oplus \bigwedge\nolimits^2 \Bbbk^{2n}. \tag{2.1}$$

G中有一个一维（平凡）子模，即 $\bigwedge^2 T^*V$，也就是 $\Bbbk\omega = \Bbbk \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_i$。商模 $\mathbb{V}/\Bbbk\omega$ 已由 Kato [24]进行了广泛研究。当$\Bbbk$ 为复数域时，$\mathbb{V}$是极表示的一个著名例子（见 [18]）。

提醒读者，当我们处理 $(G, \mathbb{V})$ 时，$\Bbbk$ 的特征不为 2。作为一个G-模，伴随表示 $\mathfrak{gl}_{2n}$ 分解为 $\mathfrak{gl}_{2n} = \mathfrak{sp}_{2n} \oplus \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$。按照 [37]，我们将子空间 $\bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$ 与相对于辛结构自伴的$\Bbbk^{2n} = T^*V$的自同态集合等同起来。具体而言，我们将 $\bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$ 视为 $\mathfrak{gl}_{2n}$ 中具有以下形式的矩阵空间

$$\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & {}^tA \end{smallmatrix}\right), \qquad A, B, C \in \mathfrak{gl}_n, \qquad {}^tB = -B,\ {}^tC = -C. \tag{2.2}$$

将 T^*V 与 GL_{2n} 的自然模相对应，由此诱导出包含映射 $\mathbb{V} \hookrightarrow \Bbbk^{2n} \oplus \mathfrak{gl}_{2n} = \mathbf{V}_{2n}$，且该映射是 G-等变的。因此，我们可以（并且将会）把$\mathbb{V}$ 中的元素视为有序对 (v, x)，其中 $v \in \Bbbk^{2n}$ 且 $x \in \mathfrak{gl}_{2n}$。

类似地，通过由 $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA \end{smallmatrix}\right)$给出的自然包含映射$V \hookrightarrow T^*V$和 $\mathfrak{gl}_n \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{2n}$，我们有一个从 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbb{V}$ 的$\mathbf{G}$-等变嵌入。

总之，我们有一系列自然包含映射

$$\mathbf{V}_n \overset{\mathrm{GL}_n}{\hookrightarrow} \mathbb{V} \overset{\mathrm{Sp}_{2n}}{\hookrightarrow} \mathbf{V}_{2n} \hookrightarrow \cdots \tag{2.3}$$

stem分别来自以下 G和 GL_{2n}-等变态射

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ & G \times^{\mathbf{G}} \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{V} \\ & g * (v, x) \longmapsto g(v, x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \psi\colon\ & \mathrm{GL}_{2n} \times^{G} \mathbb{V} \longrightarrow \mathbf{V}_{2n} \\ & g * (v, x) \longmapsto g(v, x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

在不会引起歧义时，我们将使用包含映射（2.3）；而需要强调区别时，则使用态射（2.4）。在这种情况下，为简化记号，我们通常分别写作 $\varphi(v, x)$ 和 $\psi(v, x)$，而不写作 $\varphi(1 * (v, x))$ 和 $\psi(1 * (v, x))$。

对于任意的 n 的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$，我们用 $\mathbf{G}_\lambda$ 或 GL_λ 表示乘积 $\mathrm{GL}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\lambda_l}$。我们也用 G_λ 或 $\mathrm{Sp}_{2\lambda}$ 表示乘积 $\mathrm{Sp}_{2\lambda_1} \times \cdots \times \mathrm{Sp}_{2\lambda_l}$。类似地，我们用 $\mathbf{V}_\lambda$ 表示与 $\mathbf{G}_\lambda$ 相关联的增强模，并用 $\mathbb{V}_\lambda$ 表示与 G_λ 相关联的奇异模。

2.3. 异质与增强模中的幂零元和半单元。为了在增强模和奇异模中引入 Jordan 分解，我们回顾一下：若 x 属于定义在 $\Bbbk$ 上的线性代数群 H 的李代数 $\mathfrak{h}$，则当存在某个环面 $S \subset H$ 使得 $x \in \mathrm{Lie}(S)$ 时，称其为半单元；当存在某个闭幂幺子群 $U \subset G$ 使得 $x \in \mathrm{Lie}(U)$ 时，称其为幂零元，参见 [9, Remark 4.9、命题 11.8 和 14.26]。$\mathfrak{h}$ 中的任意元素均可唯一地作若尔当-谢瓦莱分解，写作 $x = x_s + x_n$，其中 x_s 为半单元，x_n 为幂零元，且$[x_s, x_n] = 0$；读者可参阅 [9, §4.4 Theorem 2]。

设 H 是一个代数群，W 是一个有限维 H-模。沿用 [20] 的说法，若轨道 $H\cdot w$ 是闭的，则称元素 $w \in W$ 为半单；若 $0 \in H \cdot w$，则称 w 为幂零。在 W 是 H 的伴随表示的情形下，这些定义与上一段给出的定义一致。W 的幂零锥是幂零元构成的簇，记作 $\mathcal{N}(W)$。它是所有非恒定 H-不变多项式的零点集。

$\mathbf{V}$ 与 $\mathbb{V}$ 的幂零锥已在 [1, 24, 37, 40] 中得到广泛研究。我们有

$$\mathcal{N}(\mathbf{V}) = \Bbbk^n \times \mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n), \quad \mathcal{N}(\mathbb{V}) = \Bbbk^{2n} \times \mathcal{N}(\bigwedge\nolimits^2 \Bbbk^{2n})$$

其中，$\bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$ 中的元素为幂零元，当且仅当其对应矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & {}^tA \end{smallmatrix}\right)$ 在 $\mathfrak{gl}_{2n}$ 中是幂零的，[37, §1.2& 引理 1.5]。

两个子簇都按幂零轨道分层，相应的轨道集 $\mathcal{N}(\mathbf{V})/\mathbf{G}$ 和 $\mathcal{N}(\mathbb{V})/G$ 按闭包的包含关系构成偏序。

我们从 [1, 40, 37] 引入一些有用的概念。$\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 上的 $\mathbf{G}$-轨道有限多个，并与 n 的双分拆构成双射。我们将说明这一双射，以备后用。设 $(\mu;\nu)$ 是 n 的一个双分拆，(v, x) 是对应轨道 $\mathbf{O}_{(\mu;\nu)} \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{V})$ 的一个代表元。那么我们可以如下定义幂零元 x 在 $\Bbbk^n$ 上的一个标准基：

$$\{v_{ij} \mid 1 \le i \le \ell(\mu+\nu) \text{ and } 1 \le j \le \mu_i + \nu_i\} \quad \text{is a basis for } \Bbbk^n$$

使得

$$xv_{ij} = \begin{cases} v_{i,j-1} & \text{if } j > 1, \\ 0 & \text{if } j = 0, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad v = \sum_{i=1}^{\ell(\mu)} v_{i,\mu_i}$$

也就是说，相对于基 $\{v_{ij}\}$，x 具有若尔当标准形，而 v 可写成与分拆 μ 对应的基元素之和。我们称元素 (v, x) 的类型为 $(\mu;\ \nu)$。

注 2.1. 出于计算上的考虑，有时用 $g(v, x) = (gv, gxg^{-1}) = (gv, x)$ $g = \sum_{j=0}^{n} x^j$ 来替换 Achar-Henderson 代表元 (v, x) 更为方便。也就是说，使用代表元 $(\sum_{i=1}^{\ell(\mu)} \sum_{j=1}^{\mu_i} v_{i,j}, x)$。

偏序集 $\mathcal{N}(\mathbf{V})/\mathbf{G}$ 与 $\mathcal{N}(\mathbb{V})/G$ 之间存在极为密切的关系，这一关系由 Achar– Henderson 和 Springer 观察到。

引理 2.2. [1,命题2.8& 第 6] 节 [37,推论 4.13]

(1) 态射 φ 到 $G\times^{\mathbf{G}}\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 的限制在$\mathcal{N}(\mathbf{V})/\mathbf{G}$ 与 $\mathcal{N}(\mathbb{V})/G$ 之间诱导出一个偏序集同构，其逆映射由与 $\mathbf{V}$ 取交集，通过(2.4)给出。此外，我们有

$$\dim G(v,x)=2\dim \mathbf{G}(v,x)$$

对任意 $(v,x)\in\mathcal{N}(\mathbb{V})$。

(2) 态射 ψ 在 $\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\mathcal{N}(\mathbb{V})$ 上的限制诱导出一个偏序集包含映射，从$\mathcal{N}(\mathbf{V})/\mathbf{G}$ 到 $\mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n})/\mathrm{GL}_{2n}$，将由 $\mathbf{G}$-轨道标签 $(\mu;\nu)$ 的轨道映射到$\mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n})$ 中由 $(\mu\cup\mu;\nu\cup\nu)$标记的 GL_{2n}-轨道。此外，

$$\dim \mathrm{GL}_{2n}\psi(\varphi(v,x))=2\dim G(v,x)=4\dim \mathbf{G}(v,x)$$

对任意 $(v,x)\in\mathcal{N}(\mathbf{V})$。

注 2.3。当 $\Bbbk=\mathbb{C}$ 时，类比伴随情形，人们或许会想知道，奇异幂零轨道的闭包在自然的 $\mathbb{C}^\times$-作用下，是否为 Beauville [6]所定义的锥形辛奇点。一般而言，情况并非如此，至少在假设辛结构相对于压缩作用是齐次的这一自然前提下并非如此。作为反例，考虑由双分拆 $(\emptyset;2)$ 标记的 $G=\mathrm{Sp}_4$ 的奇异幂零轨道 $\mathbb{O}\subset\mathbb{V}$。于是，$(v,x)\in\mathbb{O}$ 当且仅当 $v=0$ 且 $x=\begin{pmatrix} a & b & 0 & e\\ c & -a & -e & 0\\ 0 & f & a & c\\ -f & 0 & b & -a\end{pmatrix}$，其中 $a,b,c,e,f\in\mathbb{C}$ 满足 $a^2+bc-ef=0$。因此，$\mathbb{O}$ 同构于一个四维二次超曲面。现在反设后者是一个具有齐次压缩作用的锥形辛奇点。由 [31], ，它必定同构于某个复李代数 $\mathfrak{k}$ 的幂零锥$\mathcal{N}(\mathfrak{k})$。维数条件迫使 $\mathfrak{k}\simeq\mathfrak{sl}_2\times\mathfrak{sl}_2$。然而，$\mathbb{C}[\mathbb{O}]$ 的 Hilbert-Poincar´e 级数为 $\frac{1+t}{(1-t)^4}$，而 $\mathbb{C}[\mathcal{N}(\mathfrak{k})]$ 的级数为 $\frac{(1+t)^2}{(1-t)^4}$。因此，这两个$\mathbb{C}$-代数作为分次代数并不同构，且这两个簇不可能作为 $\mathbb{C}^\times$-簇同构，这与我们的假设矛盾。

现在我们转而讨论 $\mathbb{V}$中的半单元素。

引理 2.4。

（*1*）$\mathbf{V}$ 中的元素是半单元素，当且仅当它属于 $\mathfrak{gl}_n\subseteq\mathbf{V}$ 并且是其中的半单元素。（*2*）$\mathbb{V}$ 中的元素是半单元素，当且仅当它是 $\bigwedge^2\Bbbk^{2n}$的半单元素；当且仅当它通过包含映射 $\bigwedge^2\Bbbk^{2n}\subseteq\mathfrak{gl}_{2n}$作用于$\Bbbk^{2n}$ 上时是半单算子。其 G-轨道可由矩阵$\mathrm{diag}(D,D)$ 表示，其中 $D\in\mathfrak{gl}_n$为某个对角矩阵。

证明。（1）令 $d\colon\Bbbk^\times\to\mathbf{G}$ 表示余特征 $\lambda\mapsto\lambda\mathrm{Id}_n$。则对于所有$\lambda\in\Bbbk^\times$ 和 $(v,x)\in\mathbf{V}$，有 $d(\lambda)(v,x)=(\lambda v,x)$。因此，如果 $(v,x)\in\mathbf{V}$ 具有闭$\mathbf{G}$-轨道，则$(0,x)\in\mathbf{G}(v,x)$，从而$v=0$。众所周知，$\mathfrak{gl}_n$ 的半单元素正是那些具有闭$\mathbf{G}$-轨道的元素。

(2) 现在考虑这一对 $(\mathbb{V},G)$，令 $\mathbb{B}$ 为 $\Bbbk^n=V\subseteq T^*V$与 $\bigwedge^2\Bbbk^{2n}\subseteq\mathfrak{gl}_{2n}$的子空间之和，该子空间由形如 $\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ 0 & {}^tA\end{smallmatrix}\right)$的矩阵组成，其中 A为上三角矩阵且B 斜对称。根据 [37, 引理 1.6]，每个 G-轨道都与 $\mathbb{B}$相交。假设有一个元素

$(v,x)\in\mathbb{B}$ 有一个闭轨道。令 $x=\left(\begin{smallmatrix}A&B\\0&{}^tA\end{smallmatrix}\right)$，并令 $d'\colon \mathbf{k}^\times\to \mathbf{G}$ 表示余特征$\lambda\mapsto \mathrm{diag}(\lambda\,\mathrm{Id}_n,\ \lambda^{-1}\mathrm{Id}_n)$。则 $d'(\lambda)(v,x)=\left(\lambda v,\left(\begin{smallmatrix}A&\lambda^2B\\0&{}^tA\end{smallmatrix}\right)\right)$，因此 $v=0$ 且 $B=0$。于是$G(v,x)\in\bigwedge^2\mathbf{k}^{2n}$，而 [37, 引理 1.4] 给出了 $x\in\mathfrak{gl}_{2n}$的半单性，从而也给出了 A 在 $\mathfrak{gl}_n$中的半单性。于是 A 与一个对角矩阵 DG-共轭，因此 $x=\mathrm{diag}(A,{}^tA)$与对角矩阵 $\mathrm{diag}(D,D)$ G-共轭。□

$\mathbf{V}$ 中半单元素的稳定子因此是$\mathbf{G}$的 Levi 子群。$\bigwedge^2\mathbb{k}^{2n}$ 中的半单 G-轨道由如下形式的对角矩阵表示

$$\mathrm{diag}(a_1\,\mathrm{Id}_{\lambda_1},\cdots,a_l\,\mathrm{Id}_{\lambda_l},a_1\,\mathrm{Id}_{\lambda_1},\cdots,a_l\,\mathrm{Id}_{\lambda_l}) \tag{2.5}$$

其中 $a_i\in\mathbb{k}$ 对所有 i 且 $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_l)$ 是 n的一个分拆。半单元素的稳定子在 $\bigwedge^2\mathbb{k}^{2n}$ 中的计算见 [37]，并且它们同构于辛群的直积。更精确地说，若 x 如（2.5）所示，且 $a_i\neq a_j$ 对 $1\le i\neq j\le l$成立，则 $G^x\simeq G_\lambda$ 是 G 的由如下形式的矩阵组成的子群

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & B_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & A_l & & & B_l \\ C_1 & & & D_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & C_l & & & D_l \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

其中 $\left(\begin{smallmatrix}A_i&B_i\\C_i&D_i\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{Sp}_{2\lambda_i}$ 对任意 $i=1,\ \ldots\ldots,\ l$.

注 2.5。 (1) 设 $\mathbf{x}_s=\mathrm{diag}(a_1\,\mathrm{Id}_{\lambda_1},\ \cdots,\ a_l\,\mathrm{Id}_{\lambda_l})\in\mathbf{V}$ 满足 $a_i\neq a_j$，并令 $x_s=\varphi(\mathbf{x}_s)$。$N_G(G^{x_s})=N_G(\mathbf{Sp}_{2\lambda})$ 中的任意元素，都可由 $G^{x_s}=\mathbf{Sp}_{2\lambda}$ 中的一个元素与 $N_G(T)$ 中的一个元素复合得到；后者在 Weyl 群 $N_G(T)/T$中的像属于 W 中 $\mathbf{A}_n$ 型的极大标准抛物子群。换言之，它对应于与分拆 λ相关联的 $\mathbb{S}_n$ 的标准抛物子群 $\mathbb{S}_\lambda$ 的正规化子中的一个元素。

$$\text{Let } d_i(\lambda):=|\{j\in\{1,\ldots,l\},\ |\ \lambda_j=i\}|,\ \text{then}$$

$$N_G(G^{x_s})/G^{x_s}\simeq\prod_{i=1}^{n}\mathbb{S}_{d_i(\lambda)}\simeq N_{\mathbb{S}_n}(\mathbb{S}_\lambda)/\mathbb{S}_\lambda\simeq N_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s})/\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s} \tag{2.7}$$

其中，复合同构 $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s})/\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}\ \simeq\ N_G(G^{x_s})/G^{x_s}$ 由自然嵌入 $\mathbf{G}\ \hookrightarrow\ G$诱导。

(2) 两个半单元素 $x,x'\in\bigwedge^2\mathbb{k}^{2n}\subseteq\mathfrak{gl}_{2n}$ 在 $\mathbf{GL}_{2n}$ 中共轭，当且仅当它们在 G 中共轭。事实上，根据引理 2.4(2)，我们不妨设 $x=\mathrm{diag}(D,D)$ 和 $x'=\mathrm{diag}(D',D')$，其中 $D,D'\in\mathfrak{gl}_n$ 是对角矩阵。但此时，$\mathbf{GL}_{2n}\,x_s=\mathbf{GL}_{2n}\,x'_s$ 当且仅当 $\mathbf{G}D=\mathbf{G}D'$，而嵌入 $\mathbf{G}\hookrightarrow G$ 给出 $Gx_s=Gx'_s$。

2.4. **Jordan–Kac–Vinberg 分解**。 设 W 是约化群 H的有理模。第 2.3 节解释了 W 的元素何谓半单或幂零。按照 [20]，我们称 W 具有 Jordan–Kac–Vinberg（简称 JKV）分解，如果每个元素 w 都能分解为和 $w=w_s+w_n$，满足：

- w_s 是半单的;
- w_n 作为 H^{w_s}-模是幂零的，视 W 为;
- $H^w \subseteq H^{w_s}$。

任意表示 W 存在 JKV 分解，这一点由卡茨在以下假设下，利用 Luna 的基本引理于 [23, 附录] 中证明: k 的特征为零。在正特征下，可以通过援引 [5] 重复这一论证。当 $W = \mathrm{Lie}(H)$ 是约化群的伴随表示时，这些概念与通常的抽象若尔当 - 谢瓦莱分解一致，且这种分解唯一。若写作$y = y_s + y_n$ 对于某个 $y \in \mathfrak{gl}_n$ 或 $\mathfrak{gl}_{2n}$，我们总是指 y_s 和 y_n 分别是 y 在若尔当-谢瓦莱分解中的半单部分和幂零部分。

$\mathfrak{gl}_n$ 中的 Jordan 分解在 V 上诱导出一个与到 $\mathfrak{gl}_n$ 的投影相容的 JKV 分解，下面将对此加以证明。取 $(v,x) \in \mathrm{V}$，并设 $x = x_s + x_n$。那么 $(v,x) = (0,x_s) + (v,x_n)$ 是 (v,x) 在 V 中的 JKV 分解。事实上，$(0,x_s)$ 是半单的。其稳定子是 G 的一个 Levi 子群 L，其李代数为 $\mathfrak{l}$。于是，L 是若干与 GL_{λ_i} 同构的群的乘积，其中 λ 是 n 的一个分拆，且 k^n 作为 L-模分解为若尔当-谢瓦莱分解为若干子空间的直和，这些子空间分别与 k^{λ_1}、.....、k^{λ_l} 同构，其中分量 GL_{λ_i} 通过标准表示作用于 k^{λ_i}，并在其他直和项上平凡作用。因此，$\mathrm{V}_L := \mathrm{k}^n \oplus \mathfrak{l}$ 是 L各分量对应的增强模的外直和。由于 $x_n \in \mathcal{N}(\mathfrak{l})$，由 [37, 推论 2.3]可得 $(v,x_n) \in \mathcal{N}(\mathrm{V}_L)$。最后，$\mathrm{G}^{(v,x)} = \mathrm{G}^v \cap \mathrm{G}^x = \mathrm{G}^v \cap \mathrm{G}^{x_s} \cap \mathrm{G}^{x_n} \subset \mathrm{G}^{x_s}$。

类似地，$\mathfrak{gl}_{2n}$ 中的 Jordan 分解在 $\mathbb{V}$上诱导出一个与态射 $\mathbb{V} \twoheadrightarrow \bigwedge^2 \mathrm{k}^{2n} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{2n}$相容的 JKV 分解，下面对此作出说明。设 $(v,x) \in \mathbb{V}$，于是 $x \in \mathfrak{gl}_{2n}$且令 $x = x_s + x_n$。我们断言，$(v,x) = (0,x_s) + (v,x_n)$ 是 $\mathbb{V}$中 (v,x) 的一个 JKV 分解。首先，根据构造，自同态 x_s，$x_n \in \mathfrak{gl}_{2n}$ 是 x 的多项式，而自伴自同态的幂仍是自伴的，因此 x_s 和 x_n 属于 $\bigwedge^2 \mathbb{k}^{2n}$。其次，根据引理 1.4]，$(0,x_s)$ 是半单的，且 $G^{x_s} \simeq \mathrm{Sp}_{2\lambda}$，其中 λ 是 n 的一个分拆。此外，k^{2n} 分解为 $\mathrm{Sp}_{2\lambda}$ 模的直和，其各子空间分别同构于 $\mathrm{k}^{2\lambda_1}$，...，$\mathrm{k}^{2\lambda_l}$；分量 $\mathrm{Sp}_{2\lambda_i}$ 在 $\mathrm{k}^{2\lambda_i}$ 上通过标准表示作用，并在其他直和项上平凡作用。注意到 $x_n \in \mathfrak{gl}_{2n}^{x_s} \cap \bigwedge^2 \mathbb{k}^{2n}$。在 G 作用下，$\mathfrak{gl}_{2n}^{x_s}$ 由以下形式的矩阵组成

$$\begin{pmatrix} A_1 & & B_1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & A_l & & B_l \\ C_1 & & D_1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & C_l & & D_l \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

其中 $A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i \in \mathfrak{gl}_{\lambda_i}$ 对于任意 $i = 1, \ldots, l$，因此 $\mathfrak{gl}_{2n}^{x_s} \cap \bigwedge^2 \mathbb{k}^{2n}$ 由如下形式的矩阵组成

$$\begin{pmatrix} A_1 & & B_1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & A_l & & B_l \\ C_1 & & {}^tA_1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & C_l & & {}^tA_l \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

其中 A_i， B_i 与 C_i 位于 $\mathfrak{gl}_{\lambda_i}$ 与 B_i， C_i 是斜对称的，对任意 $i=1$，……， l。

因此，$\mathrm{Sp}_{2\lambda}$ 子模 $\Bbbk^n\oplus(\mathfrak{gl}_{2n}^{x_s}\cap\bigwedge^2\Bbbk^{2n})$ 是 $\mathbb{V}_\lambda$ 中对应于 $\mathrm{Sp}_{2\lambda}$ 的各个分量以及 $(v,x_n)\in\mathcal{N}(\mathbb{V}_\lambda)$ 的奇异模的外直和，它包含于 $\mathbb{V}$ 的 G^{x_s}-幂零锥中。最后， $G^{(v,x)}=G^v\cap G^x=G^v\cap G^{x_s}\cap G^{x_n}\subset G^{x_s}$。

注记 2.6. JKV 分解一般并不唯一，见 [23, 附录]。人们自然会问它在增强模或奇异模中是否唯一，但事实并非如此。设$n=2$，并设 $v=\left(\begin{smallmatrix}1&\\&1\end{smallmatrix}\right)$ 与 $x=\left(\begin{smallmatrix}a&1\\0&b\end{smallmatrix}\right)$，其中 $a\neq b$。则 x 是半单的，从而 $(v,x)=(0,x)+(v,0)$ 是一个 JKV 分解。然而，我们也可以考虑半单元 $s=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&b\end{smallmatrix}\right)$。设 $\gamma\colon\Bbbk^\times\to\mathbf{G}^s$ 为由 $t\mapsto\left(\begin{smallmatrix}t^2&0\\0&t\end{smallmatrix}\right)$ 给出的余特征。则 $\gamma(t)(v,x-s)=\left(\left(\begin{smallmatrix}t^2\\t\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}0&t\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right)$，故 $0\in\mathbf{G}^s(v,x-s)$。最后，$\mathbf{G}^{(v,x)}=1\subseteq\mathbf{G}^s$。因此，$(v,x)=(0,s)+(v,x-s)$ 也是一个 JKV 分解。类似的构造可推广到任意 n，也可应用于 $\mathbb{V}$。

我们所考虑的分解，是与到 $\mathfrak{gl}_n$ 和 $\Bbbk^n$的自然态射分别相容的唯一分解。注意，这些 Jordan 分解也与嵌入（2.4）相容。从现在起，我们将 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbb{V}$ 中元素的这种分解称为 JKV 分解；凡是写作 $(v,x)=(v,x_n)+(0,x_s)$ 的 $\mathbf{V}$ 或 $\mathbb{V}$ 中元素，我们都将始终指这种分解。

下面的结果将引理 2.2 推广到轨道集 $\mathbf{V}/\mathbf{G}$、$\mathbb{V}/G$ 和 $\mathbf{V}_{2n}/\mathrm{GL}_{2n}$；这些轨道集均按闭包的包含关系赋予偏序，这与通常情况相同。

定理2.7. *(1)* 态射 φ 是满射，其一般纤维的维数为 n。特别地，每个 G-轨道都与 $\mathbb{V}$相交于$\mathbf{V}$。

(2) 态射 φ 诱导无限偏序集$\mathbf{V}/\mathbf{G}$ 与 $\mathbb{V}/G$之间的同构。

(3) 对任意 $(v,x)\in\mathbf{V}$，有 维数 $G(v,x)=2$ 维数 $\mathbf{G}(v,x)$。

(4) 对任意 $(v,x)\in\mathbb{V}$，有 一般线性李代数维数$_{2n}(v,x)=2$ 维数 $G(v,x)$。*(5)* 对任意 $X\subset\mathbf{V}$ 以及任意 $Y\subset\mathbb{V}$，有

$$\varphi(1*X)^{G\text{-reg}}=\varphi(1*X^{\mathbf{G}\text{-reg}}),\qquad \varphi(G\times^{\mathbf{G}}X)^{G\text{-reg}}=\varphi(G\times^{\mathbf{G}}X^{\mathbf{G}\text{-reg}}) \tag{2.10}$$

and

$$\psi(1*Y)^{\mathrm{GL}_{2n}\text{-reg}}=\psi(1*Y^{G\text{-reg}})\qquad \psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^G Y)^{\mathrm{GL}_{2n}\text{-reg}}=\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^G Y^{G\text{-reg}}) \tag{2.11}$$

(6) 态射 ψ 诱导出一个单射偏序集态射。

证明。(1) 设 $(v,x)=(0,x_s)+(v,x_n)\in\mathbb{V}$。在相差 G-作用的意义下，我们可以假设 x_s具有形式 (2.5)，并且 $G^{x_s}=G_\lambda$ 对某个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$（即 n 的分拆）成立。由于 x_n 与 x_s 在 $\mathfrak{gl}_{2n}$ 中交换，它具有形式 (2.9)；又因为它也是幂零的，元素 (v,x_n) 位于 G_λ 的奇异幂零锥中，而后者是奇异幂零锥的乘积。由 [1, 定理 6.1]应用于每个因子 Sp_{λ_i}（G_λ 的因子），(v,x_n) 的 $\mathbf{G}_\lambda$-轨道与 $\mathbf{GL}_\lambda:=\mathbf{G}\cap G_\lambda$ 的增强幂零锥 $\mathcal{N}(\mathbf{V}_\lambda)$ 相交。由于 $\mathcal{N}(\mathbf{V}_\lambda)\subset\mathbf{V}$，这给出了 φ 的满射性。一般纤维的维数由直接计算得到。

(2) 由 (1) 可知，φ 诱导了一个从 V/G 到 $\mathbb{V}/G$ 的保序满射：若 $(v,x)\in \mathbf{G}(v',x')$，则 $(v,x)\in G(v',x')$，因此 $\overline{\mathbf{G}(v,x)}\subseteq \mathbf{G}(v',x')$ 蕴含 $\overline{G(v,x)}\subseteq G(v',x')$。现在我们证明所诱导的映射是单射。假设 $G(v,x)=G(v',x')$，其中 (v,x)、$(v',x')\in \mathbf{V}$，并设 $(v,x)=(0,x_s)+(v,x_n)$ 以及 $(v',x')=(0,x'_s)+(v',x'_n)$。引理 2.4(2) 给出 $x_s, x'_s\in \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$。由于 $Gx=Gx'$，由此得到 $\mathbf{GL}_{2n}x=\mathbf{GL}_{2n}x'$，从而 $\mathbf{GL}_{2n}x_s=\mathbf{GL}_{2n}x'_s$。由注 2.5，我们因此可以假设 $x_s=x'_s$。于是，(v,x_s+x_n) 与 $(v',x_s+x'_n)$ 是 G^{x_s}-共轭的，并且 (v,x_n) 与 (v',x'_n) 位于 $\mathbf{G}^{x_s}$ 的增强幂零锥中。因此，由引理 2.2，它们是 $\mathbf{G}^{x_s}$-共轭的，从而所诱导的映射具有单射性。

现在证明该映射保序反映。区分 V 中的元素及其在 $\mathbb{V}$ 中的像会更方便。回忆一下，我们将 $\varphi(v,x)$ 写作 $\varphi(1*(v,x))$，对 ψ 也类似。设 $(v,x)=(v,x_s+x_n)$ 且 $(v',x')=(v',x'_s+x'_n)\in \mathbf{V}$，并假设 $\varphi(v,x)\in G\varphi(v',x')$。于是，$\psi(\varphi(v,x))\in \mathbf{GL}_{2n}\psi\varphi(v',x')$，因此 $\psi\varphi(x_s)$ 与 $\psi\varphi(x'_s)$ $\mathbf{GL}_{2n}$- 共轭，且 $\varphi(x_s)$ $\varphi(x'_s)\in \bigwedge^2\mathbb{k}^{2n}$。根据注 2.5 (2)，不妨设 $x_s=x'_s$，且 $\varphi(0,x_s)$ 具有 (2.5) 的形式。于是

$$\begin{aligned}\varphi(v,x_s+x_n)&\in \overline{G\varphi(v',x_s+x'_n)}\cap(\varphi(0,x_s)+\varphi(\mathcal{N}(\mathbf{V}_\lambda))\\&\subseteq \varphi(0,x_s)+\left(\overline{G_\lambda\varphi(v',x'_n)}\cap\varphi(\mathcal{N}(\mathbf{V}_\lambda))\right).\end{aligned}$$

引理 2.2 (1) 应用于 $\mathbf{V}_\lambda$ 和 $\mathbb{V}_\lambda$ 得到

$$\varphi(v,x)\in\varphi(0,x_s)+\overline{\varphi(\mathbf{G}_\lambda(v',x'_n))}=\varphi\left(\overline{\mathbf{G}_\lambda(v',x')}\right),$$

由此 $(v,x)\in \mathbf{G}_\lambda\overline{(v',x')}\subset\mathbf{G}\overline{(v',x')}$。

(3) 首先，对于 x_s 如（2.5）

$$\dim Gx_s=2n^2+n-\sum_{i=1}^{l}(2\lambda_i^2+\lambda_i)=2\dim\mathbf{G}x_s.$$

此外，$\mathbf{G}^{x_s}\simeq\prod_{i=1}^{l}\mathrm{GL}_{\lambda_i}\le\prod_{i=1}^{l}\mathrm{Sp}_{2\lambda_i}\simeq G^{x_s}$，并且增强幂零锥与奇异幂零锥之间存在相容的包含映射。结合引理 2.2得到

$$G\text{的维数}\ (v,x)\dim G x_s+\dim G^{x_s}(v,x_n)=2\dim\mathbf{G}x_s+2\dim\mathbf{G}^{x_s}(v,x_n)=2\dim\mathbf{G}(v,x$$

(4) 设 $(v,x)\in\mathbf{V}$ 如上所述。则，$\mathbf{GL}_{2n}^{x_s}$ 由形如（2.8）的可逆矩阵组成，

因此 $\mathbf{GL}_{2n}^{x_s}\simeq\prod_{i=1}^{l}\mathbf{GL}^{2\lambda_i}$。于是，

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{GL}_{2n}x_s&=4n^2-\sum_{i=1}^{l}(2\lambda_i)^2=2(2n^2-n+\sum_{i=1}^{l}(2\lambda_i^2-\lambda_i))\\&=2(\dim G-\dim G^{x_s})=2\dim Gx_s\end{aligned}\tag{2.12}$$

现在，(v, x_n) 属于 Sp_λ 的奇异幂零锥，它是奇异幂零锥的乘积。我们用 $(v(i)\ x_n(i))$ 表示第 i 个分量。然后，利用 (2.12) 和引理 2.2 可得：

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{GL}_{2n}(v,x) &= \dim \mathrm{GL}_{2n}\, x_s + \dim \mathrm{GL}_{2n}^{x_s}(v, x_n)\\ &= 2\dim Gx_s + \sum_{i=1}^{l} \dim \mathrm{GL}_{2\lambda_i}(v(i), x_n(i))\\ &= 2\dim Gx_s + 2\sum_{i=1}^{l} \dim \mathrm{Sp}_{2\lambda_i}(v(i), x(i))\\ &= 2\left(\dim Gx_s + \dim G^{x_s}(v, x_n)\right) = 2\dim G(v,x).\end{aligned}$$

(5) 式（2.10）中的两个等式等价，式（2.11）中的两个等式亦然。这四个等式都可直接由维数公式 (3) 和 (4) 得出。

(6) 我们先证明单射性。设 $(v, x_s + x_n)$、$(v', x_s' + x_n') \in \mathbb{V}$ 满足 $\psi(v', x_s' + x_n) \in \mathrm{GL}_{2n}\psi(v, x_s + x_n)$。由于 $\psi(0, x_s) \in \mathrm{GL}_{2n}\psi(0, x_s')$，结合引理 2.4(2) 和注 2.5，我们可以假设 $x_s' = x_s$。因此，(v, x_n) 和 (v', x_n') 属于 G^{x_s} 的奇异幂零锥，且它们在 $\mathbf{V}_{2n}$ 中的像 $\mathrm{GL}_{2n}^{x_s}$-共轭。应用引理 2.2 即得结论。包含映射的闭包的保持性证明与 (2) 中相同。□

我们还考虑自然投影

$$p\colon \mathbb{V} \to \bigwedge\nolimits^2 \Bbbk^{2n}, \qquad p'\colon \mathbf{V} \to \mathfrak{gl}_n. \tag{2.13}$$

根据一般原理，这两个态射都是开映射。正如我们现在要证明的，它们对于闭不变子集也具有良好的性质。

推论 2.8. 若 X 是 G-稳定的子集，且 $\mathbb{V}$，则 $p(X) = \overline{p(X)}$。类似地，若 Y 是 $\mathbf{G}$-稳定子集，且 $\mathbf{V}$，则 $p'(Y) = \overline{p'(Y)}$。

证明。由投影 $p(X) \subseteq \overline{p(X)}$ 和 $p'(Y) \subseteq \overline{p'(Y)}$ 的连续性可知。由于 $\overline{p(X)} \subseteq \overline{p(X)}$ 和 $p'(Y) \subseteq \overline{p'(Y)}$，只需证明 $p(X)$ 和 $p'(Y)$ 是闭集，即可完成证明。

现在令 $d\colon \Bbbk^\times \to \mathbf{G}$ 表示余特征 $\lambda \mapsto \lambda \mathrm{Id}_n$。那么对所有 $\lambda \in \Bbbk^\times$ 以及 $(v, x) \in \mathbf{V}$，都有 $d(\lambda)(v, x) = (\lambda v, x)$。若 $C \subseteq \mathbf{V}$ 是 $\mathbf{G}$-稳定的闭集，则对所有 $(v, x) \in C$，$(0, x) \in C$。由此可得 $p'(C) = p'(C \cap (0, \mathfrak{gl}_n))$；这是闭集，因为 p' 在 $(0, \mathfrak{gl}_n)$ 上的限制显然是一个同构。令 $C = X$，即完成了关于 p' 的证明。

若 C 是 $\mathbb{V}$ 的闭 G-不变子集，那么对于 $(v,\ x) \in C$，根据定理 2.7(1)，存在一个 G-共轭位于 $\mathbf{V}$ 中。由上一段可知，$(0,\ x) \in C$，因此 $p(C) = p(C \cap (0,\ \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}))$，从而 $p(C)$ 是闭的。令 $C = Y$，证明完毕。□

2.5. 异质与增强模的范畴商。 不变量环 $\Bbbk[\mathbf{V}]^{\mathbf{G}}$ 和 $\Bbbk[\mathbb{V}]^G$ 在 [37, 命题 1.5、1.7 和 2.2] 中有所描述。文中证明了 $\Bbbk[\mathbf{V}] = \Bbbk[\mathfrak{gl}_n]^{\mathbf{G}}$，因此 $\mathbf{V}/\!/\mathbf{G} = \mathrm{Spec}\, \Bbbk[\mathbf{V}]^{\mathbf{G}} \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T})/\mathbb{S}_n \simeq \mathbb{A}_\Bbbk^n$ 是一个仿射空间。类似地，文中证明了 $\Bbbk[\mathbb{V}]^G = \Bbbk[\bigwedge^2 \Bbbk^{2n}]^G$，并且 $\mathbb{V}/\!/G = \mathrm{Spec}\Bbbk[\mathbb{V}]^G \simeq \mathbb{A}_\Bbbk^n$。

我们考虑商映射

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{V},G} &: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}//G \\ \pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}} &: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}//\mathbf{G}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

定理 2.9。*(1)* 包含映射 $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbb{V}$ 诱导出同构 $\mathbb{V}//G \simeq \mathbf{V}//\mathbf{G}$。

(2) 态射$\pi_{\mathbb{V},G}$ 和 $\pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}}$ 是平坦且满射的，因此忠实平坦。*(3)* 两个态射的纤维均由有限多个轨道组成，且每个纤维都包含唯一的闭轨道。*(4)* $\pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}}$ 的纤维是不可约、正规且为完全交的。*(5)* $\pi_{\mathbb{V},G}$ 的纤维是不可约、正规且为完全交的。

证明。 由 [37, 命题 1.5], 可知，限制映射 $\Bbbk[\mathbb{V}]^G \to \Bbbk[\mathbb{V}^T]^{N_G(T)/T}$是单射。通过包含映射$\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbb{V}$, 子空间 $\mathbb{V}^T$ 可识别为 Lie(T)。将命题 2.5 应用于 Lie(T)中的正则半单元，可知 $\mathrm{Lie}(\mathbf{T})/\mathbb{S}_n = \mathbb{V}^T/(N_G(T)/T)$。结合 Chevalley 限制定理，我们得到单射的分次代数态射 $\Bbbk[\mathbb{V}]^G \hookrightarrow \Bbbk[\mathbf{V}]^{\mathbf{G}}$。由 [37, §1.2 和命题 1.7], 可知，$\Bbbk[\mathbb{V}]^G$ 的生成元代数无关，次数为 $1, 2, \ldots, n$。将其与$\Bbbk[\mathbf{V}]^{\mathbf{G}} = \Bbbk[\mathfrak{gl}_n]^{\mathbf{G}}$ 的生成元次数比较，得到 (1)。

现在我们证明 $\pi_{\mathbb{V},G}$ 的 (2)。由于 $\Bbbk[\mathbb{V}]$ 在 $\Bbbk[\bigwedge^2 \Bbbk^{2n}] \otimes 1$ 上是自由的，只需证明 $\bigwedge^2 \Bbbk^{2n} \to \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}//G$ 是平坦且满射的；对于增强模，也有类似的结论。

当 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 时，该映射 $\bigwedge^2 \Bbbk^{2n} \to \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}//G$ 是忠实平坦的；而当 $\mathrm{char}(\Bbbk) > 0$ 时，可利用奇迹平坦性从 [27, 推论 2.22], 得出这一结论。这就完成了 $\pi_{\mathbb{V},G}$ 的 (2) 的证明。对于 $\pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}}$，论证完全相同，利用 [22, 命题 7.13] 可知 $\mathfrak{gl}_n \to \mathfrak{gl}_n//\mathbf{G}$ 是忠实平坦的，且 $\Bbbk$ 可取任意特征。至此，(2) 得证。

根据 [37, 命题 2，6] 其中只有有限多个$\mathbf{G}$-轨道 $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 存在。结合引理 2.2(1)，对于 G-轨道 $\mathcal{N}(\mathbb{V})$ 也是如此。应用 [33, §5.2] 和 [5,§2.1.3] 中的推论 2，我们可得 (3)。注意，所引用的推论是在 $\mathbb{C}$上表述的，但论证同样适用于任意代数闭域。

根据当前定理的 (1)，我们知道$\mathbf{V}//\mathbf{G} \simeq \mathfrak{gl}_n//\mathbf{G}$。此外，对于 $s \in \mathfrak{gl}_n//\mathbf{G}$，记$\pi_{\mathfrak{gl}_n,\mathbf{G}}$: $\mathfrak{gl}_n \to \mathfrak{gl}_n//\mathbf{G}$ 为伴随商，则 $(\pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}})^{-1}(s) \simeq \Bbbk^n \times \pi^{-1}_{\mathfrak{gl}_n,\mathbf{G}}(s)$ 作为既约概形。根据 [22, 命题 7.13 和 8.5], ，$\pi_{\mathfrak{gl}_n,\mathbf{G}}$的纤维是不可约的正规完全交。这就证明了 (4)。

剩下的任务是证明 (5)。本段中关于正规性的论证相当标准，其思路仿照伴随表示（背景介绍及参考文献见 [22, 命题 8。5] ）。由于 $\pi_{\mathbb{V},G}$ 是忠实平坦的，纤维非空且维数都相同，即 $\dim \mathbb{V} - n$。每个纤维恰由 n 个多项式函数定义，因此它们都是完全交，故为科恩–麦考利。由第 (3) 部分和定理 2.7 可知，每个纤维都是有限多个偶数维轨道的并，因此每个纤维在余维 2 上正则。现在可以应用塞尔判据，得出这些纤维是正规的。

最后，我们证明$\pi_{\mathbb{V},G}$ 的纤维不可约，先从中心纤维开始。由于$\mathcal{N}(\mathbb{V})$ 在 $\mathbf{k}^\times$作用下稳定，不可约分支相交于 $0 \in \mathcal{N}(\mathbb{V})$；但正规性保证这些分支彼此不相交。因此， $\mathcal{N}(\mathbb{V})$不可约。令 $x \in \mathbb{V}//G$。$\mathbf{k}[\mathbb{V}]$上的自然分次在 $\mathbb{k}[\mathbb{V}]$上诱导出一个滤过，该滤过下降为$\mathbb{k}[\pi_{\mathbb{V},G}^{-1}(x)]$上的一个滤过。取其伴随分次，得到分次代数之间的关系 $\mathbf{k}[\mathcal{N}(\mathbb{V})] \twoheadrightarrow \operatorname{gr} \mathbf{k}[\pi_{\mathbb{V},G}^{-1}(x)]$。由于$\pi_{\mathbb{V},G}$的纤维维数都相同，且 $\pi_{\mathbb{V}}^{-1},_G(0)$ 是约化的，因此可得 $\mathbf{k}[\mathcal{N}(\mathbb{V})] \cong \operatorname{gr} \mathbf{k}[\pi_{\mathbb{V},G}^{-1}(x)]$。现在 $\mathbb{k}[\pi_{\mathbb{V},G}^{-1}(x)]$ 是一个整环，因此 $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}{}_G,(x)$ 不可约。由此证明了 (5)。□

注 2.10. 设 $X \subset \mathbf{V}$ 是 $\pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}}$-饱和的。利用定理 $\widetilde{X} = \pi_{\mathbb{V}}^{-1}{}_{,G}\pi_{\mathbf{V},\mathbf{G}}(X)$ 中的~识别所定义的集合 2.9 (1) 是 $\pi_{\mathbb{V},G}$-饱和的。若 X 也是开集，则 X 是开集。

3. Enhanced and Exotic Jordan classes

我们在 V 和 $\mathbb{V}$ 上引入等价关系。若元素 (v,x)、$(v',x') \in \mathbf{V}$ 的 JKV 分解分别为 $(v,x) = (0,x_s) + (v,x_n)$ 和 $(v',x') = (0,x_s') + (v',x_n')$，且存在 $g \in \mathbf{G}$ 使得 $g\mathbf{G}^{x_s}g^{-1} = \mathbf{G}^{x_s'}$，并且 $g(v,x_n) = (v',x_n')$，则称它们 Jordan 等价。关于此等价关系的等价类称为增强 Jordan 类。注意，Levi 子群 $\mathbf{G}^{x_s}$ 包含 G 的一个极大环面，因此 $\mathbf{G}^{x_s}$ 不固定 $\mathbb{k}^n$中的非零向量。这意味着 $\mathbf{V}^{\mathbf{G}^{x_s}} \subset \mathfrak{gl}_n$ ，因此它等于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})$。于是，$(v,x)$ 的增强 Jordan 类为集合

$$\mathfrak{J}(v,x) = \mathbf{G}(v,(\mathbf{V}^{\mathbf{G}^{x_s}})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n) = \mathbf{G}\left(v,\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\right). \tag{3.1}$$

如果 $v=0$，那么任何与 (v,x) 等价的元素在 $\mathbb{k}^n$ 中的分量都是平凡的，并且其等价类是 $\mathfrak{gl}_n$ 中的通常 Jordan 类。更一般地，任意增强 Jordan 类 $\mathfrak{J}$通过 p 如 (2.13) 所示的投影是 $\mathfrak{gl}_n$ 中的通常 Jordan 类。

元素 (v,x)、$(v',x') \in \mathbb{V}$ 若其 JKV 分解为 $(v,x) = (0,x_s) + (v,x_n)$，以及 $(v',x') = (0,x_s') + (v',x_n')$，则称它们 Jordan 等价；如果存在 $g \in G$ 使得$gG^{x_s}g^{-1} = G^{x_s'}$，且 $g(v,x_n) = (v',x_n')$。关于此关系的等价类称为奇异 *Jordan* 类。

由于 G^{x_s} 包含 G的一个极大环面，而该极大环面不可能固定 $\mathbb{k}^{2n}$ 中的非零向量，因此我们有$\mathbb{V}^{G^{x_s}} = \{(0,x') \in \mathbb{V} \mid G^{x_s} \subset G^{(0,x')}\}$ 以及 $(\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{G\text{-reg}} = \{(0,x') \in \mathbb{V} \mid G^{x_s} = G^{(0,x')}\}$ 只包含中心化子为约化中心化子的元素。因此， [37, 推论 4.7] 表明 $(\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{G\text{-reg}}$由半单元素组成。$(v,x)$ 的奇异 Jordan 类是集合

$$J(v,x) = G(v,(\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{G\text{-reg}} + x_n) = G\{(v,x_s' + x_n) \in \mathbb{V} \mid G^{x_s} = G^{x_s'}\}. \tag{3.2}$$

注 3.1. 令 $\mathbf{x}_s := \operatorname{diag}(a_1\mathrm{id}_{\lambda_1},\ldots,a_l\mathrm{id}_{\lambda_l}) \in \mathfrak{gl}_n$，其中 $a_i \neq a_j$ for $i \neq j$，并令 $(0,x_s) = \varphi(0,\mathbf{x}_s)$。不动点子空间 $\mathbb{V}^{G^{x_s}} = \mathbb{V}^{G_\lambda}$ 与形如 (2.9) 且固定 λ 的对角矩阵集合重合。在包含映射 $\mathbb{V} = \psi(\mathbb{V}) \subseteq \mathbf{V}_{2n}$ 下，它也与 $(0,\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_{2n}^{x_s}))$ 重合。借助命题 2.7，我们看到这三个开子集

$$(0,\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{\mathbf{x}_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}}) \subset \mathbf{V}, \quad (\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{G\text{-reg}} \subset \mathbb{V} \quad \text{and} \quad (0,\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_{2n}^{x_s})^{\mathrm{GL}_{2n}\text{-reg}}) \subset \mathbf{V}_{2n}$$

通过 φ和 ψ 得以对应。

命题 *3.2. (1)* 增强 *Jordan* 类只有有限多个，且每个增强 *Jordan* 类都是不可约的、*G*-稳定的，并由维数固定的 *G*-轨道组成。它们由形如 *(L, O)* 的对的 *G*-轨道参数化，其中 L 是 *G* 的 *Levi* 子群，而 *O* 是 L的增强幂零锥中的一个 L-轨道。等价地，它们由形如 *(λ, O)* 的对参数化，其中 λ 是 n 的一个分拆，而 *O* 是 G_λ的增强幂零锥中的一个 $N_{\mathbf{G}}(G_\lambda)$-轨道。*(2)* 奇异 *Jordan* 类只有有限多个，且每个奇异 *Jordan* 类都是不可约的、 G-稳定的，并由维数固定的 G-轨道组成。它们由 G-轨道参数化，参数为形如 $(M, \mathbb{O})$ 的对，其中 M是 $\mathbb{V}$ 中某个半单元的稳定子，而 $\mathbb{O}$ 是 M的奇异幂零锥中的一个 M-轨道。因此，它们由形如 $(\lambda, \mathbb{O})$ 的对参数化，其中 λ是 n 的一个分拆，而 $\mathbb{O}$ 是 G_λ的奇异幂零锥中的一个 $N_G(G_\lambda)$-轨道。*(3)* 对每个 $m \in \mathbb{N}$ ，在 m的双分拆集合 $\mathcal{Q}_m$ 上选取一个全序 $\leq$ 。增强 *Jordan* 类集合和奇异 *Jordan* 类集合都与形如 $(\lambda, (\mu; \nu))$ 的对的集合双射，其中 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ 是 n 的一个分拆，并且 $(\mu; \nu) = ((\mu_1; \nu_1) \ldots, (\mu_l; \nu_l))$ 是一个 l-元组，其第 i个分量是 λ_i 的一个双分拆，并且若 $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ ， 则 $(\mu_i; \nu_i) \geq (\mu_{i+1}; \nu_{i+1})$。

证明。根据构造，增强与奇异 Jordan 类都是由维数相同的轨道组成的并。不可约性源于以下事实：增强 Jordan 类（分别为奇异 Jordan 类） $x_s(+, v, x_n)$ 的像，是由不可约簇 $v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}}\text{-reg} + x_n$（分别为 $v, (\mathbb{V}^{G^{x_s}})^{G\text{-reg}} + x_n$）经由 G 的作用态射（分别为 G）得到的。关于成对参数的参数化由构造可知。根据半单元素中心化子的描述，半单元素稳定子的轨道集合在两种情形下都与 n 的分拆集合 λ 双射；而 GL_λ（分别为 G_λ ）的增强（分别为奇异）幂零轨道的集合是有限的 [1, 24, 37]，，因此，半单元素中心化子的正规化子的幂零锥中的轨道集合也必然有限。结合 (1)、(2) 与注 2.5 即得结论 (3)。□

请注意，幂零轨道是 Jordan 类的例子。以下结果是引理 2.2 的推广。下文中我们使用来自（$\mathbf{V} \subseteq \mathbb{V} \subseteq \mathbf{V}_{2n}$ （2.3）的包含映射。

定理 3.3。 *(1)* 映射 $\mathfrak{J} \mapsto \varphi(G \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J})$ 建立了增强 *Jordan* 类集合与奇异 *Jordan* 类集合之间的双射，其逆映射由$J \mapsto J \cap \mathbf{V}$诱导。*(2)* 映射 $J \mapsto \psi(\mathrm{GL}_{2n} \times^G J)$ 建立了从 $\mathbb{V}$ 中的奇异 *Jordan* 类集合到$\mathbf{V}_{2n}$中的增强 *Jordan* 类集合的单射。映射$\mathfrak{J} \mapsto \mathfrak{J} \cap \mathbb{V}$ 是左逆映射。

证明. (1) 结合增强 Jordan 类和奇异 Jordan 类的描述 (3.1)、(3.2) 以及注 3.1，我们看到，若 $\mathfrak{J}$ 是 (v, x) 的增强 Jordan 类，则 $G\mathfrak{J} = \varphi(G \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J})$ 是 $\varphi(v, x)$ 的奇异 Jordan 类，因此该映射是良定义的。由命题 2.7 可知它是满射。下面证明其单射性。设 (v, x) 和 $(v', x') \in \mathbf{V}$ 的 Jordan 类分别为 $\mathfrak{J}$和 $\mathfrak{J}'$，且$\varphi(G \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J}) = \varphi(G \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J}')$。那么 $\varphi(v, x)$ 和 $\varphi(v', x')$ 在 $\mathbb{V}$中的类 J和 J'相等。令 x_s

并令 x'_s 分别为 x 和 x'的半单部分。不妨设 $G^{\varphi(x_s)} = G^{\varphi(x'_s)}$，于是由注 3.1 可知 $\mathrm{G}^{x_s} = \mathrm{G}^{x'_s}$。令 x_n 和 x'_n 分别为 x 和 x'的幂零部分。于是，$x_n, x'_n \in \mathfrak{gl}_n^{x_s} \cap \mathcal{N}(\mathrm{V})$，故 (v, x_n) 和 (v', x'_n) 属于 G^{x_s} 的增强幂零锥，且它们经由 φ 的像 G^{x_s}-共轭。因此，由引理 2.2 可知它们是 G^{x_s}-共轭的，从而得出 $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$。

(2) 结合增强与奇异 Jordan 类的描述（3.1）、（3.2）以及备注 3.1可知，若 J是（v, x）的奇异 Jordan 类，则 $\mathrm{GL}_{2n}\,\psi(J) = \psi(\mathrm{GL}_{2n} * J)$ 是 ψ（v, x）的奇异 Jordan 类，因此该映射定义良好。单射性的证明与（1）中相同，注意到增强模 $\mathbf{V}_{2n}$ 中属于 ψ像内的所有幂零轨道，都对应于形如（$\mu \cup \mu$; $\nu \cup \nu$）的双分拆。□

3.1. 增强 Jordan 类的局部研究。 本节研究增强 Jordan 类的几何性质，证明它们是局部闭且光滑的。

设 M 是$\mathbf{G}$ 的一个抛物子群的 Levi 子群，并令 $\mathfrak{m} = \mathrm{Lie}(M)$。我们设

$$\mathfrak{m}^\circ := \{x \in \mathfrak{m} \mid \mathbf{G}^{x_s} \subseteq M\}. \tag{3.3}$$

根据 [13, 引理 2.1], ，其证明对于约化群$\mathbf{G}$ 以及任意特征的$\Bbbk$同样成立，子集 $\mathfrak{m}^\circ$ 是 $\pi_{\mathfrak{m},\,M}$-饱和的开仿射子集 $\mathfrak{m}$。因此我们有

$$\mathfrak{m}^\circ = \{x \in \mathfrak{m} \mid \mathbf{G}^x \subseteq M\}. \tag{3.4}$$

此外，$\mathbf{V}_M := \Bbbk^n \oplus \mathfrak{m}$是 M 的增强模，因此 $\mathbf{V}_M /\!/ M = \mathfrak{m} /\!/ M$, [37]，故子集 $(\Bbbk^n, \mathfrak{m}^\circ)$ 是 $_{,M}$-饱和的开仿射子集，包含于 $\mathbf{V}_M$ 中。对于任意半单元$y \in \mathfrak{m}^\circ$ ，我们有:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^y)^{\mathbf{G}\text{-reg}} = \{z \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathfrak{gl}_n^y = \mathfrak{gl}_n^z\} = \{z \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathfrak{m}^y = \mathfrak{gl}_n^z\} = \mathfrak{m}^\circ \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{m}^y)^{M\text{-reg}}. \tag{3.5}$$

引理 3.4。 设 M 是 $\mathbf{G}$ 的一个抛物子群的 *Levi* 子群，其增强模为 $\mathbf{V}_M$；设 $\mathfrak{m} = \mathrm{Lie}(M)$，设 y 是 $\mathfrak{m}^\circ$ 中的一个半单元，并设

$$\phi\colon \mathbf{G} \times^M \mathbf{V}_M \to \mathbf{V}, \quad g * (v, x) \mapsto g(v, x). \tag{3.6}$$

那么，存在 $_{,\mathbf{G}}$-饱和的主开子集 $U_{\mathfrak{gl}_n}$，它是 $\mathbf{V}$ 的子集；以及 $_{,M}$-饱和的主开子集 $U_{\mathfrak{m}}$，它是 $\mathbf{V}_M$ 的子集且包含 $(0, y)$，使得 ϕ 在 $\mathbf{G} \times^M U_{\mathfrak{m}}$ 上的限制是到 $U_{\mathfrak{gl}_n}$ 的满射´*etale* 态射。

证明。我们验证 [5, 定理 6.2], 的假设，也就是 Luna 基本引理在任意特征下的推广。簇 $\mathrm{G} \times^M \mathrm{V}_M$ 和 V 光滑且不可约。轨道 $\mathrm{G} * (0, y)$ 是闭的，因为它是闭子集 $\mathrm{G} \times \{(0, y)\}$ 经由 $\pi_{\mathbf{G}\times\mathbf{V}_M, M}$ 的像。此外，$\phi(\mathrm{G} * (0, y)) = \mathrm{G}(0, y) \subset (0, \mathfrak{gl}_n)$ 是一个半单伴随轨道，因此是闭的。并且，ϕ 在 $\mathrm{G} * (0, y)$ 上是单射：事实上，若对于某些 $g, h \in \mathrm{G}$，有 $\phi(g * (0, y)) = \phi(h * (0, y))$，则 $m := g^{-1}h \in G^y \subset M$，因此 $h * (0, y) = gm * (0, y) = g * m(0, y) = g * (0, y)$。最后，我们验证 ϕ 在 $1 * (0, y)$ 处是 ´étale 的。

我们定义映射

$$\begin{aligned} \iota_1\colon \mathbf{G} &\to \mathbf{G}\times\mathbf{V}_M, & g &\mapsto (g,0,y),\\ \iota_2\colon V &\to \mathbf{G}\times\mathbf{V}_M & v &\mapsto (1,v,y),\\ \iota_3\colon \mathfrak{m} &\to \mathbf{G}\times\mathbf{V}_M & b &\mapsto (1,0,b). \end{aligned}$$

于是，由 [9, §16.1], ，态射 $\phi\colon \mathbf{G}\times\mathbf{V}_M\to\mathbf{V}$ 在点 $(1,0,y)$ 处的切映射，由 $\widetilde{}(g*(v,x))\mapsto(gv,gxg^{-1})$ 给出，是线性映射 $d_{(1,0,y)}\phi\colon \mathfrak{gl}_n\oplus\mathbf{V}_M\to\Bbbk^n\oplus\mathfrak{gl}_n$，其定义如下：

$$\begin{aligned} d_{(1,0,y)}(B,v,x) &= d_1(\widetilde{\phi}\circ\iota_1)(x)+d_0(\widetilde{\phi}\circ\iota_2)(v)+d_y(\widetilde{\phi}\circ\iota_3)(B)\\ &= (0+v+0,[x,y]+0+B) \end{aligned}$$

对于 $B\in\mathfrak{gl}_n$ 以及 $(v,x)\in\mathbf{V}_M$。映射 $\mathfrak{gl}_n\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{gl}_n$（由 $(B,x)\mapsto[x,y]+B$ 给出）的满射性，证明方法与 [13, 引理 2.1], 的证明相同；该证明在任意特征下仍然成立。因此，上述切映射在 $(1,0,y)$ 处是满射的，这意味着 ϕ 在 $1*(0,y)$ 处的切映射也是满射的。由维数理由，后者也是双射，因此根据 [30, 命题 2.9], ϕ 在 $1*(0,y)$ 处是 ´étale 的。根据 [5, 定理 6.2] ，存在 $f\in k[\mathbf{V}]^{\mathbf{G}}$，使得 $f(\mathbf{G}y)=1$，并且将 ϕ 限制在与 $f\circ\phi\in\mathbf{k}[\mathbf{G}\times^M\mathbf{V}_M]^{\mathbf{G}}$ 对应的主开子集 $\left(\mathbf{G}\times^M\mathbf{V}_M\right)_{f\circ\phi}$ 上，得到从 $\left(\mathbf{G}\times^M\mathbf{V}_M\right)_{f\circ\phi}$ 到与 f 对应的 $\mathbf{V}$ 的主开子集 $U_{\mathfrak{gl}_n}:=\mathbf{V}_f$ 的满射 étale 态射。现在，$f\circ\phi\in\mathbf{k}[\mathbf{G}\times^M\mathbf{V}_M]^{\mathbf{G}}=\mathbf{k}[\mathbf{V}_M]^M$。取 $U_{\mathfrak{m}}$ 为 $\mathbf{V}_M$ 中相应的主开子集，即得结论，使得 $\left(\mathbf{G}\times^M\mathbf{V}_M\right)_{f\circ\phi}=\mathbf{G}\times^M U_{\mathfrak{m}}$。□

注 3.5. 在 [14] 中已经观察到，对于 $\mathbf{G}$ 的伴随作用，通常的 Jordan（分解）类与簇的几何不依赖于 $\Bbbk$ 的特征。

引理 3.6. 设 M 为 $\mathbf{G}$ 的某个抛物子群的 *Levi* 子群，设 $\mathfrak{m}=\mathrm{Lie}(M)$，并设 $\mathfrak{J}$ 为一个与 $(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)$ 相交的增强 *Jordan* 类。设 $\mathfrak{J}_{M,1},\ldots,\mathfrak{J}_{M,r}$ 为 M-作用的增强 *Jordan* 类，满足 $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{J}_{M,i}\cap(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)\neq\emptyset$。

则，

(1) $\mathfrak{J}\subset\mathbf{G}(\Bbbk^n+\mathfrak{m}^\circ)$。*(2)* $(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)\cap\mathfrak{J}=(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)\cap(\bigcup_{i=1}^r\mathfrak{J}_{M,i})$ *(3)* 设 $(v,y)=(v,y_n)+(0,y_s)\in\mathfrak{J}$。则

$$(\Bbbk^n,(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^\circ)\cap\mathfrak{J}=(\Bbbk^n,(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^\circ)\cap\left((0,\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^{\mathbf{G}^{y_s}\text{-reg}})+N_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^{y_s})(v,y_n)\right).$$

证明。(1) 设 $(v,x)=(v,x_s+x_n)\in(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)\cap\mathfrak{J}$。于是，$\mathfrak{gl}_n^{x_s}\subseteq\mathfrak{m}$ 且 $x_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})$，它包含于 $\mathfrak{gl}_n^{x_s}$ 的每个极大环面中，因此也包含于 $\mathfrak{m}$ 的某个极大环面中。由此，(3.5) 给出 $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}}=\{z\in\mathfrak{gl}_n\mid\mathfrak{gl}_n^{x_s}=\mathfrak{gl}_n^z\}\subseteq\mathfrak{m}^\circ$。由于 $\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ$ 是饱和的，$\mathfrak{J}\subset\mathbf{G}(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)$。

(2) 包含映射 $\subseteq$ 根据 $\mathfrak{J}_{M,i}$ 的定义显然成立。我们证明 $\supseteq$。设 $\mathfrak{J}_{M,i}$，其中 $i\in\{1,\ldots,r\}$。根据假设，存在 $(v,x)=(v,x_s+x_n)\in\mathfrak{J}_{M,i}\cap\mathfrak{J}\cap(\Bbbk^n,\mathfrak{m}^\circ)$。利用

M-稳定性（$\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ$）两次，并结合（3.5），我们得到：

$$\begin{aligned}(\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \mathfrak{J}_{M,i} &= (\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \left(M\left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}^{x_s})^{M\text{-reg}} + x_n\right)\right) \\ &= M\left((\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}^{x_s})^{M\text{-reg}} + x_n\right)\right) \\ &= M\left((\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\right)\right) \\ &= (\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \left(M\left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\right)\right) \subseteq (\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \mathfrak{J}.\end{aligned}$$

(3) 设 $(v_z, z_s + z_n) \in (\mathbb{k}^n, (\mathfrak{gl}_n^{y_s})^\circ) \cap \mathfrak{J}$。那么，对某个 $g \in \mathbf{G}$，有 $g\mathbf{G}^{z_s}g^{-1} = \mathbf{G}^{y_s}$。现在，$z_s \in (\mathfrak{gl}_n^{y_s})^\circ$ 以及 $\mathbf{G}^{y_s}$ 和 $\mathbf{G}^{z_s}$ 都是连通的。因此，基于维数的考虑，$\mathbf{G}^{z_s} = \mathbf{G}^{y_s}$，于是 $g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^{y_s})$。

于是，对 $\mathfrak{m} = \mathfrak{gl}_n^{y_s}$，(2) 给出

$$\begin{aligned}(\mathbb{k}^n, (\mathfrak{gl}_n^{y_s})^\circ) \cap \mathfrak{J} &\subseteq N_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^{y_s})\left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^{\mathbf{G}^{y_s}\text{-reg}} + y_n\right) \\ &= (0, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^{\mathbf{G}^{y_s}\text{-reg}}) + N_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^{y_s})(v, y_n).\end{aligned}$$

另一个包含关系由将 (3.5) 应用于 $M = \mathbf{G}^{y_s}$ 得到。 □

命题 3.7。 增强 *Jordan* 类在$\mathbf{V}$ 中是局部闭且光滑的。

证明。设 $\mathfrak{J}$ 是某个 $(v, x) = (0, x_s) + (v, x_n)$ 的增强 Jordan 类。我们首先证明它在 V 中是局部闭的。令 $M = G^{x_s}$，则有 $x \in \mathfrak{m}^\circ$。设 $U_{\mathfrak{m}}$、$U_{\mathfrak{gl}_n}$和 $\phi\colon \mathrm{G} \times^M U_{\mathfrak{m}} \to U_{\mathfrak{gl}_n}$分别为引理 3.4 中的 V_M 和 V 的饱和主开子集，以及满射 ´étale 态射。此处 $(v, x) \in U_{\mathfrak{m}}$，因此 $\mathfrak{J} \subset U_{\mathfrak{gl}_n}$。只需证明 $\mathfrak{J}$ 在$U_{\mathfrak{gl}_n}$ 中是局部闭的。当且仅当它在 ϕ下的原像，即 $\mathrm{G} \times^M (\mathfrak{J} \cap U_{\mathfrak{m}})$，在 $\mathrm{G} \times^M U_{\mathfrak{m}}$ 中是局部闭的；而这又等价于要求 $\mathfrak{J} \cap U_{\mathfrak{m}}$ 在 $U_{\mathfrak{m}}$ 中是局部闭的。后者局部闭，当且仅当 $(\mathbb{k}^n \mathfrak{m}^\circ) \cap \mathfrak{J} \cap U_{\mathfrak{m}}$ 在 $(\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap U_{\mathfrak{m}}$ 中是局部闭的；这又当且仅当 $(\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ) \cap \mathfrak{J}$ 在 $(\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ)$ 中是局部闭的。最后这一断言由引理 3.6 (3) 得出。类似地，$\mathfrak{J}$ 在 (v, x) 处光滑，当且仅当 $\mathrm{G} \times^M (\mathfrak{J} \cap U_{\mathfrak{m}})$ 在 $1 * (v, x)$ 处光滑；这又当且仅当 $\mathfrak{J} \cap U_{\mathfrak{m}}$ 在 (v, x) 处光滑。再与 $(\mathbb{k}^n, \mathfrak{m}^\circ)$ 相交后，我们再次应用引理 3.6 (3)，得到光滑局部闭子集的不交并。□

命题 3.8. 设 $\mathfrak{J}$ 为$(v, x) = (0, x_s) + (v, x_n)$的增强 *Jordan* 类。则

$$\dim \mathfrak{J} = \dim \mathbf{G}(v, x) + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s}). \tag{3.7}$$

证明。 我们考虑支配作用态射

$$\begin{aligned}\mu\colon \mathbf{G} \times \left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\right) &\to \overline{\mathfrak{J}} \\ (g, (v, y_s + x_n)) &\mapsto g(v, y_s + x_n).\end{aligned}$$

存在一个非空开子集 U 属于 $\mathfrak{J}$，使得对于任意 $u \in U$

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{J} &= \dim\left(\mathbf{G} \times \left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\right)\right) - \dim \mu^{-1}(u) \\ &= \dim \mathbf{G} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s}) - \dim \mu^{-1}(u).\end{aligned}$$

我们估计 $\mu^{-1}(u)$ 的维数。由 $\mathfrak{J}$ 的不可约性、 $\mathfrak{J}^{-}$的稠密性以及$\mathbf{G}$对 μ 的等变性，我们可以选择 u使其属于 $\big(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\big)$，因此对于某个 $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}}$，有 $u = (v, z + x_n)$。令$S = \mathbf{G}(v, z + x_n) \cap \big(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\big)$。于是

$$N := |S| \leq |\mathbf{G}z \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})| < \infty$$

因为给定元素在 $\mathfrak{gl}_n$ 的极大环面子代数中只有有限个 $\mathbf{G}$-共轭元。于是令 $S = \{s_1, \ldots, s_N\}$。对于 $j = 1, \ldots, N$，令 $g_j \in \mathbf{G}$ 满足$s_j = g_j(v, z + x_n)$。那么

$$\mu^{-1}(u) = \bigcup_{j=1}^{N} \big\{(hg_j, s_j) \in \mathbf{G} \times \big(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\big) \mid h \in \mathbf{G}^{(v, z+x_n)}\big\}$$

因此 $\dim \mu^{-1}(u) = \dim \mathbf{G}^{(v,z+x_n)} = \dim \mathbf{G}^{(v,x)}$，从而得证。 □

3.2. **奇异 Jordan 类的几何**。本节我们转而关注奇异 Jordan 类的几何，证明它们是局部闭且光滑的。

命题 3.9。 *(1)* 奇异 *Jordan* 类是局部闭的。

(2) Let $(v, x) = (0, x_s) + (v, x_n) \in \mathbb{V}$. *Then*

$$\dim J(v, x) = \dim G(v, x) + \dim \mathbb{V}^{Gx_s}. \tag{3.8}$$

证明。(1) 我们考虑 (2.4) 中的态射 ψ。回忆一下， $\psi(\mathbb{V})$ 在 $\mathbf{V}_{2n}$ 中是闭的，并且 ψ 到 $1 * \mathbb{V}$ 的限制是到其像上的一个同构。令 J 为一个奇异 Jordan 类。那么， J 在 $\mathbb{V}$ 中是局部闭的，当且仅当 $\psi(J)$ 在 $\psi(\mathbb{V})$ 中是局部闭的。由定理 3.3 (3)，存在 $\mathbf{V}_{2n}$ 中的一个增强 Jordan 类 $\mathfrak{J}$，使得 $\psi(J) = \psi(\mathbb{V}) \cap \mathfrak{J}$。命题 3.7 保证 $\mathfrak{J}$ 在 $\mathbf{V}_{2n}$ 中是局部闭的，因此 $\psi(J) = \psi(\mathbb{V}) \cap \mathfrak{J}$ 在 $\psi(\mathbb{V})$ 中是局部闭的。

(2) 根据定理 3.3 (1)，不妨设 $(v, x) = \varphi(v', x')$，其中 $(v', x') \in \mathbf{V}$。考虑仿射簇的占优态射 $G \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J}(v', x') \to J(v, x)$，它由 φ 的限制给出；为简便起见，我们仍将其记为 φ。由于 $J(v, x)$ 在 $J(v, x)$ 中稠密，且 φ 具有等变性，存在一点 z 属于 $J(v, x) \cap \varphi(\mathbf{V})$，使得 $\dim G \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J}(v', x') - \dim \varphi^{-1}(z) = \dim J(v, x)$。替换 $J(v, x)$ 在 $\varphi(\mathbf{V})$ 中的代表元，不妨设 $z = (v, x)$。然后

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(v, x) = \varphi^{-1}\varphi(v', x') &= \{g * (w, y) \in G \times^{\mathbf{G}} \overline{\mathfrak{J}(v', x')} \mid gw = v',\ gy = x'\} \\ &= G^{(v,x)} \times^{\mathbf{G}^{(v',x')}} (v', x').\end{aligned}$$

令 x_s 和 x'_s 分别表示 x和 x'的半单部分。由命题 3.8和注 3.1可得

$$\begin{aligned}\dim \overline{J(v, x)} &= \dim G \times^{\mathbf{G}} \overline{\mathfrak{J}(v', x')} - \dim \varphi^{-1}(v, x) \\ &= \dim G - \dim \mathbf{G} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{x'_s}) + \dim \mathbf{G}(v', x') - \dim G^{(v,x)} + \dim \mathbf{G}^{(v',x')} \\ &= \dim G(v, x) + \dim \mathbb{V}^{Gx_s}.\end{aligned}$$

□

命题3.10。 奇异 *Jordan* 类是光滑的。

证明。设 $(v,x) \in \mathbb{V}$ 具有 Jordan 分解 $(v,x) = (0,x_s) + (v,x_n)$。不妨设 $(v,x) \in \varphi(\mathbf{V})$，且 x_s 如 (2.5) 所述。我们将 V 中的元素与 $\varphi(\mathbf{V})$ 中的元素等同。设 $\mathbf{M} = \mathbf{G}^{x_s} \simeq \mathrm{GL}_\lambda$, $\mathfrak{m} = \mathrm{Lie}(\mathbf{M})$, $M := G^{x_s} \simeq \mathrm{Sp}_{2\lambda}$，且 $\mathfrak{m}^\circ$ 如 (3.3) 所述。设 $\mathbb{V}_M$ 为 M 的奇异模，$\mathbf{V_M}$ 为 M 的增强模。不难验证

$$\widetilde{X} := \{(w, y_s + y_n) \in \mathbb{V} \mid G^{y_s} \subseteq M\} = \pi^{-1}_{\mathbb{V}_M, M} \pi_{\mathbf{V_M}, \mathbf{M}}(\Bbbk^n, \mathfrak{m}^\circ) = M(\Bbbk^{2n}, \mathfrak{m}^\circ) \tag{3.9}$$

因此 $\widetilde{X}$ 是一个 $\pi_{\mathbb{V}_M,\, M}$-饱和开子集 $\mathbb{V}_M$，由备注 2.10可知。由引理 3.6(3)，我们有 (2.7)

$$\begin{aligned}
\widetilde{X} \cap J &= M\left((\Bbbk^{2n}, \mathfrak{m}^\circ) \cap \mathfrak{J}(v,x)\right) \\
&= M\left((\Bbbk^{2n}, \mathfrak{m}^\circ) \cap \left((0, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}))^{\mathbf{M}-\mathrm{reg}} + N_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})(v, x_n)\right)\right) \\
&\subseteq \widetilde{X} \cap \left((0, \mathbb{V}_M)^{M-\mathrm{reg}} + N_G(M)(v, x_n)\right)
\end{aligned}$$

由 (3.9) 可知这些集合相等。因此，$X \cap J$ 是不交并，由局部闭的光滑子集组成 $\mathbb{V}_M$。因此，对于 $X \cap J \cap U$ 中包含点 (U, v) x的所有开邻域，$\mathbb{V}_M$均为光滑，因此 $G \times^M (X \cap J \cap U)$ 对于 U中包含点 (v, x) 的所有开邻域均为光滑 $\mathbb{V}_M$。

若证明存在一个 M-稳定邻域 U_0 of (v, x) in $\mathbb{V}_M$，使得态射 $\chi\colon G \times^M \mathbb{V}_M \to \mathbb{V}$ of 光滑簇 given by $(g*(w, z)) \mapsto (gv, gz)$ 限制到 $G \times^M U_0$ 上后是光滑的，则该陈述成立。事实上，在这种情况下，$G(U_0 \cap X) \cap J$ 是 J 中 (v, x) 的一个光滑邻域。

我们验证 [5, 定理 62] 关于 χ 在 (v, x) 处的假设。轨道闭包和单射性可以像我们在引理 3.4 中所做的那样直接证明。令 $\mathbf{V_H}$ 为 $\mathbf{H}$ 的增强模：$= \mathrm{GL}^{\psi(0,x_s)}{}_{2n}$利用 (2.4) 对 λ的每个分量得到。我们定义态射：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\chi}\colon G \times \mathbb{V}_M \to \mathbb{V}, && \xi\colon \mathrm{GL}_{2n} \times \mathbf{V_H} \to \mathbf{V}_{2n}, \\
&\quad g*(w,z) \mapsto (gv, gz), && \quad g'*(w',z') \mapsto (g'w', g'z').
\end{aligned}$$

要证明 $d\chi$ 在 $(1*(0, x_s))$ 处可逆，只需证明 $d_{(1,0,x_s)}\widetilde{\chi}$ 的满射性即可。这个微分通过将 $\mathfrak{sp}_{2n} \oplus \mathbb{V}_M$ 限制到 $d_{(1,\psi(0,x_s))}\xi$ 而得到。利用引理 3.4 证明中对微分的计算，我们需要证明：对于任意 $(w, y) \in \psi(\mathbb{V})$ 存在$A \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 以及 $(u, z) \in \mathbb{V}_M$ 使得

$$(w, y) = d_{(1,\psi(0,x_s))}\xi(A, (u, z)) = (u, [A, \psi(0, x_s)] + \psi(0, z)),$$

也就是说，在采用（2.4）和（2.5）中的识别后，$[\mathfrak{sp}_{2n}, x_s] + \sum_{i=1}^r \bigwedge^2 \Bbbk^{2\lambda_i} = \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$。我们回顾一下，作为一个 G-模，$\mathfrak{gl}_{2n} = \mathfrak{sp}_{2n} + \bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$。现在，$[\mathfrak{sp}_{2n}, x_s]$ 在 G-模$\mathfrak{gl}_{2n}$ 中的子空间是由满足条件 $\chi(x_s) \neq 0$ 的权 χ所对应的权空间之和。换言之，其元素的非零项位于（2.9）中矩阵块之外，因此$\sum_{i=1}^r \bigwedge^2 \Bbbk^{2\lambda_i} \cap [\mathfrak{sp}_{2n}, x_s] = 0$。由于维数$[\mathfrak{sp}_{2n}, x_s]$ + 维数$\sum_{i=1}^r \bigwedge^2 \Bbbk^{2\lambda_i}$ = 维数 $\bigwedge^2 \Bbbk^{2n}$，结论得证。□

4. Induction of orbits and closures of classes: enhanced case

这里我们在增强情形下证明定理 C 的结论。

4.1. 中心轨道的诱导与中心增强 Jordan 类的闭包。 我们定义从 GL_n 的 Levi 子群 L 的增强模$\mathbf{V}_L$ 到$\mathbf{V}$的轨道归纳。我们从形如（v, x_s）的元素之轨道的诱导定义开始，其中x_s 是半单的且被 L 中心化，以及 $v \in \Bbbk^n$。

若 P 是任一包含 L 作为 Levi 因子的抛物子群，则我们称 P 适配于 L 与 v，如果

$$\overline{Pv} = \overline{Lv}.$$

设 F 为 $\Bbbk^n$ 的一个部分旗标，我们将其记为 $0 \subsetneq \Bbbk^{d_1} \subsetneq \Bbbk^{d_2} \subsetneq \cdots \subsetneq \Bbbk^{d_m} = \Bbbk^n$，并设 P 为 $\mathbf{G}$ 中稳定 F 的抛物子群。旗标 F 的一个分裂给出直和分解 $\Bbbk^n \cong \bigoplus_i \Bbbk^{d_i - d_{i-1}}$ 以及稳定它的 Levi 因子 $L \subseteq P$。该分解也张成 $v = \sum_i v_i$。

引理4.1. 抛物子群 P 适配于 L 和 v，当且仅当存在某个 $1 \le k \le m$ 使得 $\{1 \le i \le m \mid v_i \neq 0\} = \{1, 2, ..., k\}$。特别地，适配抛物子群总是存在的。

证明很简单，因此略去。

令 $(v, x_s) \in \mathbf{V}$，并令 L 为 $\mathbf{G}$ 的 Levi 子群，使得 $L \subseteq \mathbf{G}^{x_s}$。取一个适配于 L 和 v 的 $\mathbf{G}$ 的抛物子群 P，其 Levi 分解为 $P = LU_P$，并令 $\mathfrak{u}_P = \mathrm{Lie}(U_P)$。根据构造，

$$\overline{L(v, x_s)} + (0, \mathfrak{u}_P) = (\overline{Lv}, x_s + \mathfrak{u}_P) = (\overline{Pv}, x_s + \mathfrak{u}_P)$$

是 P-稳定的。

我们考虑伴随丛 $\mathbf{G} \times^P \left(\overline{Lv},\ x_s + \mathfrak{u}_P\right)$ 以及 $\mathbf{G}$-等变态射

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} \colon \mathbf{G} \times^P \left(\overline{Lv}, x_s + \mathfrak{u}_P\right) &\to \mathbf{V} \\ g * (w, y) &\mapsto (gw, gy) \end{aligned} \tag{4.1}$$

这是对 [1, §3]中奇点消解的轻微推广。

引理 4.2。 设 $(v, x_s) \in \mathbf{V}$，设 L 是$\mathbf{G}$ 的一个 *Levi* 子群，满足 $L \subset \mathbf{G}^{x_s}$ 和 $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$；设$P$ 是一个适配于 L 和 v 的抛物子群，其 *Levi* 分解为 $P = LU_P$ 和 $\mathfrak{u}_P = \mathrm{Lie}(U_P)$。

(1) 态射 *(4.1)* 是真态射，因此是闭的。*(2)* 其像是一个 *G*-轨道的闭包。我们将其记为 *O*。*(3)* 轨道 *O* 在 $(v, x_s + (\mathfrak{u}_P \cap (\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}}))$ 中有一个代表元。*(4)* 若 $x_s \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}}$，则 $O = G(v, x_s)$。*(5)* 对于如 *(2.13)* 中的 p，有 $p(O) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{l}, x_s}^{\mathfrak{gl}_n}(\{0\})$；特别地，若 $x_s = 0$，则 $p(O)$ 是 $\mathfrak{gl}_n$ 中对应于 L 的理查森轨道。*(6)* 态射 $\widetilde{\pi}$ 是双有理的。

证明。 (1) 态射 $\widetilde{\pi}$ 是闭的，因为在将 $\mathbf{G}\times^{P}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)$ 与关联簇作同一识别后，它对应于到 $\mathbf{G}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)$ 的投影

$$\{(gP,z)\in\mathbf{G}/P\times\mathbf{G}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)\mid g^{-1}z\in(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)\}.$$

(2) $\widetilde{\pi}$的像是G-稳定的，因为 $\widetilde{\pi}$是G-等变的；它是不可约的，因为$\overline{(Lv,\ x_s+\mathfrak{u}_P)}$是不可约的；并且根据(1)，它是闭的。因此，只需证明Im $\widetilde{\pi}$ 包含有限多个G-轨道。观察 $\mathfrak{gl}_n$中的分量可知，如同 [11, 第2节1] 所述，Im $\widetilde{\pi}$ 中的元素的半单部分包含在 x_s的G-轨道中。因此，它的像包含于$\mathbf{G}(\mathbb{k}^n,x_s+\mathfrak{gl}_n^{x_s}\cap\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n))$。现在，$(\mathbb{k}^n,x_s+\mathfrak{gl}_n^{x_s}\cap\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n))$是将增强幂零锥$\mathbf{G}^{x_s}$平移$(0,x_s)$后得到的，因此它由有限多个$\mathbf{G}^{x_s}$-轨道组成。

（3）注意到

$$\mathbf{O}=\big(\mathbf{G}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)\big)^{\mathbf{G}\text{-reg}}=\mathbf{G}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)^{\mathbf{G}\text{-reg}}.$$

设 $\dim\mathbf{O}=d$，即$\mathbf{O}$ 位于水平集$\mathbf{V}^{(d)}$ 中，该水平集由维数为 d的轨道组成。与（2）中一样，我们看到 $x_s+\mathfrak{u}_P$与 P-共轭于 $\overline{x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})}$中的某个元素。因此，$\mathbf{O}$ 在（$Pv,\ x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})$）$\cap\mathbf{V}^{(d)}$中有一个代表元。由于 P适用于 L和 v,

$$\mathbf{O}\subseteq\mathbf{G}(\overline{Lv},x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})\cap\mathbf{V}_{(d)}\subseteq\mathbf{G}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P)\cap\mathbf{V}_{(d)}=\mathbf{O}$$

并且这些包含映射都是等式。

现在，子集（$Lv,\ \overline{x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})}\cap\mathbf{V}^{(d)}$和（$Lv,\ x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}}$）分别是开集和稠密集，它们包含于不可约子集（$Lv,\ x_s+\overline{(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})}$)中，因此

$$\emptyset\neq(\overline{Lv},x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s}))\cap\mathbf{V}_{(d)}\cap(Lv,x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}})\subseteq\mathbf{O}.$$

通过 L作用，我们得到（$v,\ x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}}$）中的一个代表元。

(4) 若 $x_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}}$，则 $\mathfrak{gl}_n^{x_s}=\mathfrak{l}$，从而 $\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s}=0$，因此 $(v,x_s)\in\mathbf{O}$.

(5) 这是因为 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{l},x_s}^{\mathfrak{gl}_n}(\{0\})=\mathbf{G}(x_s+\mathfrak{u}_P)^{\mathbf{G}\text{-reg}}$，依据 [11, §2.1], [28] 中的论证。

(6) 如 (3) 中那样，选取 $\mathbf{O}$ 的一个代表元 $\widetilde{x}=(v,x)=(v,x_s+x_n)$，并考虑$\mathbf{G}$-等变态射的交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{G}\times^{P}(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P) & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & \overline{\mathbf{O}}\subseteq\mathbf{V}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times p} & & \downarrow{\scriptstyle p}\\ \mathbf{G}\times^{P}(x_s+\mathfrak{u}_P) & \xrightarrow{\pi} & \overline{\mathrm{Ind}_{\mathfrak{l},x_s}^{\mathfrak{gl}_n}(\{0\})}\subseteq\mathfrak{gl}_n\end{array}$$

The [12, 引理 7.10] 的证明中的特征无关判据断言 th at

$$|\widetilde{\pi}^{-1}(v,x_s+x_n)|=[\mathbf{G}^{(v,x_s+x_n)}:P^{(v,x_s+x_n)}]\,\big|(\mathbf{O}\cap(\overline{Lv},x_s+\mathfrak{u}_P))/P\big|.$$

由 (5) 可知，$G^{x_s}x_n$ 是通过抛物子群 P^{x_s}诱导 G^{x_s} 得到的理查森轨道，因此 $[\mathbf{G}^{x_s+x_n}:P^{x_s+x_n}]\,|p(\mathbf{O})\cap(x_s+\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{gl}_n^{x_s})/P^{x_s}|=1$。因此

$$[\mathbf{G}^{(v,x_s+x_n)}:P^{(v,x_s+x_n)}]=[\mathbf{G}^{v}\cap\mathbf{G}^{x_s+x_n}:P^{(v,x_s+x_n)}]=[\mathbf{G}^{v}\cap P^{x_s+x_n}:P^{(v,x_s+x_n)}]=1. \tag{4.2}$$

现在设 $(w, x_s+u) \in \mathsf{O} \cap (Lv, x_s+\overline{\mathfrak{u}_P})$。由于 $|p(\mathsf{O}) \cap (x_s+\mathfrak{u}_P \cap \mathfrak{gl}_n^{x_s})/P^{x_s}| = 1$，存在 $w' \in Lv$ 使得 $(w', x_s+\overline{x_n}) \in P(w, x_s+u)$。由于 $P(w, x_s+u) \subset \mathsf{O}$，存在 $g \in \mathsf{G}$ 使得 $g(w, x_s+u) = (v, x_s+x_n)$。但这样一来，$g \in \mathsf{G}^{x_s+x_n} \subset P^{x_s+x_n}$，由此 $P(v, x_s+x_n) = P(w, x_s+u)$。结合 (4.2)，得到 $|\widetilde{\pi}^{-1}(v, x_s+x_n)| = 1$。

□

我们将按引理 4.2 所构造的轨道 O 记为 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{v}_{L,P}} L(v, x_s)$，并称之为 $L(v, x_s)$ 的诱导增强轨道 。我们观察到，诱导轨道的维数性质推广了诱导伴随轨道的相应性质。

引理 4.3. 设 x_s, L, $\mathfrak{l}$, v 与 P 如引理4.2。则

$$\mathrm{codim}_{\mathbf{V}} \mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_L,P} L(v, x_s) = \mathrm{codim}_{\mathbf{V}_L} L(v, x_s). \tag{4.3}$$

证明。设 $P = LU_P$ 为 P 的 Levi 分解，且 $\mathfrak{u}_P = \mathrm{Lie}(U_P)$。由纤维定理，$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{v}_{L,P}} L(v, x_s)$ 中存在稠密子集 U，使得对任意 $u \in U$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{codim}_{\mathbf{V}}(\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_L,P} L(v, x_s)) &= \dim \mathbf{G} + n - \dim\left(\mathbf{G} \times^P \left(\overline{Lv}, x_s + \mathfrak{u}_P\right)\right) + \dim \widetilde{\pi}^{-1}(u) \\
&= n + \dim P - \dim U_P - \dim Lv + \dim \widetilde{\pi}^{-1}(u) \\
&= n + \dim L - \dim Lv + \dim \widetilde{\pi}^{-1}(u) \\
&= \mathrm{codim}_{\mathbf{V}_L} L(v, x_s) + \dim \widetilde{\pi}^{-1}(u).
\end{aligned}$$

结论由引理4.2(6) 得出。 □

4.2. **以 (v, x_s) 为对象的增强类的闭包**。我们现在可以描述增强 Jordan 类 $\mathfrak{J}$ 的闭包，使得 $p(\mathfrak{J})$ 由半单元素组成。

命题 4.4. 设 $(v, x_s) \in \mathbf{V}$，其中 $x_s \in \mathfrak{gl}_n$ 为半单，设 $L = \mathbf{G}^{x_s}$ 和 $\mathfrak{l} = \mathfrak{gl}_n^{x_s}$，并设$P$ 为$\mathbf{G}$ 的一个适配抛物子群，适配于 L 和 v。设 $\mathfrak{u}_P$ 为$\mathrm{Lie}(P)$的幂零根。则

$$\overline{\mathfrak{J}(v, x_s)} = \mathbf{G}\left(\overline{Lv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_P\right), \quad \textit{and} \quad \overline{\mathfrak{J}(v, x_s)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{V}) = \mathbf{G}\left(\overline{Lv}, \mathfrak{u}_P\right) = \overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_L,P} L(v, 0)}. \tag{4.4}$$

特别地，$\mathfrak{J}(v, \overline{x_s) \cap \mathcal{N}}(\mathbf{V})$ 是不可约的，并且$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{v}_{L,P}} L(v, 0)$ 与适配抛物子群的选取无关。

证明。由于 P适配于 L和 v，闭且不可约的子集 $\left(Lv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_P\right)$ 是 P-稳定的。我们考虑伴随丛$\mathbf{G}\times^P \left(Lv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_P\right)$ 以及$\mathbf{G}$-等变态射

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\colon \mathbf{G} \times^P \left(\overline{Lv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_P\right) &\to \mathbf{V} \\
g * (w, y) &\mapsto (gw, gy).
\end{aligned}$$

按照引理 4.2 (1) 中的论证，我们可知 $\widetilde{\mu}$是闭的，因此其像 $\mathbf{G}\left(Lv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_P\right)$ 是闭且不可约的。现在，$\mathfrak{J}(v, x_s) = \mathbf{G}\left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}}\right) \subseteq \mathbf{G}\left(Lv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_P\right)$ 由此可得$\overline{\mathfrak{J}(v, x_s)} \subseteq$

$\mathbf{G}\left(\overline{Lv},\ \mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_P\right)$。此外，根据（3.7）

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{J}(v,x_s) &= \dim \mathbf{G}(v,x_s)+\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l})\\ &= \dim \mathbf{G}-\dim \mathbf{G}^{x_s}+\dim \mathbf{G}^{x_s}v+\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l})\\ &= \dim \mathbf{G}-\dim P+\dim \mathfrak{u}_P+\dim \overline{Lv}+\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l})\\ &= \dim \mathbf{G}\times^P\left(\overline{Lv},\mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_P\right)\geq \dim \mathbf{G}\left(\overline{Lv},\mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_P\right)\geq \dim \mathfrak{J}(v,x).\end{aligned}$$

因此，$\dim \mathfrak{J}(v,x)=\dim \mathbf{G}\left(Lv,\ \mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_P,\ \right)$并且第一个断言由$\mathbf{G}\left(Lv,\ \mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_P,\ \right)$的不可约性得出。第二个等式成立，是因为如果$(w,\ y)=(w,\ z+x_n)\in\left(Lv,\ \mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_P\right)$，那么它属于 $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 当且仅当 $z=0$。□

鉴于命题 4.4，我们将省略 P在 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\mathbf{v}_{L,\ P}L(v,\ 0)$ 中的下标，简写为 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_L L(v,0)$。引理 4.2 中的诱导轨道都可以归约到$x_s=0$ 的情形，下面我们将看到这一点。

命题 4.5. 设 L 是 $\mathbf{G}$ 的一个抛物子群的 *Levi* 子群，且 $\mathfrak{l}=\mathrm{Lie}(L)$。设 $x_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ 且 $M:=\mathbf{G}^{x_s}$，并设 $\mathbf{V}_M$ 和 $\mathbf{V}_L$ 分别为 L 和 M 的增强模。设 $v\in\mathbb{k}^n$，且 P 是适配于 L 和 v 的一个抛物子群。那么 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\mathbf{v}_{L,\ P}L(v,x_s)$ 与适配抛物子群 P 无关，并且

$$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{L,P}}L(v,x_s)=\mathbf{G}\left((0,x_s)+\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_M}_{\mathbf{V}_L}L(v,0)\right)\tag{4.5}$$

也就是说，$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\mathbf{v}_{L,P}L(v,x_s)$ 的半单部分是 x_s，而对于对应于 M的增强模，幂零部分可以取自诱导轨道$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_M}\mathbf{v}_L\ L(v,0)$。

证明。注意到 $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个抛物子代数的 Levi 子代数：$=\mathrm{Lie}(M)=\mathfrak{gl}_n^{x_s}$，并且 L是抛物子群 P^{x_s}（属于 M）的 Levi 子群。此外，$P^{x_s}v\subseteq Pv\subseteq Lv$，也就是说，$P^{x_s}$适配于 L，并且 v对于增强模 $\mathbf{V}_M$成立。此外，$\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{m}$是不可约的，因为它是 $\mathrm{Lie}(P^{x_s})$ 的幂零根基。由引理 4.2 (3)

$$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{L,P}}L(v,x_s)=\mathbf{G}\left(v,x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{m})^{\mathbf{G}\text{-reg}}\right).$$

稠密性论证表明，$x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{m})^{M\text{-reg}}$ 与 $x_s+(\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{m})$的正则轨迹相交；根据 Jordan 分解的性质，该正则轨迹由如下形式的元素构成：x_s+u，其中 u 属于 $\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{m}$ 的 M-正则部分。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{L,P}}L(v,x_s) &= \mathbf{G}\left((0,x_s)+M\left((\mathfrak{u}_P\cap\mathfrak{m})^{M\text{-reg}},v\right)\right)\\ &= \mathbf{G}\left((0,x_s)+\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_M}_{\mathbf{V}_L}L(v,0)\right).\end{aligned}$$

□

借助命题4.5，对任意 $x_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$，我们可以在表达式$\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\mathbf{v}_{L,P}L(v,x_s)$中去掉下标 P。

命题 4.6. 设$(v,x_s)\in\mathbf{V}$，其中 x_s 为半单，$L=\mathbf{G}^{x_s}$，且 $\mathfrak{l}=\mathfrak{gl}_n^{x_s}$。则

$$\overline{\mathfrak{J}(v,x_s)}=\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\overline{\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}}(v,z)}=\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\overline{\mathbf{G}\left((0,z)+\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}^{\mathbf{G}^z}}L(v,0)\right)}. \tag{4.6}$$

and

$$\overline{\mathfrak{J}(v,x_s)}^{\mathbf{G}\text{-reg}}=\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}}(v,z)=\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\mathbf{G}\left((0,z)+\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}^{\mathbf{G}^z}}L(v,0)\right). \tag{4.7}$$

证明。设 $P=LU_P$ 是适配于 L 和 v 的抛物子群，并设 $\mathfrak{u}_P=\mathrm{Lie}(U_P)$。于是（4.4）给出

$$\overline{\mathfrak{J}(v,x_s)}=\mathbf{G}(\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}(\overline{Lv},z+\mathfrak{u}_P))=\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\mathbf{G}(\overline{Lv},z+\mathfrak{u}_P)=\bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\overline{\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}}L(v,z)}$$

因此（4.6）由命题 4.5 得出。接着，（4.7）由（4.3）得出。 □

4.3. 从向量诱导的组合学。 现在，我们确定由幂零元 $(v,\ 0)\in\mathcal{N}(\mathbf{V}_L)$ 经选定的 Levi 子群 L 诱导得到的增强轨道所对应的双分拆。

首先，选取 n 的一个合成 $(n_1,\ \ldots\ldots,\ n_r)$，即 $\sum_j n_j=n$，以及一个向量空间分解 $\Bbbk^n=\bigoplus_{j=1}^r\Bbbk^{n_j}$。稳定子空间 $\mathbf{G}\ \Bbbk^{n_j}$ 的子群是 Levi 子群 $L\subseteq\mathbf{G}$。我们有 $L\simeq\prod_{j=1}^r\mathrm{GL}^{n_j}$。

在本节后续内容中，我们用 $v_{1,\ j},\ \ldots\ldots,\ v_{n_j,\ j}$ 表示 $\Bbbk^{n_j}$ 的标准基，因此$\{v_{i,j}:\ 1\le j\le r,\quad 1\le i\le n_i\}$ 是 $\Bbbk^n$ 的一组基。

L 的增强幂零锥 $\mathcal{N}(\mathbf{V}_L)$ 具有形式 $\mathcal{N}(\mathbf{V}_L)=\prod_{i=1}^r\mathbf{k}^{n_i}\times\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_{n_i})$。如第 2.3 节所述，$\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 中的 G-轨道由双分拆 $\mathcal{Q}_n$ 参数化，因此 $\mathcal{N}(\mathbf{V}_L)$ 中的 L-轨道由 $\prod_{i=1}^r\mathcal{Q}_{n_i}$ 的元素参数化。注意，若 $v\neq0$，则 $\mathbf{G}(v,\mathbf{0})\in\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 对应于 $(1^n;\ \emptyset)$；而若 $v=0$，则对应于 $(\emptyset;1^n)$。

取一个元素 $v\in\Bbbk^n$，并记 $v=v^1+\cdots+v^r$ 为满足 $v^i\in\Bbbk^{n_i}$ 的分解。重新排列 $(n_1,\ \ldots\ldots,\ n_r)$ 后，不妨设对 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k$，有 $v^i\neq0$，并且$v^{k+1}=\cdots=v^r=0$，其中 k 固定。事实上，我们可以（并且将会）假设 $v^j=\sum_{i=1}^{n_j}v_{i,\ j}$。

将基 $\{v_{i,j}\}$ 排序，使得 $v_{i,\ j}$ 先于 $v_{i',\ j'}$ 只要 $j\le j'$。设 P 为包含 L作为 Levi 因子的抛物子群，它也包含上三角 Borel 子代数。于是由引理 4.1 以及由我们对 $\{v_{i,j}\}$ 的排序选择可知，P 适配于 L 与v。综合上述评注，轨道 Lv 可用双分拆记号写成如下形式

$$Lv=\prod_{i=1}^k\mathbf{O}_{(1^{n_i},\emptyset)}\times\prod_{i=k+1}^r\mathbf{O}_{(\emptyset,1^{n_i})}.$$

在引理 4.2 中，我们证明数据（P，L，Lv）导出一个态射 $\mathbf{G}\times^P(Lv,\ \mathfrak{u}_P)\ \overline{\to}\mathbf{V}$，并且存在一个轨道 $\mathbf{O}:=\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_L(v,\ \mathbf{0})$，它在像中稠密。

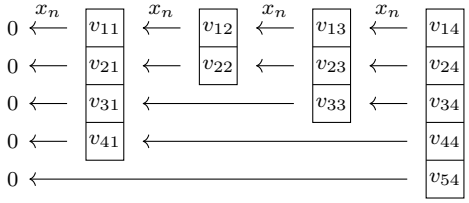
命题 4.7. 与$\mathbf{O}$ 对应的双分拆为$(\mu;\ \nu)$，其中 $\mu_j=|\{i\in\{1,\ldots,k\}:\ n_i\ge j\}|$ 且 $\nu_j=|\{i\in\{k+1,\ldots,r\}:\quad n_i\ge j\}|$。

证明。 我们选取一个幂零元 $x_n \in \mathrm{Ind}_{\mathfrak{l},\,0}^{\mathfrak{g}}(\{0\}) \cap \mathfrak{u}_P$，并固定如上所述的 v。我们断言，$\mathbf{G}(v,\ x_n)$ 的双分拆恰好是本命题陈述中所描述的那个。为证明这一点，我们将恰当地选择 x_n，使得 $\{v_{i,j}\}_{i,\,j}$ 构成 $(v,\ x_n)$ 的标准基（必要时可重新标记基）。

定义

$$x_n v_{i,j} := \begin{cases} v_{i,l} & \text{if } n_l \geq n_j \text{ and } n_q < n_j \text{ for } l < q < j \\ 0 & \text{if no such } l \text{ exists;} \end{cases} \tag{4.8}$$

为帮助读者理解 x_n 的定义，我们提供如下示意图：设 (4，2，3，5) 是 14 的一个合成。随后，我们构造一个单列杨表，将向量 $v_{i,\,j}$ 放置在第 i 行、第 j 列，其中幂零元 x_n 的作用如下：



令 $\lambda \vdash n$ 表示将 $(n_1,\ \ldots,\ n_r)$ 重新排列为一个分拆后，再取其转置所得到的分拆。等价地，$\lambda = (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)$，其中 $\lambda_i := |\{1 \leq j \leq r\colon\ n_j \geq i\}|$ 且 $m = \max\{n_1, \ldots, n_r\}$。注意，$\lambda_i = \mu_i + \nu_i$，其中 $(\mu; \nu)$ 的定义与命题的陈述一致。

为便于说明，我们假设 $w = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_i} v_{i,\,j}$，并注意到，在我们的例子中，$x_n|_{\mathbb{k}[x_n]w}$ 的 Jordan 块大小为 (2，2，1，1)。

由（4.8）直接可得，x_n 的若尔当块大小由 λ给出。此外，不难看出 $x_n|_{\mathbb{k}[x_n]v}$ 的若尔当块大小由 μ给出。我们由此推出$\mathbf{G}(v, x_n) = \mathbf{O}_{(\mu;\nu)} \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{V})$，利用 [1, 推论 2。9]。

现在 $(v, x_n) \in (v, \mathfrak{u}_P)$，因此它位于态射（4.1）的像中，即$\mathbf{G}(v, x_n) \subset \mathbf{O} \subseteq \overline{\mathbf{V}}$。

我们将证明$\mathbf{G}(v, x_n) = \mathbf{O}$，方法是计算这两个簇的维数，并注意到它们相等。

Fi首先，引理 4.2(6)，[28] 以及第(8)部分，即 [1, 命题 2。8] 蕴含 t

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{O} &= \dim \mathbf{G} \times^P (\overline{Lv}, \mathfrak{u}_P) \\ &= \dim \mathbf{G} - \dim L + \dim Lv \\ &= n^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{r} n_i^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i \\ &= \dim \mathbf{G}x_n + \textstyle\sum_i \mu_i \\ &= \dim \mathbf{G}(v, x_n). \end{aligned} \tag{4.9}$$

因此$\mathbf{O} = \mathbf{G}(v, x_n) = \mathbf{O}^{(\mu;\nu)}$。 □

推论 4.8。 *(1)* $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 中的每个轨道都等于 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_L(Lv)$，其中 *Levi* 子群 L 和轨道 $Lv \subseteq \mathbb{k}^n$ 可任意选取。*(2) (1)* 中的有序对 (L, Lv) 在 $\mathbf{G}$-共轭意义下唯一。

(3) $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 中的刚性轨道恰好是形如 $\mathbf{G}(v,0)$ 的轨道，其中 $v\in\Bbbk^n$。这些轨道的双分拆为 $(1^n;\emptyset)$ 或 $(\emptyset;1^n)$。

证明。（1）设 $(\mu;\ \nu)\ \in\mathcal{Q}_n$ 是一个双分拆。令 $(n_1,...,n_k)$ 为 μ 的列长。明确地说，这是 μ 的转置分拆，并按 $n_1\le\cdots\le n_k$ 的顺序排列，其中 $k=\mu_1$。我们还令 $n_{k+1},\ldots,n_r$ 表示代表 ν 的杨图的列长。于是，数据 $(n_1,\ldots,n_r)$ 连同 k 一起，按照命题 4.7 之前的说明，给出一个 Levi 子群 L 和一个向量 $v\in\Bbbk^n$ 的选择。此外，前引文还表明 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{V}_L(Lv)\ =\mathbf{O}^{(\mu;\nu)}$，这就证明了（1）。

(2) 我们断言 t hat G-轨道对 (L,Lv) 与双分拆之间存在一一对应关系。

设 $(L,\ Lv)$ 是 $\Bbbk^n$ 中的一对 Levi L 和 L-轨道。$(L,\ Lv)$ 的 G-轨道由 L 的 G-轨道和 Lv 的 $N_{\mathbf{G}}(L)$-轨道唯一确定。 L 的 G-轨道由合成 $(n_1,\ \ldots,\ n_r)$ 的等价类分类，其中 $L\simeq\prod_{i=1}^r\mathbf{GL}_{n_i}$，合成的等价关系由重排给出。显然，每个等价类都由唯一的分拆表示。

固定 $L\simeq\prod_{i=1}^r\mathbf{GL}_{n_i}$ 后，我们可以定义分解 $\Bbbk^n=\bigoplus_{i=1}^r\Bbbk^{n_i}$，其中 $\Bbbk^{n_i}\subseteq\Bbbk^n$ 是在 $\prod_{j\neq i}\mathbf{GL}_{n_j}\subseteq L$ 下不变的子空间。现在 $v\in\Bbbk^n$ 分解为 $v=\sum_{i=1}^r v^i$，我们将集合 $\{1\le i\le r:\ v^i\neq 0\}$ 称为 v 的支撑。注意， Lv 的所有元素具有相同的支撑。于是， Lv 的 $N_{\mathbf{G}}(L)$-轨道由 v 的支撑确定，允许对合成中各部分相等的指标 1，...， r 进行置换。

现在由 (L,Lv) 构造一个双分拆 $(\mu;\nu)\ \in\mathcal{Q}_n$，令 μ 为所有使得 i 落在 v的支撑中的 n_i 所组成的有序列表，并令 ν 为所有使得 i不落在该支撑中的 n_i 所组成的有序列表。不难看出，这给出了一个双射。

现在根据第 (1) 部分，存在一个从对 (L,Lv) 的 G-共轭类到 $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 中 G-轨道的满射。由于这两个集合都由 $\mathcal{Q}_n$ 参数化，该映射是一个双射。

(3) 根据第 (1) 部分，一个轨道不是刚性的，如果双分拆既不是 $(1^n;\emptyset)$ 也不是 $(\emptyset;1^n)$。另一方面，$(1^n;\ \emptyset)$ 与 $(\emptyset;\ 1^n)$ 恰好是 G-轨道，它们位于 $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ 中并容许形如 (v,x) 且满足 $x=0$ 的代表元。这两者都不能由真 Levi 子群诱导，这要归功于引理 4.2(5)。 □

例 4.9. 令 $n=13$，使得 $\mathcal{N}(\mathbf{V})\ =\Bbbk^{13}\times\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_{13})$，并假设我们希望诱导幂零轨道

$$\mathbf{O}:=\mathbf{O}_{(1^3;\emptyset)}\times\mathbf{O}_{(1^4;\emptyset)}\times\mathbf{O}_{(\emptyset;1^4)}\times\mathbf{O}_{(\emptyset;1^2)}$$

对应于 Levi 子群 $L\ \cong\mathbf{GL}_3\times\mathbf{GL}_4\times\mathbf{GL}_4\times\mathbf{GL}_2$，直到 $\mathbf{GL}_{13}$。我们将通过选取 $\mathbf{O}$ 和 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_L$ $(\mathbf{O})$ 的代表元，并证明它们满足所需性质来说明这一点。

我们首先构造一个代表元 $(v,\ \ x_n)\ \in\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_L\mathbf{O}$。根据与O对应的双分拆，我们知道 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_L$ $\mathbf{O}$ 对应的双分拆为 $((2^3,1);\ (2^2,1^2))$。因此，元素x_n必然在$\Bbbk^{13}$上作用时具有大小为 $\lambda=\mu+\nu=($ $4^2,3,2)$ 的若尔当块。令

$$\{v_{ij}\ :\ 1\le i\le 4,1\le j\le\lambda_i\}$$

为 x_n 在$\mathbb{k}^{13}$上的一组 Jordan 基。我们用下图表示它，其中 x_n 将每一行最左边的方框映为 0，并将其他每个方框映为其紧邻左侧的方框。

v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}
v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}
v_{31}	v_{32}	v_{33}	
	v_{41}	v_{42}	

若定义初等矩阵算子 $e_{(i,j),\ (k,l)}$ 在 Jordan 基上的作用为：

$$e_{\{(i,j),(k,l)\}}v_{k,l} = \begin{cases} v_{i,j} & \text{if } i=k, l=j+1, j\geq 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

那么 x_n 可写为：

$$x_n = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{\lambda_{i-1}} e_{\{(i,j),(i,j+1)\}}$$

现在，我们可以将 v 取为上图中分界墙左侧所有向量之和。因此 $v = v_{11}+v_{12}+v_{21}+v_{22}+v_{31}+v_{32}+v_{41}$。显然，$x_n$ 在子模 $\mathbb{k}[x_n]v$ 上的 Jordan 型为 $(2^2,1) = \mu$，在商模 $\mathbb{k}^{13}/\mathbb{k}[x_n]v$ 上的 Jordan 型为 $(2^2,1^2) = \nu$。因此，数对 $(v,\ x_n)$ 是该诱导轨道的一个代表元。

最后，我们用 x_n 在 $\mathbb{k}^{13}$上的作用所对应的 Jordan 基来表示轨道 $\mathbf{O}$ 的代表元。若令 $v^{(1)} = v_{11}+v_{21}+v_{31}$ 和 $v^{(2)} = v_{12}+v_{22}+v_{32}+v_{41}$，则

$$\big((v^{(1)},0),(v^{(2)},0),(0,0),(0,0)\big)$$

是$\mathbf{O}$的一个典范代表元；这里我们将各列视为 Levi L的增强幂零锥各个分量中自然模的标准基。

4.4. **一般增强 Jordan 类的闭包。** 现在我们可以描述任意增强 Jordan 类的闭包了。由推论 4.8 可知，对于任意的 $v\in\mathbb{k}^n$ 和任意的 $x_n\neq 0$，$\mathbf{V}$ 中 (v,x_n) 的增强幂零轨道都是诱导的。因此，类似的结论也适用于任意 Levi 子群 L 的增强模$\mathbf{V}_L$ 中的幂零轨道，其中该 Levi 子群是$\mathbf{G}$的子群。

命题 4.10. 设 $(v,x) = (v, x_s+x_n)\in V$。设 $L = G^{x_s}$，其李代数为 $\mathfrak{l}$，增强模为 V_L。设 M 为 L 的 *Levi* 子群，其增强模为 V_M，且 $w\in\mathbb{k}^n$ 满足 $(v,x_n)\in Ind^{\mathbf{V}_L}V_M(M(w,0))$。设 Q 为适配于 M和 v的 G 的抛物子群，令$\mathfrak{q} = Lie(Q)$，并令 $\mathfrak{u}_Q$ 为其幂零根。则 $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})\subseteq\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$，并且

$$\overline{\mathfrak{J}(v,x)} = \bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_M}(M(v,z))} = \mathbf{G}(\overline{Mv},\mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_Q), \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{J}(v,x)\subset\overline{\mathfrak{J}(v,x)}^{\mathbf{G}\text{-reg}} = \bigcup_{z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_M}(M(v,z)). \tag{4.11}$$

证明。 根据引理 4.2 (3)，我们不妨设 $v = w$。

闭子集 $(Mv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\overline{\mathfrak{u}_Q})$ 是不可约的，且在 Q 下稳定，因此作用态射 $\mathbf{G}(Mv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{u}_Q)$ 的像 $\mathbf{G} \times^Q (Mv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q) \to \mathbf{V}$ 是闭且不可约的。由引理4.3 可得

$$\begin{aligned}
\dim \mathbf{G}(\overline{Mv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q) &\leq \dim \mathbf{G} \times^Q (\overline{Mv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q) \\
&= \dim \mathbf{G} - \dim Q + \dim Mv + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \dim \mathfrak{u}_Q \\
&= \dim \mathbf{V} - \operatorname{codim}_{\mathbf{V}_M} M(v,0) + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \\
&= \dim \mathbf{V} - \operatorname{codim}_{\mathbf{V}_L} \operatorname{Ind}_{\mathbf{V}_M}^{\mathbf{V}_L} M(v,0) + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \\
&= \dim \mathbf{V} - \operatorname{codim}_{\mathbf{V}_L} L(v, x_n) + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \\
&= \dim \mathbf{G} - \dim L^{(v,x_n)} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \\
&= \dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{G}^{(v,x)} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \\
&= \dim \mathfrak{J}(v,x).
\end{aligned}$$

现在我们证明 $\mathfrak{J}(v,x) \subseteq \mathbf{G}(Mv, \overline{\mathfrak{z}(\mathfrak{l})} + \mathfrak{u}_Q)$。事实上，根据命题 4.5

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}(v,x) = \mathbf{G}\left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + x_n\right) &= \bigcup_{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}}} \mathbf{G}\left((0,z) + \operatorname{Ind}_{\mathbf{V}_M}^{\mathbf{V}_L} M(v,0)\right) \\
&\subseteq \bigcup_{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}}} \mathbf{G}\left((0,z) + \overline{\operatorname{Ind}_{\mathbf{V}_M}^{\mathbf{V}_L}(M(v,0))}\right) \\
&\subseteq \bigcup_{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})} \mathbf{G}\left((0,z) + \overline{\operatorname{Ind}_{\mathbf{V}_M}^{\mathbf{V}_{\mathbf{G}^z}} M(v,0)}\right) \\
&\subseteq \bigcup_{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})} \overline{\operatorname{Ind}_{\mathbf{V}_M}^{\mathbf{V}} M(v,z)} = \bigcup_{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})} \mathbf{G}(\overline{Mv}, z + \mathfrak{u}_Q) = \mathbf{G}(\overline{Mv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q)
\end{aligned}$$

从而得到 (4.10)。然后，(4.11) 由引理4.3和命题4.5得出。 □

命题 4.11。 增强 *Jordan* 类的闭包和正则闭包是 *Jordan* 类的并集。

证明。 只需证明 Jordan 类的闭包满足该结论。沿用命题 4.10中的记号。设

$$(w, y_s + y_n) \in \overline{\mathfrak{J}(v,x)} = \mathbf{G}(\overline{Mv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q).$$

由于 Jordan 类是$\mathbf{G}$-稳定的，因此不失一般性，可假设 $(w, y_s + y_n) \in (Mv, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q)$。于是，$\overline{y_n} \in \mathfrak{u}_Q$和 $\mathfrak{gl}_n^{y_s} \supset \mathfrak{l}$，因此 $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{y_s}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$。所以，

$$\mathfrak{J}(w, y_s + y_n) = \mathbf{G}\left(w, \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n^{y_s})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + y_n\right) \subseteq \mathbf{G}(\overline{Mv}, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{u}_Q).$$

□

现在我们可以将引理 4.3 和命题 4.4 推广到任意增强 Jordan 类。

推论 *4.12.* 设 $(v,x) = (v, x_s + x_n) \in V$，设 $L = G^{x_s}$，并设 $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(v,x)$。那么，$\mathfrak{J}(v,x) \cap \mathcal{N}(V)$ 是 $\mathcal{N}(V)$ 中某个 G-轨道 O 的闭包，且满足 $codim_{\mathbf{V}} O = codim_{\mathbf{V}_L} L(v,x)$。

证明。设 M 和 $\mathfrak{u}_Q$ 如命题 4.10 所述。由 (4.10) 和 Jordan 分解可得 $\mathfrak{J}(v,x) \cap \mathcal{N}(\mathrm{V}) = \mathrm{G}(\mathfrak{u}_Q, Mv)$。由于 $\mathfrak{u}_Q$ 和 Mv 不可约，$\mathfrak{J}(v,x) \cap \mathcal{N}(\mathrm{V})$ 不可约且 G-稳定。因此，它是 $\mathcal{N}(\mathrm{V})$ 中某个轨道 O 的闭包。此外，(4.11) 保证 $\dim \mathrm{O} = \dim \mathrm{G}(v,x)$，由此

$$\begin{aligned}(4.12)\qquad \operatorname{codim}_{\mathbf{V}} \mathbf{O} &= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{O} = n + \dim \mathbf{G}^{(v,x)} \\ &= n + \dim L^{(v,x)} = \dim \mathbf{V}_L - \dim L^{(v,x)} = \operatorname{codim}_{\mathbf{V}_L} L(v,x).\end{aligned}$$

□

我们将推论 **O** 4.12 中的幂零轨道称为$L(v,x_n)$ 的诱导增强幂零轨道，并记作 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}{}_{\mathbf{V}_L} L(v, x_n)$。

命题 4.13. 增强幂零轨道的诱导具有传递性。

证明。设 M 和 L 是$\mathbf{G}$ 的 Levi 子群，且 $M \subset L$；设 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{l}$ 是相应的李代数，且 $\mathbf{V}_M$ 和 $\mathbf{V}_L$ 是相应的增强模。设 $(v, x_n) \in \mathcal{N}(\mathbf{V}_M)$，并设 $(w, y_n) \in \mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_L}{}_{\mathbf{V}_M} M(v, x_n)$。那么

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_L}\left(\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_L}_{\mathbf{V}_M} M(v,x_n)\right)} &= \mathcal{N}(\mathbf{V}) \cap \overline{\mathbf{G}(w, \mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{\mathbf{G}\text{-reg}} + y_n)} \\ &\subseteq \mathcal{N}(\mathbf{V}) \cap \overline{\mathbf{G}\left((0,\mathfrak{z}(\mathfrak{l})) + \left(\mathcal{N}(\mathbf{V}_L) \cap \overline{L(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m})^{L\text{-reg}} + x_n)}\right)\right)} \\ &\subseteq \mathcal{N}(\mathbf{V}) \cap \overline{\mathbf{G}\left((0,\mathfrak{z}(\mathfrak{l})) + L(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) + x_n)\right)} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{V}) \cap \overline{\mathbf{G}\left(L(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) + x_n)\right)} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{V}) \cap \overline{\mathbf{G}\left(L(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) + x_n)\right)} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{V}) \cap \overline{\mathbf{G}\left(v, \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) + x_n)\right)} = \overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_M} M(v, x_n)}.\end{aligned}$$

反复应用（4.12）可知，包含映射序列中的首项和末项具有相同的维数，从而得出所述结论。□

诱导与将 $\mathbf{V}$ 嵌入$\mathbf{V}_{2n}$ 相容。

命题 4.14. 设 $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = (\mathbf{v}, \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_n) \in \mathbf{V}$ 且 $(v,x) = (v, x_s + x_n) = \psi(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{x})) \in \mathbf{V}_{2n}$。则

$$\psi\left(\mathrm{GL}_{2n} \times^G \varphi\left(1 \times^{\mathbf{G}} \left(\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}}} \mathbf{G}^{x_s}(\mathbf{v}, \mathbf{x}_n)\right)\right)\right) = \mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{\mathrm{GL}^{x_s}_{2n}}} \mathrm{GL}^{x_s}_{2n}(v, x_n).$$

证明。我们用 $\mathfrak{J}_{2n}(v,x)$ 表示 (v,x) 的增强 Jordan 类。于是

$$\begin{aligned}\psi\left(\mathrm{GL}_{2n} \times^G \varphi\left(1 \times^{\mathbf{G}} \left(\overline{\mathfrak{J}(\mathbf{v},\mathbf{x})} \cap \mathcal{N}(\mathbf{V})\right)\right)\right) &\subseteq \mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n}) \cap \psi\left(\mathrm{GL}_{2n} \times^G \varphi\left(1 \times^{\mathbf{G}} \overline{\mathfrak{J}(\mathbf{v},\mathbf{x})}\right)\right) \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n}) \cap \overline{\psi(\mathrm{GL}_{2n} \times^G \varphi(1 \times^{\mathbf{G}} \mathfrak{J}(\mathbf{v},\mathbf{x}))} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n}) \cap \overline{\mathfrak{J}_{2n}(v,x)}\end{aligned}$$

因此 $\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(1\times^{\mathbf{G}}\left(\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\mathbf{v}_{\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}}\mathbf{G}^{x_s}(\mathbf{v},\mathbf{x}_n)\right)\right)\right)\subseteq\overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}\mathbf{v}^{\mathrm{GL}^{x_s}_{2n}}\mathrm{GL}^{x_s}_{2n}(v,x_n)}$。结合命题2.7 (2)和推论 4.12 可得

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\left(1\times^{\mathbf{G}}\left(\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}}}\mathbf{G}^{x_s}(\mathbf{v},\mathbf{x}_n)\right)\right)&=2\dim\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}}}\mathbf{G}^{x_s}(\mathbf{v},\mathbf{x}_n)\\&=2\left(\dim\mathbf{V}-\dim\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}}+\dim\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}(\mathbf{v},\mathbf{x}_n)\right)\\&=\dim\mathrm{GL}_{2n}(0,x_s)+\dim\mathrm{GL}^{x_s}_{2n}(v,x)\\&=\dim\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_{\mathrm{GL}^{x_s}_{2n}}}\mathrm{GL}^{x_s}_{2n}(v,x_n)\end{aligned}$$

从而得到所需的等式。 □

命题 4.15。 映射 $\mathfrak{J}\mapsto\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi(1\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}))$ 从$\mathbf{V}$ 中的增强 *Jordan* 类集合到$\mathbf{V}_{2n}$中的增强 *Jordan* 类集合，诱导出一个单射偏序态射。

证明。 设 $(\mathbf{v},\mathbf{x})=(\mathbf{v},\mathbf{x}_s+\mathbf{x}_n)\in\mathbf{V}$ 且 $L=\mathbf{G}^{\mathbf{x}_s}$。令 M为 L的一个 Levi 子群，并取 $\mathbf{w}\in\Bbbk^n$，使得对某个 $\mathbf{w}\in\Bbbk^n$，有 $(\mathbf{v},\mathbf{x}_s)\in\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_L}\mathbf{v}_M(M(\mathbf{w},0))$。

令 v、x_s、x_n、w、$z\in\mathbf{V}_{2n}$分别为 $\mathbf{v}$、$\mathbf{x}_s$、$\mathbf{x}_n$、$\mathbf{w}$、$\mathbf{z}$ 在 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}_{2n}$ 的自然包含映射下的像；类似地，令 L、M 分别为 L 和 M 在 $\mathbf{GL}_{2n}$中的像。由命题 4.10 和 4.14 可得

$$\begin{aligned}\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\left(\varphi\times^{\mathbf{G}}\overline{\mathfrak{J}(\mathbf{v},\mathbf{x})}\right)\right)&=\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(1\times^{\mathbf{G}}\left(\bigcup_{z\in\mathfrak{J}(\mathfrak{l})}\overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}}_{\mathbf{V}_M}(M(\mathbf{v},\mathbf{z}))}\right)\right)\right)\\&=\bigcup_{z\in\mathfrak{J}(\mathrm{Lie}(\widetilde{L}))}\overline{\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_{2n}}_{\mathbf{V}_{\widetilde{M}}}(\widetilde{M}(v,z))}=\overline{\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\left(1\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}(\mathbf{v},\mathbf{x})\right)\right)},\end{aligned}$$

从而得到所需结论。 □

4.5. 诱导的组合学：一般情形。设 $(n_1,\dots,n_r)$ 是 n 的一个合成。对每个 i，令 $\lambda^{(i)}$ 为 n_i 的一个分拆。于是 $(\lambda^{(i)})_{i=1}^r$ 是一个分拆序列。我们构造一个 n 的分拆 λ，记作 λ^{Σ}，其中 $\lambda_j=\sum_{i=1}^r\lambda^{(i)}_j$。这就是将分拆 $\lambda^{(i)}$ 相加。由 λ^{Σ} 的定义可知，此操作满足结合律，即 λ^{Σ} 与分拆 $\lambda^{(i)}$ 中各部分相加的顺序无关。这体现了诱导的传递性，我们将用它来证明以下结果：

定理 *4.16.* 设 $(n_1,\dots n_r)$ 是 n 的一个合成，它定义了 GL_n 的一个 *Levi* 子群 L。设 $\left((\mu^{(i)};\nu^{(i)})\right)_{i=1}^r$ 是一个双分拆序列，其中 $(\mu^{(i)};\nu^{(i)})$ 是 n_i 的一个双分拆。令$\prod_{i=1}^r O_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})}\subset\mathcal{N}(V_L)$为 L 对应的幂零轨道。那么，与 $Ind^{\mathbf{V}}V_L(\prod_{i=1}^r O_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})})$ 对应的双分拆为 $(\mu^{\Sigma};\nu^{\Sigma})$。

证明。 该 L-轨道 $\prod_{i=1}^r\mathbf{O}_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})}$ 是若干轨道的乘积，其中每个因子 $\mathbf{O}_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})}$ 都属于增强幂零锥 $\Bbbk^{n_i}\times\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_{n_i})$（对应于 $\mathbf{GL}_{n_i}$），且是 Levi L中的一个因子。由推论 4.8可知，

V 中唯一的刚性轨道对应于形如 $(1^n;\emptyset)$ 和 $(\emptyset,\ 1^n)$ 的分拆，因此我们可以认为，每个轨道 $\mathbf{O}_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})}$ 都是由对应双分拆具有上述形式的轨道的乘积诱导而来。现在，对每个 i，每个分拆 $\mu^{(i)}$ 和 $\nu^{(i)}$ 都可以表示为形如 $(1^{m(i,j)})$ 和 $(1^{q(i,l)})$ 的分拆之和，其中 $1\le j\le \mu_1^{(i)}$ 和 $1\le l\le \nu_1^{(i)}$，且 $m(i,\ j)$ 是转置分拆 $(\mu^{(i)})^{tr}$ 的第 j 个部分，而 $q(i,\ l)$ 是转置分拆 $(\nu^{(i)})^{tr}$的第 l 个部分（这不过是在说，每个分拆都可以看作其对应杨图中各列之和）。因此，每个轨道 $\mathbf{O}_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})}$ 都可以表示为

$$\mathbf{O}_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})}=\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_{L_i}}^{\mathbf{V}_L}\left(\prod_{j=1}^{\mu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(1^{(m(i,j))};\emptyset)}\times\prod_{l=1}^{\nu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(\emptyset;1^{q(i,l)})}\right)$$

其中 L_i 是 L 的 Levi 子群，括号中的轨道均为刚性轨道。因此，由诱导的传递性可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}}\prod_{i=1}^{r}\mathbf{O}_{(\mu^{(i)};\nu^{(i)})} &= \mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}}\left(\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_{L_i}}^{\mathbf{V}_L}\left(\prod_{j=1}^{\mu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(1^{m(i,j)};\emptyset)}\times\prod_{l=1}^{\nu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(\emptyset;1^{q(i,l)})}\right)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{r}\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_L}^{\mathbf{V}}\,\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_{L_i}}^{\mathbf{V}_L}\left(\prod_{j=1}^{\mu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(1^{m(i,j)};\emptyset)}\times\prod_{l=1}^{\nu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(\emptyset;1^{q(i,l)})}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{r}\mathrm{Ind}_{\mathbf{V}_{L_i}}^{\mathbf{V}}\left(\prod_{j=1}^{\mu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(1^{m(i,j)};\emptyset)}\times\prod_{l=1}^{\nu_1^{(i)}}\mathbf{O}_{(\emptyset;1^{q(i,l)})}\right).\end{aligned}$$

由命题 4.7可知，与该诱导轨道对应的双分拆是双分拆 $(1^{(m(i,j))};\ \emptyset)$ 和 $(\emptyset;\ 1^{(q(i,l))})$ 的分量逐项之和，其中 $1\le i\le r,\ \ 1\le j\le\mu_1^{(i)}$ 且 $1\le l\le\nu_1^{(i)}$。此外，我们还知道这一求和过程具有结合性，因此可得该双分拆的形式为 $(\mu^{\Sigma};\ \nu^{\Sigma})$。□

5. Induction of orbits and closures of classes: exotic case

本节将应用前几节中的对应关系以及关于增强 Jordan 类的结果，推断异质 Jordan 类的性质。

定理 5.1. *(1)* 定理 *3.3* 中建立的双射是偏序集同构，并延拓了来自引理 *2.2* 的偏序集同构。

(2) 奇异 *Jordan* 类的闭包以及该闭包的正则轨迹是奇异 *Jordan* 类的并。*(3)* 设 J 为对应于 G-轨道的奇异类，该轨道取自一对 $(M,\mathbb{O})$，依据命题 *3.2*。则 $J\cap\mathcal{N}(\mathbb{V})$ 是单个轨道的闭包，我们称之为奇异幂零 G-轨道，它由 $(M,\mathbb{O})$ 诱导，并记为 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{V}_M}^{\mathbb{V}}(\mathbb{O})$。对于 $\mathfrak{J}$ 该

满足 $J=\varphi(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J})$ 的增强 *Jordan* 类，成立

$$\overline{\mathrm{Ind}_{\mathbb{V}_M}^{\mathbb{V}}(\mathbb{O})}=\varphi(G\times^{\mathbf{G}}(\overline{\mathfrak{J}}\cap\mathcal{N}(\mathbf{V})).$$

特别地，维数 $J\cap\overline{\mathcal{N}}(\mathbb{V})=2$ 维数 $\mathfrak{J}\cap\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{V})$。

证明。 (1) 设 $\mathfrak{J}$ 是 $\mathbf{V}$ 中的一个增强 Jordan 类，并设 $J:=\varphi(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J})$。我们证明 $J=\varphi(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J})$。$\varphi$ 在 $1\times^{\mathbf{G}}\mathbf{V}$ 上的限制是自然嵌入，且 φ 是 G-等变的，因此 $\varphi(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J})=G(\varphi(1\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}))\subseteq GJ=J$。现在我们在两边作用 $\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}-)$，并应用命题 4.15，得到

$$\begin{aligned}\overline{\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}\right)\right)}&=\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\overline{\mathfrak{J}}\right)\right)\\&\subseteq\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\overline{J}\right)\\&=\mathrm{GL}_{2n}\,\psi\left(1\times^{G}\overline{J}\right)\\&\subseteq\overline{\mathrm{GL}_{2n}\,\psi\left(1\times^{G}J\right)}\\&=\overline{\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(1\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}\right)\right)}\end{aligned}$$

最后一个包含映射成立，是因为 ψ 在 $1\times^{\mathbf{G}}\mathbb{V}$ 上的限制是自然嵌入，且 ψ 是 GL_{2n}-等变的。因此，所有包含映射实际上都是等式，由此得到

$$\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(1\times^{\mathbf{G}}\overline{\mathfrak{J}}\right)\right)=\mathrm{GL}_{2n}\,\psi\left(1\times^{G}\overline{J}\right).$$

设 $\mathbf{O}$ 是 G-轨道，位于 J 中。GL_{2n}-轨道 $\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\mathbf{O})$ 包含于 $\psi\left(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\varphi\left(1\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}\right)\right)$ 中。它与 $\psi(1\times^{G}\mathbb{V})$ 的交集是 G 中的一个 $\varphi\left(1\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}\right)$ -轨道，根据命题 **2.7**，它必与 $\mathbf{O}$ 重合。

（2）设 J 是一个奇异 Jordan 类。由定理 3.3 （1）和（2），存在一个增强 Jordan 类 $\mathfrak{J}$，位于 $\mathbf{V}$ 中，使得 $J=\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}\right)$ 且 $J=\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}\right)$。由命题4.11 可知，存在增强 Jordan 类 $\mathfrak{J}_1$、……、$\mathfrak{J}_l$ 以及 $\mathfrak{J}_{l+1}$、……、$\mathfrak{J}_m$，满足 $l\leq m$ 位于 $\mathbf{V}$ 中，使得

$$\overline{\mathfrak{J}}=\bigcup_{i=1}^{m}\mathfrak{J}_i,\quad\overline{\mathfrak{J}}^{\mathbf{G}\text{-reg}}=\bigcup_{i=1}^{l}\mathfrak{J}_i.$$

因此，利用命题 2.7

$$\overline{J}=\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\bigcup_{i=1}^{m}\mathfrak{J}_i\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}_i\right),$$

$$\overline{J}^{G\text{-reg}}=\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}^{\mathbf{G}\text{-reg}}\right)=\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\bigcup_{i=1}^{l}\mathfrak{J}_i\right)=\bigcup_{i=1}^{l}\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}_i\right)$$

其中所有 $\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\mathfrak{J}_i\right)$ 均为奇异 Jordan 类，依据定理 3.3 （1）。

（3）令 $d\in\mathbb{N}$ 满足 $J\subset\mathbb{V}_{(d)}$。一方面，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(G\times^{\mathbf{G}}(\overline{\mathfrak{J}}\cap\mathcal{N}(\mathbf{V})))&\subseteq\varphi\left((G\times^{\mathbf{G}}\overline{\mathfrak{J}})\cap(G\times^{\mathbf{G}}\mathcal{N}(\mathbf{V}))\right)\\&\subseteq\varphi\left(G\times^{\mathbf{G}}\overline{\mathfrak{J}}\right)\cap\varphi(G\times^{\mathbf{G}}\mathcal{N}(\mathbf{V}))\subseteq\overline{J}\cap\mathcal{N}(\mathbb{V}).\end{aligned}$$

由推论 4.12 可知，交集 $\overline{\mathfrak{J}\cap\mathcal{N}(\mathbf{V})}$ 是单个幂零 $\mathbf{G}$-轨道 $\mathbf{O}$ 的闭包，其维数为 $(1/2)d$。因此，幂零 G-轨道 $\mathbb{O}':=\varphi(G\times^{\mathbf{G}}\mathbf{O})$ 满足 $\mathbb{O}'\subseteq\overline{(J\cap\mathcal{N}(\mathbb{V}))}$。

现在令 $\widetilde{\mathfrak{J}}:=\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}J)$。如上所述，我们可知

$$\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\mathbb{O}')\subseteq\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}(\overline{J}\cap\mathcal{N}(\mathbb{V})))\subseteq\overline{\widetilde{\mathfrak{J}}}\cap\mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n}).\tag{5.1}$$

再次应用推论 4.12，可知 $\widetilde{\mathfrak{J}}\cap\mathcal{N}(\mathbf{V}_{2n})$ 是单个幂零 GL_{2n}-轨道 $\widetilde{\mathbf{O}}$ 的闭包，且 $\widetilde{\mathbf{O}}=2d$ 的维数为 $\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\mathbb{O}')=2d$。由于 $\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\mathbb{O}')=\mathbf{O}$。将 (5.1) 限制到正则轨迹上，得到

$$\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}\mathbb{O}')=\psi(\mathrm{GL}_{2n}\times^{G}((\overline{J}\cap\mathcal{N}(\mathbb{V}))^{G\text{-reg}}))=\widetilde{\mathbf{O}}.$$

根据引理 2.2 中的任意奇异幂零轨道 $J\cap\mathcal{N}(\overline{\mathbb{V}})$ 都包含于 $\mathbb{O}'$ 的闭包中。 □

注 5.2。得益于定理 5.1，增强情形中的诱导奇异轨道和奇异 Jordan 类的若干关键性质现在都可以得到。特别地：

- 奇异 Jordan 类的闭包可以使用诱导精确描述（命题 4.10）。
- 奇异 Jordan 类的闭包和正则闭包分别都是奇异 Jordan 类的并。在特别地，$\mathbb{V}$ 按其奇异 Jordan 类进行分层（命题 4.11）。
- 奇异幂零轨道的诱导具有传递性并保持余维（推论4.12，命题4.13）

注 5.3。由（4.11）和推论 4.12 可知，如果 $\mathfrak{J}_i=\mathfrak{J}(L_i,\ \mathbf{O}_i)\subseteq\mathbf{V}^{(d)}$，其中 $i=1,\ 2$ 且 $d\in\mathbb{N}$ 是两个增强类，那么 $\mathfrak{J}_1\subseteq\mathfrak{J}_2$ 当且仅当，在共轭意义下，$L_2\subseteq L_1$ 且 $\mathrm{Ind}^{\mathbf{V}_{L_1}}_{\mathbf{V}_{L_2}}(\mathbf{O}_2)=\mathbf{O}_1$。立即可知，Jordan 类 $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(L,\ \mathbf{O})$ 在某个层中稠密，当且仅当 $\mathbf{O}\subseteq\mathbf{V}_L$ 是一个刚性轨道。

根据命题 3.2(3)，Jordan 类由一个分拆 λ 以及一个双分拆 $(\mu_i;\nu_i)$ 的选取来分类，该双分拆是 λ_i 的，且对应于每个 i（在 $\mathbb{S}_\lambda$的重排意义下）。结合推论 4.8，我们看到，当$\mathfrak{J}$ 在一个层中稠密时，这些双分拆各自具有形式 $((1^{\lambda_i});\emptyset)$ 或 $(\emptyset;(1^{\lambda_i}))$。

借助于定理 5.1，类似的论述对奇异 Jordan 类也成立。至此完成了引言中定理 D 的证明。

Acknowledgements

G.C. 感谢 Paul Levy 就辛奇点与幂零轨道所作的有益讨论，该讨论引出了注记 2.3。

本项目部分由欧盟通过国家复苏与韧性计划（NRRP）、任务 4、组成部分 2、投资 1.1 项下的 PRIN 2022 年第 104 号征集（2022 年 2 月 2 日，意大利大学与研究部）资助；项目 2022S8SSW2

（学科领域：PE - 物理科学与工程）“李理论的代数与几何方面”。F.A.、G.C. 和 F.E. 是 INdAM 研究组 GNSAGA 的成员。F.A. 的研究在耶拿弗里德里希·席勒大学开展。L. T. 获英国研究与创新署未来领袖奖学金 MR/Z000394/1 资助；在这项研究的初期，他还获得了资助编号 MR/S032657/1、MR/S032657/2 和 MR/S032657/3 的支持。

References

[1] P. N. Achar 和 A. Henderson，《增强幂零锥中的轨道闭包》，Adv. Math. 219 (2008)，第 1 期，27–62。[2] P. Achar、A. Henderson、B. Jones，《增强幂零锥中轨道闭包的正规性》，Nagoya Math. J. 203 (2011)，1–45。[3]J. Antor，《具有不等参数的仿射 Hecke 代数的几何实现》，(2025)，https://arxiv.org/abs/2505.02942。[4] J. Antor，《关于 F_4的异类Springer对应》，(2025)，https://arxiv.org/abs/2508.14199。[5] P. Bardsley、R.W. Richardson，《特征 p下代数变换群的 ́Étale 切片》，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 51 (1985)，第 2 期，295–317。[6] A. Beauville，《辛奇点》。Invent. math. 139 (2000)，541–549。[7] G. Bellamy、M. Boos，《通过箭图表示研究（循环）增强幂零锥》，manuscripta math. 161，333–362 (2020)。[8] J. Bernstein，《GL(N)上的 P不变分布与GL(N)酉表示的分类（非阿基米德情形）》，载于：李群表示 II，马里兰大学大学公园市 1982–1983 年特别学年论文集，数学讲义 1041，R. Herb 、 S. Kudla 、 R. Lipsman 、 J. Rosenberg （编），50–102，Springer-Verlag 1984。[9] A. Borel，《线性代数群》，研究生数学丛书第 126 卷，Springer-Verlag。(1991)[10] W. Borho，《关于幺幂类的诱导》，汉堡大学数学研讨会 50，1–4 (1981)。.[11] W. Borho，《关于半单李代数的层》，Invent. math. 65，283–317 (1981).[12] W. Borho 和 H. Kraft，《约化群线性作用下轨道及其变形》，¨《约化群线性作用下轨道及其变形》，Comment. Math. Helv., (1979) 54, 61–104。[13] A. Broer，《半单李代数中的分解簇》，Can. J. Math. 50 (5), 1998, pp. 929–971。[14] A. Broer，《分解类讲义》，载于：Broer, A., Daigneault, A., Sabidussi, G.（编）《表示论与代数几何》。北约高级研究院系列，第 514 卷。Springer, Dordrecht。[15] M. Bulois，《对称李代数的层与Slodowy切片》，J. Lie Theory 21 (2011)，第 1 期，1–54。[16] M. Bulois、P. Hivert，《对称李代数中的层与切片诱导》，Transform. Groups 21 (2016)，第 2 期，355–375。[17] N. Chriss、V. Ginzburg，《表示论与复几何》，Mod. Birkh¨auser Class. Birkh¨auser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010, x+495 页。[18] J. Dadok 和 V. G. Kac，《极表示》，J. Algebra, 92 (2), 1985, 504–524。[19] W. L. Gan 和 V. Ginzburg，《几乎交换簇、 $\mathcal{D}$-模与Cherednik代数》，IMRP Int. Math. Res. Pap. Volume 2006, Article ID 26439, Pages 1–54[20] V. Gatti、E. Viniberghi，《13维空间的旋量》，Adv. Math. 30 (2), 1978, 137–155。[21] R. Hartshorne，《代数几何》，研究生数学丛书 32，Springer-Verlag, 1977。[22] J.C. Jantzen，《表示论中的幂零轨道》，载于：B. Orsted（编），《表示与李理论》，数学进展，228，1–211，Birkh¨auser, Boston 2004。[23] V. G. Kac。《无限根系、图的表示与不变量理论。II》。J. Algebra, 78 (1), 141–162, 1982。

[24] S. Kato, 《辛群的奇异 Deligne-Langlands 对应》。《杜克数学杂志》148 (2), 305–371 (2009)。[25] ,《幂零锥的变形与Springer 对应》。Amer. J. Math. 133 (2011), 第 2 期, 519–553。[26] B. Kostant、S. Rallis, 《与对称空间相关的轨道和表示》, Amer. J. Math. 93 (1971), 753–809。[27] P. Levy, 《正特征下 Vinberg 的 θ群与Kostant-Weierstrass 截面》, Transform. Groups 14 (2009), 第 2 期, 417–461。[28] G. Lusztig、N. Spaltenstein, 《诱导幂零类》, J. London Math. Soc. 19 (1979), 41?52。[29] C. Mautner, 《仿射铺砌与增强幂零锥》。Proc. Amer. Math. Soc. 145, 第 4 期 (2017): 139398。[30] J.S. Milne, 《 ́étale 上同调讲义》, 第 2.21 版, 2013, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf [31] Y. Namikawa, 《完全交齐性辛簇的结构》, Invent. Math. 193 (2013), 第 1 期, 159–185。[32] T. Ohta, 《某些对称对中幂零轨道闭包的奇点》, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 38 (3), 441–468 (1986)。[33] V. L. Popov、E. B. Vinberg, 《代数几何》。Encyclopaedia Math. Sci., 55 Springer-Verlag, Berlin, 1994, vi+284 页。[34] A. Premet、D. Stewart, 《素特征域上约化李代数的刚性轨道与层》, J. Inst. Math. Jussieu 17 (2018), 第 3 期, 583–613。[35] N. Spaltenstein, 《坏特征下李代数的幂零类与层》, Math. Z. 181 (1982), 第 1 期, 31–48; [36] N. Spaltenstein, 《特征 2 域上 F_4 型李代数中的幂零类》, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 30 (1984), 第 3 期, 517–524; [37] T.A. Springer, 《辛群的奇异幂零锥》, J. Algebra 321 (11) (2009), 3550–3562。[38] H. Strade、R. Farnsteiner, 《模李代数及其表示》, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 116 Marcel Dekker, Inc., New York, 1988, x+301 页。[39] M. Sun, 《增强与奇异幂零锥的点稳定子》。J. Group Theory 14(6), 825–839 (2011)。[40] R. Travkin, 《镜像 Robinson-Schensted-Knuth 对应》, Selecta Math. (N.S.) 14 (2009), 第 3-4 期, 727-758。

异质与增强模中的层、Jordan 类与诱导轨道

F. Ambrosio: Institut für Mathematik und Informatik, FSU-Jena, Inselplatz 5, 07743 Jena, Germany电子邮箱：filippo.ambrosio@uni-jena.de

G. Carnovale: Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", University of Padova, via Trieste 63, 35121, Padova, Italy电子邮箱：carnoval@math.unipd.it

F. Esposito: Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", University of Padova, via Trieste 63, 35121, Padova, Italy电子邮箱：esposito@math.unipd.it

N. Saunders: Department of Mathematics, City St George's University of London, Northampton Square London EC1V 0HB, UK电子邮箱：neil.saunders.3@citystgeorges.ac.uk

L. Topley: Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath, BA2 7AY, UK电子邮箱：lt803@bath.ac.uk