arXiv:2602.02423v1 [math.AT] 2 Feb 2026

扭曲拓扑 Hochschild 同调的代数结构

DANIKA VAN NIEL

Abstract. 拓扑 Hochschild 同调（THH）是由 B¨okstedt 发展起来的环谱不变量。近年来，许多 THH 的等变类比相继出现。其中一个例子是扭曲 THH，它是由 Angeltveit、Blum- berg、Gerhardt、Hill、Lawson 和 Mandell 发展起来的 C_n-等变环谱不变量。在本文中，我们研究扭曲 THH 的代数结构，并进行一些计算。具体而言，我们计算 Real配边谱的 C_2-扭曲 THH，并证明几何环 C_p-谱的 C_p-扭曲 THH 可归结为经典 THH 的计算。我们将扭曲 THH 的代数结构推广到 Adamyk、Gerhardt、Hess、Klang 和 Kong 的扭曲 B¨okstedt 谱序列。我们证明，在适当的平坦性条件下，对于 R 交换环 C_p-谱， C_p-扭曲 B¨okstedt 谱序列是交换的 $E_\star(R)$-代数的谱序列。

—

1. Introduction

代数K理论是环的一种不变量，以难以计算而闻名。尽管代数K理论是用拓扑学定义的，但它与数学的许多领域都有联系，包括数论和代数几何。研究代数K理论的一种非常成功的方法是迹方法。迹方法是一类工具，通过从代数K理论映射到更易计算的不变量，来近似代数K理论。此类近似的一个例子是 Dennis 迹，它将代数K理论与环的一个经典不变量——Hochschild 同调（HH）联系起来。对于结合环 A，Dennis 迹是一个映射：

$$K_*(A) \to \mathrm{HH}_*(A).$$

为了更精确地近似代数K理论，B¨okstedt 定义了 HH 的一个拓扑学类比，称为拓扑 Hochschild 同调（THH），它是环谱 [B¨ok85]的不变量。存在一个从代数K理论到 THH 的迹映射，即拓扑 Dennis 迹。拓扑 Hochschild 同调具有一个 S^1-作用。利用这个 S^1-作用，可以定义拓扑循环同调（TC）和圆分迹，从而对代数K理论作出更加精确的近似 [BHM93]。此外，拓扑 Dennis 迹可经由圆分迹分解：

$$K(A) \to \mathrm{TC}(A) \to \mathrm{THH}(A)$$

对于结合环谱 A。

我们用来计算 THH 的主要工具之一是 B¨okstedt 谱序列，它将 Hochschild 同调与 THH 联系起来 [B¨ok85]。对于 k 域和 A结合环谱，该谱序列具有如下形式：

$$E^2_{*,*} = \mathrm{HH}_*(H_*(A;k)) \Rightarrow H_*(\mathrm{THH}(A);k).$$

促进谱序列计算的一种方法，是理解谱序列中的代数结构。Angeltveit 和 Rognes 研究了 B¨okstedt 谱序列中的代数结构， [AR05], 在 [EKMM97]和 [MSV97]的结果基础上进一步展开。我们回顾一下，Hopf 代数可以看作一个同时具有代数和余代数结构、并带有对极的对象，且这些结构彼此相容。对于 A交换环谱， [EKMM97] 的作者利用圆上的映射诱导 THH 上所需的映射，从而证明 THH(A) 是稳定同伦范畴中的一个 A-Hopf 代数。这是可能的，因为对于 A 交换环谱，

$\mathrm{THH}(A) \cong A \otimes S^1$ [MSV97]。例如，空间之间的折叠映射 $S^1 \vee S^1 \to S^1$ 诱导出乘积映射 $\mathrm{THH}(A) \wedge_A \mathrm{THH}(A) \to \mathrm{THH}(A)$。Angeltveit 和 Rognes 通过使用圆上的单纯映射推广了这一结果，使代数结构在满足某些平坦性条件时能够扩展到 B¨okstedt 谱序列中， [AR05]。随后，这些作者利用这种代数结构促进了许多 THH 的计算。

如上所述，THH 具有 S^1作用，并且是环谱的不变量。等变范数N_H^G 对于 G 有限群以及 $H \leq G$ 曾用于证明 [HHR16]中的 Kervaire 不变量一问题。基于这些等变范数， [ABG+18] 的作者证明，对于结合环谱 A，$\mathrm{THH}(A)$ 可以写成等变范数 $N_e^{S^1} A$。当A 是交换环谱时，这就得到张量同胚 $N_e^{S^1} A \cong A \otimes S^1$[EKMM97， MSV97]。

近年来，代数K理论和 THH 的等变类比相继出现，也就是说，出现了作为等变谱不变量的 THH 类比。例如，Angeltveit、Blumberg、Gerhardt、Hill、Lawson 和 Mandell 构造了一种称为 C_n-twisted THH 的 THH 推广，其中 C_n 是 S^1 的有限循环子群，记作 THH_{C_n} [ABG+18]。这一推广理论是不变量 C_n-等变环谱。基于 [HHR16], 的等变范数， [ABG+18] 的作者证明，对于结合环 C_n-谱 R，$\mathrm{THH}^{C_n}(R)$ 可以写成等变范数 $N_{C_n}^{S^1} R$。正如 [AGH+23] 所示，扭曲 THH 与 Merling[Mer17]， 以及 Malkiewich–Merling [MM19], 的等变代数K理论有关。

为计算 C_n<style id='4}>-扭曲 THH 的等变同调，Adamyk、Gerhardt、Hess、Klang 和 Kong 构造了 B¨okstedt 谱序列 [AGH+22]。扭曲的 B¨okstedt 谱序列的系数取自环的一个等变类比。

为了研究等变同伦论，需要熟悉的代数对象的等变类似物。Mackey 函子在等变同伦论中自然出现，作为阿贝尔群的等变类比。设 G 为有限阿贝尔群。对于 G-等变谱 E， E 的等变同伦群构成一个 G-Mackey 函子。 G-Mackey 函子的范畴具有一个称为盒积的对称幺半积，记作 $\square$, 从而可以定义环的等变类比，称为 G-Green 函子 [Lew80]。Lewis 将 G-Mackey 域定义为没有非平凡理想的交换 G-Green 函子 [Lew80]。在本文中，我们发展了分次 G-Mackey 域的概念。我们将证明，如果在扭曲 B¨okstedt 谱序列中使用 C_p-Mackey 域作为系数，则该谱序列更容易计算。我们用下划线表示一个对象是 Mackey 函子，符号 $*$ 表示 $\mathbb{Z}$-分次，符号 $\star$ 表示给定 G 的 $RO(G)$-分次。在本文中，我们计算了所有C_p-Mackey 域 F 的 $HF_\star$，其中 HF 是 F的 Eilenberg-Mac Lane 谱。

一个重要的 C_2-谱是 $MU_{\mathbb{R}}$，即 Real配边谱。Hill、Hopkins 和 Ravenel 使用 $MU_{\mathbb{R}}$ 解决了 Kervaire 不变量一问题，见 [HHR16]。本文中，我们计算 $\mathrm{THH}^{C_2}(MU_{\mathbb{R}})$ 的、系数取自 C_2-麦基域 F的等变同调，使得 $F(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$ 且 $F(C_2/e) = 0$。

定理 1.1. 对于如上的$\underline{F}$， $RO(C_2)$-分次的、$\mathrm{THH}^{C_2}(MU_{\mathbb{R}})$ 取 F 中系数的等变同调为

$$\underline{H}_\star(\mathrm{THH}_{C_2}(MU_{\mathbb{R}}); \underline{F}) \cong H\underline{F}_\star[\beta_1, \beta_2, \ldots] \square_{H\underline{F}_\star} \Lambda_{H\underline{F}_\star}(z_1, z_2, \ldots)$$

作为$HF_\star$-模。此处 $|\beta_i| = i\rho$ 与 $|z_i| = 1 + i\rho$。

经典地，B¨okstedt 谱序列中的代数结构推动了 THH 的计算。在这项工作中，我们研究 C_p-扭曲 THH 以及扭曲 B¨okstedt 谱序列的代数结构。Angeltveit、Blumberg、Gerhardt、Hill、Lawson 和 Mandell 在[ABG+18] 中证明，对于交换的 C_n-环谱 R，$\mathrm{THH}^{C_n}(R)$ 是 $R \otimes_{C_n} S^1$。利用圆的等变单纯模型，我们证明 C_p-扭曲 THH 具有 R-代数的结构。

定理 1.2。 对于 p 素数和 R 交换的 C_p-环谱，$\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是一个交换的R-代数，属于 C_p-谱范畴。

利用为 C_p-扭曲 THH 提供代数结构的等变单纯映射，我们将这一代数结构扩展到扭曲 Bökstedt 谱序列。讨论这一诱导结构之前，回顾一下，AGH 的作者 [AGH+22]证明了扭曲 Bökstedt 谱序列是一个 $E_\star$-代数的谱序列。在当前工作中，我们证明，对于 R 交换环 C_p-谱并满足某些平坦性条件时，该谱序列是一个 $E_\star(R)$-代数的谱序列。

定理 1.3。 对于素数 p，设 R 和 E 为交换环 C_p-谱，并且 C_p 的选定生成元在 E 上作用平凡，且 $E_\star(R)$ 在 $E_\star$上是平坦的。扭曲 *Bökstedt* 谱序列是一个交换的 $E_\star(R)$-代数的谱序列。

接下来，我们利用 [BCS10] 中已知的 THH 计算，得到新的扭曲 THH 计算。

命题 1.4。 设 p 和 q 为不同素数， F 为 C_p-麦基域，使得 $F(C_p/C_p) = \mathbb{F}_q$ 且 $F(C_p/e) = 0$。以下为谱的等价:

$$\Phi^{C_p}(\mathrm{THH}_{C_p}(H\underline{F})) \simeq H\mathbb{F}_q \wedge \Omega(S^3)_+, \quad and$$
$$\Phi^{C_2}(\mathrm{THH}_{C_2}(MU_{\mathbb{R}})) \simeq MO \wedge BBO_+.$$

接下来，我们为任意余纤维化结合环 C_p-谱 A 以及任意几何 C_p-谱 E，求得 $E_\star(\mathrm{THH}^{C_p}(A))$ 的一个公式。利用上述计算和该公式，可以证明以下结论。

命题 1.5。 设 A 为余纤维化结合环 C_p-谱， p 为素数。若 E 是几何C_p-谱，则

$$\underline{E}_\star(\mathrm{THH}_{C_p}(A))(C_p/C_p) \cong \Phi^{C_p}(E)_{\dim(\star^{C_p})}(\Phi^{C_p}\,\mathrm{THH}_{C_p}(A)), \quad and$$
$$\underline{E}_\star(\mathrm{THH}_{C_p}(A))(C_p/e) \cong 0.$$

1.1. **结构安排**。 在第 2 节中，我们回顾 Mackey 函子、Green 函子和麦基域的定义与性质，并发展 $\mathbb{Z}$-分次和 $RO(C_p)$-分次 Mackey 域的理论。本节最后，我们计算 $RO(C_p)$-分次 Eilenberg–Mac Lane 谱的同伦群，其中底层是 C_p-麦基域。在第 3 节中，我们回顾 Green 函子的 Hochschild 同调构造以及扭曲拓扑 Hochschild 同调（THH）。第 4 节计算实配边谱的 C_2-扭曲 THH 的等变同调。

在第 5 和第 6 节中，我们分别研究 C_p-扭曲 THH 的代数结构以及 C_p-扭曲 Bökst- edt 谱序列。第 7 节还对扭曲 THH 进行了更多计算，具体包括 $\mathrm{THH}^{C_p}(HF)$、$\mathrm{THH}^{C_2}(MU_{\mathbb{R}})$ 和 $E_\star(\mathrm{THH}^{C_p}(A))$，其中 Fa C_p-麦基域满足 $F(C_p/C_p) = \mathbb{F}_q$ 且 $F(C_p/e) = 0$，适用于 p 和 q 不同的素数、E 一个几何 C_p-谱，以及 A 一个结合环 C_p-谱。

1.2. **记号与约定**。 本文中，设 G为一个有限阿贝尔群。我们研究以完备宇宙为指标的 genuine 正交 G-谱。我们用 $*$表示$\mathbb{Z}$-分次，用 $\star$ 表示 $RO(G)$-分次，并用 $\bullet$ 表示单纯分次。凡是讨论旋转时，均指逆时针旋转。

1.3. **致谢**。 作者感谢Teena Gerhardt在本项目中给予的全部支持与指导。作者还感谢Anna Marie Bohmann、David Chan、Michael Hill、Chloe Lewis、Cary Malkiewich以及Maximilien P´eroux进行的许多有益讨论。作者感谢Teena Gerhardt、Michael Hill和Cary Malkiewich提出的修改建议。

作者部分得到美国国家科学基金会项目DMS-1810575、DMS-2052042、DMS-2104233、DMS-RTG 2135960和DMS-RTG 2135884的资助，以及密歇根州立大学的博士论文续期奖学金和博士论文完成奖学金。本文部分基于美国国家科学基金会在DMS-1928930项目下支持的工作，该工作完成于作者在2022年秋季学期访问位于加利福尼亚州伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所（前称MSRI）期间。

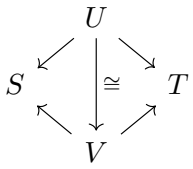
2. C_p-Mackey functors

设 p 是一个素数。本节将介绍 C_p-Mackey 函子。对于任意有限群 G，还有更一般的 G-Mackey 函子概念，但本文将重点讨论 $G = C_p$。

设 S，T，和 U 是有限 C_p-集。从 S 到 T 的一个跨度是一个图

$$S \longleftarrow U \longrightarrow T$$

其中映射是 C_p-等变的。跨度的同构是有限 G-集的一个交换图



跨度的复合由拉回给出。给定两个跨度 $S \leftarrow U_1 \rightarrow T$ 和 $S \leftarrow U_2 \rightarrow T$，可通过不交并定义一个幺半群乘积，$S \leftarrow U_1 \bigsqcup U_2 \rightarrow T$。

定义 2.1。C_p 的伯恩赛德范畴记作 $\mathcal{A}^{C_p}$，其对象为有限 C_p-集。态射集 $\mathcal{A}^{C_p}(S,\ T)$ 是跨度 $S \leftarrow U \rightarrow T$ 的同构类所成幺半群的群完备化。

这个范畴使我们能够定义 Mackey 函子。

定义 2.2. A C_p-*Mackey* 函子 是一个加性函子 $M\colon (\mathcal{A}^{C_p})^{\mathrm{op}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}b}$，它将不交并映射为直和。

这个定义虽然简单，但并不十分明确。现在我们将以一种等价的方式构造 Mackey 函子，读者或许会觉得这种方式更直观。

令 Fin^{C_p} 为有限 C_p-集的范畴。一个 C_p-Mackey 函子 M 等价于一对加性函子

$$M_*, M^*\colon Fin^{C_p} \rightarrow \mathcal{A}b$$

它们分别将不交并映为直和，并且分别是协变和反变的。此外，对于任意 $S \in Fin^{C_p}$，$M_*(S) = M^*(S)$，记作 $M(S)$。回忆一下，任意有限的 C_p-集都同构于 $\bigsqcup_i C_p/C_p \sqcup \bigsqcup_j C_p/e$。由于 Mackey 函子具有可加性，只需知道 $M(C_p/C_p)$ 和 $M(C_p/e)$，便可确定任意有限 C_p-集 S 上的 $M(S)$。此外，还要求如果

— — —

the 下图在 Fin^{C_p} 中是一个拉回，则第二个图可交换 :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{M}(W) & \xrightarrow{M_*(g')} & \underline{M}(X) \\ {\scriptstyle M^*(f')}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M^*(f)} \\ \underline{M}(Z) & \xrightarrow[M_*(g)]{} & \underline{M}(Y). \end{array}$$

存在一个自然满射 q: $C_p/e \to C_p/C_p$。同态 $M_*(q)$: $M(C_p/e) \to M(C_p/C_p)$ 称为转移映射，记为 tr。同态 $M^*(q)$: $M(C_p/C_p) \to M(C_p/e)$ 称为限制映射，记为 res。

每一层 $M(C_p/H)$ 自然具有由 C_p/H 到自身的 C_p-映射集合所给出的群作用。该映射集合同构于关于 H 的魏尔群，其定义为$WH := N_{C_p}(H)/H$，其中 $N_{C_p}(H)$ 表示 H 在 C_p 中的正规化子。

注 2.3. 设 M 为一个 C_p-Mackey函子。由于对 $H \leq C_p$ 而言 C_p 是阿贝尔的 $WH = C_p/H$，这意味着阿贝尔群 $M(C_p/e)$ 具有 C_p-作用，而 $M(C_p/C_p)$ 具有平凡群的作用。因此 $M(C_p/C_p)$ 与 $M(C_p/e)$ 是 $\mathbb{Z}[C_p]$-模，且转移映射与限制映射是 $\mathbb{Z}[C_p]$-模的映射。因此 M 容许一个 C_p-作用。

一个 刘易斯图是描述 Mackey 函子的简洁方式。在本文中，我们将如下表示一个 C_p-Mackey 函子（记作 M）的刘易斯图:

$$\begin{array}{c} \underline{M}(C_p/C_p) \\ {\scriptstyle res}\big(\quad\big){\scriptstyle tr} \\ \underline{M}(C_p/e) \end{array}$$

请注意，我们没有在图中表示 Weyl作用。

定义 2.4。 两个 *-Mackey* 函子 ϕ之间的映射: $M \to N$ 是一个自然变换。该映射由 WH-等变群同态 ϕ_H: $M(C_p/H) \to N(C_p/H)$ 对所有$H \leq C_p$定义。此外，这些同态必须与转移和限制映射相容。

让我们考虑一些重要的 C_p-Mackey 函子例子。注意，对于 G-Mackey 函子，这些定义都可以推广到 G 有限群的情形，但我们将重点讨论 C_p-Mackey 函子。

例 2.5。 设 L 为一个阿贝尔群。 L上的常值 C_p-*Mackey* 函子，记作 L，是一个 Mackey 函子，其中 $L(C_p/H) = L$ 带有平凡的 WH-作用，限制为恒等映射，而转移为乘以 p。

为了给出下一个例子，我们首先需要以下定义。

定义 2.6。 G 的*Burnside* 环 记作 $A(G)$，它是有限 G-集在不交并运算下的同构类幺半群的群完备化。此环中的乘法由有限 G-集的笛卡儿积给出。

例 2.7。该 C_p-*Burnside Mackey*函子记作 A_{C_p}；当上下文明确时，记作$_A$ 。此函子定义为 $A(C_p/e) = A(e) = \mathbb{Z}$， $A(C_p/C_p) = A(C_p) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，其转移映射和限制映射分别由有限集上的诱导映射和限制映射给出。更明确地说，$tr(x) = (0,\ x)$，且 $res(y,\ z) = y + pz$，其中 $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$。

Lewis 在 C_p-Mackey函子中定义了一个重要例子： [Lew80，定义 5。5] ，称为 J-Mackey函子。我们将在第2.3节中计算等变同调和上同调时使用这些函子。

定义 2.8 ([Lew80，定义 5.5])。设 $H \leq C_p$， p 为素数。函子 $J_{C_p/H}(V)$ 对于 Va$\mathbb{Z}[WH]$-模的定义如下，它取决于 H:

$$J_{C_p/e}(V): \quad \begin{array}{c} V^{C_p} \\ {\scriptstyle inc}\big(\ \ \big){\scriptstyle tr} \\ V \end{array} \qquad J_{C_p/C_p}(V): \quad \begin{array}{c} V \\ 0\big(\ \ \big)0 \\ 0 \end{array}$$

其中 $tr(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma^i x$ 对于 $x \in V$，而 γ 是 C_p的一个生成元。

Mackey 函子是阿贝尔群的等变类比。在经典同伦论中，许多不变量取值于阿贝尔群。这些不变量的等变类比则取值于 Mackey 函子。以下是这一现象的一个重要例子。

例 2.9。设 E 为一个 C_p-谱。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$， E的等变同伦群构成一个 G-Mackey 函子，记作 $\pi_n(E)$，定义如下:

$$\underline{\pi}_n(E)(C_p/H) := \pi_n(E^H).$$

对于一个 C_p-Mackey 函子 $\underline{M}$，存在一个与之对应的 Eilenberg-Mac Lane C_p-谱，记作$H\underline{M}$ (例如，参见 [dS03、dSN09])。与经典情形一样，这些 Eilenberg-Mac Lane C_p-谱由其 $\mathbb{Z}$-分次同伦群刻画:

$$\underline{\pi}_n(H\underline{M}) = \begin{cases} \underline{M} & n = 0 \\ \underline{0} & \text{else.} \end{cases}$$

本文将用到 C_p-Mackey 函子的两种重要分次： $\mathbb{Z}$ 和 $RO(C_p)$。给定群 G， $RO(G)$ 是 G 的实表示形式差构成的环。例如，$RO(C_2)$ 可写作 $\{k + \ell\sigma \,|\, k, \ell \in \mathbb{Z}\}$ ，其中 σ 是符号表示。

定义 2.10. A $\mathbb{Z}$-分次 C_p-*Mackey* 函子 定义为一族 C_p-Mackey 函子$\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，记作 M_*。 $\mathbb{Z}$-分次C_p-Mackey 函子之间的映射 $M_* \to N_*$，是一族 C_p-Mackey 函子之间的映射 $\{M_n \to N_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$。 $RO(C_p)$-分次 C_p-*Mackey* 函子 的定义类似。

G-谱的同伦群自然带有 $RO(G)$-分次。

定义 2.11. 设 E 是一个 C_p-谱。对于所有 $\alpha = [\gamma] - [\beta] \in RO(C_p)$， E 的等变同伦群记作 $\underline{\pi}_\alpha(E)$，定义为

$$\underline{\pi}_\alpha(E)(C_p/H) = \pi_\alpha(E^H) = [S^\gamma \wedge C_p/H_+, S^\beta \wedge E]^{C_p} = [S^\gamma, S^\beta \wedge E]^H.$$

其中 $[-,-]^H$ 表示 H-等变映射的同伦类。

对于每个子群 $H \leq C_p$ 以及每个 $\alpha \in RO(C_p)$ ，在 $\underline{\pi}_\alpha(E)$ 上都有逐层的 C_p-作用，其定义为

$$C_p \times \underline{\pi}_\alpha(E)(C_p/H) \to C_p/H \times \underline{\pi}_\alpha(E)(C_p/H) \to \underline{\pi}_\alpha(E)(C_p/H),$$

其中第二个映射是魏尔群作用。这些逐层的 C_p-作用组合成 $\underline{\pi}_\alpha(E)$ 上的一个 C_p-作用。

范畴 C_p-Mackey 函子构成一个阿贝尔范畴，并具有一种称为盒积的对称幺半积，记作 $\square$。Lewis 首先在 [Lew80]第 1 节中定义了盒积。盒积的单位元是 Burnside Mackey函子 A，见定理 2.7。Lewis 在 C_p中给出了两个 [Lew88]-Mackey 函子盒积的公式。

定义 2.12 ([Lew88])。设 p 是素数，并为 γ 选取一个生成元 C_p。设 M 和 N 是C_p-Mackey 函子，其转移映射和限制映射分别带有 M 和 N标记。我们可以定义 $M\Box N$:

$$\Big(\underline{M}(C_p/C_p)\otimes\underline{N}(C_p/C_p)\oplus Im(tr)\Big)/_{FR}$$
$$res\Big(\quad\Big)tr$$
$$\underline{M}(C_p/e)\otimes\underline{N}(C_p/e).$$

C_p 在 $M(C_p/e)\otimes N(C_p/e)$ 上的作用由 $\gamma(x\otimes y)=\gamma(x)\otimes\gamma(y)$ 给出。限制映射定义为 $res(a\otimes b)=res_M(a)\otimes res_N(b)$，对于任意元素 $tr(z)\in Im(tr)$，$res(tr(z))=z+\gamma z+\ldots+\gamma^{p-1}z$。记号 FR 表示 Frobenius互反子模，它由以下形式的元素生成:

$$(a\otimes tr_{\underline{N}}(y),0)-(0,tr(res_{\underline{M}}(a)\otimes y)),\text{ and}$$
$$(tr_{\underline{M}}(x)\otimes b,0)-(0,tr(x\otimes res_{\underline{N}}(b)))$$

对于 $x\in\underline{M}(C_p/e)$ $y\in\underline{N}(C_p/e)$ $a\in\underline{M}(C_p/C_p)$，以及 $b\in\underline{N}(C_p/C_p)$。

命题 2.13 ([Lew80, Lew88, Shu10])。设 p 是素数。对于 C_p-*Mackey* 函子 M，N和L，映射 $M\Box N\to L$ 与满足某些条件的 *Weyl*等变映射族之间存在自然双射对应。具体而言，

$$f_{C_p}\colon\underline{M}(C_p/C_p)\otimes\underline{N}(C_p/C_p)\to\underline{L}(C_p/C_p)$$
$$f_e\colon\underline{M}(C_p/e)\otimes\underline{N}(C_p/e)\to\underline{L}(C_p/e)$$

满足以下相容条件:

(1) $res\circ f_{C_p}=f_e\circ(res\otimes res)$ *(2)* $f_{C_p}\circ(tr\otimes$恒等映射$)=tr\circ f_e\circ($恒等映射$\otimes res)$ *(3)* $f_{C_p}\circ($恒等映射$\otimes tr)=tr\circ f_e\circ(res\otimes$恒等映射$)$。

在分次 C_p-Mackey 函子上也有一个盒积。

定义 2.14 （[LM06，定义 2.4]）。设 N_*和 M_*是 $\mathbb{Z}$-分次 C_p-Mackey 函子。定义 $N_*\Box M_*$为一个 $\mathbb{Z}$-分次 C_p-Mackey 函子，使得对于 $n\in\mathbb{Z}$

$$(\underline{N}_*\Box\underline{M}_*)_n=\bigoplus_{n=k+\ell}(\underline{N}_k\Box\underline{M}_\ell).$$

对 $RO(C_p)$-分次 Mackey 函子的定义也类似。

$\mathbb{Z}$-分次 C_p-Mackey 函子上的乘积的单位元是 A_*，它在 A 0 次分次下为 0，在所有其他分次下也为 0。类似地，$RO(C_p)$-分次 C_p-Mackey 函子上的乘积的单位元是 $A_\star$，它在 A 0 次分次下为 0，在所有其他分次下也为 0。

2.1. **Green函子**。可以在 Mackey 函子上使用盒积来构造环的等变类比。

定义 2.15 ([Lew80，定义 2.1(a)])。一个 C_p-*Green* 函子 R 是带有单位映射 $\eta\colon A\to R$和乘法映射 $\phi\colon R\Box R\to R$的 Mackey函子，并且满足通常的图交换条件。若一个 C_p-Green 函子满足 $\phi\cong\phi\circ\tau$，其中 τ 交换 R 的两个副本，则称其为交换的。

定义 2.16 ([LM06，定义 3.1])。一个 $\mathbb{Z}$-分次 C_p-*Green* 函子 R_* 是一族 Mackey 函子，$\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 带有单位映射 $\eta\colon A_* \to R_*$ 和乘法映射 $\phi\colon R_* \square R_* \to R_*$，并且满足通常的图交换条件。若一个 $\mathbb{Z}$-分次 C_p-Green 函子满足 $\phi \cong \phi \circ \tau$，其中 τ 旋转 R_* 的两个副本。

为了定义一个 $RO(C_p)$-分次交换的 C_p-Green 函子，我们将首先定义旋转同构。对于 α, $\beta \in RO(C_p)$，交换映射 $S^\alpha \wedge S^\beta \to S^\beta \wedge S^\alpha$ 在 Burnside 环 $A(C_p)$ 中给出一个元素。我们将此元素称为 $s(\alpha, \beta)$。此外，对于 $M_\star$ 和 $N_\star RO(C_p)$-分次 Mackey 函子，$s(\alpha, \beta)$ 诱导出一个自同构 $M_\alpha \square N_\beta \to M_\alpha \square N_\beta$。这个自同构与阿贝尔群的张量积的对称同构一起，给出一个同构 $r_{\alpha,\beta}\colon M_\alpha \square N_\beta \to N_\beta \square M_\alpha$。

定义 2.17。设 $M_\star$ 和 $N_\star$ 是 $RO(C_p)$-分次 Mackey 函子。旋转同构（记作 $\tau\colon M_\star \square N_\star \to N_\star \square M_\star$）在 $\gamma \in RO(C_p)$ 这一层级上定义为 $r_{\alpha,\beta}\colon M_\alpha \square N_\beta \to N_\beta \square M_\alpha$，如上所定义，对所有 $\alpha + \beta = \gamma$ 均成立。

我们现在可以定义 $RO(C_p)$-分次 C_p-Green 函子。

定义 2.18. 一个 $RO(C_p)$-分次 C_p-*Green* 函子 $R_\star$ 是由一族 Mackey 函子组成的，$\{R_\alpha\}_{\alpha\in RO(C_p)}$ 带有一个单位映射 $\eta\colon A_\star \to R_\star$ 和一个乘法映射 $\phi\colon R_\star \square R_\star \to R_\star$ 使得通常的图交换。若一个 $RO(C_p)$-分次 C_p-Green 函子称为交换的，如果 $\phi \cong \phi \circ \tau$ 其中 τ 是定理 2.17 中的旋转同构。

这使我们能够定义 Mackey 模、子模和理想。我们先来看下面的定义。

定义 2.19. 一个子函子，记作 S，若它属于一个 C_p-Mackey 函子 M，则是一个从有限 C_p-集到阿贝尔群的函子，其中 $S(C_p/e) \le M(C_p/e)$，$S(C_p/C_p) \le M(C_p/C_p)$，且 S 的转移、限制和魏尔群作用均由 M. 诱导

Lewis 在 [Lew80]，中定义了 Green 函子上的模，并且 Lewis 和 Mandell 定义了 $RO(C_p)$-分次模，其定义在 $RO(C_p)$-分次Green函子上，见 [LM06]。

定义 2.20（[Lew80，定义 2.1(b)],[LM06，定义 3.2]）。对于 R 一个 C_p-Green 函子，左R-模是一个 C_p-Mackey函子 M，带有模结构映射 $\xi\colon R \square M \to M$，使得通常的图可交换。右 R-模与 R-双模按类似方式定义。若 R 是交换的，则每个左（右） R-模都是一个 R-双模。

在 $\mathbb{Z}$-分次Green函子以及 $RO(C_p)$-分次Green函子上的分次模按类似方式定义。值得注意的是，一个 $\mathbb{Z}$-分次 R_*-子模 N_*（属于 M_*）在每一层上都是子函子，这意味着对所有 $n \in \mathbb{Z}$，N_n 都是 M_n 的子函子，其中 N_n 在 R_* 的作用下封闭。对于一个 $RO(C_p)$-分次 $R_\star$-子模，情况类似。

Lewis 在 [Lew80] 中定义了 Green 函子的理想。

定义 2.21 ([Lew80，定义 2.1(c)])。设 R 是一个 C_p-Green 函子。是 I 的 R 左理想，即将 R 视为自身上的左模时的子模。类似地，可以定义右理想和双边理想。

分次理想对于 $\mathbb{Z}$-分次和 $RO(C_p)$-分次 Green 函子也可类似定义。

定义 2.22。设 R_* 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 C_p-Green 函子。左理想 I_* 是 R_* 的一个 R_*-子模，将其视为左 I_*-模。类似地，可以定义右理想 和 双边理想。

定义 2.23. 设 $R_\star$ 是一个 $RO(C_p)$-分次 C_p-Green 函子。$R_\star$ 的左理想 $I_\star$ 是一个被视为左 $I_\star$-模的 $R_\star$-子模。类似地，可以定义右理想 和双边理想。

注意，正如经典情形中那样，若 $I_\star$ 是 $R_\star$的一个 $RO(C_p)$-分次左理想，则 I_0 必定是 R_0的一个左理想。这是因为，根据 $R_\star$-子函子的定义，存在包含映射$I_0 \to R_0$，且 $R_0 \square I_0$上的模结构映射必须落入 I_0。因此 I_0 是 R_0的一个理想。

在经典情形下，我们有由余等化子图定义的阿贝尔群的相对张量积。以下是其等变类比。Lewis 在 [Lew80]，中定义了非分次情形，而 Lewis 和 Mandell 将其推广到 $RO(C_p)$- 分次情形，见 [LM06]。

定义 2.24 ([Lew80], [LM06，定义 3.6(a)])。设 L与 M 分别为右与左 R-模，其中 R 为一个 C_p-Green 函子。定义 $L \square_R M$ 为下列图在 C_p-Mackey 函子范畴中的余等化子

$$\underline{L} \square \underline{R} \square \underline{M} \underset{\mathrm{id} \square \lambda}{\overset{\rho \square \mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \underline{L} \square \underline{M}$$

其中 ρ 与 λ 分别为右模作用与左模作用。该定义对$\mathbb{Z}$-分次以及 $RO(C_p)$-分次Green函子类似。

2.2. **Mackey 域。** 我们现在可以讨论域的等变类比。Lewis 在 [Lew80] 中定义了 Mackey 域。在本小节中，我们将自然地推广这一定义，以定义分次Mackey域。

定义 2.25 ([Lew80，定义 2.6(f)])。一个 C_p-麦基域 F 是一个非零、交换的C_p-Green 函子，且没有非平凡真理想。

人们可能会猜想，域上的常值 Mackey 函子总是麦基域，但事实并非总是如此。

例 2.26。 二元域 $\mathbb{F}_2$ 上的常值 C_2-Mackey 函子不是 C_2-麦基域。回忆一下，$\mathbb{F}_2(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_2(C_2/e) = \mathbb{F}_2$, $tr = 0$，以及 $res =$ 恒等映射。它有一个非平凡理想 I，使得 $I(C_2/C_2) = 0$, $I(C_2/e) = \mathbb{F}_2$, $tr = 0$，以及 $res = 0$。

例 2.27。 具有 p 个元素的域 $\mathbb{F}_p$ 上的常值 C_2-Mackey 函子，当 p 是奇素数时，是一个 Mackey 域。回忆一下，$\mathbb{F}_p(C_2/C_2) = \mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_p(C_2/e) = \mathbb{F}_p$, $tr = 2$, 以及 $res =$ 恒等映射。事实上，对于任意不同素数 p 和 q，$\mathbb{F}_p$ 都是一个 C_q-麦基域。

还有许多其他麦基域的例子。事实上，任何满足 M where$M(C_p/e) = 0$and $M(C_p/C_p) = F$for F 为域的C_p-Mackey 函子，都是一个 C_p-麦基域。下面是另一个有趣的例子。

例2.28。 C_2 上的不动点 C_2-Mackey 函子，记作 $FP(\mathbb{C})$，其中 C_2 对 $\mathbb{C}$ 的作用是复共轭，它是一个 C_2-麦基域。这个 Mackey 函子由以下特征定义：$FP(\mathbb{C})(C_2/C_2) = \mathbb{C}^{C_2} = \mathbb{R}$, $FP(\mathbb{C})(C_2/e) = \mathbb{C}$, $tr = 2Re$, 以及 $res = inc$。

你可能已经注意到，对于每个麦基域的例子 F, $F(C_p/C_p)$ 都是一个域。这并非这些例子所独有，而是麦基域的一个特征。

命题2.29 ([Lew80，命题3.9(f)])。若 F 是一个 C_p-*Mackey* 域，则 $F(C_p/C_p)$ 是一个域。

注意，$F(C_p/e)$ 不一定是域。事实证明，可以根据 $F(C_p/e)$ 是否为零，通过归纳理论对 C_p-麦基域进行“分类”。

现在，我们将给出分次Mackey域的一个自然定义。

定义2.30. A $\mathbb{Z}$-分次 C_p-麦基域 是一个非零的交换 $\mathbb{Z}$-分次 C_p-Green 函子，且没有非平凡的 $\mathbb{Z}$-分次理想。 $RO(C_p)$-分次麦基域 的定义类似。

2.3. **Eilenberg–Mac Lane 谱的等变同伦群。** 在本节中，我们将计算 $\pi_\star(HF)$，其中 C_p-麦基域 F， p 素数。注意，Ferland 和 Lewis 在$\pi_\star(HM)$中计算了 M任意 C_p-麦基函子；见 [FL04]的第 8 节。我们发现，当 $\pi_\star(HM)$是一个 M C_p-麦基域时，计算 $\pi_\star(HM)$要简单得多，因此值得重新探讨。首先回顾等变同调与上同调的定义。

定义 a_+ 为离散空间 a 与一个 C_p-平凡点的不交并。对于 C_p-谱 E和 D，我们将 $[D,E]^{C_p}$视为一个 C_p-Mackey函子，定义为：对于有限 C_p-集 a， $[D,E]^{C_p}(a) = [\Sigma^\infty a_+ \wedge D, E]^{C_p}$。类似地，对于 C_p-空间 X， $[\Sigma^\infty X, E]^{C_p}(a) = [\Sigma^\infty a_+ \wedge \Sigma^\infty X, E]^{C_p}$是一个 C_p-Mackey函子。

定义 2.31 ([LMM81, LMSM86])。 假设 E 和 D 是 C_p-谱，并且 X 是一个 C_p-空间。那么C_p-等变 E-上同调 和 E-同调 由 X 和 D 给出如下：

$$\begin{aligned} \underline{E}^\star(X) &= [\Sigma^\infty_+ X, S^\star \wedge E]^{C_p}, & \underline{E}_\star(X) &= [S^\star, \Sigma^\infty_+ X \wedge E]^{C_p}, \\ \tilde{\underline{E}}^\star(X) &= [\Sigma^\infty X, S^\star \wedge E]^{C_p}, & \tilde{\underline{E}}_\star(X) &= [S^\star, \Sigma^\infty X \wedge E]^{C_p}, \\ \underline{E}^\star(D) &= [D, S^\star \wedge E]^{C_p}, \quad \text{and} & \underline{E}_\star(D) &= [S^\star, D \wedge E]^{C_p}. \end{aligned}$$

注意， $\pi_\star(\underline{E} \wedge D) = E_\star(\underline{D})$。对于 Mackey函子 M， $\underline{H}_\star(-; M) \cong HM_\star(-)$，且 $H^\star(-; M) \cong HM^\star(-)$，这意味着在上述定义的记号中， $E = HM$ 是 M 的 Eilenberg-Mac Lane 谱。

Oru在 [Oru89]给出的下述结果比我们在此陈述的更一般。本文将重点讨论 C_p-麦基域。

命题 2.32 ([Oru89, 命题 3.11])。 对于 F 一个 C_p-麦基域，使得 $F(C_p/e) = 0$， M 一个关于 F的模， E 一个 C_p-谱，以及 $\alpha \in RO(C_p)$ 我们有

$$\underline{H}_\alpha(E; \underline{M}) \cong J_{C_p/C_p}(H_{\dim(\alpha^{C_p})}(\Phi^{C_p}(E); \underline{M}(C_p/C_p))), \text{ and}$$
$$\underline{H}^\alpha(E; \underline{M}) \cong J_{C_p/C_p}(H^{\dim(\alpha^{C_p})}(\Phi^{C_p}(E); \underline{M}(C_p/C_p))).$$

对于 F'一个 C_p-麦基域，使得 $F'(C_p/e) \neq 0$， M'一个关于 F' 的模， E一个 C_p-谱，以及 $\alpha \in RO(C_p)$ 我们有

$$\underline{H}_\alpha(E; \underline{M}') \cong J_{C_p/e}(H_{\dim(\alpha)}(E; \underline{M}'(C_p/e)) \otimes \mathbb{Z}), \text{ and}$$
$$\underline{H}^\alpha(E; \underline{M}') \cong J_{C_p/e}(H^{\dim(\alpha)}(E; \underline{M}'(C_p/e)) \otimes \mathbb{Z}),$$

其中，除非 $p = 2$ 和 $\alpha = k - k\sigma$ 同时成立且 k 为奇数，否则 $\mathbb{Z}$ 上的 C_p-作用是平凡的；此处 σ 是符号表示。 $\mathbb{Z}$上的非平凡 C_2-作用是乘以 -1。

设 $\mathbb{S}_{C_p}$ 和 $\mathbb{S}$ 分别为环 C_p-谱范畴和环谱范畴中的单位元。我们可以将 $\pi_\star(HF)$写作 $H_\star(\mathbb{S}_{C_p}; F)$。回忆几何不动点函子的以下性质：

$$\Phi^{C_p}(\Sigma^\infty X) \simeq \Sigma^\infty(X^{C_p}).$$

所述 C_p-几何不动点（关于 $\mathbb{S}_{C_p}$ ）如下， $\Phi^{C_p}(\mathbb{S}_{C_p}) = \Phi^{C_p}(\Sigma^\infty_{C_p} S^0) = \Sigma^\infty((S^0)^{C_p}) = \Sigma^\infty S^0 = \mathbb{S}$。因此，定理2.32 表明，对于 F与F' C_p-Mackey 域，使得 $\underline{F}(C_p/e) = 0$且 $F'(C_p/e) \neq 0$，

$$\underline{\pi}_\alpha(H\underline{F}) \cong J_{C_p/C_p}(H_{\dim(\alpha^{C_p})}(\mathbb{S}; \underline{F}(C_p/C_p))) \tag{2.1}$$

$$\underline{\pi}_\alpha(H\underline{F}') \cong J_{C_p/e}(H_{\dim(\alpha)}(\mathbb{S}_{C_p}; \underline{F}'(C_p/e)) \otimes \mathbb{Z}) \tag{2.2}$$

对任意 $\alpha \in RO(C_p)$ 。如定理2.32 $\mathbb{Z}$ 所述，具有非平凡作用，仅当 $p = 2$ 与$\alpha = k - \sigma k$，其中 k 为奇数。

命题 2.33 ([Lew80])。 若 F 是一个 C_p-麦基域，且满足 $F(C_p/e) \neq 0$，则转移映射非零。

现在我们可以描述任意 C_p-麦基域必须具有的形式。

Pr命题 2.34. 任一 C_p-麦基域 F 具有以下两种形式之一：

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d, bend right, "0"'] \\ 0 \arrow[u, bend right, "0"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R^{C_p} \arrow[d, bend right, "inc"'] \\ R \arrow[u, bend right, "tr"'] \end{tikzcd}$$

其中 k 与 R^{C_p} 为域，R 为带有 C_p-作用的环，$tr(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma^i x$（对 $x \in R$），以及 $tr \neq 0$。

证明. 对任意麦基域 F，$\pi_0(HF) \cong F$由 Eilenberg-Mac Lane 谱HF的定义可得。

若 $F(C_p/e) = 0$且 $F(C_p/C_p) = k$为一个域，则等式（2.1）表明$\pi_0(HF) \cong J_{C_p/C_p}(k)$。由定理 2.8 这就是上方左侧的图。

若 $F(C_p/C_p) \neq 0$，则由于 F 是麦基域，它也是交换 Green 函子，故 $F(C_p/e)$ 必为一个环，记作 R。等式 (2.2) 表明 $\pi_0(HF) \cong J_{C_p/e}(R)$。回想一下，在次数 0 时，$\mathbb{Z}$ 的副本对任意素数 p 具有平凡的 C_p 作用。由定理 2.8 $J_{C_p/e}(R)$ 为上方右侧的图，且 $tr(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma^i x$（对 $x \in R$）。此外，由定理 2.33，$J_{C_p/e}(R)$ 的转移映射必为非零。□

设 F是一个 C_p-麦基域，使得 $F(C_p/e) = 0$。回顾一下，根据 Eilenberg-Mac Lane 谱的定义，$\pi_0(HF) \cong F$，并且对任意非零整数 n，$\pi_n(HF) = 0$。因此，方程 (2.1) 表明，对任意满足 $\dim(\alpha^{C_p}) = 0$的 $\alpha \in RO(C_p)$，有 $\pi_\alpha(HF) \cong \pi_0(HF) \cong F$。此外，对任意满足 $\dim(\alpha^{C_p}) \neq 0$的 $\alpha \in RO(C_p)$，有 $\pi_\alpha(HF) \cong 0$。由此，我们得到如下描述：

$$\pi_\alpha(HF) \cong \begin{cases} F & \deg(\alpha^{C_p}) = 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

麦基域的 Eilenberg-Mac Lane 谱的 $\mathbb{Z}$-分次同伦群给出一个$\mathbb{Z}$-分次麦基域，因为 $\pi_*(HF)$ 在 0 次为 F，而在所有其他次数为 0。$RO(C_p)$-分次情形更为复杂。

命题2.35。令 p为素数。对于 F一个 C_p-麦基域，若 $F(C_p/e) = 0$，$HF_\star$则其为一个$RO(C_p)$-分次麦基域。

证明。设 F为一个 C_p-麦基域，满足 $F(C_p/C_p) = k$为一个域，且 $F(C_p/e) = 0$。反设存在一个非平凡的真 $RO(C_p)$-分次理想 $I_\star$，它是 $HF_\star$的理想。分次理想的定义表明，对于所有 $\alpha \in RO(C_p)$，I_α 都是 HF_α 的子模。由此得到，对于所有 $\alpha \in RO(C_p)$ 以及 $H = e$、C_p，有 $I_\alpha(C_p/H) \subseteq HF_\alpha(C_p/H)$。模结构映射$HF_\alpha \square I_\beta \to I_{\alpha+\beta}$来自 $HF_\star$作为自身上的模的模结构。因此，该模结构由乘法映射 $HF_\alpha \square HF_\beta \to HF_{\alpha+\beta}$诱导。若 $HF_\alpha = 0$，则 $HF_\alpha \square HF_\beta = 0$，所以 $HF_\alpha \square HF_\beta \to HF_{\alpha+\beta}$是0映射，但 $HF_{\alpha+\beta}$可能非零。若$HF_\alpha \neq 0 \neq HF_\beta$，则根据定理2.12（$HF_\alpha \square HF_\beta$）$(C_p/e) = 0$，且（$HF_\alpha \square HF_\beta$）$(C_p/C_p) = k \otimes k$。注意，若 $HF_\alpha \neq 0 \neq HF_\beta$，则根据上述计算，deg（$\alpha^{C_p}$）$= 0 =$ deg（β^{C_p}），因此deg（$(\alpha+\beta)^{C_p}$）$= 0$且 $HF_{\alpha+\beta} = F \neq 0$。所以，乘法映射 $HF_\alpha \square HF_\beta \to HF_{\alpha+\beta}$在 C_p/e 层级上是0映射，而乘法映射 $k \otimes k \to k$在 C_p/C_p 层级上。

回忆一下，I_0必须是 $HF_0 = F$的一个理想；由于 F是麦基域，因此 I_0只能是 F或 0。我们将证明，在这两种情况下，$I_\star$ 都必须是 $0_\star$ 或 $HF_\star$，这与假设$I_\star$是一个非平凡的真理想矛盾。

若 $I_0 = F$，选择 $\alpha \in RO(C_p)$ 使得 $HF_\alpha \neq 0$，于是 $HF_\alpha = F$。考虑模结构映射 $HF_\alpha \square I_0 \cong F \square F \to I_\alpha$。如上所述，它由乘法映射$HF_\alpha \square HF_0 \cong F \square F \to HF_\alpha \cong F$诱导，该映射在 C_p/e 层上是零映射，而乘法

映射 $k \otimes k \to k$ 在 C_p/C_p 层上。因此，$I_\alpha(C_p/C_p)$ 必须是 k。所以，对于所有满足 $HF_\alpha \neq 0$ 的 α，都有 $I_\alpha = F$，于是 $I_\star \cong HF_\star$。

如果 $I_0 = 0$，则选择 $\alpha \in RO(C_p)$ 使得 $HF_\alpha \neq 0$，因此 $HF_\alpha = F$。考虑模结构映射 $HF_\alpha \square I_{-\alpha} \cong F \square I_{-\alpha} \to I_0 = 0$。对于任意 $\alpha \in RO(C_p)$，如果 $\dim(\alpha^{C_p}) = 0$，那么 $\dim(-\alpha^{C_p}) = 0$；同样地，如果 $\dim(\alpha^{C_p}) \neq 0$，那么 $\dim(-\alpha^{C_p}) \neq 0$。这表明对于所有 $\alpha \in RO(C_p)$，都有 $HF_\alpha = HF_{-\alpha}$。如上所述，映射 $F \square I_{-\alpha} \to 0$ 由乘法映射 $HF_\alpha \square HF_{-\alpha} \cong F \square F \to HF_0 \cong F$ 诱导，该映射在 C_p/e 层级上是 0 映射，在 C_p/C_p 层级上是乘法映射 $k \otimes k \to k$。由于 $I_{-\alpha}$ 是 $HF_{-\alpha}$ 的子模，因此 $I_{-\alpha}(C_p/C_p) \leq HF_{-\alpha}(C_p/C_p) = k$。由于 k 是一个域，k 中不存在与 k 相乘为 0 的非平凡子群，因此，要使 $F \square I_{-\alpha} \to 0$ 成为乘法映射，$I_{-\alpha}(C_p/C_p)$ 必须为 0，从而 $I_{-\alpha} = 0$。此外，对于所有满足 $HF_\alpha \neq 0$ 的 α，I_α 必须为 0，因此 $I_\star \cong 0_\star$。

因此，$HF_\star$ 是一个 $RO(C_p)$-分次麦基域。 □

设 F 是一个 C_2-麦基域，满足 $F(C_2/e) = R \neq 0$。根据定义，结合 Eilenberg–Mac Lane 谱和等式 (2.2)，我们知道，对于 k 为偶数的情形，$\pi_{k-k\sigma}(HF) \cong \pi_0(HF) = F$，因为在这些次数上，$\mathbb{Z}$ 的副本具有平凡的 C_2作用。对于 k 为奇数的次数 $k - k\sigma$，我们有 $J_{C_2/e}(R \otimes \mathbb{Z})$，其中 $\mathbb{Z}$ 具有非平凡的 C_2作用，即乘以 -1（见定理 2.8）。在所有其他次数上，我们有 $J_{C_2/e}(0) \cong 0$。由此以及定理 2.8，我们得到如下描述：

$$\underline{\pi}_\alpha(H\underline{F}) \cong \begin{cases} \underline{F} & \alpha = k - k\sigma,\ k \text{ even} \\ (R \otimes \mathbb{Z})^{C_2} & \\ inc\Big(\quad \Big)^{1+\gamma} & \alpha = k - k\sigma,\ k \text{ odd} \\ R \otimes \mathbb{Z} & \\ \underline{0} & \text{else} \end{cases}$$

其中，非平凡的 C_2作用 γ在 $R \otimes \mathbb{Z}$ 上是对角的，而 $\mathbb{Z}$ 上的非平凡 C_2作用是乘以 -1。

设 F 是一个 C_p-麦基域，满足对于 p 奇素数有 $F(C_p/e) = R \neq 0$。类似于上文的论证，可得以下描述：

$$\underline{\pi}_\alpha(H\underline{F}) \cong \begin{cases} \underline{F} & \dim(\alpha) = 0 \\ \underline{0} & \text{else.} \end{cases}$$

事实上，当且仅当 $F(C_2/e)$ 的特征为二时，这也是 HF 对于一个 C_2-麦基域的同伦群计算。

麦基域的 Eilenberg-Mac Lane 谱的 $\mathbb{Z}$-分次同伦群构成一个麦基域，因为 $\pi_*(HF)$ 在 0 次为 F，在所有其他次数均为 0。$RO(C_p)$- 分次情形则更为复杂。我们将分成两种情形讨论，并非因为证明有所不同，而是因为其中一种情形的陈述范围更广。

命题2.36。对于 p 奇素数，若 F 是一个 C_p-麦基域，满足 $F(C_p/e) \neq 0$，则 $HF_\star$ 是一个 $RO(C_p)$-分次麦基域。

证明。设 F 是一个 C_p-麦基域，使得 $F(C_p/e) = R \neq 0$ 是交换环，且$F(C_p/C_p) = R^{C_p}$ 是域。反设存在一个非平凡的真 $RO(C_p)$-分次理想 $I_\star$，它包含于 $HF_\star$。分次理想的定义表明，对于所有$\alpha \in RO(C_p)$，I_α 都是 HF_α 的子模。由此可得，对于所有 $\alpha \in RO(C_p)$以及 $H = e, C_p$，都有 $I_\alpha(C_p/H) \subseteq HF_\alpha(C_p/H)$。模结构映射 $HF_\alpha \square I_\beta \to I_{\alpha+\beta}$来自 $HF_\star$作为其自身上的模的模结构。因此，该模结构由乘法映射 $HF_\alpha \square HF_\beta \to HF_{\alpha+\beta}$诱导。若 $HF_\alpha = 0$，则 $HF_\alpha \square HF_\beta = 0$，所以 $HF_\alpha \square HF_\beta \to HF_{\alpha+\beta}$ 是零映射，但 $HF_{\alpha+\beta}$可能非零。若 $HF_\alpha \neq 0 \neq HF_\beta$，则根据定理2.12，$(HF_\alpha \square HF_\beta)(C_p/e)$ $= R \otimes R$

以及$(H\underline{F}_\alpha \square H\underline{F}_\beta)(C_p/C_p) = \left(R^{C_p} \otimes R^{C_p} \oplus Im(tr)\right)/_{FR}$。对于这种情况，乘法映射$H\underline{F}_\alpha \square H\underline{F}_\beta \to H\underline{F}_{\alpha+\beta}$定义为

$$\begin{array}{ccc} \left(R^{C_p} \otimes R^{C_p} \oplus Im(tr)\right)/_{FR} & \xrightarrow{\phi} & R^{C_p} \\ \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \\ R \otimes R & \xrightarrow[\mu]{} & R \end{array}$$

其中 μ 是乘法映射，而 $\phi(x \otimes y,\ tr(a \otimes b)) = xy + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma^i(ab)$。这些映射与转移映射、限制映射以及弗罗贝尼乌斯互反律相容。

回忆一下，$\underline{I}_0$ 必须是 $HF_0 = F$ 的理想，并且由于 F 是麦基域，因此 I_0 要么是 $\underline{F}$，要么是 $\underline{0}$。我们将证明，在这两种情况下，$I_\star$ 都必须是 $0_\star$ 或 $H\underline{F}_\star$，这与假设 $I_\star$ 是非平凡真理想相矛盾。

若 $I_0 = F$，取 $\alpha \in RO(C_p)$ 使得 $HF_\alpha \neq 0$，于是 $\underline{H}F_\alpha = \underline{F}$。考虑模结构映射 $HF_\alpha \square I_0 \cong F \square F \to I_\alpha$。由于 I_α 是 $H\underline{F}_\alpha \cong F$ 的子模，因此 $I_\alpha(C_p/H) \subseteq F(C_p/H)$。如上所述，映射 $HF_\alpha \square I_0 \cong F \square F \to I_\alpha$ 是由乘法映射 $HF_\alpha \square HF_0 \cong F \square F \to HF_\alpha \cong F$ 诱导的；它在 C_p/e 层面上是乘法映射 $\mu\colon R \otimes R \to R$，在 C_p/C_p 层面上则如上所定义为 ϕ。由于 R^{C_p} 是域且 R 是交换环，所以 μ 和 ϕ 都是满射，因为对所有 $x \in R$，$\mu(1 \otimes x) = x$，并且对所有 $x \in R^{C_p}$，$\phi(1 \otimes x, 0) = x$。因此 $I_\alpha(C_p/C_p) = R^{C_p}$ 且 $I_\alpha(C_p/e) = R$。所以对所有满足 $HF_\alpha \neq 0$ 的 α，都有 $I_\alpha = F$，于是 $I_\star \cong HF_\star$。

若 $I_0 = 0$，选择 $\alpha \in RO(C_p)$ 使得 $HF_\alpha \neq 0$，于是 $HF_\alpha = F$. 考虑模结构映射 $HF_\alpha \square I_{-\alpha} \cong F \square I_{-\alpha} \to I_0 \cong 0$。对于任意 $\alpha \in RO(C_p)$，如果 $\dim(\alpha) = 0$，那么 $\dim(-\alpha) = 0$；同样，如果 $\dim(\alpha) \neq 0$，那么 $\dim(-\alpha) \neq 0$。这表明，对于所有 $\alpha \in RO(C_p)$，都有 $HF_\alpha = HF_{-\alpha}$。由于 $I_{-\alpha}$ 是 $HF_{-\alpha} = F$ 的子模，因此 $I_{-\alpha}(C_p/H) \subseteq F(C_p/H)$。设 $I_{-\alpha}(C_p/e) = K \leq R$，则诱导映射 $\mu|_{R \otimes K}(1 \otimes k) = k$ 对所有 $k \in K$ 都必须为 0，因此 $K = 0$。设 $I_{-\alpha}(C_p/C_p) = L \leq R^{C_p}$，那么由于 $I_{-\alpha}$ 是 F 的子模，必然存在一个包含映射 $I_{-\alpha} \to F$，且该映射与限制映射和转移映射相容，

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{inc} & R^{C_p} \\ \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \\ 0 & \xrightarrow[0]{} & R \end{array}$$

但这个 Mackey 函子映射要保持限制映射，唯一的可能就是 $L = 0$。因此，对于所有满足 $HF_\alpha \neq 0$ 的 α，$I_{-\alpha}$ 必须为 0，所以 $I_\star \cong 0_\star$。

因此，$HF_\star$ 是一个 $RO(C_p)$-分次麦基域。 □

下面命题的证明相同。

命题 2.37。设 F 是一个 $\underline{C_2}$-麦基域，其中 $F(C_2/e) = R \neq 0$。将 $\mathbb{Z}$ 视为一个 $\mathbb{Z}[C_2]$-模，其中 C_2-作用为乘以 -1。若 R 满足 $R \otimes \mathbb{Z} \cong R$ 作为 $\mathbb{Z}[C_2]$-模成立，则 $HF_\star$ 是一个 $RO(C_2)$-分次麦基域。

3. Equivariant (topological) Hochschild homology

本文将研究 Hochschild 同调（HH）和拓扑 Hochschild 同调（THH）的等变类比。本节将回顾这些等变类比，即 Green 函子的 Hochschild 同调 [BGHL19，定义 2。25] 以及扭曲 THH[ABG+18，定义 8。2], 它们分别以 Green 函子和等变环谱为输入。这两个定义适用于任意循环群 C_n，但本文只考虑循环群 C_p，p 素数。

3.1. **Green 函子的 Hochschild 同调。** Green 函子是环的等变类比；因此，自然会希望有一种以 R-代数为输入的 Hochschild 同调等变类比，其中 R 是一个 Green 函子。在 [BGHL19] 中，作者定义了这样一种等变类比，即*Green* 函子的 *Hochschild* 同调。

在本节中，设 $C_p = \langle\gamma\rangle$ 是阶为 p 的循环群，其中 $\gamma = e^{2\pi i/p}$。由定理 2.3可知，可以定义一个 C_p-作用，其作用对象为一个 C_p-Mackey函子。设 α_k： $M^{\square k+1} \to M^{\square k+1}$为如下映射：将 M 的最后一个副本旋转到最前面，然后作用在该 M 上，所用作用为 γ。

定义 3.1 ([BGHL19]，定义 2.20])。设 $C_p = \langle\gamma\rangle$， R 为一个交换的 C_p-Green 函子，M 为一个 R-代数，并设所有盒积均在 R 上取。M 的 C_p-扭曲循环 ***bar*** 复形，记作 $B^{cy,C_p}_\bullet(M)$，是一个单纯 C_p-Mackey函子，使得 $B^{cy,C_p}_k(M) = M^{\square k+1}$，其中面映射与退化映射 d_i： $M^{\square k+1} \to M^{\square k}$以及 s_i： $M^{\square k+1} \to M^{\square k+2}$定义如下：

$$d_i = \begin{cases} \mathrm{id}^i \square \mu \square \mathrm{id}^{k-i-1} & 0 \le i < k \\ (\mu \square \mathrm{id}^{k-1}) \circ \alpha_k & i = k \end{cases}$$
$$s_i = \mathrm{id}^{i+1} \square \eta \square \mathrm{id}^{k-i} \qquad 0 \le i \le k$$

其中， μ 和 η 分别是 M的乘法映射和单位映射。

通过在每个轨道处应用Dold-Kan对应，可以得到单纯Mackey函子范畴与非负分次dg Mackey函子范畴之间的等价。单纯Mackey函子的同调是其关联的正规化dg Mackey函子的同调；详情请参见 [BGHL19]第 4 节。

定义 3.2 ([BGHL19]，定义 2。25])。设 $C_p = \langle\gamma\rangle$， R 一个交换的 C_p-Green 函子，以及 M 一个 R-代数。的*Hochschild* 同调定义为：

$$\underline{\mathrm{HH}}^{R,C_p}_i(\underline{M}) = H_i(B^{cy,C_p}_\bullet(\underline{M})).$$

Adamyk、Gerhardt、Hess、Klang 和 Kong 在 [AGH+22]中定义了分次Green函子的 Hochschild 同调。设 α_k：将 $M_\star^{\square k+1} \to M_\star^{\square k+1}$定义为：首先利用旋转同构（见定理2.17）将最后一个 $M_\star$副本移到最前面，然后通过 $M_\star$作用于该 γ副本。

定义 3.3 ([AGH+22]，定义 4.1.7])。设 $C_p = \langle\gamma\rangle$， $R_\star$ 为一个交换的 $RO(C_p)$-分次 Green 函子，$M_\star$ 为一个 $R_\star$-代数，且所有盒积均取在 $R_\star$ 上。C_p-扭曲循环 ***bar*** 复形（$M_\star$ 的），记作 $B^{cy,C_p}_\bullet(M_\star)$，是一个单纯 $RO(C_p)$-分次 Mackey函子，使得$B^{cy,C_p}_k(M_\star) = M_\star^{\square k+1}$，其中面映射与退化映射 d_i： $M_\star^{\square k+1} \to M_\star^{\square k}$以及 s_i： $M_\star^{\square k+1} \to M_\star^{\square k+2}$定义如下：

$$d_i = \begin{cases} \mathrm{id}^i \square \mu \square \mathrm{id}^{k-i-1} & 0 \le i < k \\ (\mu \square \mathrm{id}^{k-1}) \circ \alpha_k & i = k \end{cases}$$
$$s_i = \mathrm{id}^{i+1} \square \eta \square \mathrm{id}^{k-i} \qquad 0 \le i \le k$$

其中 μ 与 η 是 $M_\star$ 的乘法映射和单位映射。

定义 3.4 ([AGH+22]，定义 4.1.8])。设 $C_p = \langle\gamma\rangle$，设 $R_\star$ 为一个交换的 $RO(C_p)$-分次 Green 函子，并设 $M_\star$为一个 $R_\star$-代数。***Hochschild*** 同调 关于 $M_\star$，定义如下：

$$\underline{\mathrm{HH}}^{R_\star,C_p}_i(\underline{M_\star}) = H_i(B^{cy,C_p}_\bullet(\underline{M_\star})).$$

Lewis 和 Mandell 的论文 [LM06] 使我们能够在等变情形下进行同调代数。与经典情形一样，Green 函子的 Hochschild 同调也可以从 Tor 函子的角度来理解。我们回顾这一情形下 Tor 的定义，见 [LM06]此定义适用于一般的有限群 G 但我们只考虑群 C_p。

定义 3.5 ([LM06])。设 $R_\star$ 是一个 $RO(C_p)$-分次 Green 函子。对于 $M_\star$ 和 $N_\star$，分别为左、右 $R_\star$-模，$\mathrm{Tor}^{R_\star}_{s\,\star}(N_\star, M_\star)$ 是 s^{th} 的左导出函子，其中 $N_\star \square_{R_\star} M_\star$。

为了讨论一个将等变 Tor 与 Green 函子的 Hochschild 同调联系起来的结果，我们必须为一些重要的模定义以下记号。

设 R 是一个 C_p-Green 函子，N 是一个左 R-模，并将 N 的左 R-模映射记为 μ。定义 ${}^{\gamma}N$ 为 N，其左 R-模映射为 ${}^{\gamma}\mu$，定义如下图所示：

$$\begin{array}{ccc} R \square N & \xrightarrow{{}^{\gamma}\mu} & N \\ {\scriptstyle \gamma \square \mathrm{id}}\downarrow & \nearrow_{\mu} & \\ R \square N & & \end{array}$$

其中，$\gamma\colon R \to R$ 通过 γ 作用于 R；请注意，此图中的盒积不是在 R 上取的。对于 M 为一个 R-代数的情形，该定义可推广至 ${}^{\gamma}M$。

现在我们准备继续讨论以下结果，它将帮助我们完成第 4 节中的计算。

命题 3.6 ([AGH+22，命题 4.3。2])。设 $C_p = \langle\gamma\rangle$，且 $R_\star$ 是一个 $RO(C_p)$-分次交换 *Green* 函子。若 $M_\star$ 是一个 $R_\star$-代数，且作为 $R_\star$-模是平坦的，则存在自然同构

$$\mathrm{HH}^{R_\star, C_p}_*(M_\star) \cong \mathrm{Tor}^{M_\star \square_{R_\star} M_\star^{op}}_{*,\star}(M_\star, {}^{\gamma}M_\star).$$

3.2. **扭曲拓扑 Hochschild 同调**。在 [ABG+18]中，Angeltveit、Blumberg、Gerhardt、Hill、Lawson 和 Mandell 定义了一种 THH 的等变类比，其输入为一个环 C_n-谱，即 C_n-扭曲拓扑 *Hochschild* 同调，适用于一般的循环群C_n。作者将环 C_n-谱的 C_n-扭曲 THH A 定义为范数 $N^{S^1}_{C_n}A$；他们还证明，可以利用循环 bar 复形的扭曲类比来定义扭曲 THH。本文将重点讨论循环群 C_p，p 素数。

对于本节，令 $C_p = \langle\gamma\rangle$ 为阶数为 p 的循环群，其中 $\gamma = e^{2\pi i/p}$；令 A 为一个结合环 C_p-谱，并令 $\alpha_k\colon A^{\wedge k+1} \to A^{\wedge k+1}$ 将 A 的最后一个副本旋转至最前面，并以 γ作用于该副本 A。

定义 3.7 ([ABG+18, 定义 8.1])。令 $\gamma = e^{2\pi i/p}$ 为 C_p的选定生成元，并令A 为一个以平凡宇宙为指标的结合环 C_p-谱。对于 A的 C_p-扭曲循环 *bar* 复形 记作 $B^{cy}_{\bullet}{}^{C_p}(A)$，它是一个满足 $B^{cy}_{,k}{}^{C_p}(A) = A^{\wedge k+1}$的单纯对象。面映射和退化映射 $d_i\colon A^{\wedge k+1} \to A^{\wedge k}$及 $s_i\colon A^{\wedge k+1} \to A^{\wedge k+2}$定义如下：

$$d_i = \begin{cases} \mathrm{id}^i \wedge \mu \wedge \mathrm{id}^{k-i-1} & 0 \le i < k \\ (\mu \wedge \mathrm{id}^{k-1}) \circ \alpha_k & i = k \end{cases}$$
$$s_i = \mathrm{id}^{i+1} \wedge \eta \wedge \mathrm{id}^{k-i} \qquad 0 \le i \le k$$

其中 μ 和 η 是 A的乘法映射和单位映射。

这个扭曲循环 bar 复形，以及一些记作 $\mathcal{I}$的宇宙变换函子，是定义扭曲 THH 的一种方法。

定义 3.8 ([ABG+18, 定义 8.2])。令 U 为一个完备的 S^1-宇宙，令 $\widetilde{U} := i^*_{C_p}U$ 为~向 C_p的宇宙拉回，并令 A 为一个以 U为指标的结合环 C_p-谱。A 的 C_p-扭曲拓扑 *Hochschild* 同调 记作 $\mathrm{THH}^{C_p}(A) = \mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}|B^{cy}_{\bullet}{}^{C_p}(\mathcal{I}^{\mathbb{R}^\infty}_{\widetilde{U}}A)|$。

扭曲 THH 还有另一种有用的视角。为了定义这一视角，我们必须先定义以下记号。

设 R 为一个环谱， E 为一个左 R-模，并将 E 的左 R-模映射记为 μ。类似于上面的定义，我们可以将 ${}^{\gamma}E$ 定义为 E，其左 R-模映射为 ${}^{\gamma}\mu$，该映射由下图定义：

$$\begin{array}{ccc} R\wedge E & \xrightarrow{{}^{\gamma}\mu} & E \\ {\scriptstyle \gamma\square \mathrm{id}}\downarrow & \nearrow_{\mu} & \\ R\wedge E & & \end{array}$$

where $\gamma\colon\ R\to R$ 通过 γ作用于 R。对于 A 上的一个 R-代数，这一定义可推广到 ${}^{\gamma}A$。

根据这个定义，我们可以将扭曲循环 bar 复形写作 $B^{cy,{}^{C_p}}(A)$，即扭曲循环神经， $B^{cy,{}^{C_p}}(A,\ {}^{\gamma}A)$ [BGHL19，定义 2.20]。扭曲循环神经定义为$B^{cy,{}^{C_p}}_{k}(A,\ {}^{\gamma}A) = {}^{\gamma}A\wedge A^{\wedge k}$，其面映射和退化映射如下：

$$d_i=\begin{cases}\mathrm{id}^i\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{k-i-1} & 0\le i<k\\ (\gamma\mu\wedge\mathrm{id}^{k-1})\circ t & i=k\end{cases}$$
$$s_i=\mathrm{id}^{i+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{k-i} \qquad 0\le i\le k$$

其中， μ 和 η 分别是 A的乘法映射和单位映射，且 t 将最后一个 A 副本旋转到最前面。作为一个 C_p-谱，$\mathrm{THH}^{C_p}(A) = \mathrm{THH}(A,\ {}^{\gamma}A)$ [AGH+22，命题 4.2。6]。

每当讨论 C_p-谱 A的扭曲拓扑 Hochschild 同调 $\mathrm{THH}^{C_p}(A)$ 时，我们指的是 A的左导出扭曲拓扑 Hochschild 同调。特别地，这等同于考虑 A的余纤维化替换的扭曲 THH。

Adamyk、Gerhardt、Hess、Klang 和 Kong 在 [AGH+22，定理4.2。7] 中的工作表明，存在 B¨okstedt 谱序列的等变类比，它展示了 Green函子的 Hochschild 同调与 C_n-扭曲 THH 之间的关系。首先，我们回顾，对于 G一个阿贝尔群，以及 $\gamma\in G$，可以在任意真正正交 G-谱上定义一个左 γ-作用，记为 $\ell_\gamma\colon\ X\to X$ （更多细节见 [Sch18，第 3 节。1]）。我们将说， γ 平凡地作用于一个G-谱，如果 ℓ_γ 等变同伦于恒等映射。

就本文而言，我们仅考虑 C_p-Mackey 函子，但如下在 [AGH+22] 中所见的结果是针对一般循环群 C_n 的。

定理3.9 （[AGH+22，定理4.2。7]）。 设 C_p 为 S^1 的有限子群，使得 $C_p=\langle\gamma\rangle$。设 A 为结合环 C_p-谱，E 为交换环 C_p-谱，使得 γ 平凡地作用于 E。若 $E_\star(A)$ 在 $E_\star$上平坦，则存在扭曲 *B¨okstedt* 谱序列

$$E^2_{s,\star}=\underline{\mathrm{HH}}^{\underline{E}_\star,C_p}_s(\underline{E}_\star(A))\Rightarrow \underline{E}_{s+\star}(i^*_{C_p}\,\mathrm{THH}_{C_p}(A))$$

其中 $d^r\colon\ E_{i,\ \alpha}\to E_{i-r,\ \alpha+r-1}$。

经典地，对于 R 交换环谱，$\mathrm{THH}(R)\simeq R\otimes S^1$ [MSV97]。在交换情形下，扭曲 THH 有类似的解释，本文将始终采用这种解释。为引入这一版本的定义，我们首先回顾一下：正交 C_p-环谱范畴与带有自由 C_p-作用的无基点空间范畴，都是在带有自由 C_p-作用的无基点空间范畴上张量化的。对于一个以平凡宇宙 R 为指标的交换环 C_p-谱 $\mathbb{R}^\infty$，考虑函子 $R\otimes_{C_p}(-)$，其定义在带有自由C_p-作用的无基点空间范畴上，并由下图的余等化子给出

$$R\otimes C_p\otimes(-)\ \underset{\ell\otimes\mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}\otimes r}{\rightrightarrows}}\ R\otimes(-) \tag{3.3}$$

其中 r 是 (–) 上的 C_p-作用，而 ℓ 是诱导出的、作用于 R 上的 C_p-作用。

ABG 的作者 [+18] 证明，对于 U 一个完备的 S^1-宇宙以及 $\widetilde{U}=\iota^*_{C_p}U$，以及 R 一个~交换环 C_p在 U上指标化的 -谱，

$$\mathrm{THH}_{C_p}(R)\simeq\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}(\mathcal{I}^{\mathbb{R}^\infty}_{\widetilde{U}}(R)\otimes_{C_p}S^1).$$

这一刻画将在第5 节中大量使用，以展示扭曲 THH 的代数结构。

4. Computation of twisted THH of the Real bordism spectrum

文献中关于扭曲 THH 的计算很少 [AGH+22]。具体而言，在 [AGH+22 的定理 4.3.4] 中，他们计算了 $H\mathbb{F}_{2\star}(\mathrm{THH}^{C_2}(MU_{\mathbb{R}}))$。本节将针对满足 $F(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$、$F(C_2/e) = 0$ 的 $F$the$-C_2$-麦基域，以及 $MU_{\mathbb{R}}$ Real 配边谱，计算 $HF_\star(\mathrm{THH}^{C_2}(MU_{\mathbb{R}}))$。

我们将使用 ¨ 中定义的扭曲 B [okstedt 谱序列+22] （参见定理 3.9）进行这一计算。要使用该谱序列，我们需要 C_2 的非平凡元素在 HF 上作用平凡，并且 $HF_\star(MU_{\mathbb{R}})$ 在 $\pi_\star(HF)$ 上是平坦的。

首先，我们将研究哪些 C_p-麦基域 F 能给出具有平凡 C_2-作用的 Eilenberg-Mac Lane 谱 HF。然后，利用 $MU_{\mathbb{R}}$ 是实定向谱这一事实，我们将研究对于哪些 C_p-麦基域 F， $HF_\star(MU_{\mathbb{R}})$ 在 $HF_\star$ 上是平坦的。本节最后给出计算结果。

4.1. **平凡作用**。 回想在第3.2节中，我们曾讨论可以定义一个 C_p-谱具有平凡的 γ-作用：对于 $\gamma \in C_p$，若 ℓ_γ 等变同伦于恒等映射。设 E为一个 C_p-谱。若 $\pi_\star(E)$上的Weyl作用是平凡的，则选定生成元 γ （来自 C_p ）在 $RO(C_p)$-分次同伦群上诱导恒等映射，这些同伦群属于 E。此外，若在 $E^\star E$ 中诱导恒等映射的唯一元素是单位元1，则 ℓ_γ 必定等变同伦于恒等映射。

第2.3 节中的计算表明，对于 F 这样一个 C_p-麦基域，使得 $F(C_p/C_p) = k$ 且$F(C_p/e) = 0$，每当 $\pi_\alpha(HF) \neq 0$时，便有 $\pi_\alpha(HF) = F$，其具有平凡Weyl作用。因此 $\pi_\star(HF)$的每一层都具有平凡的 C_p-作用。

为了计算 $HF^\star HF$ ，我们考虑以下有趣的事实，Oruc 在定理 3.11 的证明中证明了该事实，该证明见于 [Oru89]。

命题 4.1 （[Oru89]）。 设 F为一个 C_p-麦基域，使得 $F(C_p/C_p) = k$且 $F(C_p/e) = 0$。于是，若将 $\Phi^{C_p}(HF)$ 视为非等变环谱，则它同构于非等变 *Eilenberg-Mac Lane* 谱 Hk。

利用该命题以及定理 2.32，我们可以看到 $HF^\alpha HF(C_p/C_p) \cong Hk^{\dim(\alpha^{C_p})}Hk$以及 $HF^\alpha HF(C_p/e) = 0$。由于当 $\dim(\alpha^{C_p}) = 0$ 时我们只需考虑 $HF^\alpha HF$，因此我们只需考虑 $Hk^0 Hk$。

考虑 $k = \mathbb{F}_2$ 的情形，则问题归结为 $\mathbb{F}_2$ 中哪些元素在 $H\mathbb{F}_2^0 H\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2$ 上诱导恒等映射。 $\mathbb{F}_2$ 中唯一在 $\mathbb{F}_2$ 上诱导恒等映射的元素是单位元 1。因此，若 $F(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$ 且 $F(C_2/e) = 0$，则 γ 在 HF 上的作用是平凡的。

4.2. **实定向**。 现在我们来回顾谱具有实定向的含义，并讨论实定向谱的一些性质。

考虑 $\mathbb{CP}^n$ 和 $\mathbb{CP}^\infty$ 作为带基点的 C_2-空间，并令复共轭作用于其上，其中基点为 $\mathbb{CP}^0$。注意， $\mathbb{CP}^n$ 和 $\mathbb{CP}^\infty$ 的 C_2-不动点空间分别为 $\mathbb{RP}^n$ 和 $\mathbb{RP}^\infty$。包含映射 $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^\infty$ 诱导出限制映射 $\widetilde{E}^\rho(\mathbb{CP}^\infty)(C_2/C_2) \to \widetilde{E}^\rho(\mathbb{CP}^1)(C_2/C_2)$，下文定义中将用到此映射。

定义 4.2 ([Ara79])。 设 E 为一个 C_2-等变同伦交换环谱。的实定向 是 E 中的一个类 $x \in \widetilde{E}^\rho(\mathbb{CP}^\infty)(C_2/C_2)$，其限制到

$$\underline{\widetilde{E}}^\rho(\mathbb{CP}^1)(C_2/C_2) \cong \underline{E}^0(pt)(C_2/C_2)$$

是单位元，其中 $\rho = 1 + \sigma$ 是正则表示。谱 E 是实定向 ，如果它具有实定向。

以下推论建立在荒木的这项工作之上。

推论 4.3 ([HHR16，推论5。18])。 若 E 是实定向环 C_2-谱，则存在环谱的弱等价

$$MU_{\mathbb{R}} \wedge E \simeq E \wedge \bigwedge_{i\geq 1} S^0[S^{i\rho}]$$

其中 $S^0[S^{i\rho}] = \bigvee (S^{i\rho})^{j}.j\geq 0$

令 F为满足 $F(C_p/C_p) = k$且 $F(C_p/e) = 0$的 C_p-麦基域。接下来考虑哪些有限域 k能使 HF成为实定向谱。首先，我们需要以下定义和结果。

定义 4.4。 若 E 是一个 C_p-谱，且满足 $\pi_\star^{C_p}(E) \neq 0$，则称其集中在 C_p 上。类似地，若对任意 $H \leq C_p$， $\pi_\star^H(E)$ 均不为 0，则称 E 集中在 e 上。

命题 4.5 ([Oru89，注 3。7])。 对于任意 C_p-麦基域 F，若满足 $F(C_p/e) = 0$，则 *Eilenberg-Mac Lane* 谱 HF 集中在 C_p上。

定义 4.6 ([Hil12，定义 6.10])。 一个 C_p-谱 E 是 几何的 当且仅当 $\pi_\star(E)(C_p/e) = 0$。

本节和第7节中，我们将使用几何谱。几何谱具有一个特别有用的性质。为了陈述这一性质，我们先需要以下定义。

定义 4.7 ([LMSM86，II.2.10])。 设 N 是 G的正规子群。记 $\mathcal{P}_N$ 为 N的真子群族。令 $E\mathcal{P}_N$ 表示分类空间 满足 $\mathcal{P}_N$ 为空，且对于任意真子群 H 中的 G， $E\mathcal{P}_N^H$ 均弱可缩。

我们始终假设 $E\mathcal{P}_N$ 是一个 G-CW 复形，并令 $E\mathcal{P}_N$ 为 $E\mathcal{P}_N \to *$的映射锥。为简化记号，我们将 $E\mathcal{P}_G$记作 $E\mathcal{P}$ 。

命题 4.8 ([Hil12，命题 6.11])。 设 E 是一个 C_p-谱。则 E 是几何谱，当且仅当自然映射

$$E \to \widetilde{E\mathcal{P}} \wedge E$$

是一个 C_p-弱等价。

以下两个命题是经典结果，我们将在下一个证明中使用它们。

命题 4.9 ([LMSM86,II])。 对于 E 一个 C_p-谱，若其集中在 C_p 上，则有

$$\Phi^{C_p}(E) \simeq E^{C_p}.$$

令 E 和 D 为 C_p-谱。记 $[D, E]^{C_p}$ 为 C_p-谱之间映射的同伦类。**命题 4.10** ([LMSM86,II.9.2-6])。 令 E 和 D 为 C_p-谱。若 E 集中在C_p上，则

$$[D, E]^{C_p} \cong [\Phi^{C_p}(D), E^{C_p}].$$

现在我们可以证明以下命题了。

命题 4.11。 令 F 为 C_2-麦基域，其中 $F(C_2/C_2) = k$ 是一个有限域，并且$F(C_2/e) = 0$。那么，HF 是实定向的，当且仅当 k 的特征为 *2*。

证明。 为方便记号，令 $E := HF$。利用定理 2.31，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{E}^{\rho}(\mathbb{CP}^{\infty})(C_2/C_2) &\cong [\Sigma^{\infty}\mathbb{CP}^{\infty}, \Sigma^{\rho}E]^{C_2}(C_2/C_2)\\ &\cong [\Sigma^{\infty}(C_2/C_2)_+ \wedge \Sigma^{\infty}\mathbb{CP}^{\infty}, \Sigma^{\rho}E]^{C_2}\\ &\cong [\Sigma^{\infty}\mathbb{CP}^{\infty}, \Sigma^{\rho}E]^{C_2}.\end{aligned}$$

根据定理 4.5， E 集中于 C_2，这意味着 $\pi_\star^{C_2}(E) \neq 0$。由此可知$S^\rho \wedge E$ 也集中于 C_2。利用定理 4.9、定理 4.10以及几何不动点的性质，我们可以按如下方式继续计算：

$$\begin{aligned}[\Sigma^\infty \mathbb{CP}^\infty, \Sigma^\rho E]^{C_2} &\cong [\Phi^{C_2}(\Sigma^\infty \mathbb{CP}^\infty), (S^\rho \wedge E)^{C_2}]^e \\ &\cong [\Sigma^\infty((\mathbb{CP}^\infty)^{C_2}), \Phi^{C_2}(S^\rho \wedge E)]^e \\ &\cong [\Sigma^\infty \mathbb{RP}^\infty, S^1 \wedge \Phi^{C_2}(E)]^e.\end{aligned}$$

由于 $[\Sigma^\infty \mathbb{RP}^\infty, S^1 \wedge \Phi^{C_2}(E)]^e$ 是非等变的，我们可以利用定理 4.1 得出

$$\begin{aligned}[\Sigma^\infty \mathbb{RP}^\infty, S^1 \wedge \Phi^{C_2}(E)]^e &\cong [\Sigma^\infty \mathbb{RP}^\infty, S^1 \wedge Hk]^e \\ &\cong \widetilde{H}^1(\mathbb{RP}^\infty; k).\end{aligned}$$

通过类似的论证，我们得到

$$\underline{\widetilde{E}}^\rho(\mathbb{CP}^1)(C_2/C_2) \cong \widetilde{H}^1(\mathbb{RP}^1; k).$$

这是一个经典计算，得到 $H^1(\mathbb{RP}^1; k) = k$。利用泛系数定理，我们有 $H^1(\mathbb{RP}^\infty; k) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_2, k)$ 在 k 的特征为 2 时等于 k，否则为 0。如果 k 的特征不为 2，那么不存在映射到 k 中单位元的 $\bar{x} \in H^1(\mathbb{RP}^\infty; k)$，因此 E 不是实定向的。

因此，设 k 的特征为 2。回忆一下，包含映射 $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^\infty$诱导出一个限制映射， f: $\widetilde{E}^\rho(\mathbb{CP}^\infty)(C_2/C_2) \to \widetilde{E}^\rho(\mathbb{CP}^1)(C_2/C_2)$。类似地，包含映射$\mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^\infty$ 诱导出一个限制映射， h: $\widetilde{E}^\rho(\mathbb{RP}^\infty)(C_2/C_2) \to \widetilde{E}^\rho(\mathbb{RP}^1)(C_2/C_2)$。由自然性，这些映射和上述同构给出如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}[\Sigma^\infty \mathbb{CP}^\infty, \Sigma^\rho E]^{C_2} & \cong & [\Sigma^\infty \mathbb{RP}^\infty, \Sigma Hk]^e \cong k \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ [\Sigma^\infty \mathbb{CP}^1, \Sigma^\rho E]^{C_2} & \cong & [\Sigma^\infty \mathbb{RP}^1, \Sigma Hk]^e \cong k.\end{array}$$

由于此图可交换且 h 是同构，因此 f也是同构。因此， f 将单位元映到单位元，这意味着 E 是实定向的。□

4.3. **计算**。 既然我们已经知道一些 C_2-麦基域 F 其 Eilenberg-Mac Lane 谱是实定向的，我们便可以运用定理4.3 得到以下结果。

引理 4.12. 设 F 是一个 C_2-麦基域，使得 $F(C_2/e) = 0$。若 HF 是实定向的，则$HF_\star(MU_\mathbb{R})$ 是一个自由的 $HF_\star$-模，即

$$H\underline{F}_\star(MU_\mathbb{R}) \cong H\underline{F}_\star[b_1, b_2, \ldots]$$

其中 $\deg(b_i) = i\rho$。

证明。 由于 $H\underline{F}$ 是实定向的，我们可以运用定理4.3 证明

$$MU_\mathbb{R} \wedge H\underline{F} \simeq H\underline{F} \wedge \bigwedge_{i \geq 1} S^0[S^{i\rho}]$$

这给出了一个 $RO(C_2)$-分次Green函子的同构

$$\underline{\pi}_\star(MU_\mathbb{R} \wedge H\underline{F}) \cong \underline{\pi}_\star(H\underline{F})[b_1, b_2, \ldots]$$

对于 $\deg(b_i) = i\rho$。 □

这里有一个经典的标准论证，它是 Cartan 和 Eilenberg 的定理 X.6.1 在 [CE99] 中的推论。该论证指出，如果 k 是一个交换环，而 A 是一个交换的 k-代数，且作为 k 上的模是平坦的，那么

$$\mathrm{Tor}_*^{A^e}(A,A) \cong A \otimes_k \mathrm{Tor}_*^A(k,k).$$

利用 [LM06] 中的同调代数，我们可以将 Cartan 和 Eilenberg 的论证推广到等变情形。也就是说，如果 $R_\star$ 是一个交换的 G-Green 函子，并且 $M_\star$ 是一个交换的$R_\star$-代数，作为 $R_\star$上的模是平坦的，那么

$$\underline{\mathrm{Tor}}_{*,\star}^{\underline{M}_\star \square_{\underline{R}_\star} \underline{M}_\star^{\mathrm{op}}}(\underline{M}_\star, \underline{M}_\star) \cong \underline{M}_\star \square_{\underline{R}_\star} \underline{\mathrm{Tor}}_{*,\star}^{\underline{M}_\star}(\underline{R}_\star, \underline{R}_\star).$$

我们将在下面的计算中用到这一点。

设 $\underline{F}$为 C_2-麦基域，其中 $F(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$，且 $F(C_2/e) = 0$，那么第4.1 节的结果和定理4.11 表明 HF 具有平凡的 C_2-作用，且是实定向的。

Theo注 4.13。对于 $\underline{F}$ $F(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$且 $F(C_2/e) =$的 C_2-麦基域 0，

$$\underline{H}_\star(\mathrm{THH}_{C_2}(MU_{\mathbb{R}}); \underline{F}) \cong H\underline{F}_\star[b_1, b_2, \ldots] \square_{H\underline{F}_\star} \Lambda_{H\underline{F}_\star}(z_1, z_2, \ldots)$$

作为一个$HF_\star$-模。这里 $|b_i| = i\rho$ 且 $|z_i| = 1 + i\rho$。

证明。 定理 4.11表明 HF 具有平凡的 C_2-作用。为了使用 B¨okstedt 谱序列，我们需要证明 $HF_\star(MU_{\mathbb{R}})$ 在 $HF_\star$上是平坦的。定理 $RO(C_2)$-分次 Green 函子之间的如下同构由定理 4.12给出：

$$\underline{\pi}_\star(H\underline{F} \wedge MU_{\mathbb{R}}) \cong H\underline{F}_\star[b_1, b_2, \ldots]$$

其中 $\deg(b_i) = i\rho$。因此 $HF_\star(MU_{\mathbb{R}})$ 在 $HF_\star$上是平坦的。由于HF具有平凡的 C_2-作用，因此 $^\gamma HF_\star(MU_{\mathbb{R}})$ 具有与 $HF_\star$-模相同的左作用 $HF_\star(MU_{\mathbb{R}})$。由于满足相应条件，我们可以使用扭曲的 B¨okstedt 谱序列（见定理 3.9）：

$$E^2_{s,\star} = \underline{\mathrm{HH}}_s^{H\underline{F}_\star, C_2}(\underline{H}_\star(MU_{\mathbb{R}}; \underline{F})) \Rightarrow \underline{H}_{s+\star}(i_{C_2}^* \mathrm{THH}_{C_2}(MU_{\mathbb{R}}); \underline{F}).$$

E_2 项为

$$\begin{aligned}
E^2_{s,\star} &= \underline{\mathrm{HH}}_s^{H\underline{F}_\star, C_2}(\underline{H}_\star(MU_{\mathbb{R}}; \underline{F})) \\
&\cong \underline{\mathrm{HH}}_s^{H\underline{F}_\star, C_2}(H\underline{F}_\star[b_1, b_2, \ldots]) && \text{Theorem 4.12} \\
&\cong \underline{\mathrm{Tor}}_{*,\star}^{H\underline{F}_\star[b_1,\ldots]^e}(H\underline{F}_\star[b_1, \ldots], {}^\gamma H\underline{F}_\star[b_1, \ldots]) && \text{Theorem 3.6} \\
&\cong \underline{\mathrm{Tor}}_{*,\star}^{H\underline{F}_\star[b_1,\ldots]^e}(H\underline{F}_\star[b_1, \ldots], H\underline{F}_\star[b_1, \ldots]) \\
&\cong H\underline{F}_\star[b_1, \ldots] \square_{H\underline{F}_\star} \underline{\mathrm{Tor}}_{*,\star}^{H\underline{F}_\star[b_1,\ldots]}(H\underline{F}_\star, H\underline{F}_\star) && \text{[CE99]} \\
&\cong H\underline{F}_\star[b_1, b_2, \ldots] \square_{H\underline{F}_\star} \Lambda_{H\underline{F}_\star}(z_1, z_2, \ldots)
\end{aligned}$$

最后一个同构的计算与经典情形类似，使用 Koszul复形，其中 $\deg(b_i) = (0, i\rho)$，且 $\deg(z_i) = (1, i\rho)$。

回忆一下，$d^r : E^r_{s,\alpha} \to E^r_{s-r,\alpha+r-1}$。我们的谱 $MU_{\mathbb{R}}$ 是交换的，因此根据 [AGH+22，命题 4.2。8] 我们可以将其视为一个$HF_\star$-代数谱序列。考虑微分d^2。我们知道，所有的 d^2 微分都由微分在 E^2 页生成元上的作用决定，因此，由于生成元仅位于满足 $s = 0, 1$ 的列中，那么 E^2页上的所有微分均为零，谱序列退化。□

5. Algebraic structure on twisted THH

在本节中，我们将说明，对于 R 交换的 C_p-环谱，THH$^{C_p}(R)$ 在任意素数 p处都是 C_p-谱范畴中的交换 R-代数。随后，我们将讨论 THH$^{C_p}(R)$ 缺少余乘结构的问题。首先，我们必须讨论扭曲 THH 的单纯模型。

5.1. 扭曲 THH 的单纯模型。在本节中，我们将探讨 C_p-扭曲 THH 的单纯模型。设 R 为一个交换环 C_p-谱，并回顾：按约定，我们的谱是正交谱。在本引言中，为便于记号，我们将省略宇宙变换函子。我们从构造圆 $pS^1_\bullet$ 的 C_p-等变单纯模型开始本节。定理 5.3 告诉我们，圆的这一单纯模型给出了来自 [ABG+18] 的等价 THH$^{C_p}(R)$ $\simeq R\otimes_{C_p} S^1$ 。为定义乘积结构，我们将 mTHH^{C_p} (R) 定义为 $|R\otimes_{C_p} mpS^1_\bullet|$，并在定理 5.9 中证明 m THH$^{C_p}(R)$ 与 THH$^{C_p}(R)$ C_p-弱等价。

回顾以下 S^1 的单纯模型，来自 [Lod98],，其中 $C_{n+1}=\{1,\gamma,\ldots,\gamma^n\}$ 表示每一层上的元素个数。

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & & \\
 & C_3 \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, shift left=2, "d_1"] \arrow[d, shift right=4, "d_2"'] & & & \\
 & C_2 \arrow[u, shift right=2, "s_0"'] \arrow[u, shift left=2, "s_1"] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, shift left=2, "d_1"] & & & \\
 & e \arrow[u, shift right=2, "s_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

我们将这个模型称为 $S^1_\bullet$。面映射和退化映射如下：

$$d_i(\gamma^j)=\begin{cases}\gamma^j & j\le i<n\\ \gamma^{j-1} & j>i\end{cases}\qquad s_i(\gamma^j)=\begin{cases}\gamma^j & j\le i\\ \gamma^{j+1} & j>i.\end{cases}$$

$$d_n(\gamma^j)=\begin{cases}\gamma^j & j<n\\ 1 & j=n\end{cases}$$

此外还有映射 t: $C_{n+1}\to C_{n+1}$ ，使得对于 $j<n$ ， $t(\gamma^j)$ 为 γ^{j+1} ，而对于 $j=n$，其值为 1。值得注意的是，对于所有 n，都有 $d_n=d_0\circ t$: $C_{n+1}\to C_{n+1}$ 。

我们还需要圆的其他模型来进行证明，并将利用 B¨okstedt、Hsiang 和 Madsen 在 [BHM93] 中定义的单纯边缘细分函子来构造这些模型。单纯对象的 r 重边式细分函子 $sd_r(-)$，定义如下：对于单纯对象 $X_\bullet$,

$$sd_r(X_\bullet)_n=X_{(n+1)r-1}$$

¯其面映射和退化映射 d_i 与 $\bar{s}_i$ 定义为

$$\bar{d}_i=d_i\circ d_{i+n+1}\circ\ldots\circ d_{i+(r-1)(n+1)}$$
$$\bar{s}_i=s_{i+(r-1)(n+2)}\circ\ldots\circ s_{i+(n+2)}\circ s_i$$

对于 d_i 和 s_i ，它们分别是单纯对象 $X_\bullet$ 的面映射和退化映射。

注 5.1. 回想一下，在 $S^1_\bullet$ 中有映射的等式 $d_n=d_0\circ t$: $C_{n+1}\to C_{n+1}$。在 sd_r（$S^1_\bullet$）中， $\bar{d}_n=\bar{d}_0\circ t$ 也成立。为此，考虑到 $\bar{d}_0=d_0\circ d_{n+1}\circ\ldots\circ d_{(r-1)n+r-1}$，并利用单纯关系 $d_i\circ d_j=d_{j-1}\circ d_i$ （对于 $i<j$），我们可以将 d_0 移到最前面，从而得到 _$d_0=d_n\circ d_{2n+1}\circ\ldots\circ d_{(r-1)n+r-2}\circ d_0$。考虑

$$\begin{aligned}\bar{d}_0\circ t&=d_n\circ d_{2n+1}\circ\ldots\circ d_{(r-1)n+r-2}\circ d_0\circ t\\ &=d_n\circ d_{2n+1}\circ\ldots\circ d_{(r-1)n+r-2}\circ d_{rn+r-1}\end{aligned}$$

¯，根据定义即为 d_n。

让我们开始b y理解圆的二重边缘单纯细分， $sd_2(S^1_\bullet$).

例 5.2. 我们将 $sd_2(S^1_\bullet)$称为 $2S^1_\bullet$。根据定义，

$$\begin{aligned} sd_2(S^1_\bullet)_n &= S^1_{2n+1}, \\ \bar{d}_i &= d_i \circ d_{i+n+1}, \quad \text{and} \\ \bar{s}_i &= s_{i+n+2} \circ s_i. \end{aligned}$$

因此 $2S^1_\bullet$ 是

$$\begin{array}{c} \vdots \\ C_6 \\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow \\ C_4 \\ \downarrow\ \uparrow\ \downarrow \\ C_2. \end{array}$$

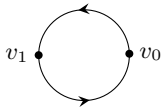
仅有的非退化元素是1, $\gamma \in C_2$ 和 $\gamma, \gamma^3 \in C_4$，其中1-胞腔 γ的边界定义为

$$\bar{d}_0(\gamma) = 1 \text{ and } \bar{d}_1(\gamma) = \gamma,$$

以及1-胞腔 γ^3 的边界定义为

$$\bar{d}_0(\gamma^3) = \gamma \text{ and } \bar{d}_1(\gamma^3) = 1.$$

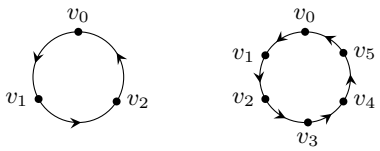
如果我们将这些非退化 0-胞腔称为 v_0 和 v_1，那么 $2S^1_\bullet$ 看起来如下：



其中， C_2对 $2S^1_\bullet$ 的作用是通过将函子 $sd_2(-)$作用于 $S^1_\bullet$而诱导得到的。这个 C_2作用于$2S^1_k = C_{2k+2}$，将 γ^i 映射为 γ^j，其中 $j = i + k + 1$ （模 $2k + 2$）。因此， C_2对 $2S^1_\bullet$ 的作用是逆时针旋转 π。

如果我们考虑 $2S^1_\bullet$ 非等变的情形，它与 $dS^1_\bullet$ 中定义的不同，见 [AR05]。非等变地， $2S^1_\bullet$ 等价于 $d'S^1_\bullet$ 中定义的 [AR05，备注 3。6]。

我们可以用这个过程为任意正整数 m定义 $mS^1_\bullet$，它将具有逆时针旋转 $2\pi/m$的 C_m作用。注意，要使 $mS^1_\bullet$ 具有逆时针旋转 $2\pi/n$ 的单纯 C_n作用，那么 m必须是 n的倍数。考虑圆的两个C_3-等变单纯模型例子； $3S^1_\bullet$ 和 $6S^1_\bullet$:



其中，这两个单纯对象上诱导的 C_3-作用均为逆时针旋转$2\pi/3$。

在第 3.2节中，我们回顾了 Angeltveit、Blumberg、Gerhardt、Hill、Lawson 和 Mandell 在 [ABG+18] 中给出的扭曲 THH 定义。我们还讨论了这些作者对扭曲 THH 提出的不同观点，包括扭曲循环棒的几何实现

构造以及张量积。具体而言，对于 U 一个完备的 S^1-宇宙、 $\widetilde{U} = \iota_{C_p}^* U$，以及 R 一个$\widetilde{}$以 U 为指标的 C_p交换环谱，

$$\mathrm{THH}_{C_p}(R) \simeq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^\infty}^{U}(\mathcal{I}_{\widetilde{U}}^{\mathbb{R}^\infty}(R) \otimes_{C_p} S^1).$$

为简化记号，我们通常令 R 为定义在平凡$\widetilde{}$ $\widetilde{}$宇宙 $\mathbb{R}^\infty$ 上的交换环 C_p-谱。为了推广，可以考虑定义在 U 上的交换环 C_p-谱 R，并令 $R = \mathcal{I}_{\widetilde{U}}^{\mathbb{R}^\infty} \widetilde{R}.$。下面的命题说明，从张量积的角度来看，圆的哪种单纯模型是合适的。

在本节余下部分，令群 C_p 的选定生成元为 $\gamma := e^{2\pi i/p}$。

命题 5.3。令 R 为定义在平凡宇宙 $\mathbb{R}^\infty$ 上的交换环 C_p-谱，其中 p 为素数。那么 $R \otimes_{C_p} pS^1_\bullet \cong B^{cy}_{\bullet}{}^{C_p}(R)$，即 C_p-扭曲循环棒构造。

证明。令 μ 和 η 分别为 R 的乘法映射和单位映射。为了证明这些单纯对象等价，我们首先证明它们在每个层级上都相同，然后证明它们的面映射和退化映射等价。

$R \otimes_{C_p} pS^1_\bullet$ 的 k-单形由以下余等化子图定义

$$R \otimes C_p \otimes pS^1_k \underset{\ell\otimes\mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}\otimes r}{\rightrightarrows}} R \otimes pS^1_k \longrightarrow R \otimes_{C_p} pS^1_k$$

其中映射 r 是 pS^1_k 上的 C_p-作用，而 ℓ 是 R上诱导的 C_p-作用。

设 $C_p = \langle\gamma\rangle$，以及 $pS^1_k = C_{pk+p} = \{1, x, \ldots, x^{pk+p-1}\}$。元素集 C_{pk+p} 上诱导的 C_p-作用由 $\gamma x^i = x^j$ 定义，使得 $j = i + k + 1$（模 $pk + p$）。存在由 t诱导的 pS^1_k上的 C_{pk+p}-作用： $C_{pk+p} \to C_{pk+p}$由 $t(x^i) = x^j$定义，使得 $j = i+1$（模 $pk+p$）。

作为 C_p-集， $C_p \otimes pS_k = C_p \times C_{pk+p}$。因此 $R \otimes C_p \otimes pS_k$ 可以写成

$$\bigwedge_{t=0}^{p-1}\Big(\bigwedge_{s=0}^{pk+p-1} R_{x^s,\gamma^t}\Big).$$

为便于记法，我们记$R_{s,t}$ 而非R_{x^s,γ^t}。类似地， $R \otimes pS^1_k$ 可以写成

$$\bigwedge_{s=0}^{pk+p-1} R_s.$$

用此记号，$\mathrm{id}\otimes r\colon R_{s,\ t} \mapsto R_j$使得 $j = s+t(k+1)$（模 $pk+p$），而 $\ell\otimes\mathrm{id}: R_{s,\ t} \mapsto {}_\gamma{}^t R_s$其中 ${}_\gamma{}^t R$ 表示 R，它已受到 γ^t的作用。根据余等化子的定义， $R \otimes_{C_p} pS^1_k$是 $R \otimes pS^1_k$ 的商空间，其中取商强制这两个作用相等。回忆一下，对于 $j = s + t(k + 1)$（模 $pk + p$），$\gamma^t x^s = x^j$。因此 $R \otimes_{C_p} pS^1_k = R^{\wedge k+1}$。

现在我们将证明，来自 $R \otimes_{C_p} pS^1_k$ 的面映射和退化映射等价于来自 $B^{cy}_{\ \ k}{}^{C_p}(R)$ 的面映射和退化映射。我们将从考察 pS^1_k 的面映射和退化映射开始，并导出 $R \otimes_{C_p} pS^1_k$相应的面映射和退化映射。

回忆一下， $pS^1_k = sd_p(S^1_\bullet)_k$，其面映射和退化映射为 $\bar{d}_i$ 和 $\bar{s}_i$ 定义如下:

$$\bar{d}_i = d_i \circ d_{i+k+1} \circ \ldots \circ d_{i+(p-1)(k+1)}$$
$$\bar{s}_i = s_{i+(p-1)(k+2)} \circ \ldots \circ s_{i+(k+2)} \circ s_i$$

其中， d_i 和 s_i 是$S^1_\bullet$的面映射和退化映射，并且 $0 \le i \le k$。

让我们首先确定 $R \otimes_{C_p} pS^1_k$ 上的诱导面映射，即设 δ_i: $R \otimes_{C_p} pS^1_k \to R \otimes_{C_p} pS^1_{k-1}$，其中 $0 \le i \le k$ 和 $k > 0$。映射（恒等映射 $\otimes \bar{d}_i$）： $R \otimes pS^1_k \to R \otimes pS^1_{k-1}$ 对 $R_i \wedge R_{i+1}$ 以及 $R_{i+n(k+1)} \wedge R_{i+1+n(k+1)}$ 应用乘法映射，对所有 $0 \le n < p$ 均如此。因此 δ_i: $R \otimes_{C_p} pS^1_k \to R \otimes_{C_p} pS^1_{k-1}$ 是映射 恒等映射 $\wedge^i \wedge \mu \wedge$ 恒等映射$\wedge^{k-i-1}$，作用于 $0 \le i < k$。

在弄清楚 δ_k 必须是什么之前，请回忆一下， pS^1_k 具有一个由映射 t 诱导的 C_{pk+p} 作用。考虑（恒等映射 $\otimes t$）： $R\otimes pS^1_k \to R\otimes pS^1_k$，该映射将 R 的最后一个副本旋转到最前面。该映射还将 R_k 旋转到 R_{k+1} 原来所在的位置。这一点很重要，因为在商 $R\otimes_{C_p} pS^1_k$ 中，下面两个映射必须是等价的：

$$(\ell\otimes \mathrm{id})(R_{0,1}) = {}_\gamma R_0, \quad \text{and} \quad (\mathrm{id}\otimes r)(R_{0,1}) = R_{k+1}.$$

因此，在 $R\otimes_{C_p} pS^1_k$ 上诱导的映射会将最后一个 R 副本旋转到最前面，并在该副本上通过 γ作用于 R 。我们不妨将这个诱导映射称为 α_k。

回忆定理 5.1 可知 $d_k = d_0\circ t$，因此最后一个面映射 δ_k 由 $\mathrm{id}\otimes d_k = (\mathrm{id}\otimes \bar{d}_0)\circ(\mathrm{id}\otimes t)$ 诱导得到： $R\otimes pS^1_k \to R\otimes pS^1_{k-1}$。余等化子的泛性质表明，映射 $(\mathrm{id}\otimes \bar{d}_0)$ 和 $(\mathrm{id}\otimes t)$ 分别在 $R\otimes_{C_p} pS^1_k$上诱导出映射 δ_0和 α_k。此外，根据唯一性，由它们的复合 $(\mathrm{id}\otimes d_0)\circ(\mathrm{id}\otimes t)$ 诱导出的映射必定等价于这些诱导映射的复合。也就是说， $\delta_k = \delta_0\circ\alpha_k$。

我们同样诱导 $R\otimes_{C_p} pS^1_k$ 的退化映射，记为 σ_i： $R\otimes_{C_p} pS^1_k \to R\otimes_{C_p} pS^1_{k+1}$，对于$0\le i\le k$ 和 $k\ge 0$。通过与上文类似的论证，我们可以证明这些映射可以写成$\sigma_i =$ 恒等映射$^{\wedge i+1}\wedge\eta\wedge$ 恒等映射$^{\wedge k-i}$。

因此，利用定理 3.7 我们可以看到 $R\otimes_{C_p} pS^1_\bullet$ 同构于 $B^{cy}_\bullet{}^{C_p}(R)$。 □

设 U 为一个完备的 S^1-宇宙，且 R 为一个以 $\widetilde{U}$ 为指标的交换环 C_p-谱：$= i^*_{C_p}(U)$，则本命题的一个结果是 $|\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}((\mathcal{I}^{\mathbb{R}^\infty}_{\widetilde{U}} R)\otimes_{C_p} pS^1_\bullet)| \cong \mathrm{THH}^{C_p}(R)$。我们可以构造一个类似的结构 $m\,\mathrm{THH}^{C_p}(R)$：$= |\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}((\mathcal{I}^{\mathbb{R}^\infty}_{\widetilde{U}} R)\otimes_{C_p} mpS^1_\bullet)|$。

我们希望得到 Angeltveit 和 Rognes 的结果 [AR05，引理 38], 的等变类比，即我们希望证明 $m\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 与 C_p-弱等价于 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)$（见定理 5.9）。为此，我们首先需要一些定义和引理。

定义 5.4。设 R 是一个以平凡宇宙为指标的交换环 C_p-谱， p 为奇数。 R 的双重巴复形记作 $B_\bullet(R, R, R)$，是一个满足 $B_k(R, R, R) = R^{\wedge k+2}$ 的单纯对象。面映射和退化映射 d_i: $R^{\wedge k+2}\to R^{\wedge k+1}$ 以及 s_i: $R^{\wedge k+2}\to R^{\wedge k+3}$ 定义如下：

$$d_i = \mathrm{id}^i\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{k-i}$$
$$s_i = \mathrm{id}^{\wedge i+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i+1}$$

对于 $0\le i\le k$，其中 μ 是 R 的乘法映射， η 是 R 的单位映射 .

本文中我们将一直讨论单纯 C_p-谱的楔积，因此先说明其含义。设 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 是两个单纯 C_p-谱。写作 $(X\wedge Y)_\bullet$时，我们指的是单纯 C_p-谱，其中 $(X\wedge Y)_k = X_k\wedge Y_k$ ，而 $(X\wedge Y)_k$ 中的面映射和退化映射，是 X_k 和 Y_k中相应面映射和退化映射的楔积。

一般来说，对于某个交换环 C_p-谱 R以及具有 (R, R)-双模结构的 M和 N， $M\wedge_{(R\wedge R)}N$ 是双模作用映射的余等化子。类似地，对于 M 和 N R-模，可以将 $M\wedge_R N$ 构造为右、左 R-模作用映射的余等化子。

设 R 是一个交换环 C_p-谱。考虑映射

$$f\colon R\wedge(R\wedge R)\to R$$

其中， f 将最后一个 R 旋转到前面，然后应用（R， R）-双模映射，将中间的 R 与左、右两侧的 R相乘。也就是说， $f = \mu\circ(\mathrm{id}\wedge\mu)\circ t$ ，其中 t将最后一个 R 旋转到前面。另考虑映射

$$h\colon (R\wedge R)\wedge B_k(R, R, R)\to B_k(R, R, R)$$

其中， h将（$R\wedge R$）中的第一份 R移至末尾，然后对 B_k（R， R， R）应用（R， R）-双模映射，该映射将前两份 R相乘，并将最后两份 R相乘。也就是说，

$h = (\mu \wedge \text{恒等映射}^{\wedge k}) \circ (\text{恒等映射}^{\wedge k+2} \wedge \mu) \circ t'$，其中 t' 将第一份 R 旋转至末尾。下一个引理需要用到谱范畴中以下图的余等化子：

$$R \wedge (R \wedge R) \wedge B_k(R,R,R) \underset{\mathrm{id}\wedge h}{\overset{f\wedge \mathrm{id}^{\wedge k+2}}{\rightrightarrows}} R \wedge B_k(R,R,R)$$

我们将其记作 $R \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,\ R,\ R)$。由于 R 和 $B_k(R,\ R,\ R)$ 是自由的 $(R,\ R)$-双模，我们可以考虑映射 $R \wedge B_k(R,\ R,\ R) \to R^{\wedge k+1}$，它将 $B_k(R,\ R,\ R)$ 中 R 的第一份副本与 R 的第一份和最后一份副本相乘。该映射与来自余等化子的映射相容，因此由余等化子的泛性质可得约化映射：$R \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,\ R,\ R) \to R^{\wedge k+1}$。

回顾 ${}^{\gamma}E$ 对于 E 一个 C_p-谱的定义（见第 3.2 节）：谱 ${}^{\gamma}R$ 和 R 除了左 R-模映射外完全相同。因此，我们可以用构造 $R \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,R)$ 的类似方式构造 $R \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,{}^{\gamma}R)$。与上文类似，我们有一个约化映射：$R \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,{}^{\gamma}R) \to {}^{\gamma}R \wedge R^{\wedge k}$，因为余等化子图中的映射经过设计，使得 R 的右模作用和 ${}^{\gamma}R$ 的左模作用得以保持。

类似地，我们构造 $B_k(R,R,R) \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,R)$。考虑映 p

$$k\colon B_k(R,R,R) \wedge (R \wedge R) \to B_k(R,R,R)$$

其中 k 将 $(R \wedge R)$ 中的第一份 R 旋转到最前面，然后应用 (R,R)-双模映射，该映射将前两份 R 和最后两份 R 分别相乘。也就是说，$k = (\mu \wedge \mathrm{id}^{\wedge k}) \circ (\mathrm{id}^{\wedge k+2} \wedge \mu) \circ t''$，其中 t'' 将 $(R \wedge R)$ 中的第一份 R 旋转到最前面。现在，我们将 $B_k(R,R,R) \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,R)$ 定义为谱范畴中如下图的余等化子：

$$B_k(R,R,R) \wedge (R \wedge R) \wedge B_k(R,R,R) \underset{\mathrm{id}^{\wedge k+2}\wedge h}{\overset{k\wedge \mathrm{id}^{\wedge k+2}}{\rightrightarrows}} B_k(R,R,R) \wedge B_k(R,R,R)$$

其中 h 是与上文定义的相同映射。我们以类似方式构造 $B_k(R,R,R) \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,{}^{\gamma}R)$ 和 $B_k(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,{}^{\gamma}R)$，其中 $B_k(R,R,R) \wedge_R B_k(R,R,R)$ 是左侧那份 $B_k(R,R,R)$ 上的右 R-模作用与右侧那份 $B_k(R,R,R)$ 上的左 R-模作用的余等化子。这些余等化子的约化映射如下：$B_k(R,R,R) \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,{}^{\gamma}R) \to {}^{\gamma}R \wedge R^{\wedge 2k+1}$，$B_k(R,R,R) \wedge_R B_k(R,R,R) \to R^{\wedge 2k+3}$，以及$B_k(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B_k(R,R,{}^{\gamma}R) \to {}^{\gamma}R \wedge R^{\wedge n(k+1)-1}$。

引理 5.5. 设 R 是一个以平凡宇宙 $\mathbb{R}^{\infty}$ p素数为指标的交换环 C_p-谱。那么我们有以下单纯形 C_p-谱的同构：

$$B^{cy,C_p}_{\bullet}(R) \cong R \wedge_{(R\wedge R)} B_{\bullet}(R,R,{}^{\gamma}R),\ and$$
$$sd_n(B^{cy,C_p}_{\bullet}(R)) \cong (B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B(R,R,{}^{\gamma}R))_{\bullet}.$$

证明. 设 μ 和 η 分别是 R 的乘法映射和单位映射，并设 ${}^{\gamma}\mu$ 是 ${}^{\gamma}R$ 的左R-模结构映射，定义见第 3.2 节。

第一个同构与经典结果非常相似，即 $B^{cy}_{\bullet}(R) \cong R \wedge_{(R\wedge R)} B_{\bullet}(R,\ R,\ R)$。各个同构的论证类似；由于第二个同构的证明需要更多细节，而第一个同构的证明实质上是第二个同构证明的简化版，因此我们将证明第二个同构。

对于第二个同构，我们将首先定义一个单纯形环 C_p-谱 $X_{\bullet}$，并证明它是约化映射 $(B(R,\ R,\ R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B(R,\ R,\ {}^{\gamma}R))_{\bullet}$ 的像（上文已讨论）；然后我们将证明 $sd_n(B^{cy}.\ _{\bullet}{}^{C_p}(R)) \cong X_{\bullet}$，从而完成论证。

设 $X_{\bullet}$ 是一个单纯环 C_p-谱，使得 $X_k = {}^{\gamma}R \wedge R^{\wedge nk+n-1}$，其中面映射和退化映射 $\delta_i\colon\ X_k \to X_{k-1}$ 以及 $\sigma_i\colon\ X_k \to X_{k+1}$ 定义如下；在此我们将 R 的副本和

${}^{\gamma}R$ 在 X_k 中表示为 $({}^{\gamma}R\wedge R^{\wedge k})\wedge(R^{\wedge k+1})^{\wedge n-1}$:

$$\begin{aligned}\delta_i &= (\mathrm{id}^{\wedge i}\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i-1})\wedge(\mathrm{id}^{\wedge i}\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i-1})^{\wedge n-1}\\ \delta_k &= ((^{\gamma}\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-1})\wedge(\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-1})^{\wedge n-1})\circ t\\ \sigma_j &= (\mathrm{id}^{\wedge j+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-j})\wedge(\mathrm{id}^{\wedge j+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-j})^{\wedge n-1}\end{aligned}$$

其中 t 是 t 映射 t 将 R 的最后一个副本旋转到最前面，$0\le i<k$，以及 $0\le j\le k$。

考虑 $(B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B(R,R,{}^{\gamma}R))_{\bullet}$，其构造如上所述。由于 R,$B_{\bullet}(R,R,R)$ 和 $B_{\bullet}(R,R,{}^{\gamma}R)$ 是自由的 (R,R)-双模，我们得到如下逐级约化映射（如上所述）；该约化映射从 $(B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B(R,R,{}^{\gamma}R))_k = B_k(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B_k(R,R,{}^{\gamma}R)$ 映射到 X_k:

$$\psi_k\colon (R^{\wedge k+2})^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}(R^{\wedge k+1}\wedge{}^{\gamma}R)\to {}^{\gamma}R\wedge R^{\wedge kn+n-1}.$$

$(B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B(R,R,{}^{\gamma}R))_{\bullet}$ 的面映射和退化映射，分别记作 δ'_i 和 σ'_i，在 k^{th} 层上由 $B_k(R,R,R)$ 和 $B_k(R,R,{}^{\gamma}R)$ 上的面映射和退化映射定义（见定理 5.4）。面映射和退化映射

$$\delta'_i\colon\ B_k(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B_k(R,R,{}^{\gamma}R)\to B_{k-1}(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B_{k-1}(R,R,{}^{\gamma}R),$$

以及 $\sigma'_i\colon\ B_k(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B_k(R,R,{}^{\gamma}R)\to B_{k+1}(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B_{k+1}(R,R,{}^{\gamma}R)$

定义如下，其中我们将 R 和 ${}^{\gamma}R$ 在 $B_k(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)}B_k(R,R,{}^{\gamma}R)$ 中的副本分组为 $(R^{\wedge k+2})^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{R\wedge R}(R^{\wedge k+1}\wedge{}^{\gamma}R)$:

$$\begin{aligned}\delta'_i &= (\mathrm{id}^{\wedge i}\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i})^{\wedge n-1}\wedge(\mathrm{id}^{\wedge i}\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i})\\ \delta'_k &= (\mathrm{id}^{\wedge k}\wedge\mu)^{\wedge n-1}\wedge(\mathrm{id}^{\wedge k}\wedge{}^{\gamma}\mu)\\ \sigma'_j &= (\mathrm{id}^{\wedge j+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-j+1})^{\wedge n-1}\wedge(\mathrm{id}^{\wedge j+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-j+1})\end{aligned}$$

对于 $0\le i<k$，以及 $0\le j\le k$。

由于逐级约化映射 ψ_k 不会影响每个 B_k 副本内部的中间 k 个 R 副本（R，R，R）和（B_k，R，R，${}^{\gamma}R$），因此 ψ_k 与所有退化映射以及 $0<i<k$ 的 i^{th} 面映射都交换。另两个面映射需要进一步讨论。${}^{\gamma}R$ 的右 R-模结构与 R 的右 R-模结构相同，因此 $\psi_{k-1}\circ\delta'_0=\delta_0\circ\psi_k$。考虑映射 $\psi_{k-1}\circ\delta'_k$ 和 $\delta_k\circ\psi_k$。这两个映射等价，因为它们将相同的 R 和 ${}^{\gamma}R$ 副本相乘。因此（B（R，R，R）$^{\wedge_R}$（$n-1$）$\wedge_{(R\wedge R)}B$（R，R，${}^{\gamma}R$））$_{\bullet}\cong X_{\bullet}$。我们仍需证明 sd_n（B^{cy}，$_{\bullet}{}^{C_p}$（R））$\cong X_{\bullet}$。

令 d_i 和 s_i 分别为 B^{cy}，$_{\bullet}{}^{C_p}(R)$ 的面映射和退化映射（见定理3.7）。根据单纯边式细分的定义以及单纯恒等式，单纯对象 $sd_n(B^{cy}$，$_{\bullet}{}^{C_p}(R))$ 由以下内容确定:

$$\begin{aligned}sd_n(B_{\bullet}^{cy,C_p}(R))_k &= B^{cy,C_p}_{(k+1)n-1}(R)\cong({}^{\gamma}R\wedge R^k)\wedge(R^{\wedge k+1})^{\wedge n-1}\\ \bar{d}_i &= d_i\circ d_{i+k+1}\circ\ldots\circ d_{i+(n-1)(k+1)}\\ &= (\mathrm{id}^{\wedge i}\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i-1})\wedge(\mathrm{id}^{\wedge i}\wedge\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-i-1})^{\wedge n-1}\\ \bar{d}_k &= d_k\circ d_{2k+1}\circ\ldots\circ d_{k+(n-2)(k+1)}\circ d_{(k+1)n-1}\\ &= d_k\circ d_{2k+1}\circ\ldots\circ d_{k+(n-2)(k+1)}\circ d_0\circ\alpha\\ &= ((^{\gamma}\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-1})\wedge(\mu\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-1})^{\wedge n-1})\circ t\\ \bar{s}_j &= s_{j+(n-1)(k+2)}\circ\ldots\circ s_{j+(k+2)}\circ s_j\\ &= (\mathrm{id}^{\wedge j+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-j})\wedge(\mathrm{id}^{\wedge j+1}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}^{\wedge k-j})^{\wedge n-1}\end{aligned}$$

其中 t 是 将 R 的最后一个副本旋转到最前面的映射， $0 \le i < k$，以及 $0 \le j \le k$。

这些映射等价于 $X_\bullet$ 和 $X_k \cong sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R))_k$的面映射和退化映射。这给出了以下 C_p-谱之间的等价： $sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)) \cong X_\bullet$。因此 $sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)) \cong (B(R, R, R)^{\wedge_R (n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B(R, R, {}^{\gamma}R))_\bullet$。□

现在我们将在交换环 C_p-谱的情形下证明经典 bar 引理；对于后续结果，我们还需要几何实现在谱的每一层上都是 C_p-弱等价。这里， $R_\bullet$ 定义为在每个单纯层上都等于 R ，且所有面映射和退化映射都是恒等映射。

引理 5.6（条形引理）。设 R 是一个以平凡宇宙 $\mathbb{R}^\infty$为指标的交换环 C_p-谱， p 为素数。单纯（R, R）-双模之间的映射

$$B_\bullet(R, R, R) \to R_\bullet$$

是右 R-模之间的单纯 C_p-同伦等价。对该映射取几何实现，得到映射 $B(R, R, R) \to R$，它在谱的每一级上都是 C_p-弱等价。

证明。将映射 η: $R_\bullet \to B_\bullet(R, R, R)$ 定义为单位元的迭代。具体而言， η_k: $R_k = R \to B_k(R, R, R) = R^{\wedge k+2}$是单位映射的 $k+1$ 次迭代。将映射 ε: $B_\bullet(R, R, R) \to R_\bullet$定义为对最左侧的 R 个副本反复作乘积。具体而言， ε_k: $B_k(R, R, R) = R^{\wedge k+2} \to R_k = R$是乘法映射的 $k+1$ 次迭代。于是，它们的复合映射 $\varepsilon \circ \eta$: $R_\bullet \to R_\bullet$是恒等映射。

定义 h_i: $B_q(R, R, R) \to B_{q+1}(R, R, R)$，对于 $0 \le i \le q+1$，令其先对最左侧的 R 个副本反复作乘积，再取单位映射的 $i+1$ 次迭代。因此， h_0 等价于 $B_q(R, R, R)$ 上的恒等映射，而 h_{q+1} 等价于 $\eta \circ \varepsilon$。

于是， h_i 是一个单纯的 C_p-同伦等价，它连接 $B_\bullet$上的恒等映射与复合映射 $\eta \circ \varepsilon$，其中R、 R、 R。该同伦等价将 R 的单个副本包含到 B_k(R、 R、 R)中最右侧的 R副本内，因此这是右 R-模的一个等价。

该同伦等价在几何实现上给出一个 C_p-弱等价，因而在谱的每个层级上给出一个 C_p-弱等价。□

Hirschhorn 在 [Hir03]中给出了一般 Reedy 范畴和模型结构下 Reedy 上纤维对象的定义。关于 Reedy 上纤维对象有许多经典结果。在等变情形下进行更详细讨论的一个参考文献是 [Mal17]的第 2.2 节。我们将使用 [BDS22中的等变模型结构，定理 5.4。15]。

对于单纯对象 $X_\bullet$ ，起始对象 L_nX 是 X_n 的子空间，由退化映射 s_i的所有像组成： $X_{n-1} \to X_n$、$0 \le i \le n-1$；而 X 的起始映射是自然映射 $L_nX \to X_n$ [Hir03，定义 15.2.5(1)]。对于单纯 C_p-谱 $X_\bullet$，如果每个起始映射 $L_nX \to X_n$ 都是余纤维化，那么 $X_\bullet$ 就是 Reedy 上纤维的 [Hir03，定义 15.3.3 (2)]。我们将使用 Reedy h-余纤维化这一概念，即每个起始映射都是 h-余纤维化，这意味着它们满足自由同伦扩张性质。在所选模型结构中，从交换环 C_p-谱到 C_p-谱的遗忘映射保持余纤维化 [BDS22，定理 5.4。16]这意味着，对于一个余纤维化的交换环 C_p-谱 R，其底层 C_p-谱也是余纤维化的。此外，底层 C_p-谱是 h-余纤维化的，依据 [BDS22，定理 5.4。18]这说明我们稍后将使用的映射，即 $*$: $\Sigma^\infty * \to {}^{\gamma}R$、 η: $\mathbb{S} \to R$，以及它们的楔积，都是 h-余纤维化的。这里 $\Sigma^\infty *$ 是零谱。

我们将概述为何对于 R 余纤维化的交换环C_p-谱， $B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)$ 是 Reedy h-余纤维化的。对于 $sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R))$ 和 $B_\bullet(R, R, R)$，论证也类似。

考虑 $B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)$。回忆一下，退化映射 $s_i\colon B^{cy,\bullet}{}_{k-1}^{C_p}(R) \to B^{cy,\bullet}{}_{k}^{C_p}(R)$ 对于 $0 \le i \le k-1$ 是 s_i =恒等映射$^{\wedge i} \wedge \eta \wedge$ 恒等映射$^{\wedge k-i-1}$。考虑下面由 h-余纤维化构成的图：

$$\begin{array}{ccccc} & & R\wedge R\wedge \mathbb{S} & & \\ & \overset{\mathrm{id}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}}{\nearrow} & & \overset{\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge\eta}{\searrow} & \\ R\wedge\mathbb{S}\wedge\mathbb{S} & & & & R\wedge R\wedge R \\ & \underset{\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge\eta}{\searrow} & & \underset{\mathrm{id}\wedge\eta\wedge\mathrm{id}}{\nearrow} & \\ & & R\wedge\mathbb{S}\wedge R & & \end{array}$$

这个映射图的推挤乘积就是起始映射 $L_2X \to X_2$。由于它是 h 余纤维化映射的推挤乘积，因此这个起始映射是一个 h-余纤维化。其他起始映射 $L_nX \to X_n$ 也以类似方式构造，即按如下方式取余纤维化映射的推挤乘积（由 表示）：$(\mathbb{S} \to R)^{\boxtimes k}(\Sigma^\infty_* \to R)$。因此，对所有 n， $L_nX \to X_n$ 都是 h-余纤维化。因此， $B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)$ 是 Reedy h-余纤维化的。类似的论证可证明， $sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R))$ 和 $B_\bullet(R,\ R,\ R)$ 是 Reedy h-余纤维化的。

以下经典结果见 [Hir03]，其等变推广见 [Mal17]。

命题 5.7 ([Hir03，定理 15.11。11] [Mal17，命题 2。4])。设 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 是单纯正交 C_p-谱。若 $X_\bullet$ 是 ***Reedy*** h-余纤维化的，则 $|X_\bullet|$ 是 h-余纤维化的。此外，若 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$都是 ***Reedy*** h-余纤维化的，则任何在每个单纯层上都是弱等价的映射 $X_\bullet \to Y_\bullet$ 都会在谱的每一层上诱导一个 C_p-等价 $|X_\bullet| \to |Y_\bullet|$。

在以下引理的证明中，我们将使用一个多重单纯集。对于 X 一个多重单纯集，其在 k^{th} 层上的对角单纯集 $d(X)$是 n-单纯集 $X(k,\dots,k)$，也可以看作复合函子

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{D^{n-1}} (\Delta^{\mathrm{op}})^{\times n} \xrightarrow{X} sSets$$

其中 D^{n-1} <style id='4}是对角映射，而 $sSets$ 是单纯集范畴 [GJ09，IV。1]。多重单纯集经几何实现后，与其对角单纯集的几何实现同胚 [Qui73]。

引理 5.8。设 U 为一个完备的 S^1-宇宙， R 为一个余纤维化的交换环 C_p-谱，其指标化于平凡宇宙 $\mathbb{R}^\infty$， p 为素数。则 $|\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty} sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R))| \to |\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty} B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)|$ 是一个C_p-弱等价。

证明。由定理 5.5，回忆 $sd_n(B^{cy,\bullet}{}^{C_p}(R)) \cong (B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}\wedge_{(R\wedge R)} B(R,R,^\gamma R))_\bullet$是单纯的 C_p-谱。这是 n-单纯 C_p-谱 $B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)}{}^{\wedge_{(R\wedge R)}}B_\bullet(R,R,^\gamma R)$的对角谱，因此根据 [Qui73，第 10] 页，我们有以下同胚

$$|B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B_\bullet(R,R,^\gamma R)| \cong |(B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B(R,R,^\gamma R))_\bullet|.$$

由于这是一个多重单纯 C_p-谱，因此我们可以一次对一个单纯方向取几何实现。

考虑如下映射的复合：首先是上文讨论的同胚，随后是 $n-1$ 次将条形引理中的映射作用于最左侧分量（见定理 5.6），并在其余分量上取恒等映射：

$$\begin{aligned} |(B(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B(R,R,^\gamma R))_\bullet| &\cong |B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R(n-1)} \wedge_{(R\wedge R)} B_\bullet(R,R,^\gamma R)| \\ &\cong |B_\bullet(R,R,R)| \wedge_R |B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R(n-2)} \wedge_{(R\wedge R)} B_\bullet(R,R,^\gamma R)| \\ &\to R \wedge_R |B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R(n-2)} \wedge_{(R\wedge R)} B_\bullet(R,R,^\gamma R)| \\ &\vdots \\ &\to R \wedge_{(R\wedge R)} |B_\bullet(R,R,^\gamma R))|. \end{aligned}$$

由定理 5.5 可知， $R\wedge_{(R\wedge R)}B_\bullet(R,R,{}^\gamma R)$ 同构于 $B^{cy}_\bullet{}^{C_p}(R)$，因此 $|B^{cy}_\bullet{}^{C_p}(R)|\cong R\wedge_{(R\wedge R)}|B_\bullet(R,R,{}^\gamma R)|$。前两个映射是保持 C_p-作用的同胚，因此它们是 C_p-弱等价。随后的映射都将条形引理中的映射作用于最左侧分量，该映射在谱的每一层上都是 C_p-弱等价，并对某个 $0\le k\le n-2$ 在 $B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R k}\wedge_{(R\wedge R)}B_\bullet(R,R,{}^\gamma R)$ 上取恒等映射。由于 $B_\bullet(R,R,R)^{\wedge_R k}\wedge_{(R\wedge R)}B_\bullet(R,R,{}^\gamma R)$ 上的恒等映射是 Reedy h- 余纤维化对象之间的映射，且在每个单纯层上都是弱等价，故定理 5.7 表明，在取该映射的几何实现之后，它在谱的每一层上都是 C_p-弱等价。

因此，这个复合映射 $|\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}sd_n(B^{cy}_{\cdot,\bullet}{}^{C_p}(R))|\to|\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}B^{cy}_{\cdot,\bullet}{}^{C_p}(R)|$ 是一个 C_p-弱等价。 □

回顾一下， $m\mathrm{THH}^{C_p}(R)\cong|\mathcal{I}^U_{\mathbb{R}^\infty}sd_m(B^{cy}_{\cdot,\bullet}{}^{C_p}(R))|$；每当讨论 a$C_n$-谱 R 的扭曲 THH 时，我们指的是 R 的左导出扭曲 THH。特别地，这等同于考虑 R 的余纤维化替换的扭曲 THH。

一个等变类比 [AR05，引理 38] 立即可得。

定理 5.9。设 U 是一个完备的 S^1-宇宙，并设 $\widetilde{U}:=i^*_{C_p}U$。设 R 是一个交换环$_\sim C_p$-谱，其指标取自 C_p-宇宙 U，其中 p 为素数。则存在一个 C_p-弱等价

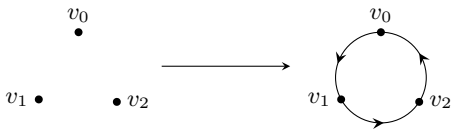
$$\pi_m\colon m\,\mathrm{THH}_{C_p}(R)\to\mathrm{THH}_{C_p}(R).$$

现在我们可以讨论扭曲 THH 的结构了。

5.2.**代数结构**。本节将证明，对于 R 交换环 C_p-谱，$\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是 R-谱范畴中的交换 C_p-代数，其中p是任意素数。证明过程与 Angeltveit 和 Rognes 用来证明如下结论的过程相似：对于 A 交换环谱，THH(A) 是谱范畴中的交换 A-代数 [AR05]。请注意，Angeltveit 和 Rognes 还证明了，THH(A) 是稳定同伦范畴中的一个 A-Hopf 代数 [AR05]。

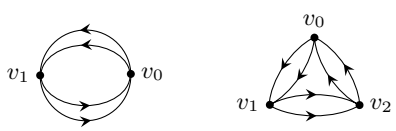
回顾一下，在 [AR05] 中，单纯形映射 $\eta\colon e\to S^1_\bullet$ 是点的包含映射，它通过应用函子 $A\otimes(-)$ 诱导出单位映射 $\eta\colon A\to\mathrm{THH}(A)$。这个单纯形映射的等变类比是 $\eta\colon C_p\to pS^1_\bullet$，它将 p 个点包含到 $pS^1_\bullet$ 中。通过应用函子 $R\otimes_{C_p}(-)$，这会诱导出单位映射 $\eta\colon R\to\mathrm{THH}^{C_p}(R)$。这里的直觉是，我们需要经典空间的 C_p-等变类比。首先，我们需要的不是一个点，而是点的 C_p-轨道。其次，我们需要的不是 S^1，而是一个 C_p-等变的圆模型，使得对圆应用函子 $R\otimes_{C_p}(-)$ 后得到 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)$。

例 5.10。包含映射 $C_3\to 3S^1_\bullet$ 可以如下图表示：



考虑两个单纯形映射 η 的推出：$C_p\to pS^1_\bullet$，其中 p 为素数，并将此推出记为 $pS^1_\bullet\vee_{C_p}pS^1_\bullet$. 定义折叠映射 $\phi\colon pS^1_\bullet\vee_{C_p}pS^1_\bullet\to pS^1_\bullet$，即将具有相同边界的 1-胞腔折叠在一起。所选用的记号旨在表明，这是经典楔和的一个等变类比。

例 5.11. 空间 $2S^1_\bullet\vee_{C_2}2S^1_\bullet$ 和 $3S^1_\bullet\vee_{C_3}3S^1_\bullet$ 分别可由以下图表示：



其中，第一个图上的 C_2-作用是按 π 逆时针旋转，而第二个图上的 C_3-作用是按 $2\pi/3$ 逆时针旋转。

为了证明这个折叠映射诱导了乘积映射 $\phi\colon \mathrm{THH}^{C_p}(R) \wedge_R \mathrm{THH}^{C_p}(R) \to \mathrm{THH}^{C_p}(R)$，我们需要证明 $R \otimes_{C_p} (pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet)$ 与 $(R \otimes_{C_p} pS^1_\bullet) \wedge_R (R \otimes_{C_p} pS^1_\bullet)$ 作为单纯形 C_p-谱是同构的。这个问题归结为：函子 $R \otimes_{C_p} (-)$（来自公式 (3.3)）是否将带有自由 C_p-作用的无基点空间范畴映至 C_p-谱的函子保持推出。

命题 5.12. 设 R 是一个交换环 C_p-谱，并将 C_p 视为带有自由 C_p-作用的无基点空间，p 素数。函子 $R \otimes_{C_p} (-)$ 从带有自由 C_p-作用的无基点空间范畴到交换环 C_p-谱范畴保持推出。

证明。 张量积 $R \otimes C_p \otimes (-)$ 和 $R \otimes (-)$ 都保持余极限。所有余极限都与其他余极限可交换，而余等化子是一种余极限，因此 $R \otimes_{C_p} (-)$ 与所有余极限可交换，故保持推出。□

现在我们可以说，以下单纯形映射：

$$\begin{aligned} &\eta\colon C_p \to pS^1_\bullet \\ &\phi\colon pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \to pS^1_\bullet \end{aligned}$$

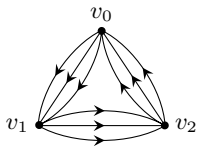
诱导出以下交换环 C_p-谱的映射：

$$\begin{aligned} &\eta\colon R \to \mathrm{THH}_{C_p}(R) \\ &\phi\colon \mathrm{THH}_{C_p}(R) \wedge_R \mathrm{THH}_{C_p}(R) \to \mathrm{THH}_{C_p}(R) \end{aligned} \tag{5.4}$$

它们分别是单位元映射和乘积映射。我们将使用这些映射来证明 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是一个交换的 R-代数。

为了检验这个乘积映射的结合律，我们需要理解跨度 $pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \leftarrow C_p \to pS^1_\bullet$ 的推出，它是 $pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet$。这应被视为三个圆的楔和的一个等变类比。

例 5.13. 考虑 $3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet$，它可以画成：



这里，$\phi \vee$ 恒等映射：$3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet \to 3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet$ 将 $3S^1_\bullet$ 的外侧副本与 $3S^1_\bullet$ 的中间副本折合，并保持 $3S^1_\bullet$ 的内侧副本不变。类似地，恒等映射 $\vee \phi$：$3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet \to 3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet$ 将 $3S^1_\bullet$ 的内侧副本与 $3S^1_\bullet$ 的中间副本折合，并保持 $3S^1_\bullet$ 的外侧副本不变。

定理 5.14. 设 p 为素数。对于交换环 C_p-谱 R，$\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是交换的 R-代数，属于交换环 C_p-谱的范畴。

证明。 我们首先检验乘积映射 ϕ 的结合律：$\mathrm{THH}^{C_p}(R) \wedge_R \mathrm{THH}^{C_p}(R) \to \mathrm{THH}^{C_p}(R)$。为简化记号，令 $T \coloneqq \mathrm{THH}^{C_p}(R)$。我们需要验证下图交换：

$$\begin{array}{ccc} T \wedge_R T \wedge_R T & \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\phi} & T \wedge_R T \\ \downarrow{\scriptstyle \phi\wedge\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ T \wedge_R T & \xrightarrow[\phi]{} & T. \end{array}$$

它是 s 只需证明下面的 C_p-单纯空间图交换:

$$\begin{array}{ccc} pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet & \xrightarrow{\mathrm{id}\vee\phi} & pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \phi\vee\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet & \xrightarrow[\phi]{} & pS^1_\bullet. \end{array}$$

映射 $\mathrm{id} \vee \phi$ 和 $\phi \vee \mathrm{id}$ 分别将 $pS^1_\bullet$ 的内侧两个副本和外侧两个副本合并，而 ϕ 则将 $pS^1_\bullet$ 剩余的两个副本合并。因此，该图交换。

要验证乘积映射的单位律和交换性，我们需要证明下列图交换:

$$\begin{array}{ccccc} pS^1_\bullet \vee_{C_p} C_p & \xrightarrow{\mathrm{id}\vee\eta} & pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet & \xleftarrow{\eta\vee\mathrm{id}} & C_p \vee_{C_p} pS^1_\bullet \\ & \searrow^{\simeq} & \downarrow{\scriptstyle \phi} & \swarrow_{\simeq} & \\ & & pS^1_\bullet & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet & \xrightarrow{\tau} & pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \\ & \searrow^{\phi} \quad \swarrow_{\phi} & \\ & pS^1_\bullet & \end{array}$$

其中 $pS^1_\bullet \vee_{C_p} C_p \cong pS^1_\bullet$ 是跨度 $pS^1_\bullet \leftarrow C_p \to C_p$的推出。映射 $\mathrm{id} \vee \eta$: $pS^1_\bullet \vee_{C_p} C_p \to pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet$ 在 $pS^1_\bullet$ 上是恒等映射，并将 C_p 包含到第二个 $pS^1_\bullet$副本中；类似地，$\eta \vee \mathrm{id}: C_p \vee_{C_p} pS^1_\bullet \to pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet$ 在 $pS^1_\bullet$上是恒等映射，并将 C_p包含到第一个 $pS^1_\bullet$副本中。映射 τ 交换 $pS^1_\bullet$的第一个和第二个副本。

对于单位律图，注意 ϕ: $pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet \to pS^1_\bullet$是折叠映射，而映射 $\mathrm{id} \vee \eta$和 $\eta \vee \mathrm{id}$ 的像都包含一份 $pS^1_\bullet$，因此该图交换。对于交换性图，无论两份 $pS^1_\bullet$的位置如何，折叠映射的像都相同。

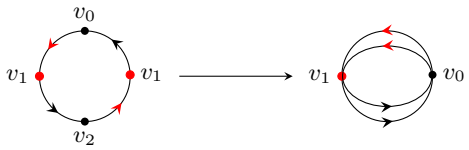
因此，$\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是一个交换的 R-代数。 □

5.3. **余乘积结构失效**。经典地，对于 A 一个交换环谱，$\mathrm{THH}(A)$ 具有余结合余乘结构，但在稳定同伦范畴中通常并不余交换 [AR05]。经典地，可以考虑从 S^1 到点的压缩映射来构造余单位，并考虑从圆的双重模型到两个圆的楔和的单纯捏合映射来构造余乘映射。

在我们的等变模型中，要得到一个余单位，我们需要一个从$pS^1_\bullet$ 到 C_p的 C_p-等变单纯形映射。这是不可能的，因为 $pS^1_\bullet$ 是连通的，而 C_p 是没有 C_p不动点的 p 0-胞腔，因此在 C_p中不存在一种 C_p-等变的单纯形方法将 $pS^1_\bullet$ 压缩为一个点。

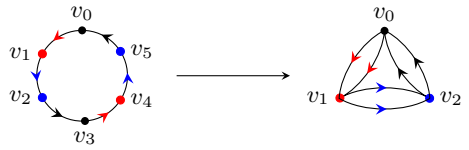
由于 $2pS^1_\bullet$是圆的双重模型的 C_p-等变类比，而 $pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet$是两个圆的楔和的$C_p$-等变类比，要得到一个余乘积，我们需要在 $2pS^1_\bullet$ 上定义一个 C_p-等变单纯捏合映射，其像为 $pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet$。经典情况下，捏映射将相对的0-胞腔识别起来。等变情况下，捏映射将 $2pS^1_\bullet$ 中由对 $pS^1_\bullet$应用 $sd_2(-)$所诱导的0-胞腔的 C_2-轨道识别起来。 $2pS^1_\bullet$ 上的捏映射有一个有趣的像，它不是 $pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet$，如下列两个例子所示。

例 5.15。 $p = 2$ 的捏映射是从 $4S^1_\bullet$ 到一个看起来像 $2S^1_\bullet \vee_{C_2} 2S^1_\bullet$、但具有不同 C_2-作用的空间。捏映射如下图所示:



像上的 C_2-作用会将带有红色箭头的边彼此交换，也会将带有黑色箭头的边彼此交换。而 $2S^1_\bullet \vee_{C_2} 2S^1_\bullet$ 上的 C_2-作用则是按 π逆时针旋转。

例5.16. $p=3$ 的捏映射是从 $6S^1_\bullet$ 到一个看起来像 $3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet$、但具有不同 C_3-作用的空间。捏映射如下图所示:



像上的 C_3-作用是旋转 $4\pi/3$，方向为逆时针。而 $3S^1_\bullet \vee_{C_3} 3S^1_\bullet$ 上的 C_3-作用是逆时针旋转 $2\pi/3$

对于更大的素数，这个问题依然存在，而且这些映射也不满足余结合性。或许可以用非单纯的方式构造一个余单位 $R \to \mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 或一个余乘积 $\mathrm{THH}^{C_p}(R) \to \mathrm{THH}^{C_p}(R) \wedge_R \mathrm{THH}^{C_p}(R)$。然而，本文关注的是将这些结构扩展到扭曲的 B¨okstedt 谱序列，因此重点放在单纯映射上。

6. Algebraic structure on the twisted Bökstedt spectral sequence

本节将讨论由扭曲 THH 上的代数结构所诱导的扭曲 B¨okstedt 谱序列的代数结构。回顾 ¨中定义的扭曲 B [AGH+22，定理 4.27] (见定理3.9）。这些作者证明，扭曲 B¨okstedt 谱序列具有代数结构。下面命题的前两个句子与扭曲 B¨okstedt 谱序列定义中的条件相同。

命题*6.1*（[*AGH*+22，命题 *4.2*.8]）。设 C_p 是 S^1 的有限子群，满足$C_p = \langle\gamma\rangle$。设 A 是一个结合环 C_p-谱，且 E 是一个交换环 C_p-谱，使得 γ 在 E 上的作用是平凡的，并且 $E_\star(A)$ 在 $E_\star$ 上平坦。若 A 是一个交换环 C_n- 谱，则扭曲 *B ¨okstedt* 谱序列是一个以 $E_\star$ 为底、 $RO(C_n)$- 分次代数的谱序列。

在定理 5.14 中，我们证明，对于 R 交换环 C_p-谱，$\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是交换的 R-代数，对所有素数 p，在 C_p-谱的范畴中。体现该结构的结构映射，即（5.4），均由单纯映射诱导。由于它们由单纯映射诱导，它们保持 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 上的骨架滤过。我们将利用这一事实，在扭曲的 B¨okstedt 谱序列上诱导结构映射。

让我们回顾微分双分次代数的一个等变类比。

定义 6.2. 设 p 为素数，R 为交换的 C_p-Green 函子，且 M 为一个交换的R-代数，并且在 R 上平坦。一个 微分 $(\mathbb{Z}, RO(C_p))$-分次 M-代数 是由一组 $(\mathbb{Z}, RO(C_p))$-分次 M-双模以及一个微分组成的，即 $(E_{*,\star}, d)$，一并配有以下 M-双模映射：

$$d\colon E_{s,\alpha} \to E_{s-r,\alpha+r-1}$$
$$\mu\colon E_{s,\alpha} \square_{\underline{M}} E_{t,\beta} \to E_{s+t,\alpha+\beta}$$
$$\eta\colon \underline{M} \to E_{*,\star}$$

对某个 $s, r \in \mathbb{Z}$ 以及 $\alpha \in RO(C_p)$。第一个映射定义微分，第二个映射是乘法映射，第三个映射是单位映射。这些映射必须使所有通常的结合律和单位律图交换。微分 d 必须与乘积映射相容，也就是说，它满足莱布尼茨法则：

$$d \circ \mu = \mu \circ (d \square_{\underline{M}} \mathrm{id} + (-1)^{s+\dim(\alpha^{C_p})} \mathrm{id} \square_{\underline{M}} d).$$

现在，让我们回顾代数谱序列的一个等变类比。注意，下述定义中的平坦性假设是为了使等变 K¨unneth 谱序列（如 [LM06，定理 1.3],中所定义）坍缩，从而给出 K¨unneth 同构。

定义 6.3. 设 p 为素数， R 为一个交换的 C_p-Green 函子，且 M 为一个在 $\underline{R}$上平坦的交换R-代数。一个谱序列（关于 M-代数）是一族微分 $(\mathbb{Z}, RO(C_p))$-分次 M-代数 $\{E^r_{*,\star}, d^r\}$，带有乘法映射 ϕ_r，使得 $\phi_{\overline{r+1}}$ 为复合

$$\phi_{r+1} \colon E^{r+1}_{*,\star} \square_{\underline{M}} E^{r+1}_{*,\star} \xrightarrow{\cong} H_*(E^r_{*,\star}) \square_{\underline{M}} H_*(E^r_{*,\star}) \xrightarrow{p} H_*(E^r_{*,\star} \square_{\underline{M}} E^r_{*,\star}) \xrightarrow{H_*(\phi_r)} H_*(E^r_{*,\star}) \xrightarrow{\cong} E^{r+1}_{*,\star},$$

w此处，同态 p 由同调交叉积映射诱导。

利用这一定义以及前面的单纯映射，我们可以证明如下定理。

定理 6.4. 设 p 为素数，并设 R 与 E 为交换环 C_p-谱，使得 C_p 的选定生成元在 E上平凡地作用，且 $E_\star(R)$ 在 $E_\star$上平坦。扭曲的 ***B ¨okstedt*** 谱序列 $E^r_{*,\star}$ 是交换的 $E_\star(R)$-代数的谱序列。

证明。 除非另有说明，每个盒积都取在 $E_\star$ 上。令 $'E^r_{*,\star}$ 为与 $R \otimes_{C_p} (pS^1_\bullet \vee_{C_p} pS^1_\bullet) \cong \mathrm{THH}^{C_p}(R) \wedge_R \mathrm{THH}^{C_p}(R)$. 上的骨架过滤相关的谱序列。由定理 5.14，我们知道 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 是一个交换的 R-代数。此外，所有相关的结构映射（5.4）都由 C_p-等变单纯映射诱导，因此它们保持 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)$ 上的骨架过滤。 მედეგად, “折叠”映射 $\phi\colon 'E^r_{*,\star} \to E^r_{*,\star}$ 保持扭曲 B¨okstedt 谱序列的微分。

考虑 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)_\bullet$，即单纯 C_p-谱 $R \otimes_{C_p} pS^1_\bullet \cong B^{cy}_\bullet{}^{C_p}(R)$。根据我们的假设， $E_\star(R)$ 在 $E_\star$ 上是平坦的，并且由于 $\mathrm{THH}^{C_p}(R)_s = R^{\wedge s+1}$，我们得到如下同构：

$$\underline{E}_\star(R^{\wedge(s+1)} \wedge_R R^{\wedge(s+1)}) \cong \underline{E}_\star(R)^{\square s+1} \square_{\underline{E}_\star(R)} \underline{E}_\star(R)^{\square s+1}.$$

根据定义，左边是 $'E^1_{s,\star}$ 而右边是 $E^1_{s,\star} \square_{E_\star(R)} E^1_{s,\star}$。

下列映射由同调交叉积映射诱导

$$H_*(E^r_{*,\star}) \square_{\underline{E}_\star(R)} H_*(E^r_{*,\star}) \to H_*(E^r_{*,\star} \square_{\underline{E}_\star(R)} E^r_{*,\star}).$$

因此我们有一个映射

$$E^2_{*,\star} \square_{\underline{E}_\star(R)} E^2_{*,\star} \cong H_*(E^1_{*,\star}) \square_{\underline{E}_\star(R)} H_*(E^1_{*,\star}) \to H_*(E^1_{*,\star} \square_{\underline{E}_\star(R)} E^1_{*,\star}) \cong H_*('E^1_{*,\star}) \cong {}'E^2_{*,\star}$$

它通过归纳法诱导出下列映射

$$E^r_{*,\star} \square_{\underline{E}_\star(R)} E^r_{*,\star} \to {}'E^r_{*,\star}$$

对所有 $r \geq 2$。

然后我们可以定义谱序列的复合映射

$$\phi_r \colon E^r_{*,\star} \square_{\underline{E}_\star(R)} E^r_{*,\star} \longrightarrow {}'E^r_{*,\star} \xrightarrow{\phi} E^r_{*,\star}$$

对于任意 $r \geq 1$。映射 ϕ_r 对所有 r 都与微分相容，因为 ϕ ，且乘积映射与微分相容。由于所有必要的映射都与微分相容，定理 5.14 中的交换图会导出扭曲 B¨okstedt 谱序列所需的交换图。因此 $E^r_{*,\star}$ 是一个交换的 $E_\star(R)$-代数谱序列。□

7. Further computations

在第 4 节中，我们计算了实配边谱关于麦基域 C_2的 C_2-扭曲 THH，其中 F满足 $F(C_2/C_2) = \mathbb{F}_2$且 $F(C_2/e) = 0$（见定理 4.13）。本节将利用经典 THH 的已知计算结果以及定理 5.5 中的单纯结构，对扭曲 THH 作新的计算。这些计算包括特定 C_p-谱的扭曲 THH 的 C_p-几何不动点，以及对于 A 一个余纤维化结合环 C_p-谱和 E 一个几何 C_p-谱的 $\underline{E}_\star(\mathrm{THH}^{C_p}(A))$。我们要指出，Hill 提醒了我们本节中的这些论证。

几何不动点与几何实现彼此交换，因为二者都是余极限。因此，我们可以利用以下命题，根据已知的经典 THH 计算，对 C_p-扭曲 THH 进行新的计算。HHR [HHR21]约 9.11.33 处讨论了以下结果。

命题 7.1 ([HHR21])。 设 A 为一个结合环 G-谱，并设 M 和 N 分别为右 A-模和左 M 模。映射

$$\Phi^G(M \wedge_A N) \to \Phi^G(M) \wedge_{\Phi^G(A)} \Phi^G(N)$$

是一个同构，当且仅当 M 和 N 是余纤维化的。

请回忆，在讨论 $\mathrm{THH}^{C_p}(-)$ 时，我们指的是左导出函子。这等同于将 $\mathrm{THH}^{C_p}(A)$ 理解为 A的余纤维化替换的 $\mathrm{THH}^{C_p}(-)$。

命题 7.2。 设 U 为一个完备的 S^1-宇宙，并设 $\widetilde{U} := i^*_{C_p} U$。设 A 为一个余纤维化的、以 C_p-宇宙 U为指标的结合环 C_p-谱，其中 p 为素数。则以下映射是谱的同构：

$$\Phi^{C_p}(\mathrm{THH}_{C_p}(A)) \to \mathrm{THH}(\Phi^{C_p} A).$$

证明。 为简便起见，令 $\widetilde{A} := \Phi^{C_p}(A)$。由定理 5.5 可知， $B^{cy}_\bullet{}^{C_p}(A) \cong A \wedge_{(A\wedge A^{\mathrm{op}})} B_\bullet(A, A, {}^\gamma A)$，且几何实现与几何不动点交换，因此我们得到环谱的如下同构

$$\Phi^{C_p}(\mathrm{THH}_{C_p}(A)) \cong |\Phi^{C_p}(A \wedge_{(A\wedge A^{\mathrm{op}})} B_\bullet(A, A, {}^\gamma A))|.$$

注意， $B_\bullet(\widetilde{A}, \widetilde{A}, \Phi^{C_p}({}^\gamma A)) \cong B_\bullet(\widetilde{A}, \widetilde{A}, \widetilde{A})$ 与 A 和 ${}^\gamma A$ 之间唯一的区别是左侧的$\sim A$-模乘法映射，但取不动点后，它们的左侧 A-模乘法映射相同。由于我们假设 A 是余纤维化的，因此 $B_\bullet(A, A, {}^\gamma A)$ 也是余纤维化的，因此定理 7.1给出如下同构

$$|\Phi^{C_p}(A \wedge_{(A\wedge A^{\mathrm{op}})} B_\bullet(A, A, {}^\gamma A))| \to |\widetilde{A} \wedge_{\widetilde{A}\wedge\widetilde{A}^{\mathrm{op}}} B_\bullet(\widetilde{A}, \widetilde{A}, \widetilde{A})|$$

根据 [EKMM97，IX.2。4] 我们知道 $|A \wedge_{\widetilde{A}\wedge\widetilde{A}^{\mathrm{op}}} B_\bullet(A, A, A)| \cong \mathrm{THH}(A)$。 □

这个推论可与以下两个定理结合，用于对扭曲 THH 进行新的计算。

定理 7.3 ([BCS10，定理 1。3])。 存在一个稳定等价

$$\mathrm{THH}(H\mathbb{F}_p) \simeq H\mathbb{F}_p \wedge \Omega(S^3)_+$$

对每个素数 p。

定理 7.4 ([BCS10，定理 3])。 存在谱的稳定等价

$$\mathrm{THH}(MG) \simeq MG \wedge BBG_+$$

对于 G 以下稳定化李群之一： O、 SO、 $Spin$、 U或 Sp。

回顾定理4.1 中的结果，我们可以说，对于 F 一个 C_p-麦基域，使得$F(C_p/C_p) = k$以及 $F(C_p/e) = 0$，有 $\Phi^{C_p}(HF) \cong Hk$作为一个非等变谱。

推论 7.5. 设 p 和 q 是不同素数。若 F 是 C_p-麦基域，且 $F(C_p/C_p) = \mathbb{F}_q$以及 $F(C_p/e) = 0$，则

$$\Phi^{C_p}(\mathrm{THH}_{C_p}(HF)) \simeq H\mathbb{F}_q \wedge \Omega(S^3)_+.$$

我们还可以利用 $\Phi^{C_2}(MU_{\mathbb{R}}) = MO$ 这一事实，得到以下推论。

推论 7.6. 存在一个谱的等价

$$\Phi^{C_2}(\mathrm{THH}_{C_2}(MU_{\mathbb{R}})) \simeq MO \wedge BBO_+.$$

注 7.7. Kochman 计算了 $H_*(BBSO;\ \mathbb{F}_2)$，见 [Koc73，定理 92]，实际上 $H_*(BBSO;\ \mathbb{F}_2)$ 是多项式。存在一个纤维序列 $B\mathbb{F}_2 \to BBSO \to BBO$，因此可以利用 Serre 谱序列计算 $H_*(BBO;\ \mathbb{F}_2)$。

下面的命题给出了 $E_\star(\mathrm{THH}^{C_p}(A))$ 的一个公式，其中 E 是一个几何 C_p-谱，而 A 是一个余纤维化的结合环 C_p-谱。上述关于扭曲 THH 的几何不动点的计算可以代入此公式，从而进行更多扭曲 THH 同调的计算。

命题 7.8. 设 U 是一个完备的 S^1-宇宙，且 $\widetilde{U} := i^*_{C_p}U$。设 A 是一个以 U 为指标、定义在 C_p-宇宙上的余纤维化结合环 C_p-谱，其中 p 为素数。若 E 是一个几何 C_p-谱，则 $E_\star(THH^{C_p}(A))(C_p/C_p) \cong \Phi^{C_p}(E)_{\dim(\star^{C_p})}(THH(\Phi^{C_p}A))$，并且 $E_\star(THH^{C_p}(A))(C_p/e) \cong 0$。

证明。由于 E 是一个几何 C_p-谱，因此它与 $E\mathcal{P} \wedge E$是 C_p-弱等价的。此外，由于任意谱与几何谱的 smash 积仍是几何谱，所以 $E \wedge \mathrm{THH}^{C_p}(A)$ 是几何的。因此，$E_\star(\mathrm{THH}^{C_p}(A)) \cong \pi_\star(E \wedge \mathrm{THH}^{C_p}(A))$ 集中在C_p 上，即 $E_\star(\mathrm{THH}^{C_p}(A))(C_p/e) \cong 0$。

利用几何谱的定义、定理4.10、几何不动点的定义以及定理 7.2，我们得到以下同构：

$$\begin{aligned}
\underline{E}_\star(\mathrm{THH}_{C_p}(A)) &\cong [S^\star, E \wedge \widetilde{E}\mathcal{P} \wedge \mathrm{THH}_{C_p}(A)]^{C_p} \\
&\cong [\Phi^{C_p}(S^\star), (E \wedge \widetilde{E}\mathcal{P} \wedge \mathrm{THH}_{C_p}(A))^{C_p}]^e \\
&\cong [S^{\dim(\star^{C_p})}, \Phi^{C_p}(E \wedge \mathrm{THH}_{C_p}(A))]^e \\
&\cong [S^{\dim(\star^{C_p})}, \Phi^{C_p}(E) \wedge \mathrm{THH}(\Phi^{C_p}A)]^e.
\end{aligned}$$

在 C_p/C_p 处取值，我们得到以下同构：

$$\begin{aligned}
\underline{E}_\star(\mathrm{THH}_{C_p}(A))(C_p/C_p) &\cong [S^{\dim(\star^{C_p})} \wedge \Sigma^\infty(C_p/C_p)_+, \Phi^{C_p}(E) \wedge \mathrm{THH}(\Phi^{C_p}A)]^e \\
&\cong [S^{\dim(\star^{C_p})}, \Phi^{C_p}(E) \wedge \mathrm{THH}(\Phi^{C_p}A)]^e \\
&\cong \Phi^{C_p}(E)_{\dim(\star^{C_p})}(\mathrm{THH}(\Phi^{C_p}A)).
\end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

References

[ABG+18] Vigleik Angeltveit、Andrew J. Blumberg、Teena Gerhardt、Michael A. Hill、Tyler Lawson 与 Michael A. Mandell, *Topological cyclic homology via the norm*, Doc. Math. **23** （2018），2101–2163。MR 3933034[AGH+22] Katharine Adamyk、Teena Gerhardt、Kathryn Hess、Inbar Klang 与 Hana Jia Kong, *tools for twisted topological Hochschild homology of equivariant spectra* *Computational* **316** 2022，Topology Appl.（），论文编号 108102，26。MR 4438947

[AGH+23] , *A shadow perspective on equivariant Hochschild homologies*, Int. Math. Res. Not. IMRN（2023）, 第 18, 15299–15357 页。MR 4644963 – 期。MR AR Vigleik Angeltveit 与 John Rognes, [05] *Hopf algebra structure on topological Hochschild homology*, Algebr. Geom. Topol. **5** 2005 1223–1290 页。MR 2171809 （）, –。MR Ara Shˆorˆo 荒木, , Japan. J. Math.（新辑）5（1979）, 第 2 期, [79] *Orientations in τ-cohomology theories* 403–430。MR 614829[BCS10] Andrew J. Blumberg、Ralph L. Cohen 与 Christian Schlichtkrull, *Topological Hochschild homology of Thom spectra and the free loop space* **14** 2010 2, 1165–1242 页, Geom. Topol.（）, 第 – 期。MR 2651551 [22] *Equivariant structure on smash powers* BDS Morten Brun、Bjørn Ian Dundas 与 Martin Stolz, , 2022。[BGHL19] Andrew J. Blumberg、Teena Gerhardt、Michael A. Hill 与 Tyler Lawson, *The Witt vectors for Green functors* **537** 2019 197–244 页, J. Algebra（）, –。MR 3990042 [93] ¨ BHM M. Bokstedt、W. C. Hsiang 与 I. Madsen, *The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces*, Invent. Math. **111** 1993 3, 465–539 页 1202133 （）, 第 – 期。MR Bok M. Bokstedt, , 预印本, Universit¨at [¨85] ¨ *Topological Hochschild homology of $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/p$* Bielefeld。[CE99] Henri Cartan 与 Samuel Eilenberg, *Homological algebra*, 普林斯顿数学里程碑, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1999, 附 David A. Buchsbaum 所撰附录, 为 1956 1731415 原版的重印本。MR dS Pedro F. dos Santos, [03] *A note on the equivariant Dold-Thom theorem*, J. Pure Appl. Algebra 183（2003）, 第 1–3, 299–312 页 1992051 - – 期。[09] MR dSN Pedro F. dos Santos 与 Zhaohu Nie, *Stable equivariant abelianization, its properties*, Topology Appl. *and applications*（）, 第 – 期。MR EKMM A. D. Elmendorf、I. Kriz、M. A. Mandell 与 J. P. May, **156** 2009 5, 979–996 页 2498931 , , , [97] 数学综述与专著, 卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, *Rings modules and algebras in stable homotopy* 附 M. Cole 所撰附录。MR FL Kevin K. *theory* 47, Ferland 与 L. Gaunce Lewis, Jr., （1997, 1417719）, Mem. Amer. Math. Soc.（）, 第 [04] *The RO* viii *G-graded equivariant ordinary homology of G-* 期。MR 2025457+129GJ[Paul G. *cell complexes with even-dimensional cells for $G = \mathbb{Z}/p$* **167** 2004 794, Goerss 与 John F. Jardine, 09] , 现代 Birkh *Simplicial homotopy theory*auser 经典丛书, Birkh¨auser 出版社, 巴塞尔, ¨该版的重印本 MR 。MR HHR M. A. Hill、M. J. Hopkins 与 D. C. Ravenel, 2009, 1999 [1711612] 2840650 , [16] *On the nonexistence of elements of Kervaire invariant* Ann. of Math.（）（）, 第 – 期。MR *one* 2 **184** 2016 1, 1–262 页 3505179 HHR Michael A. Hill、Michael J. Hopkins 与 Douglas C. Ravenel, [21] , 新数学专著, 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, *Equivariant stable homotopy theory and the Kervaire invariant problem* 40, 。MR Hil Michael A. Hill, 2021 4273305 , 同调 Homotopy Appl.（）, 第 – 期。MR [12] *The equivariant slice filtration: a primer* **14** 2012 2, Hir[Philip S. Hirschhorn, 03] , 数学综述与专著, 卷 143, 166 页 3007090 *Model categories and their localizations*美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 。MR Koc Stanley O. Kochman, , Trans. Amer. Math. Soc. 99, 2003 1944041 （）, –。MR Lew L. Gaunce [73] *Homology of the classical groups over the Dyer-Lashof algebra* Lewis, Jr., **185** 1973 83–136 页 331386 , 油印讲义, 芝加哥大学, 1980。 *The theory of Green functors*Lew[, 88] （）, 代 [80] 数拓扑学与变换群（哥廷根, ）, 数学讲义, 卷 *The RO G-graded equivariant ordinary cohomology of complex projective spaces with linear Z/p* 施普林格, 柏林, 第 – 页。MR LM L. *actions* ¨ 1987 Gaunce Lewis, Jr. 与 Michael A. Mandell, 1361, 1988, 53–122 页 979507 , Proc. London Math. Soc.（）[06] *Equivariant universal coefficient and Künneth spectral* （）, 第 – 期。MR *sequences* 3 **92** 2006 2, 505–544 页 LMM G. Lewis、J. P. May 与 J. McClure, （）, Bull. Amer. Math. Soc.（新辑） 2205726 [81] *Ordinary RO G-graded cohomology* （）, 第 – 期。MR LMSM L. G. Lewis, Jr.、J. P. May、M. Steinberger 与 J. E. McClure, **4** 1981 2, 208–212 页 598689 , 数学讲义, 第 1213 卷, 施普林格出版社, 柏林, [86] 1986, 含 J. E. McClure 的撰稿。MR 866482 *Equivariant stable homotopy theory*Lod[Jean-Louis Loday, 98] , 第 2 版, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *Cyclic homology*数学科学基本原理 [第 301 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1998, 附录 E 由 Mar], ıa O. Ronco 撰写, 章节由作者与 Teimuraz Pirashvili 合作撰写。MR Mal Cary Malkiewich, , Algebr. Geom. Topol. ´ 13 1600246 （）, 第 – 期。MR Mer Mona [17] *Cyclotomic structure in the topological Hochschild homology of DX* Merling, **17** 2017 4, 2307–2356 页 3686399 , Math. Z. 285（2017）, 第 3-4 期, 1205–1248。MR 3623747 [17] *Equivariant algebraic K-theory of G-rings*MM[Cary Malkiewich 与 Mona Merling, 19] , Doc. Math. 24（2019）, 815–855。MR 3982285

[MSV97] J. McClure、R. Schw¨anzl 和 R. Vogt, $THH(R) \cong R \otimes S^1$ *for* E_∞ *ring spectra*, 《J. Pure Appl. Algebra》 **121** 1997 2, 137 159 1473888 ( ), 第 – 期。MR Oru Melda Yaman Oruc, [89] *The equivariant Steenrod algebra*, 《Topology Appl.》**32** (1989), 第 1 期, 77–108。MR 1003301[Qui73] Daniel Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, 《高阶 K 理论》（1973）, 85–147。[Sch18] Stefan Schwede, *Global homotopy theory*, 新数学专著, 第 34 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2018。MR 3838307[Shu10] Megan Shulman, *Equivariant local coefficients and the RO(G)-graded cohomology of classifying spaces*, 2010 年, 博士论文, 芝加哥大学。