arXiv:2602.02424v1 [math.DG] 2 Feb 2026

双曲空间中平均曲率流平移孤子的动力稳定性

RONALDO F. DE LIMA 和 ´ALVARO K. RAM OS

ABSTRACT. 我们发展了双曲空间中 $n+1 \geq 3$维平均曲率流（MCF）的平移孤子理论。具体而言，我们证明极限球面作为平均曲率流的径向图像解具有动力学稳定性。为此，我们构造了旋转不变平移子，类似于 Clutterbuck、Schn¨urer 和 Schulze 引入的翼状孤子；这些平移子在基于 White 避免原理和抛物型偏微分方程强最大值原理的论证中充当障碍物。

1. 引言

黎曼流形中的平均曲率流（MCF）是满足演化方程的一参数族浸入 M $\{F_t\colon M \to M\}_{t\in[0,T)}$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mathbf{H}_t, \tag{1}$$

其中$\mathbf{H}_t$ 是 f_t 在由 M诱导的度量下的平均曲率向量。在此背景下，我们称 F_t 为平均曲率流的解 。

平均曲率流的一类特殊解是平移孤子。这类解由一个 Killing 向量场生成，该向量场由沿环境流形M中的一条测地线平移的一参数群定义。平移孤子的初始条件称为平移子。黎曼流形中的平移孤子是外在几何流（包括平均曲率流）一般理论的主要研究主题之一，人们从多个角度对其进行了研究，包括构造、分类、渐近行为、稳定性等；参见例如 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22]及其中的参考文献。

在欧几里得空间中，平移子会作为平均曲率流某些解的 II 型奇点的抛物重标度出现（参见 [14]）。最著名的例子包括函数 $f(t) = -\log(\cos t)$ $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ 的图像沿柱面延伸而成的曲面，称为大鹏展翅孤子；Altschuler 和 Wu [1], 得到的、以 $\mathbb{R}^2$ 为底的旋转整体图像，称为碗状孤子 或平移抛物面；以及 Clutterbuck、Schn¨urer 和 Schulze [4], 得到的旋转环带单参数族，称为翼状解 或平移悬链面。

$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$中平均曲率流的另一类特殊解称为图形解，即浸入的像是固定开集$U \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$上的图像。初始条件为图像的平移孤子，例如大鹏展翅孤子和平移抛物面，是图形解的一个特例。在 [4], 中，作者将他们的平移悬链面用作良好的障碍物，以

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53E10（主要），35K93（次要）。

Key words and phrases. 平均曲率流 – 平移孤子 – 动力稳定性。

表明平移抛物面 Σ_0 在如下意义下是动力学稳定的： Σ_0 的任一具有 C^0 衰减的扰动，都是一个对所有 $t > 0$有定义的图形解的初始条件，并且该解随着 $t \to +\infty$ 渐近于由 Σ_0定义的平移孤子。

受 [4], 中结果的启发，在本文中我们证明， $\mathbb{H}^{n+1}$中的极限球面——可视为 $\mathbb{R}^{n+1}$中碗状孤子的双曲对应物——是平均曲率流的动力学稳定图形解；见定理 4.1。为其证明，我们首先援引 Unterberger [23] 的一个定理，该定理保证了在给定初始条件下平均曲率流图形解的存在性。随后，我们构造旋转不变的平移悬链面作为障碍物，从而得以应用 White 避免原理 [24] 来证明空间中的收敛。最后，沿循 [4], 中的推理思路，我们应用抛物型偏微分方程的强最大值原理来证明时间中的收敛。

本文结构如下。在第 2 节中，我们简要讨论双曲空间中平均曲率流的若干方面。在第 3 节中，我们构造平均曲率流的旋转不变平移孤子，从而将原先在 $\mathbb{H}^3$中建立、并见于 [8], 的部分结果推广到任意维数 $n+1 \geq 3$的双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$。在第 4 节中，我们引入 $\mathbb{H}^{n+1}$中平均曲率流的径向图形解概念，并证明关于 $\mathbb{H}^{n+1}$中极限球面稳定性的定理 4.1。最后，在第 5 节中，我们将 [8],中构造的 $\mathbb{H}^3$中的墓碑曲面族引入 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的背景，并提出若干关于其稳定性的问题。

致谢。 我们感谢 Lucas Ambrozio 在 IMPA 暑期项目期间给予的热情款待，本研究正是在此期间完成的。我们也感谢 Barbara Nelli 提供的宝贵意见，尤其感谢她提醒我们关注 Unterberger 的论文 [23]。A. Ramos 的研究部分得到了巴西 CNPq 项目资助，项目编号为 406666/2023-7。

2. Preliminaries

本文始终采用双曲空间的上半空间模型 $\mathbb{H}^{n+1}$，其维数为 $n+1 \geq 3$，即

$$\mathbb{H}^{n+1} := (\mathbb{R}^{n+1}_+, ds^2),$$

其中 $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x_1, \ldots\ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}$， $ds^2 := d\bar{s}^2/x^2_{n+1}$且 $d\bar{s}^2$是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$. 的标准欧几里得度量。我们还将用 $\langle , \rangle$ 表示度量 ds^2。

设 Σ 为 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的定向超曲面，其单位法向量为 N ，形算子为 A，从而

$$Av = -\overline{\nabla}_v N, \ v \in T\Sigma,$$

其中 $\overline{\nabla}$是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的列维-奇维塔联络， $T\Sigma$ 是Σ的切丛。 Σ, 的主曲率，即 A, 的特征值，记为$k_1, \ldots, k_n$，而 Σ的平均曲率 H由下式表示

$$H = \frac{k_1 + \cdots + k_n}{n}.$$

Σ 的平均曲率向量为

$$\mathbf{H} = HN,$$

它在定向选择下保持不变， $N \to -N$并满足 $\|\mathbf{H}\| = |H|$。

给定一个定向超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$，设 $N = (N_1, \overline{\ldots\ldots}, \overline{N}_{n+1})$ 是 Σ 关于欧几里得度量 ds^2. 的单位法向量。容易验证

$$N(p) = x_{n+1}\overline{N}(p), \ p = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Sigma,$$

定义了相对于双曲度量 ds^2. 的 Σ 的单位法向量。采用这些定向选择，令 H（分别为 H）表示 Σ 相对于 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的欧几里得度量（分别为双曲度量）的平均曲率。那么， H 和 H 满足以下关系（参见 [12] 中的恒等式 (2.1)）：

$$H(p) = x_{n+1}\overline{H}(p) + \overline{N}_{n+1}(p) \ \forall p = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Sigma. \tag{2}$$

2.1. **平均曲率流平移子**。设，对 $t \in \mathbb{R}$， Γ_t: $\mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{H}^{n+1}$定义如下

$$\Gamma_t(p) := e^t p, \quad p \in \mathbb{H}^{n+1}. \tag{3}$$

那么， $\{\Gamma_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的一个单参数等距变换子群，称为双曲平移（沿由 x_{n+1} 轴确定的竖直测地线）。由 $\{\Gamma_t\}$ 生成的 Killing 向量场就是 $\xi(p) = p$, 这里我们采用了符号上的简写

$$p = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1} \leftrightarrow x_1\partial_{x_1} + \cdots + x_{n+1}\partial_{x_{n+1}} \in T_p\mathbb{H}^{n+1}.$$

在此背景下，如果一个定向超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1}$ 满足下式，我们就称它为平均曲率流的平移子:

$$H(p) = \langle p, N(p)\rangle \ \forall p \in \Sigma, \tag{4}$$

其中， H 是相对于单位法向量 N而言的 Σ 的平均曲率。对于等距浸入 F: $M \to \mathbb{H}^{n+1}$, 若 $\Sigma := F(M)$ 是一个平移子，可以验证 $\{F_t$: $M \to \mathbb{H}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$，其中

$$F_t := \Gamma_t \circ F,$$

满足式 (1)，因此是平均曲率流的一个解（参见 [15]）。

例 2.1。 令 $\mathscr{H}_h$ 为高度 $h > 0$处的 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的极限球面， 即

$$\mathscr{H}_h = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid x_{n+1} = h\}.$$

在任意点 $p \in \mathscr{H}_h$， 我们有 $H(p) = 1$ 且 $N(p) = h\partial_{x_{n+1}}$. 因此

$$\langle p, N(p)\rangle = \frac{1}{h^2}h^2 = 1 = H(p) \ \forall p \in \mathscr{H}_h,$$

因此 $\mathscr{H}_h$ 是 $\mathbb{H}^{n+1}$.中的平均曲率流平移子

2.2. **双曲空间中的平均曲率流图形解** $\mathbb{H}^{n+1}$。 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$为由以原点为中心的单位欧几里得球面上半球定义的双曲超平面。对于 $T > 0$， 考虑 $u \in C^\infty(\mathcal{S} \times (0, T)) \cap C^0(\mathcal{S} \times [0, T))$; 对于 $t \in [0, T)$， u_t: $\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 表示函数 $u_t(x) = u(x, t)$。于是， u 定义了如下在 $\mathcal{S}$上的整体径向图流:

$$F(x, t) := e^{u_t(x)}x, \quad (x, t) \in \mathcal{S} \times [0, T). \tag{5}$$

族 $F_t := F(., t)$ 是平均曲率流在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的解，当且仅当函数u 满足（见 [17, 23]）

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = x_{n+1}\sqrt{1 + \|\nabla u_t(x)\|^2}H(x, t), \tag{6}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的欧几里得范数， $\nabla u_t(x)$ 是 u_t 在点 $x=(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathcal{S}$ 处关于 $\mathbb{S}^n$的典范度量的梯度，而 $H(x,t)$ 是 $F_t(\mathcal{S})$ 在 x 处相对于双曲度量的平均曲率，采用向上的定向。

定义 2.2. 满足 (6) 的函数 $u\in C^\infty(\mathcal{S}\times(0,T))\cap C^0(\mathcal{S}\times[0,T))$ 称为 $\mathbb{H}^{n+1}$中的平均曲率流图形解，而在 (5) 中定义的映射 F 称为 $\mathbb{H}^{n+1}$中的图解平均曲率流。

将 $H(x,t)$ 用 u 表示，可知 (6) 可视为一个抛物型拟线性方程 [23]。更确切地说，令

$$\Lambda=\mathcal{S}\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},$$

并用坐标 (x,p,r) 表示 Λ中的一个元素，其中 $x\in\mathcal{S}$、 $p\in\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $r\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$。存在一个函数 $Q\colon\Lambda\to\mathbb{R}$，它定义了一个椭圆型拟线性算子

$$\mathcal{Q}(u)=Q(x,Du_t,D^2u_t) \tag{7}$$

使得 (6) 可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\mathcal{Q}(u). \tag{8}$$

关于 Q 的显式表达式，以及 (8) 是一个拟线性（非一致）抛物型偏微分方程这一事实，见 [23] 第 3 节。基于这一事实，Unterberger 推导出了以下关于 $\mathbb{H}^{n+1}$中图解平均曲率流长期存在性的结果。

定理 2.3. [23, 定理 0.1] 对于 $\mathcal{S}$上任意局部 *Lipschitz* 连续函数 u_0，存在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中以 u_0为初始条件的平均曲率流 图形解 $u=u(x,t)$ ，它对所有 $t\geq 0$均有定义。

3. Translating Catenoids in $\mathbb{H}^{n+1}$

在本节中，我们推广 [8] 的论证，并给出 $\mathbb{H}^{n+1}$中平均曲率流的一族完备平移者，称为平移悬链面，类似于 [4]的翼状孤子 。在我们主要结果的证明中，平移悬链面将被用作障碍物，以证明极限球面作为平均曲率流的整体平移图解解的稳定性。

在开区间 $I\subset(0,+\infty)$上选取一个正的光滑函数 ϕ ，并令Σ 为由该映射参数化的超曲面

$$X(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},s)=(s\varphi(\theta_1,\dots,\theta_{n-1}),\phi(s))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+, \tag{9}$$

其中 φ 是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$的局部参数化。我们将 Σ称为由下述量确定的垂直旋转图 ϕ。

引理 3.1。 由光滑函数 ϕ 确定的垂直旋转图是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的平均曲率流 平移子，当且仅当 ϕ 满足以下二阶常微分方程:

$$\phi''=-\phi'(1+(\phi')^2)\left(\frac{ns}{\phi^2}+\frac{n-1}{s}\right). \tag{10}$$

证明。 对于按式（9）参数化的旋转图 Σ，其参数为 X，我们有其欧几里得单位法向量 N 为

$$\overline{N}:=\varrho(-\phi'\varphi,1),\quad \varrho:=\frac{1}{\sqrt{1+(\phi')^2)}}.$$

于是，直接计算可得，按照这一方向，欧几里得平均曲率 H 是 s 的以下函数:

$$\overline{H} = \frac{\varrho}{n}\left(\frac{\phi''}{1+(\phi')^2} + \frac{(n-1)\phi'}{s}\right).$$

因此，由（2）可得，相对于 $N := \phi N$， $\mathbb{H}^{n+1}$ 中 Σ 的平均曲率 H 为

$$H = \phi\overline{H} + \overline{N}_{n+1} = \varrho\left(\frac{\phi}{n}\left(\frac{\phi''}{1+(\phi')^2} + \frac{(n-1)\phi'}{s}\right) + 1\right). \tag{11}$$

也容易看出，等式

$$\langle X, N\rangle = \frac{\varrho}{\phi}(\phi - s\phi') \tag{12}$$

在 Σ. 上处处成立

由（11）和（12），我们得出，竖直图 Σ 的方程（4）等价于下列二阶常微分方程:

$$\phi'' = -\phi'(1+(\phi')^2)\left(\frac{ns}{\phi^2} + \frac{n-1}{s}\right),$$

这就证明了该引理。 □

为了构造平移悬链面族，除了旋转竖直图之外，我们还需要考虑水平旋转图。给定区间 $(1-\delta, 1+\delta) \subset (0, +\infty)$ 上的光滑正函数 d，这样的图是一个旋转超曲面 Σ，定义为

$$\Sigma := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = d^2(x_{n+1})\}.$$

下一个引理刻画了作为平移子的水平旋转图。

引理 3.2. 由光滑函数 d确定的水平旋转图 Σ 是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的平均曲率流平移子，当且仅当函数 d 满足以下常微分方程:

$$d'' = (1+(d')^2)\left(\frac{nd}{x_{n+1}^2} + \frac{n-1}{d}\right). \tag{13}$$

特别地，这样的解 d 是严格凸的。

证明。 定义函数 $\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) := x_1^2 + \cdots + x_n^2 - d^2(x_{n+1})$，我们有 $\Sigma = \Phi^{-1}(0)$，因此

$$\overline{N} := \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{\varrho}{d}(x_1, \ldots, x_n, -dd') \tag{14}$$

是 Σ的一个欧几里得单位法向量。取此定向后， Σ 的欧几里得平均曲率为（参见 [2, 推论 13.37][(i)]的证明）

$$\overline{H} = \frac{\varrho}{n}(d''\varrho^2 - n + 1). \tag{15}$$

结合（2），方程（14）和（15）可得

$$H = \frac{\varrho x_{n+1}}{n}\left(\varrho^2 d'' - \frac{n-1}{d}\right) - \varrho d'.$$

(i)请注意，在 [2]，中，平均曲率未经过归一化，且第二基本形式与我们的定义相差一个符号。

此外，对于任意 $p=(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\Sigma$，有

$$\langle N,p\rangle=\varrho\left(\frac{d}{x_{n+1}}-d'\right),$$

而最后这两个等式意味着 $\langle N,\ p\rangle=H$ 等价于 (13)。 □

现在，我们可以像在 [8]中一样，在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 构造平移悬链面。具体来说，我们选取微分方程 (10) 和 (13) 的适当解，然后将相应的水平旋转图和垂直旋转图粘合起来，得到平移悬链面；见图1。此外，正如从 [8] 中关于这些方程在 $n=2$的解所得到的结果可以立即看出，它们的定性行为与维数 $n\geq 2$无关。因此，可以采用 [8, 定理 3.10] 证明中的推理，来确立以下存在性结果。

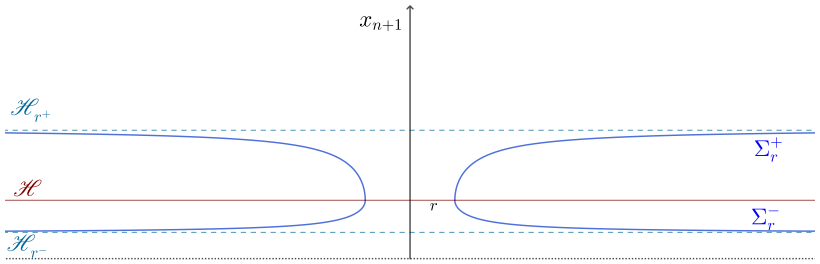


FIGURE 1. 平移悬链面 Σ_r 在 $\mathbb{H}^{n+1}$中的剖面曲线，位于两个极限球面 $\mathscr{H}_{r^-}$ 和 $\mathscr{H}_{r^+}$之间（并渐近于它们）。 $\Sigma_r\setminus\mathscr{H}$它分解为两个垂直图像 Σ_r^-和 Σ_r^+，它们位于极限球面 $\mathscr{H}$上、以旋转轴 x_{n+1} 为中心且半径为 r 的欧几里得球的补集之上。

定理 3.3。 给定一个水平视界面 $\mathscr{H}$，存在一个单参数族 $\mathscr{C}:=\{\Sigma_r\mid r>0\}$ 由互不全等、适当嵌入的旋转环形平移曲面组成，位于 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中（称为平移悬链面）。对每个 $r>0$ （称为 $\Sigma_r\in\mathscr{C}$ 的颈部大小），有：

i） Σ_r 包含在由两个极限球面 $\mathscr{H}_{r^-}$ 和 $\mathscr{H}_{r^+}$. 确定的带状区域内。特别地， Σ_r 的渐近边界是极限球面 $\mathscr{H}$ 的无穷远点。ii） Σ_r 是两个竖直图 Σ_r^- 和 Σ_r^+ 的并集，它们定义在水平视界面 $\mathscr{H}$ 中、以旋转轴为中心的欧几里得 r 球 $\mathcal{B}_r$ 的补集上。iii ）图像 Σ_r^- 和 Σ_r^+ 位于 $\mathbb{H}^{n+1}-\mathscr{H}$ 的不同连通分支中，它们的公共边界是界定 $\mathcal{B}_r$ 的 r 球面，该球面位于 $\mathscr{H}$ 中；其中 Σ_r^- 渐近于 $\mathscr{H}_{r^-}$ ，而 Σ_r^+ 渐近于 $\mathscr{H}_{r^+}$.

此外，当 $r\to 0$ 或当 $r\to\infty$时， r^+ 和 r^- 都趋于 *1*，而 Σ_r 的极限行为如下：

iv) 当 $r\to 0$, Σ_r 收敛（在 $\{x_{n+1}=0\}$ 以外的紧集上，以 $C^{2,\alpha}$-范数计）到 $\mathscr{H}$. 的双重副本时

v) 当 $r \to +\infty$, Σ_r 逃逸至无穷远时。

注 3.4。 在 [8], 第 3.3 节中，利用拟线性椭圆算子的最大值原理，建立了$\mathbb{H}^3$ 中平均曲率流平移子的相切原理。由于最大值原理在所有维数下均成立，相切原理在 $\mathbb{H}^{n+1}$中也成立。结合定理 3.25]中给出的 $\mathscr{C}$ 族的渐近性质，可以推出： $\mathbb{H}^{n+1}$ 中不存在包含于顶点位于原点的测地圆柱凸侧内的真浸入平移子；见 [8, 定理 3.25]的证明。特别地， $\mathbb{H}^{n+1}$中不存在闭的（即紧致且无边界的）平均曲率流平移子。

4. Stability of horospheres

本节将证明， $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的极限球面作为平均曲率流的图像解是动力学稳定的。更确切地说，我们有以下结果。

定理 4.1。 设 $G(x,t) = e^{v(x,t)}x$, $x \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$ 是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中平均曲率流的图形平移孤子，其初始条件 $G(\mathcal{S} \times \{0\})$ 为水平视界面。令 $v_0 := v(\cdot, 0)$，并假设 u_0 是 $\mathcal{S}$ 上的局部利普希茨函数，使得

$$\lim_{x \to \partial \mathcal{S}} |u_0(x) - v_0(x)| = 0. \tag{16}$$

在这些条件下，对于任意在所有$t \geq 0$ 上定义且初始条件为 u_0 的图形解 $u = u(x,t)$，都有 $u_t - v_t$ 在 $t \to +\infty$ 时一致收敛到 0。

定理 4.1 是定理 1.1], 的双曲版本，后者是在欧几里得空间中提出的。它确立了图形解 $v(x,t)$ 的稳定性，其中我们将 u_0 视为 v_0 的扰动，且该扰动在无穷远处以 C^0 的速度衰减。事实上，当 $t \to +\infty$ 时，$u(x,t)$ 渐近于最初受到扰动的解 $v(x,t)$。我们还注意到，记号 $x \to \partial\mathcal{S}$ 表示变量 x 在 $\mathcal{S}$ 中逃逸出任意紧集。

接下来，我们运用 White 避免原理 [24] 以及抛物型方程的强最大值原理（例如参见 [19, 定理 2.1.1 和推论 2.1.2]）来证明定理 4.1。在应用避免原理时，我们将定理 3.3 中的平移悬链面用作障碍物，这使我们的证明有别于 [4]中的证明。

定理 *4.1* 的证明。设 v、 v_0 和 u_0 如文中所述。由定理 2.3，存在函数 u: $\mathcal{S} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得 $F(x, t) = e^{u(x,t)}x$ 是平均曲率流的图形解，且对所有 $x \in \mathcal{S}$，都有 $u(x, 0) = u_0(x)$。令 ω: $\mathcal{S} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 由 $\omega(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ 给出；我们需要证明，当 $t \to \infty$ 时， $\omega_t = \omega(\cdot, t)$ 一致收敛于零。

对于任意 $r > 0$，用 $\mathscr{C}_r$ 表示由 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的、半径为 r 、关于 x_{n+1}-轴的旋转双曲柱面所围成的闭平均凸区域，并令$\Omega_r = \mathcal{S} \cap \mathscr{C}_r$。我们还设定映射

$$F_0(x) = e^{u_0(x)}x \quad \text{and} \quad G_0(x) = e^{v_0(x)}x, \ \ x \in \mathcal{S},$$

并且，在整个证明中使用记号 $u_t(x) = u(x,t)$， $v_t(x) = v(x,t)$。我们的第一个论证是证明 $\lim_{x\to\partial\mathcal{S}} \omega_t(x) = 0$，且对所有 $t \geq 0$ 具有一致衰减。

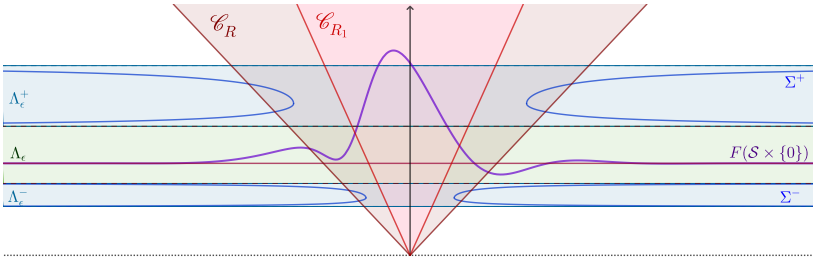


FIGURE 2. 充当障碍物的平移悬链面：$\Sigma^+ \subset \Lambda_\epsilon^+$ 与 $\Sigma^- \subset \Lambda_\epsilon^-$ 与图像 $F(\mathcal{S}\times\{0\})$保持正距离，其位于 $\mathscr{C}_{R_1}$ 之外的部分落在带状区域 Λ_ϵ内。当这些曲面在平均曲率流下演化时，$F_t(\mathcal{S}\setminus\mathscr{C}_R)$始终位于平移悬链面 $\Gamma_t(\Sigma^-)$与 $\Gamma_t(\Sigma^+)$之间。

断言 4.2（空间中的收敛）. 对任意 $\epsilon>0$，存在 $R>0$，使得对任意 $t\geq 0$,

$$|\omega_t(x)| = |u_t(x)-v_t(x)| < \epsilon \ \ \forall x\in\mathcal{S}-\Omega_R. \tag{17}$$

断言 *4.2* 的证明。给定 $\epsilon>0$，由(16)可知，存在 $R_1>0$ 使得

$$|u_0(x)-v_0(x)| < \epsilon/2 \ \ \forall x\in\mathcal{S}-\Omega_{R_1}. \tag{18}$$

由于 $|u_t(x)-v_t(x)|$ 是连接 $F(x,t)$与 $G(x,t)$的线段在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$的 x_{n+1}轴上的正交投影的双曲长度，(18)表明$F_0(\mathcal{S}-\Omega_{R_1})$包含在带状区域

$$\Lambda_\epsilon = \{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{H}^{n+1} \mid e^{-\epsilon/2} < x_{n+1} < e^{\epsilon/2}\}.$$

设对任意 $h\in\mathbb{R}$，$\mathscr{H}_h$ 表示高度为 e^h的水平视界面。则$F_0(\mathcal{S}-\Omega_{R_1})$位于 $\mathscr{H}_{-\epsilon/2}$与 $\mathscr{H}_{\epsilon/2}$之间，且与这些极限球面保持正距离。我们还考虑

$$\Lambda_\epsilon^+ = \{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{H}^{n+1} \mid e^{\epsilon/2} < x_{n+1} < e^{\epsilon}\}$$
$$\Lambda_\epsilon^- = \{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{H}^{n+1} \mid e^{-\epsilon} < x_{n+1} < e^{-\epsilon/2}\}$$

宽度为 $\epsilon/2$ 的带状区域，与 Λ_ϵ 相邻，上方为 Λ_ϵ^+，下方为 Λ_ϵ^- Λ_ϵ。

根据定理 3.3，存在两个平移悬链面 Σ^- 和 Σ^+，位于 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中，二者均与 $\mathscr{C}_{R_1}$ 不相交，且 $\Sigma^-\subset\Lambda_\epsilon^-$ 并渐近于 $\mathscr{H}_{-\epsilon/2}$；$\Sigma^+\subset\Lambda_\epsilon^+$ 并渐近于 $\mathscr{H}_{\epsilon/2}$，见图 2。根据构造，Σ^+ 和 Σ^- 都是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的完备平均曲率流平移子，且各自与 $F_0(\mathcal{S})$保持正距离。

设对于 $t\in\mathbb{R}$，Γ_t 是沿 x_{n+1}-轴方向对 $\mathbb{H}^{n+1}$ 作双曲平移，由坐标表达式 (3) 给出。于是，White 避免原理 [24,定理 1] 意味着，对于所有 $t\geq 0$，$F(\mathcal{S}\times\{t\})$与 $\Gamma_t(\Sigma^-)$ 及 $\Gamma_t(\Sigma^+)$ 都保持正距离。特别地，若 $R>0$ 满足 $\mathscr{C}_R$ 同时与 Σ^- 和 Σ^+ 相交（特别是 $R>R_1$），那么对于任意 $x\in\mathcal{S}\setminus\mathscr{C}_R$ 和任意 $t\geq 0$，我们有 $F(x,\ t)$ 位于由极限球面 $\Gamma_t(\mathscr{H}_{-\epsilon})=\mathscr{H}_{t-\epsilon}$ 和 $\Gamma_t(\mathscr{H}_\epsilon)=\mathscr{H}_{t+\epsilon}$ 所界定的带状区域内，这就证明了 (17)。□

接下来，我们按照 [4, 引理 4.2] 中的方法论证，证明当 $t \to \infty$ 时， ω_t 在 C^0 范数下收敛到零。对于 $\epsilon > 0$, 令 R 由断言 4.2 给出。我们将利用 R 证明存在某个 $T > 0$, 使得对于所有 $x \in \mathcal{S}$ 和所有 $t \geq T$， $|\omega_t(x)| < \epsilon$ 。

首先，一个标准论证（例如，参见 [11, 定理 17.1]的证明）表明， ω 满足一个线性抛物型方程。事实上，令 $\mathcal{Q}$ 为式 (7) 中的拟线性椭圆算子。那么， u 和 v 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathcal{Q}(u), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \mathcal{Q}(v).$$

对于 $\theta \in [0,1]$, 令 $v^\theta = \theta u + (1-\theta)v = v + \theta\omega$, 因此 $v^0 = v$和 $v^1 = u$, 而 $\frac{d}{d\theta} v^\theta = \omega$。那么，

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \mathcal{Q}(v^\theta) d\theta. \tag{19}$$

回顾一下， $\mathcal{Q}(v^\theta) = Q(x, Dv_t^\theta, D^2 v_t^\theta)$, 并令 Q_{p_i}表示 Q沿 $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的第i个方向的导数， $Q_{r_{ij}}$ 表示矩阵 $r \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$的 (i, j) 项中 Q 的导数。由式 (19) 可得

$$\frac{d\omega}{dt}(x,t) = \sum_{i,j} a^{ij}(x,t) D_{ij}(\omega_t)(x) + \sum_i b^i(x,t) D_i(\omega_t)(x), \tag{20}$$

其中

$$a^{ij}(x,t) = \int_0^1 Q_{r_{ij}}(x, Dv_t^\theta, D^2 v_t^\theta) d\theta, \qquad b^i(x,t) = \int_0^1 Q_{p_i}(x, Dv_t^\theta, D^2 v_t^\theta) d\theta$$

是仅依赖于坐标 x 和 t的系数。

对于 $t \geq 0$, 定义 $\Upsilon_t := \{x \in \mathcal{S};\ \omega_t(x) \geq \epsilon\}$。假设 $\Upsilon_{t_0} \neq \emptyset$ 对某个$t_0 > 0$。则存在 $\delta > 0$ 使得 $\Upsilon_t \neq \emptyset$ 对所有 $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$。特别地，对任意这样的 t, ω_t 在 Υ_t的某一点处达到其最大值，并且由 (17) 得 $\Upsilon_t \subset \Omega_R$。因此，结合 ω 满足 (20) 这一事实，强最大值原理 [19, 定理 2.1.1] 可用来证明函数 $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mapsto \max_{\mathcal{S}} u_t$ （它是连续的，因为 $\lim_{x \to \partial\mathcal{S}} \omega_t(x) = 0$, 且局部 Lipschitz）是非增的。因此，若对某个 $t_0 > 0$ 有 $\Upsilon_{t_0} = \emptyset$, 则对所有 $t \geq t_0$ 有 $\Upsilon_t = \emptyset$ 。

接下来，我们将证明，对于某个 $t_0 > 0$, 有 $\Upsilon_{t_0} = \emptyset$ 。反证法，假设对所有 $t > 0$, 都有 $\Upsilon_t \neq \emptyset$, 因此函数 $\max(\omega_t)$ 关于t 单调不增，且满足 $\max(\omega_t) \geq \epsilon$。对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 ω^n: $\mathcal{S} \times [-n, \infty) \to \mathbb{R}$ 由$\omega^n(x, t) = \omega(x, t+n)$定义。于是 $\{\omega^n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界，并且取一个子列后，它光滑收敛到某个函数 γ , 该函数也满足

$$|\gamma(x,t)| < \epsilon, \quad x \in \mathcal{S} - \Omega_R \text{ and } t \geq 0. \tag{21}$$

我们断言，函数 $\phi = \gamma + v$ 的图像按平均曲率流演化。为此，令 $\phi^n = \omega^n + v$。那么，对于 $x \in \mathcal{S}$ 和 $t \geq 0$,

$$\phi^n(x,t) = u(x, t+n) - v(x, t+n) + v(x,t) = u(x, t+n) - n,$$

其中，第二个等号是因为 v 的图像是平均曲率流的一个平移孤子。特别地， ϕ^n 的图像按平均曲率流演化，由式 (8) 可得

$$\frac{d\phi^n}{dt} = \mathcal{Q}(\phi^n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \mathcal{Q}(\phi),$$

由于对固定的 t, $\lim \phi^n(\cdot, t) = \phi(\cdot, t)$ 在 $\mathcal{S}$ 的紧子集上依 $C^{2,\alpha}$ 范数成立。我们再次可以证明， $\gamma = \phi - v$ 满足强最大值的假设

原理对于线性抛物型方程。然而， γ 的定义性质表明，$\sup_{x\in\mathcal{S}}\gamma(x,t)$ 不依赖于 t，因此我们可以应用 [19, 推论 2.1.2.]得到 γ 实际上为常数，从而由 (21) 得 $\gamma\equiv 0$ 。另一方面，假设对所有 t，$\max(\omega_t)\geq\epsilon$，并在紧集 Ω_R 的某一点处达到，这表明 γ 不能恒为零，这一矛盾证明了对所有充分大的 t ，有 $\omega_t(x)<\epsilon$ 。

证明对于所有 $x\in\mathcal{S}$ 以及所有充分大的 t， $v(x,t)-u(x,t)<\epsilon$ 的结论，与此类似，只需注意到 u 是平均曲率流的图形解，当且仅当 $-u$ 也是如此。至此，定理的证明完成。□

5. Further developments

本节将第 3 节 [8, 2] 中的论证推广到 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的情形，给出一族与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的大鹏展翅孤子类似的平均曲率流抛物型不变平移子。注意到这一族同样由平均曲率流的图形解构成后，我们提出两个关于稳定性的问题。

5.1. 墓碑曲面。现在，我们着手在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中构造与 $\mathbb{H}^3$ 中的平移子相类似的对象，称为 墓碑曲面。这类平移子在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的一群抛物型等距变换下保持不变，也就是说，这些变换保持平行极限球面族不变。

与 $n=2$ 的情形一样，这里得到的大鹏展翅孤子是定义在 $\mathbb{R}$ 上整体图像之上的水平圆柱面，并且包含于 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的一个竖直全测地平面内。更准确地说，这样的超曲面由映射 $X\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{H}^{n+1}$ 参数化，其形式为

$$X(x_1,\ldots,x_{n-1},s)=(x_1,\ldots,x_{n-1},s,\phi(s)),\ (x_1,\ldots,x_{n-1},s)\in\mathbb{R}^n,$$

其中 ϕ 是定义在 $\mathbb{R}.$ 上的光滑正函数。我们称 $\Sigma:=X(\mathbb{R}^n)$ 为由 $\phi.$ 确定的抛物型圆柱面

按照第 3 节中的推理（另见 [8, 引理 3.18 和 3.19] 的证明），可得到以下结果。

引理 5.1。 由正光滑函数 ϕ 确定的抛物型圆柱面是 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的平均曲率流 平移子，当且仅当 $\phi=\phi(s)$ 是二阶常微分方程：的解

$$\phi''=-\phi'(1+(\phi')^2)\frac{ns}{\phi^2}\cdot \tag{22}$$

此外，任意解 ϕ 都在所有 $s\in\mathbb{R}$ 上有定义，并且在假设 $\lambda=\phi'(0)\geq 0$ 的情况下，它满足（见图 *3*）：

(i) ϕ 在 $\lambda=0$ 时为常数；(ii) ϕ 单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上为凸函数，在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数（若 $\lambda>0$）；(iii) 存在 $\lambda^-\in(0,\phi(0))$ 以及 $\lambda^+\in(\phi(0)\ +\infty)$ 使得

$$\lim_{s\to-\infty}\phi(s)=\lambda^-,\quad \lim_{s\to+\infty}\phi(s)=\lambda^+.$$

由引理 5.1 可知，我们可以仿照 [8, 定理 3.20] 的证明，得到以下结果。

定理 5.2。 存在一个单参数族

$$\mathscr{G}:=\{\Sigma_\lambda\mid\lambda\in[0,+\infty)\}$$

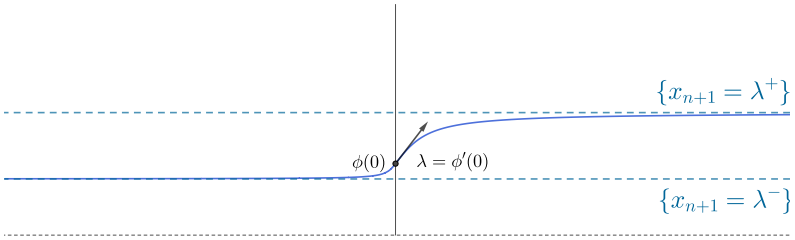


FIGURE 3. 方程 (22) 的解 ϕ 的剖面曲线，其中 $\lambda = \phi'(0) > 0$。

由方程 (22) 的解生成的、互不全等的完备平移曲面（称为墓碑曲面），它们是水平抛物柱面。 Σ_0 是高度为一的极限球面 $\mathscr{H}$，对于 $\lambda > 0$，每个 $\Sigma_\lambda \in \mathscr{G}$ 都是定义在 $\mathscr{H}$ 上的整体竖直图像，且包含于由两个极限球面 $\mathscr{H}_{\lambda^-}$ 和 $\mathscr{H}_{\lambda^+}$.确定的带状区域内。此外，存在 Σ_λ 的开集 Σ_λ^- 和 Σ_λ^+，使得 Σ_λ^- 与 $\mathscr{H}_{\lambda^-}$渐近， Σ_λ^+ 与 $\mathscr{H}_{\lambda^+}$渐近，并且 $\Sigma_\lambda =$闭包$(\Sigma_\lambda^-) \cup$闭包(Σ_λ^+)。

注 5.3. 定理 5.2 给出的这一族中的每个元素 Σ_λ $\mathscr{G}$ 都定义了一个平均曲率流的图形解。事实上，若 $\lambda = 0$，则平移极限球面族可由函数 $u(x,t) = t - \log(x_{n+1})$ 显式参数化。当$\lambda > 0$时，只需验证初始条件 Σ_λ 是 (5) 意义下的图像，因为双曲平移不会改变这一性质。虽然 Σ_λ 的图像函数表达式并非显式，但引理 5.1 的 (ii) 项表明， $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中任意一条端点位于原点的半直线与 Σ_λ 恰好相交一次。

5.2. **开放问题**。 定理 4.1 的证明主要分为两步：函数 ω_t 在空间中的一致收敛，以及族 $\{\omega_t\}$ 随时间的收敛。我们注意到，时间收敛的证明（即定理所述的结论）与所考虑的初始平移孤子无关，只要它是满足断言 4.2 结论的图形解即可。由于定理 5.2 中给出的族 $\mathscr{G}$ 的每个成员 Σ_λ 都是平移子，也是平均曲率流的图形解，并且 Σ_0 具有动力学稳定性，因此我们提出以下问题：

墓碑曲面在 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中是动力学稳定的图形解吗平均曲率流?

这个问题在欧几里得情形下也仍未解决。事实上，尚不清楚 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的大鹏展翅孤子作为平均曲率流的图像平移曲面是否稳定。因此，这引出了以下问题：

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的大鹏展翅孤子是动力学稳定的图形解吗平均曲率流?

最后，我们想问， [4, 9]中定理 2.3 的利普希茨连续性假设是否可以像其中那样放宽为连续性。

REFERENCES

[1] S.J. Altschuler, L.F. Wu, L.F：具有指定接触角的非参数平均曲率流平移曲面。《变分法与偏微分方程》**2**(1)，101–111 (1994) DOI:10.1007/BF01234317

[2] B. Andrews、B. Chow、C. Guenther、M. Langford：《外在几何流》。数学研究生教材第 206 卷，美国数学会（2020）。[3] A. Bueno、R. L´opez： $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$中的大鹏展翅孤子类。《数学分析与应用杂志》，第 241 卷（2025）。DOI:10.1016/j.jmaa.2024.128730。[4] J. Clutterbuck、O.C. Schn¨urer、F. Schulze：平均曲率流平移解的稳定性。《变分法与偏微分方程》29（2007），281–293。DOI:10.1007/s00526-006-0033-1[5] P. Daskalopoulos 和 M. S´aez：按平均曲率流演化的整体图像的唯一性。《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志）2023（2021），201–227。DOI:10.1515/crelle-2022-0085。[6] R.F. de Lima、G. Pipoli： $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 和$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$中的高阶平均曲率流平移子。《几何分析杂志》（2025）35:92。DOI:10.1007/s12220-025-01925-5[7] R.F. de Lima、A.K. Ramos 和 J.P. dos Santos： $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$中的平均曲率流旋转平移子。《数学档案》124（2025），343–353。DOI:10.1007/s00013-024-02076-9[8] R.F. de Lima、A.K. Ramos、J.P. dos Santos：双曲三维空间中的平均曲率流孤子。《伊比利亚美洲数学杂志》（2026），在线先行发表。DOI:10.4171/RMI/1593[9] K. Ecker、G. Huisken：整体图像的平均曲率演化。《数学年刊》130（1989），453–471。DOI:10.2307/1971452。[10] E.S. Gama、F. Mart´ın、N.M. Møller：有限熵平移孤子是带状区域。arXiv:2209.01640 [math.DG] (2025)。即将发表于《美国数学杂志》。[11] D. Gilbarg、N.S. Trudinger：《二阶椭圆型偏微分方程》，数学经典丛书，施普林格出版社，柏林，2001；1998 年版本重印。[12] B. Guan、J. Spruck：具有预设无穷渐近边界的双曲空间常平均曲率超曲面。《美国数学杂志》122（2000），1039–1060。DOI:10.1353/ajm.2000.0038[13] D. Hoffman、T. Ilmanen、F. Mart´ın 和 B. White：平均曲率流的图形平移子，《变分法与偏微分方程》58（2019）。DOI:10.1007/s00526-019-1560-x。[14] G. Huisken、C. Sinestrari：平均曲率流及平均凸曲面奇点的凸性估计。《数学学报》183(1)（1999），4–70。DOI:10.1007/BF02392946。[15] N. Hungerb¨uhler、K. Smoczyk：平均曲率流的孤子解。《微分积分方程》13（10–12）（2000），1321–1345。DOI:10.57262/die/1356061128[16] D. Impera、N.M. Møller、M. Rimoldi：塌缩平移子的刚性与不存在性结果。arXiv:2304.11953 [math.DG] (2025)。[17] L. Lin、L. Xiao：双曲空间中星形超曲面的修正平均曲率流，《分析与几何通讯》20(5)（2012），1061–1096。DOI:10.4310/cag.2012.v20.n5.a6[18] J.H.S. Lira、F. Mart´ın：黎曼乘积中的平移孤子。《微分方程杂志》266（2019），7780–7812。DOI:10.1016/j.jde.2018.12.015[19] C. Mantegazza：《平均曲率流讲义》，数学进展丛书，Birkh¨auser/Springer，巴塞尔，2011。[20] G. Pipoli：可解群的不变平移子。《纯粹与应用数学年刊》199（2020），1961–1978。DOI:10.1007/s10231-020-00951-0。[21] G. Pipoli：海森堡群的不变平移子。《几何分析杂志》31（2021），5219–5258。DOI:10.1007/s12220-020-00476-1。[22] M. S´aez 和 O. C. Schn¨urer：无奇点平均曲率流。《微分几何杂志》97（2014），545–570。DOI:10.4310/jdg/1406033979。[23]P. Unterberger：双曲空间中径向图像按其平均曲率的演化，《分析与几何通讯》11（2003），第 4 期，675–698。DOI:10.4310/CAG.2003.v11.n4.a2。[24] B. White：按平均曲率流运动的非紧超曲面的避免原理。《变分法与偏微分方程》63，111（2024）。DOI:10.1007/s00526-024-02725-5

(A1) Departamento de Matemática - UFRN
Email address: ronaldo.freire@ufrn.br

(A2) Departamento de Matemática Pura e Aplicada - UFRGS
Email address: alvaro.ramos@ufrgs.br