arXiv:2602.02446v1 [cond-mat.stat-mech] 2 Feb 2026

具有随机重置和黏滞边界的跑动-翻滚粒子的更新理论

Paul C. Bressloff 和 Samantha Linn*Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ, UK*

我们研究受限于半直线$[0,\infty)$且在 $x=0$处具有黏滞边界的随机翻转粒子（RTP），其运动受到随机重置的影响。在体相中，RTP以恒定速率 $\alpha>0$在速度状态 $\pm v$ 之间翻滚，速度为 $v>0$，并随机重置到其初始位置和朝向（x_0，k_0）$\in$（$\mathbb{R}^+$，$\pm$）。当RTP到达位于 $x=0$ 的目标时，它会附着在边界上并随机等待一段时间，之后要么脱附并继续在体相区域中运动，要么（永久）进入目标。这些事件分别对应于物理化学中粒子被部分反应表面吸附、解吸和吸收的过程。我们采用更新理论，通过两种不同的解吸方案来刻画粒子轨迹中的连续结合事件：一种是通过重置到（x_0，k_0）实现，另一种是从 $x=0$ 以速度 $+v$连续运动实现。首先，我们推导了无吸收情况下的非平衡稳态（NESS），并刻画了粒子在边界处的累积。其次，我们计算平均首次通过时间（MFPT）统计量。除了观察到平均首次通过时间随体相重置呈现通常的单峰依赖关系外，我们还发现，非平衡稳态和平均首次通过时间都强烈依赖于初始朝向 k_0 和解吸方案。例如，若初始朝向指向边界，我们发现，解吸诱导重置方案比非重置解吸方案更能有效缩短平均首次通过时间。我们还说明，使解吸动力学与体相重置速率或翻滚率相匹配，会在最小化吸附时间和吸收时间之间引入一种权衡。在这种情况下，对于给定的一组参数，使吸收平均首次通过时间最小的解吸方案，几乎总是与解吸动力学和体相动力学速率不匹配时所偏好的方案相反。

I. 引言

自推进粒子（活性物质）系综的一个典型特征是，即使不存在粒子间吸引相互作用，粒子也倾向于在限域壁处聚集 [1–4]。这种现象的一个简单例子是受限于一维区间内的随机翻转粒子（RTP）。远离边界壁时，粒子以泊松速率 α 在向左运动和向右运动的恒定速度状态之间随机切换。每当粒子与壁面碰撞（吸附）时，便会停留在那里，直到其速度状态反转并重新进入体相区域（解吸）。因此，每个壁面都构成所谓的黏滞边界。RTP 附着在壁面期间，也可能在脱离之前被永久移出系统（吸收）。此前已有大量研究分析了黏滞边界处 RTP 吸收的首次通过时间（FPT）问题 [5, 6]，并将其推广至包含扩散 [7, 8]以及非马尔可夫吸收的基于遭遇的模型 [9, 10]。此外，也有多项研究探讨了具有随机重置 [11–14] 或限域势 [15]的 RTP 首次通过时间问题。然而，这些研究都未考虑黏滞边界的影响。

本文通过拓展近期关于扩散介导的吸附／脱附／吸收[16, 17]的研究，建立了半直线 $[0,\infty)$ 上具有黏滞边界 $x=0$ 的随机重置RTP的更新表述。（后者本身建立在物理化学中可逆吸附的更新表述[18, 19]之上。）我们将样本路径分解为一系列交替过程：体相扩散并伴随重置，随后首次返回至 $x=0$，再接着在壁面发生吸附／脱附。该序列持续进行，直至发生吸收事件。利用每次首次返回至 $x=0$ 都会使随机过程更新这一事实，我们构造了更新方程，将概率密度和吸收首次通过时间密度与不可逆吸附的相应量联系起来。这些更新方程是隐式积分方程，可通过拉普拉斯变换和卷积定理显式求解。更新表述中的关键步骤，是确保粒子重新开始运动时处于能够避免立即重新吸附的状态。对于布朗粒子，可通过令黏滞边界为部分吸附[16, 18, 19]，或在脱附后将粒子重置到远离壁面的初始位置 [17]来实现这一点。

随机翻转粒子（RTP）的一个独特特性是，粒子从壁面脱附时处于向右运动状态，因此自然会避免立即再次吸附。（对于像参考文献[7, 8]中那样受扩散作用的随机翻转粒子，这一点就不再成立。）然而，正如我们在论文中所展示的，与脱附诱导重置相比，分析相应的更新方程要复杂得多，因为我们必须以脱附后首次发生速度反转或体相重置事件的时间 T 为条件；这些事件的分流概率由各自的速率决定，然后再对 T取平均。本文的一个主要目标是比较脱附诱导重置与直接从边界脱附对具有体相重置的随机翻转粒子所产生的影响。具体而言，我们比较非吸收性黏滞边界情况下各自的非平衡稳态（NESS），以及吸收性黏滞边界情况下的平均首次通过时间（MFPT）。

在后一种情况下，我们展示了当粒子重置为左行状态时，脱附诱导重置如何缩短平均首次通过时间。

本文结构如下。第II节中，我们研究一个较简单的问题：半直线上的随机翻转粒子在 $x=0$ 处具有非吸收性黏性边界，且不存在重置。我们首先考察分别对应左行状态和右行状态的一对概率密度所满足的标准正向柯尔莫哥洛夫偏微分方程（PDE）。为建立更新表述，我们求解经过拉普拉斯变换的柯尔莫哥洛夫方程，并采用粒子从壁面以右行状态离开的初始条件。随后，我们将黏性边界重新解释为具有可逆吸附的反应表面，并假设每次脱附事件之后，随机翻转粒子都从 $x=0$ 处以右行状态重新开始运动。我们构建首次更新方程，将黏性边界存在时左行状态和右行状态的概率密度，与不可逆吸附时相应的密度联系起来。后者通过对脱附后首次翻转事件发生的时间 T 取平均得到。我们强调更新表述的一项主要优势，即可以纳入非指数型等待时间密度，以描述吸附态或束缚态持续至脱附/吸收前的时长。随后，我们证明在等待时间密度为指数型的情况下，更新方程与柯尔莫哥洛夫方程等价。后者可还原具有恒定解吸速率和吸收速率的标准黏性边界。

在第III节中，我们在体相中引入随机重置，同时在 $x=0$处保持非吸收性黏性边界。也就是说，在体相区域中，粒子以泊松速率 r自发重置到其初始位置和速度状态。假设随机翻转粒子从壁面以右行状态重新开始，我们构建相应的首次更新方程，并通过相对于解吸后首次翻转或体相重置事件的时间 T 进行平均，计算不可逆吸附的密度。随后，我们利用更新方程计算非平衡稳态，并说明位置 x 处的非平衡稳态如何用随机翻转粒子在吸附事件之间于 x 邻域内所花费时间的期望比例来解释。我们探讨非平衡稳态以及被吸附概率对各种模型参数的依赖，包括体相重置率、翻滚率、初始位置和初始速度状态。最后，我们将我们的结果与简单得多的解吸诱导重置例子进行比较。特别地，我们表明，当随机翻转粒子重置到左行状态时，后者如何能导致黏滞边界处更大的累积。

在第四节中，我们考虑半直线上的随机翻转粒子，其在 $x=0$ 处设有一个部分吸收的黏滞边界。继续允许解吸，由此引入了分流概率，用以描述束缚粒子在边界处随机等待一段时间后是被吸收还是发生解吸。我们首先通过关于解吸的更新积分方程，构造吸收首次通过时间密度。同样，我们同时考虑从边界解吸和解吸诱导重置。因此，我们确定了体相重置与解吸诱导重置在优化平均首次通过时间时可能产生的相互作用。特别是，我们发现，尽管不伴随重置的解吸方案在增强边界附近的非平衡稳态、最大化粒子束缚于壁面的时间占比方面相对更有效，但当随机翻转粒子重置为左行状态且翻滚率相对较小时，解吸诱导重置方案能够带来更低的吸收平均首次通过时间。若根据解吸方案的不同，将解吸率设为与体相翻滚率或重置率相等，我们会发现，解吸诱导重置使吸收平均首次通过时间更低的参数区域，实际上与之前的结果互为补集。本文余下部分将对这些结果及其他相关推论进行严格论证和详细阐述。

最后还需说明一点。在正文中，我们始终只是基于启发式论证直接写出适当的更新方程，并给出各项的概率解释。这也是关于具有黏滞边界的布朗粒子的相关论文所采用的方法 [16–19]。在附录A中，我们基于更新理论，对随机翻转粒子的更新方程给出详细的第一性原理推导。其基本思想是将传播子或首次通过时间密度表示为关于经验测度的期望，然后再以在边界处的首次到达时间为条件进行处理。这种表述也可以推广到其他具有更新的连续随机过程实例。

II. 具有（非吸收性）黏滞边界的半直线上的随机翻转粒子

考虑一个被如图1所示的非吸收性黏性壁限制在半直线上的随机翻转粒子。远离壁面时，粒子以恒定速率 α 在两个恒定速度状态 $\sigma(t)\in\{+,-\}$之间随机切换，其对应速度为 $\sigma(t)v$、 $v>0$，见图1(a)。设 $\rho_{k|k_0}(x,t|x_0)$ 表示在给定 $X(0)=x_0$ 和 $\sigma(0)=k_0$的条件下，时刻 t 粒子位于 $X(t)=x>0$ 且处于速度状态 $\sigma(t)=k$的概率密度。相应的前向柯尔莫哥洛夫方程为

$$\frac{\partial\rho_{k|k_0}}{\partial t}=-vk\frac{\partial\rho_{k|k_0}}{\partial x}-\alpha\rho_{k|k_0}+\alpha\rho_{-k|k_0}. \tag{2.1a}$$

假设每当随机翻转粒子在$x=0$ 碰到边界时，就会粘附在壁面上，并保持在束缚态，直到以速率 γ_0脱附，见图1(b)。令 $q(t)$ 表示在时刻 t 粒子处于束缚态的概率。在 $x=0$ 处的边界条件为

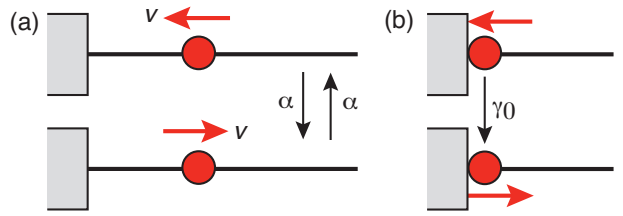


图 1. 一个随机翻转粒子被位于 $x = 0$ 的非吸收黏性壁限制在半直线 $[0, \infty)$ 上。(a) 在体相区域中，粒子以泊松速率 α 在左行与向右运动的恒定速度状态之间随机切换。(b) 每当随机翻转粒子在左行状态下与壁面碰撞时，它便结合到壁面（吸附）。随后，它以恒定速率 γ_0 脱离（解吸），并以右行状态重新进入体相区域。

form

$$v\rho_{+|k_0}(0,t|x_0) = \gamma_0 q(t), \tag{2.1b}$$

其中 $q(t)$ 按照以下方程演化

$$\frac{dq}{dt} = v\rho_{-|k_0}(0,t|x_0) - \gamma_0 q(t). \tag{2.1c}$$

（注意，$q(t)$ 依赖于 x_0 和 k_0，并且我们假设$q(0) = 0$。）

A. 拉普拉斯空间中的解

假设随机翻转粒子从 $x_0 > 0$ 处以左行状态出发。也就是说，$k_0 = -$ 和

$$\rho_{+|-}(x,0|x_0) = 0, \quad \rho_{-|-}(x,0|x_0) = \delta(x - x_0). \tag{2.2}$$

（更典型的初始条件是 $k_0 = \pm$，二者概率相等。然而，考虑到后续的发展，我们取 $k_0 = -$。）对方程（2.1a）–（2.1c）进行拉普拉斯变换，得到

$$v\frac{\partial\widetilde{\rho}_{+|-}}{\partial x} + (\alpha + s)\widetilde{\rho}_{+|-} - \alpha\widetilde{\rho}_{-|-} = 0, \tag{2.3a}$$

$$-v\frac{\partial\widetilde{\rho}_{-|-}}{\partial x} + (\alpha + s)\widetilde{\rho}_{-|-} - \alpha\widetilde{\rho}_{+|-} = \delta(x - x_0) \tag{2.3b}$$

满足边界条件

$$v\widetilde{\rho}_{+|-}(0,s|x_0) = \gamma_0\widetilde{q}(s), \tag{2.3c}$$

$$v\widetilde{\rho}_{-|-}(0,s|x_0) = (s + \gamma_0)\widetilde{q}(s). \tag{2.3d}$$

由此可得

$$\widetilde{\rho}_{-|-}(0,s|x_0) = \frac{s + \gamma_0}{\gamma_0}\widetilde{\rho}_{+|-}(0,s|x_0). \tag{2.4}$$

将式（2.3a）两边乘以算子$-v\partial_x + (\alpha + s)$，并利用式（2.3b），得到关于 $\widetilde{\rho}_{+|-}(x,\ s|x_0)$的二阶方程，

$$D(s)\frac{\partial^2\widetilde{\rho}_{+|-}}{\partial x^2} - s\widetilde{\rho}_{+|-} = -\frac{\alpha}{s + 2\alpha}\delta(x - x_0), \tag{2.5}$$

有效扩散率为 $D(s) = v^2/(s + 2\alpha)$。此外，在式（$x = 0$ 中令2.3a），并利用式（2.4），得到右行密度的边界条件

$$D(s)\frac{\partial\widetilde{\rho}_{+|-}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \gamma(s)\widetilde{\rho}_{+|-}, \tag{2.6}$$

with

$$\gamma(s) = \frac{v(\alpha - \gamma_0)s}{(s + 2\alpha)\gamma_0}. \tag{2.7}$$

由方程（2.5）和（2.6）可知

$$\widetilde{\rho}_{+|-}(x,s|x_0) = \frac{\alpha}{s + 2\alpha}\frac{1}{2\sqrt{sD(s)}} \times \left[\mathrm{e}^{-\sqrt{s/D(s)}|x-x_0|} + \theta(s)\mathrm{e}^{-\sqrt{s/D(s)}(x+x_0)}\right], \tag{2.8}$$

其中

$$\theta(s) = \frac{\sqrt{sD(s)} - \gamma(s)}{\sqrt{sD(s)} + \gamma(s)}. \tag{2.9}$$

相应的左行密度解$\widetilde{\rho}_{-|-}$（x，$s|x_0$）随后可由方程（2.3a）在$x > 0$ 时，以及方程（2.4）在 $x = 0$时得到。

B. 从壁面开始

若粒子在时刻 $t = 0$ 从壁面脱离，即 $x_0 = 0$ 且 $k_0 = +$，则上述分析必须加以修正。令 T 表示首次翻转的指数分布时间。对于给定的 T，我们有如下关系

$$\rho^{(T)}_{k|+}(x,t|0) = \delta_{k,+}\delta(x - vt)\Theta(T - t) + \rho_{k|-}(x,t - T|vT)\Theta(t - T), \tag{2.10}$$

其中 $\Theta(t)$ 为赫维赛德函数。也就是说，随机翻转粒子在右行状态下行进距离 vt，历时 $t \le T$，然后在时刻 T 切换到左行状态。对 T 取平均后即可表明

$$\begin{aligned}\rho_{k|+}(x,t|0) &= \alpha\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha T}\Big[\delta_{k,+}\delta(x - vt)\Theta(T - t) \\ &\qquad + \rho_{k|-}(x,t - T|vT)\Theta(t - T)\Big]\,\mathrm{d}T \\ &= \delta_{k,+}\delta(x - vt)\mathrm{e}^{-\alpha x/v} \\ &\qquad + \alpha\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha T}\rho_{k|-}(x,t - T|vT)\,\mathrm{d}T.\end{aligned} \tag{2.11}$$

对两边进行拉普拉斯变换，可得

$$\widetilde{\rho}_{k|+}(x,s|0) = v^{-1}\delta_{k,+}\mathrm{e}^{-(s+\alpha)x/v} + \widetilde{\mathcal{P}}_k(x,s), \tag{2.12}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{P}}_k(x,s) &\equiv \alpha\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-st}\int_0^t \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}\rho_{k|-}(x,t-T|vT)\\ &= \alpha\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_T^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-st}\rho_{k|-}(x,t-T|vT)\\ &= \alpha\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-(s+\alpha)T}\widetilde{\rho}_{k|-}(x,s|vT). \qquad (2.13)\end{aligned}$$

最后一步是使用第II.A节中得到的解代入 $\widetilde{\rho}_{k|-}(x,s|vT)$。作为一个简单示例，设定 $k=-$ 和 $x=0$。于是我们有 $\widetilde{\rho}_{-|+}(0,s|0)=\widetilde{\mathcal{P}}_-(0,s)$，其中

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{P}}_-(0,s) \qquad (2.14)\\ &= \alpha\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-(s+\alpha)T}\widetilde{\rho}_{-|-}(0,s|vT)\\ &= \alpha\frac{s+\gamma_0}{\gamma_0}\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-(s+\alpha)T}\widetilde{\rho}_{+|-}(0,s|vT)\\ &= \frac{s+\gamma_0}{\gamma_0}\left[\frac{\alpha^2}{s+2\alpha}\right]\frac{1+\theta(s)}{2\sqrt{sD(s)}}\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-(s+\alpha+\sqrt{s/D(s)}v)T}\\ &= \frac{s+\gamma_0}{\gamma_0}\left[\frac{\alpha^2}{s+2\alpha}\right]\frac{1}{s+\alpha+\sqrt{s/D(s)}v}\,\frac{1}{\sqrt{sD(s)}+\gamma(s)}.\end{aligned}$$

C. 更新方程

现在，我们将前向柯尔莫哥洛夫方程（2.1a）–（2.1c）改写为更新方程，其思路类似于我们近期对存在部分反应边界时布朗运动的表述[16, 17]。更新方程的一项主要优势是，它使我们能够纳入更一般的解吸模型。具体而言，我们假设粒子吸附后，会保持结合状态一段随机时间τ，该时间由等待时间密度 $\phi(\tau)$生成。在指数密度 $\phi(\tau)=\gamma_0\mathrm{e}^{-\gamma_0\tau}$的情况下，我们便可得到恒定的脱附率 γ_0。后续章节将探讨更新方程的应用。

令$p_{k|k_0}(x,\ t|x_0)$表示不可逆吸附（$\gamma_0=0$）情况下的概率密度，其演化遵循前向柯尔莫哥洛夫方程

$$\frac{\partial p_{k|k_0}}{\partial t} = -vk\frac{\partial p_{k|k_0}}{\partial x} - \alpha p_{k|k_0} + \alpha p_{-k|k_0} \qquad (2.15a)$$

满足完全吸附边界条件

$$p_{+|k_0}(0,t|x_0)=0. \qquad (2.15b)$$

不可逆吸附对应的吸附时间生存概率为

$$S_{k_0}(x_0,t)=\int_0^\infty p_{k_0}(x,t|x_0)\,\mathrm{d}x, \qquad (2.16)$$

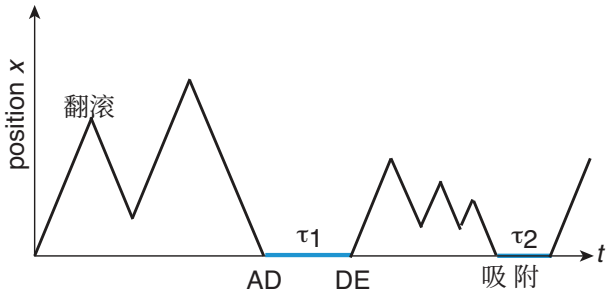


图2. 随机翻转粒子在 $x=0$处遇到（非吸收性）黏性壁的轨迹示例。每当粒子处于左行状态并与壁面碰撞时，就会被吸附（AD）。第j次碰撞后，粒子会附着或结合在壁面上，持续随机等待时间 τ_j，随后解吸（DE），并以右行状态重新进入体相区域。

其中 $p_{k_0}=p_{+|k_0}+p_{-|k_0}$，相应的首次通过时间密度为

$$f_{k_0}(x_0,t)\equiv -\frac{\partial S_{k_0}(x_0,t)}{\partial t} = vp_{-|k_0}(0,t|x_0). \qquad (2.17)$$

更新方程将发生解吸（可逆吸附）时的密度 $\rho_{k|k_0}(x,t|x_0)$与无解吸（不可逆吸附）时的相应量 $p_{k|k_0}(x,t|x_0)$ 和 $f_{k_0}(x_0,t)$ 联系起来。

每次脱附事件后，粒子都会以右行状态在 $x=0$ 处重新开始运动，如第二节B所述。相应的传播子更新方程形式如下

$$\begin{aligned}\rho_{k|k_0}(x,t|x_0) &= p_{k|k_0}(x,t|x_0) \qquad (2.18)\\ &+\int_0^t \mathrm{d}\tau'\int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\,\rho_{k|+}(x,t-\tau|0)\phi(\tau-\tau')f_{k_0}(x_0,\tau').\end{aligned}$$

密度的更新方程 (2.18) 右侧第一项表示所有从 x_0 以k_0速度状态出发、并在区间 $[0,t]$ 内未被吸附的样本路径所作的贡献。另一方面，第二项表示所有样本路径：它们首次在时刻 τ' 被吸附，概率为$f_{k_0}(x_0,\tau')d\tau'$，随后保持在束缚态，直到时刻 τ 脱附，概率为 $\phi(\tau-\tau')d\tau$；之后，粒子在时刻 t到达 x 之前，可能经历任意多次结合。可以将更新方程视为把连续发生的吸附和脱附过程拼接起来，如图 2 所示。（注意，方程 (2.18) 是附录A中推导的一般更新方程 (A.9) 的一个特例，其中 $\pi_d=1$ （无吸收），$(x^*,k^*)=(0,k_+)$（脱附后不重置），且无体相重置。）

对方程（2.18）进行拉普拉斯变换可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}_{k|k_0}(x,s|x_0) &= \widetilde{p}_{k|k_0}(x,s|x_0) \qquad (2.19)\\ &+\widetilde{\rho}_{k|+}(x,s|0)\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{k_0}(x_0,s).\end{aligned}$$

令 $(x_0,\ k_0) = (0,\ +)$ 并重新整理可得

$$\widetilde{\rho}_{k|+}(x,s|0) = \frac{\widetilde{p}_{k|+}(x,s|0)}{1-\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{+}(0,s)} \tag{2.20}$$

因此，

$$\widetilde{\rho}_{k|k_0}(x,s|x_0) = \widetilde{p}_{k|k_0}(x,s|x_0) + \frac{\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{k_0}(x_0,s)}{1-\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{+}(0,s)}\widetilde{p}_{k|+}(x,s|0). \tag{2.21}$$

我们看到，至少发生过一次解吸的路径所产生的贡献涉及与不可逆吸附相关的量 $\widetilde{p}_{k|+}(x,s|0)$ 和 $\widetilde{f}_{+}(0,s) = v\widetilde{p}_{-|+}(0,s|0)$。拉普拉斯变换 $\widetilde{p}_{k|+}(x,s|0)$ 可直接由 $\widetilde{\rho}_{k|+}(x,s|0)$ 的解取极限 $\gamma_0 \to 0$ 得到。例如，式（2.8）给出

$$\widetilde{p}_{+|-}(x,s|x_0) = \frac{\alpha}{s+2\alpha}\frac{1}{2\sqrt{sD(s)}} \times \left[\mathrm{e}^{-\sqrt{s/D(s)}|x-x_0|} - \mathrm{e}^{-\sqrt{s/D(s)}(x+x_0)}\right], \tag{2.22}$$

对于 $x_0 > 0$，这随后确定了 $\widetilde{p}_{-|-}(x,s|x_0)$，通过式（2.3a的类似形式）。类似地，在式（ $\gamma_0 \to 0$ 2.14）中取意味着

$$\widetilde{p}_{-|+}(0,s|0) = \frac{\alpha\sqrt{sD(s)}/v}{(s+\alpha)\sqrt{sD(s)}+sv}. \tag{2.23}$$

为检验更新方程（2.18）与相应的前向柯尔莫哥洛夫方程（2.1a）–（2.1c）是否等价，我们比较它们在拉普拉斯空间中的解，其中 $x = 0$，$k = -$ 且解吸速率恒定 γ_0，此时 $\phi(s) = \gamma_0/(s+\gamma_0)$。首先，在式（ $x = 0$ 和 $k = -$ 中令2.20，得到

$$\widetilde{\rho}_{-|+}(0,s|0) = \frac{\widetilde{p}_{-|+}(0,s|0)}{1-\widetilde{\phi}(s)v\widetilde{p}_{-|+}(0,s|0)} \tag{2.24}$$

~我们还使用了 $f_{+}(0,\ s) = v\widetilde{p}_{-|+}(0,\ s|0)$。其次，将 $\widetilde{p}_{-|+}(0,\ s|0)$ 和 $\phi(s)$ 代入 ~，得到

$$\widetilde{\rho}_{-|+}(0,s|0) = \frac{\alpha\sqrt{sD(s)}(s+\gamma_0)/v}{[\sqrt{sD(s)}(\alpha+s)+vs](s+\gamma_0)-\alpha\gamma_0\sqrt{sD(s)}}. \tag{2.25}$$

最后，经过一些代数运算，可以证明式（2.25）等价于式（2.14）。

请注意，式（2.24）中解吸前等待时间的贡献完全包含在~乘法因子 $\phi(s)$中。因此，要适配其他具有有限矩的等待时间分布，只需替换一个项。例如，假设等待时间密度服从伽马分布，即

$$\phi(\tau) = \frac{\gamma_0(\gamma_0\tau)^{\mu-1}e^{-\gamma_0\tau}}{\Gamma(\mu)} \tag{2.26}$$

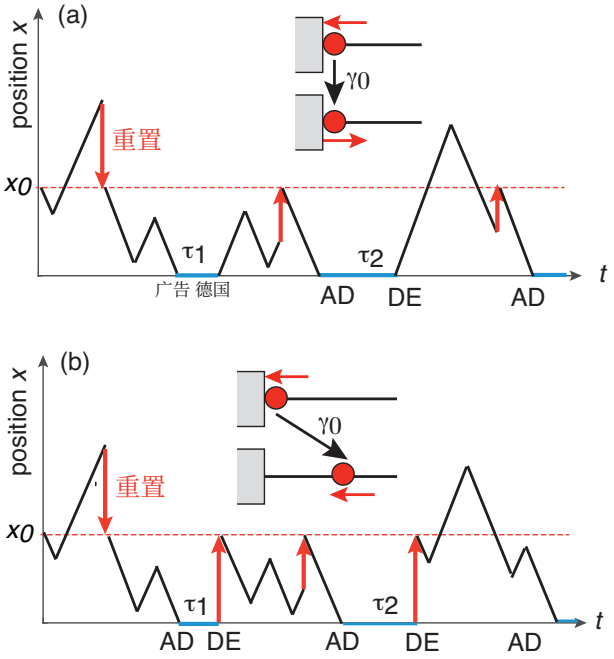


图3. 半直线上随机翻转粒子的示例轨迹：在 $x = 0$ 处有一（非吸收）黏性壁，并以速率 r 瞬时随机重置到（x_0，k_0）。为便于说明，我们取 $k_0 = -$。束缚态中的等待时间序列由 $\{\tau_1,\tau_2,\ldots\}$给出。(a) 每次脱附事件后，粒子从 $x = 0$ 以右行状态继续运动。(b) 每次脱附事件后，粒子立即重置到 x_0，并处于速度状态 $k_0 = -$。

其中 $\mu > 0$ 且 $\Gamma(\mu)$ 表示伽马函数。对式（~2.26）作拉普拉斯变换，得到 $\phi(s) = (\gamma_0/(s+\gamma_0))^{\mu}$，因此代入式（2.24）可得

$$\widetilde{\rho}_{-|+}(0,s|0) = \frac{\alpha\sqrt{sD(s)}/v}{\sqrt{sD(s)}(\alpha+s)+vs-\alpha(\gamma_0/(s+\gamma_0))^{\mu}\sqrt{sD(s)}}. \tag{2.27}$$

类似的代换可给出任意（k，k_0）$\in$（$\pm$，$\pm$）的粒子密度。

III. 具有随机重置的随机翻转粒子：非吸收黏性壁的非平衡稳态

作为更新表述的第一个应用，我们计算半直线上一个随机翻转粒子的非平衡稳态（NESS）；该粒子具有非吸收性黏滞壁，位于 $x = 0$，并且受到随机重置的影响。也就是说，我们假设当随机翻转粒子处于体相区域 $(0,\ \infty)$ 中时，其位置 $X(t$会在随机时刻重置到其初始位置 x_0；这些时刻由速率恒定为 $r \geq 0$的泊松分布生成。我们还假设离散状态 $\sigma(t$会重置为初始速度状态 k_0。（这不同于文献 [11]中最初考虑的随机化速度重置规则。）在我们近期对

布朗运动 [17], 的研究基础上，我们区分每次脱附事件之后的两种不同方案。第一种假设粒子从 $x = 0$ 处以 $+$ 状态继续运动，如第II节所述；第二种则假设粒子重置到其初始状态 $(x_0,\ k_0)$。后一种情况下，存在两种不同类型的重置事件：体相区域中的自发重置，以及脱附后从边界发生的重置。图3展示了这两种脱附方案。

A. 脱附后不重置

首先，假设粒子脱附后从 $x = 0$ 继续处于 $+$态。由于粒子脱附时所处的状态与其体相重置态 (x_0, k_0) 不同，我们引入以下记号：给定状态 (y_0, j_0)，我们分别用 $\rho_{r,k|j_0}(x,t|y_0)$ 和 $p_{r,k|j_0}(x,t|y_0)$ 表示从 (y_0, j_0) 出发时可逆吸附和不可逆吸附对应的概率密度。我们也用此记号描述首次通过时间，$\tau_{r,j_0}(y_0)$ 和 $\mathcal{T}_{r,j_0}(y_0)$。全文中，下标 r 表示以速率 r 将体相重置到 (x_0, k_0)。如果 $(y_0, j_0) = (x_0, k_0)$，则初始状态与体相重置态相同。

对于 $y_0 > 0$ 概率密度 $p_{r,\ k|j_0}(x,\ t|y_0)$ 满足前向柯尔莫哥洛夫方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{r,k|j_0}}{\partial t} &= -vk\frac{\partial p_{r,k|j_0}}{\partial x} - (\alpha + r)p_{r,k|j_0} + \alpha p_{r,-k|j_0} \\ &\quad + rS_{r,j_0}(y_0,t)\delta(x - x_0)\delta_{k,k_0}, \qquad (3.1a)\\ 0 &= p_{r,+|j_0}(0,t|y_0), \qquad (3.1b)\end{aligned}$$

其中 $S_{r,j_0}(y_0,t)$ 是吸附时间的生存概率，

$$S_{r,j_0}(y_0,t) = \int_0^\infty p_{r,j_0}(x,t|y_0)\,\mathrm{d}x \qquad (3.2)$$

以及 $p_{r\ j_0} = p_{r\ +|j_0} + p_{r\ -|j_0}$ $\tau_{r\ j_0}\ y_0\ =\ \{t>0,\ X\ t\ =,,,_0$ 若,( ) inf ( ) 表示不可逆吸附的首次通过时间，则

$$\mathrm{Prob}[\tau_{r,j_0}(y_0) \le t] = 1 - S_{r,j_0}(y_0,t). \qquad (3.3)$$

因此，首次通过时间密度为

$$f_{r,j_0}(y_0,t) = -\frac{\partial S_{r,j_0}(y_0,t)}{\partial t} = vp_{r,-|j_0}(0,t|y_0). \qquad (3.4)$$

相应粒子从 (x_0, k_0) 出发时的更新方程形式与式（2.18）相同，只需将 $p \to p_r$ 等替换为：

$$\begin{aligned}\rho_{r,k|k_0}(x,t|x_0) &= p_{r,k|k_0}(x,t|x_0) \qquad (3.5)\\ &+ \int_0^t \mathrm{d}\tau' \int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\, \rho_{r,k|+}(x,t-\tau|0)\phi(\tau-\tau')f_{r,k_0}(x_0,\tau').\end{aligned}$$

我们将在拉普拉斯空间中利用该关系计算非平衡稳态 $\rho^*_{r,k|k_0}$

$$\rho^*_{r,k|k_0}(x|x_0) \equiv \lim_{t\to\infty}\rho_{r,k|k_0}(x,t|x_0) = \lim_{s\to 0} s\widetilde{\rho}_{r,k|k_0}(x,s|x_0). \qquad (3.6)$$

非平衡稳态依赖于（x_0, k_0），因为这也是重置点。对更新方程（3.5）进行拉普拉斯变换并整理后得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}_{r,k|k_0}(x,s|x_0) &= \widetilde{p}_{r,k|k_0}(x,s|x_0) \qquad (3.7)\\ &+ \frac{\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0,s)}{1-\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,+}(0,s)}\widetilde{p}_{r,k|+}(x,s|0).\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{s\to 0}\widetilde{\phi}(s) = 1, \quad \lim_{s\to 0}\widetilde{f}_{r,j_0}(y_0,s) = 1 \qquad (3.8)$$

对于所有 $y_0 > 0$，且当 $(y_0, j_0) = (0, +)$ 时，因此

$$\begin{aligned}\rho^*_{r,k|k_0}(x|x_0) &= \lim_{s\to 0}\frac{s\widetilde{p}_{r,k|+}(x,s|0)}{1-\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,+}(0,s)}\\ &= -\frac{\widetilde{p}_{r,k|+}(x,0|0)}{\dfrac{d}{ds}\left(\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,+}(0,s)\right)\Big|_{s=0}}\\ &= \frac{\widetilde{p}_{r,k|+}(x,0|0)}{\langle\tau\rangle + \mathcal{T}_{r,+}(0)} \qquad (3.9)\end{aligned}$$

with

$$\langle\tau\rangle = \int_0^\infty \tau\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{d}{ds}\widetilde{\phi}(s)\Big|_{s=0} \qquad (3.10)$$

and

$$\mathcal{T}_{r,j_0}(y_0) = -\frac{d}{ds}\widetilde{f}_{r,j_0}(y_0,s)\Big|_{s=0} = \widetilde{S}_{r,j_0}(y_0,0). \qquad (3.11)$$

换句话说，$\langle\tau\rangle$ 是脱附的平均等待时间，而$\mathcal{T}_{r,\ j_0}(y_0)$是体相重置条件下，不可逆吸附至$(x_0,\ k_0)$的首次通过时间（MFPT），其初始状态为$(y_0,\ j_0)$。

方程（3.9）的最后一行可作如下解释。由于

$$\widetilde{p}_{r,k|+}(x,0|0) = \int_0^\infty p_{r,k|+}(x,t|0)\,\mathrm{d}t, \qquad (3.12)$$

我们看到，$\widetilde{p}_{r,\ k|+}(x,\ 0|0)\mathrm{d}x$ 是粒子在无穷小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$内所花时间的期望值；该值是对所有从 $x = 0$ 处以右行状态出发、并在平均时间$\mathcal{T}_{r,\ +}(0)$ 后被吸附的样本路径取平均所得。若 $\langle\tau\rangle = 0$，则边界是完全反射的，而非黏滞边界。这意味着我们可以将$\widetilde{p}_{r,\ k|+}(x,\ 0|0)/\mathcal{T}_{r,\ +}(0)$ 视为具有体相重置、且在$x = 0$处有完全反射壁面的随机翻转粒子的非平衡稳态。因此，方程（3.9）可改写为

$$\rho^*_{r,k|k_0}(x|x_0) = \frac{\mathcal{T}_{r,+}(0)}{\langle\tau\rangle + \mathcal{T}_{r,+}(0)}\rho^*_{r,k|+}(x|0)_{\mathrm{reflecting}}. \qquad (3.13)$$

右侧的乘法因子表示随机翻转粒子在体相中而非停留在边界上的时间均值占比。

B. 从边界出发

由方程（3.9）可知，求解非平衡稳态归结为求解 $\widetilde{p}_{r,\ k|+}(x,\ s|0)_{s=0}$ 及其相关的平均首次通过时间 $T_{r,\ +}(0)$，这需要扩展第二节B的分析。令 T 表示首次翻滚或重置事件发生前的指数分布时间，因此 T 具有概率密度 $\psi(T)=(\alpha+r)\mathrm{e}^{-(\alpha+r)T}$。对于给定的$T$，我们有关系式

$$p^{(T)}_{r,k|+}(x,t|0)=\delta_{k,+}\delta(x-vt)\Theta(T-t)+\left[\frac{\alpha}{\alpha+r}p_{r,k|-}(x,t-T|vT)+\frac{r}{\alpha+r}p_{r,k|k_0}(x,t-T|x_0)\right]\Theta(t-T). \tag{3.14}$$

也就是说，随机翻转粒子在右行状态下移动距离 vT，随后以概率 $\alpha/(\alpha+r)$ 切换到左行状态，或以概率 $r/(\alpha+r)$ 重置到 $(x_0,\ k_0)$。然后对 T 求平均可得

$$\begin{aligned}p_{r,k|+}(x,t|0)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\alpha+r)T}\left[(\alpha+r)\delta_{k,+}\delta(x-vt)\Theta(T-t)+\Big(\alpha p_{r,k|-}(x,t-T|vT)+rp_{r,k|k_0}(x,t-T|x_0)\Big)\Theta(t-T)\right]\mathrm{d}T\\&=\delta_{k,+}\delta(x-vt)\mathrm{e}^{-(\alpha+r)x/v}+\int_0^t \mathrm{e}^{-(\alpha+r)T}\Big(\alpha p_{r,k|-}(x,t-T|vT)+rp_{r,k|k_0}(x,t-T|x_0)\Big)\,\mathrm{d}T.\end{aligned} \tag{3.15}$$

对两边进行拉普拉斯变换，得到

$$\widetilde{p}_{r,k|+}(x,s|0)=v^{-1}\delta_{k,+}\mathrm{e}^{-(r+s+\alpha)x/v}+\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-(r+s+\alpha)T}\Big(\alpha\widetilde{p}_{r,k|-}(x,s|vT)+r\widetilde{p}_{r,k|k_0}(x,s|x_0)\Big). \tag{3.16}$$

我们通过关于 $p_{r,\ k|-}(x,\ t|vT)$ 的首次更新方程，利用方程（3.16）确定 $\widetilde{p}_{r,\ k|-}(x,\ s|vT)$ 的表达式，

$$p_{r,k|-}(x,t|vT)=e^{-rt}p_{k|-}(x,t|vT)+r\int_0^t \mathrm{d}\tau e^{-r\tau}S_-(vT,\tau)p_{r,k|k_0}(x,t-\tau|x_0). \tag{3.17}$$

方程（3.17）右侧的第一项表示所有从位置 vT 向左运动且在时间区间 $[0,t]$内未发生重置的样本路径的贡献。第二项表示所有首先在时刻 τ 发生重置、此后在到达 x 之前任意次数重置，并在时刻 t到达的样本路径。对方程（3.17）进行拉普拉斯变换可得

$$\widetilde{p}_{r,k|-}(x,s|vT)=\widetilde{p}_{k|-}(x,s+r|vT)+r\widetilde{S}_-(vT,s+r)\widetilde{p}_{r,k|k_0}(x,s|x_0). \tag{3.18}$$

代回方程（3.16）并令 $s=0$，可得

$$\widetilde{p}_{r,k|+}(x,0|0)=v^{-1}\delta_{k,+}\mathrm{e}^{-(r+\alpha)x/v}+\int_0^\infty \mathrm{d}T\,\mathrm{e}^{-(r+\alpha)T}\left[\alpha\widetilde{p}_{k|-}(x,r|vT)+\Big(1+\alpha\widetilde{S}_-(vT,r)\Big)r\widetilde{p}_{r,k|k_0}(x,0|x_0)\right]. \tag{3.19}$$

最后，对方程（3.19）关于 $x\in[0,\infty)$ 进行积分，对 k 求和，并利用方程（3.11），可得

$$\mathcal{T}_{r,+}(0)=\frac{1+r\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)+\alpha\mathcal{T}_{r,-}(v/(r+\alpha))}{r+\alpha}. \tag{3.20}$$

方程（$\mathcal{T}_{r,\ +}$）（3.20）中的表达式具有明确的物理意义：第一次重置或翻滚事件发生前的平均时间，等于二者速率之和的倒数。随后，该关键事件平均在位置 $x=v/(r+\alpha)$ 发生，其分流概率分别为$r/(r+\alpha)$ 和 $\alpha/(r+\alpha)$。

以下表达式和 $\widetilde{p}_{k|-}(x,\ r|vT)$ 可通过第 IIB 节的分析获得；参见式（2.16）和（2.22）。剩下的工作是通过求解$\widetilde{p}_{r,\ k|k_0}(x,\ 0|x_0)$和$\mathcal{T}_{r,\ k_0}(x_0)$ 的正向 Kolmogorov 方程（3.1）来确定它们，所在的空间为拉普拉斯空间。此前已在文献[14]中完成了这项工作。为完整起见，我们在附录B中给出该计算的简化版本。由此得到以下表达式。首先，取式（$s\to 0$ 中的极限可得B.5）

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}(x,0|x_0)=\frac{1}{v}\Big(&[1+r\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)]G(x,r|x_0)\\&+\delta_{k_0,+}\mathrm{e}^{-\Lambda(r)x}\Big)\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中 $\Lambda(r)=v^{-1}\sqrt{r(2\alpha+r)}$ 以及

$$G(x,r|x_0)=\frac{\alpha}{2v\Lambda(r)}\left[\mathrm{e}^{-\Lambda(r)|x-x_0|}-\mathrm{e}^{-\Lambda(r)(x+x_0)}\right]. \tag{3.22}$$

类似地，取极限 $s\to 0$，在式（B.2）中得到

$$\widetilde{p}_{r,k_0|k_0}(x,0|x_0) = \frac{v}{\alpha}\left[-k_0\frac{\partial\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}(x,0|x_0)}{\partial x}+\frac{\alpha+r}{v}\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}(x,0|x_0)\right]. \tag{3.23}$$

最后，由公式（B.12）可得，对于 $k_0=+$

$$\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)=\frac{1}{r}\left(\frac{\sqrt{r(2\alpha+r)}+\alpha+r}{\alpha}\mathrm{e}^{\Lambda(r)x_0}-1\right) \tag{3.24}$$

而由公式（B.17）可得，对于 $k_0=-$

$$\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)=\frac{1}{r}\left[\mathrm{e}^{\Lambda(r)x_0}-1\right]. \tag{3.25}$$

现在我们可以完成非平衡稳态（3.9）的计算。首先，将公式（3.21）和（3.23）代入公式（3.19），我们对 T 进行积分并得到解析结果。（所得表达式相当复杂，且没有进一步的启发意义，因此这里不予列出。）由此得到公式（3.9）分子中出现的项 $\widetilde{p}_{r,k|+}(x,0|0)$。其次，将公式（3.24）和（3.25）代入公式（3.20），即可确定公式（3.9）分母中出现的项 $\mathcal{T}_{r,+}(0)$。最后，与第II节(c)一样，等待时间分布对粒子密度的影响只需通过一次代入即可体现。若等待时间以速率为 γ_0 的指数分布给出，则公式（3.9）中的 $\langle\tau\rangle$ 仅为 $1/\gamma_0$。或者，若这些等待时间服从速率为 $\gamma_0>0$、形状参数为 $\mu>0$ 的伽马分布，则 $\langle\tau\rangle=\mu/\gamma_0$。无论选择哪种分布，非平衡稳态仅取决于该等待时间的均值。

C. 解吸后重置

如图3(a)所示，如果粒子在解吸后立即重置，分析就会大大简化。我们继续将体相重置态与初始条件（x_0, k_0）视为相同。于是，$\rho_{r,\,k|k_0}(x,\,t|x_0)$的更新方程可写为

$$\rho_{r,k|k_0}(x,t|x_0)=p_{r,k|k_0}(x,t|x_0) + \int_0^t \mathrm{d}\tau'\int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\,\rho_{r,k|k_0}(x,t-\tau|x_0)\phi(\tau-\tau')f_{r,k_0}(x_0,\tau'). \tag{3.26}$$

这由方程（A.9）在 $\pi_d=1$ 以及（x^*, k^*）$=(x_0,\ k_0)$的情形下得到。我们再次通过在拉普拉斯空间中进行计算来求得 $\rho^*_{r,\,k|k_0}$。对方程（3.26）作拉普拉斯变换并重新整理可得

$$\widetilde{\rho}_{r,k|k_0}(x,s|x_0)=\frac{\widetilde{p}_{r,k|k_0}(x,s|x_0)}{1-\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0,s)}. \tag{3.27}$$

由式（3.6）可得

$$\rho^*_{r,k|k_0}(x|x_0)=\frac{\widetilde{p}_{r,k|k_0}(x,0|x_0)}{\langle\tau\rangle+\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)}. \tag{3.28}$$

代入式（3.21）和（3.23）可得非平衡稳态，

$$\rho^*_{r,-k_0|k_0}(x|x_0)=\frac{1}{v(\langle\tau\rangle+\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0))} \times\left[(1+r\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0))G(x,r|x_0)+\delta_{k_0,+}\mathrm{e}^{-\Lambda(r)x}\right], \tag{3.29a}$$

$$\rho^*_{r,k_0|k_0}(x|x_0)=\frac{v}{\alpha}\left[-k_0\frac{\partial\rho^*_{r,-k_0|k_0}(x|x_0)}{\partial x} +\lambda(r)\rho^*_{r,-k_0|k_0}(x|x_0)\right]. \tag{3.29b}$$

D. 结果

图 4展示了两种解吸方案下的非平衡稳态。两种情况下，与 $k_0=+$ 相比，$k_0=-$ 在 x_0 处的通量不连续使非平衡稳态呈现出显著跃变，使区域的一侧相较于 x_0更受偏向。更频繁的重置（更大的 r）会加剧这种差异，因为重置事件会使随机翻转粒子恢复到其初始取向。边界的存在会在 $k_0=\pm$ 中引入不对称性，且该不对称性随 x_0增大而减弱。迄今为止，这些观察结果对于两种解吸方案几乎完全相同。

解吸方案之间这种定性的相似性表明，各种解吸方案在实际效果上的差异并不显著。NESS 中最显著的差异是边界附近聚集的质量。显然，对于两种 $k_0=\pm$，非重置解吸方案都会使边界附近聚集相对更多的质量，因为解吸被建模为从 $x=0$ 开始的连续运动。鉴于下一节将讨论部分吸收的黏滞边界，人们可能会认为，边界附近质量的增加总会缩短吸收平均首次通过时间。事实证明，这种情况只在某些时候成立。

这一猜想可能不成立的线索见于图 5，其中展示了束缚时间分数（BTF，即停留在边界上而非体相中的平均时间比例）如何受到体相重置率和翻滚率的影响。不出所料，当初始取向为向右运动时，非重置解吸方案总会产生更高的 BTF（$k_0=+$）。然而，当 $k_0=-$时，从图5(a,c) 可以看出，只要翻滚率相对于 v/x_0较低，解吸诱导重置就会产生更高的 BTF。对此我们可以这样解释：解吸后，重置的随机翻转粒子朝边界运动，且不太可能发生翻滚；而未重置的随机翻转粒子则远离边界运动，也不太可能发生翻滚。从图 r的关系可以推断，这一现象似乎对所有体相重置率都成立。图 $k_0=-$ 中 5(b,d) 的曲线关系也印证了这一点。正如我们将在第四节看到的，图α、r中 BTF 比值低于 1 时对应的参数值，与解吸诱导重置能够缩短吸收平均首次通过时间时对应的参数值密切相关。

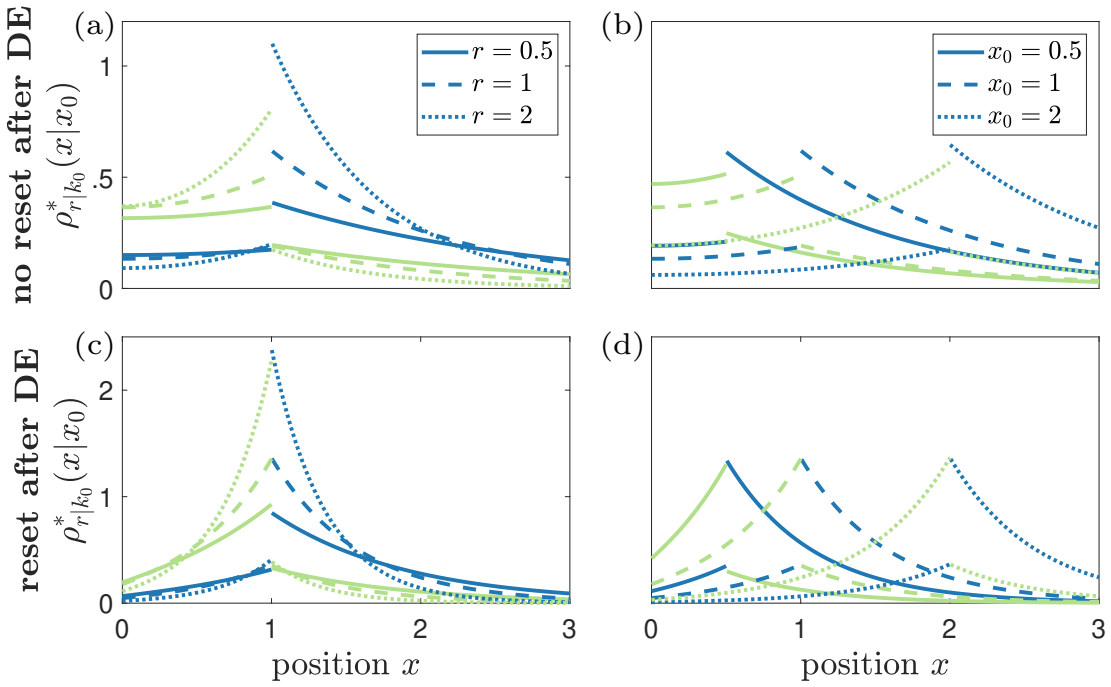


图 4. 体相重置随机翻转粒子的非平衡稳态：(a、b) 如第 IIIA、B 节所述，解吸后不进行重置；(c、d) 如第 IIIC 节所述，解吸诱导重置至 $(x_0,\ k_0)$。第一列中，$x_0 = 1$ 并改变体相重置率；第二列中，$r = 1$ 并改变初始位置和重置位置。其他参数为 $\alpha = 1$、$\langle\tau\rangle = 1$ 和 $v = 2$。深蓝色曲线表示 $k_0 = +$，浅绿色曲线表示 $k_0 = -$。

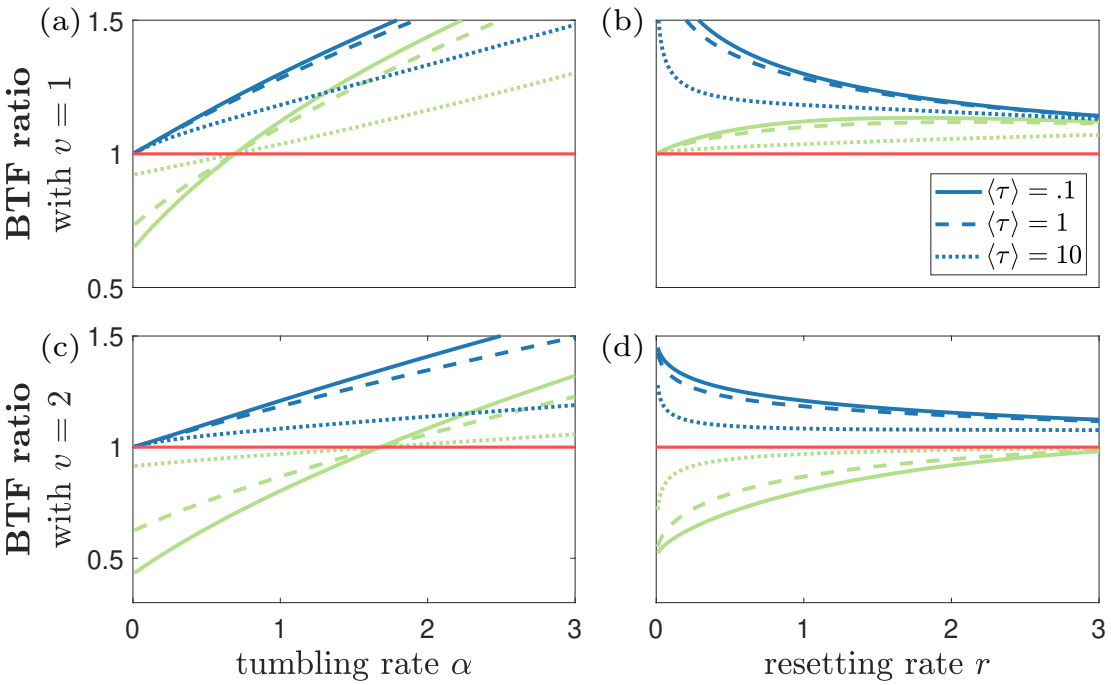


图 5. 不同平均等待时间 $\langle\tau\rangle$ 下，非重置解吸方案与解吸诱导重置方案的束缚时间分数（BTF）之比，其中 (a、b) 为 $v = 1$，(c、d) 为 $v = 2$。低于 1（红色水平线）的数据表示解吸诱导重置方案具有相对较高的束缚时间分数。第一列中，$r = 1$ 并改变翻滚率；第二列中，$\alpha = 1$ 并改变体相重置率。其他参数为 $x_0 = 1$ 和 $v = 2$。深蓝色曲线表示 $k_0 = +$，浅绿色曲线表示 $k_0 = -$。

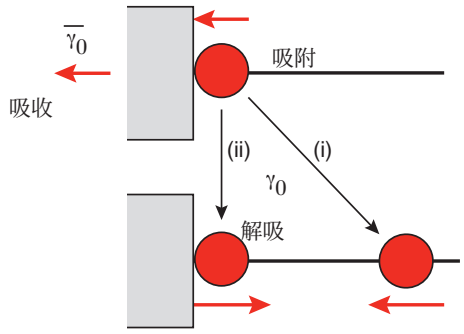


图6. 部分吸收性黏性壁上的反应。每当随机翻转粒子以左行状态与壁面碰撞时，它就会与壁面结合（吸附）。随后，它要么以恒定速率 γ_0 脱离壁面（解吸），要么以速率 $\overline{\gamma}_0$ 永久地从系统中移除（吸收）。解吸后，它要么（i）重置为 $-x_0$，处于速度状态 $k_0 = -$，例如；要么（ii）从壁面以向右运动状态继续运动。

IV. 随机翻转粒子的随机重置：在黏性壁面吸收的首次通过时间

作为更新理论的第二个应用，我们分析半无限直线上带重置的随机翻转粒子的首次通过时间问题，其在 $x = 0$ 处有一个部分吸收性黏性壁面，如图6所示。与第III节一样，我们假设粒子被吸附时，会停留并与壁面结合一段随机时间 τ，该时间由等待时间密度 $\phi(\tau)$ 生成。不过，现在粒子要么以分裂概率 π_d 脱附，要么以概率 $\pi_b = 1 - \pi_d$ 被永久吸收。在指数分布的情形下，我们有

$$\phi(\tau) = \gamma \mathrm{e}^{-\gamma\tau}, \quad \gamma = \gamma_0 + \overline{\gamma}_0, \tag{4.1}$$

及其对应的分流概率

$$\pi_d = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \overline{\gamma}_0}, \quad \pi_b = \frac{\overline{\gamma}_0}{\gamma_0 + \overline{\gamma}_0}. \tag{4.2}$$

与我们最近针对具有黏性边界的布朗运动提出的更新表述类似，[16, 17]，有必要修改传播子的更新方程，并补充一个将吸收首次通过时间密度 $\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0, t)$ 与吸附首次通过时间密度 $f_{r,k_0}(x_0, t)$ 联系起来的更新方程。附录A推导的一般更新方程分别由式（A.9）和（A.14）给出。在第四节中，我们将重点讨论首次通过时间密度的更新方程。

A. 解吸后不重置

首先，假设粒子解吸后继续处于 $x = 0$状态，见图 + 6 中的情形 (ii)。在方程（x^*，k^*）中令 = （0，k_+），根据方程（A.14），更新首次通过时间密度的方程为

$$\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0, t) = \pi_b \int_0^t \mathrm{d}\tau \phi(t-\tau) f_{r,k_0}(x_0, \tau) \tag{4.3}$$
$$+ \pi_d \int_0^t \mathrm{d}\tau' \int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\, \mathcal{F}_{r,+}(0, t-\tau)\phi(\tau-\tau') f_{r,k_0}(x_0, \tau').$$

右侧第一项表示所有在时刻 τ 首次吸附、随后在时刻 t 被吸收且期间未发生解吸的样本路径，其发生概率为 $\pi_b\phi(t-\tau)f_{r,k_0}(x_0,\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$。相应地，第二项对所有在时刻 τ'首次吸附、在时刻 τ 解吸，并在经历任意次数的额外吸附事件后于时刻 t 被吸收的样本路径求和。

方程（4.3）的拉普拉斯变换为

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{r,k_0}(x_0, s) = \pi_b \widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0, s) \tag{4.4}$$
$$+ \pi_d \widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0, s)\widetilde{\mathcal{F}}_{r,+}(0, s).$$

最终，我们使用方程（4.4）来确定吸收时间矩。为此，我们首先需要写出$\widetilde{\mathcal{F}}_{r,+}(0, s)$的表达式，这可以通过建立其自身的更新方程来实现，

$$\mathcal{F}_{r,+}(0, t) = \pi_b \int_0^t \mathrm{d}\tau \phi(t-\tau) f_{r,+}(0, \tau) \tag{4.5}$$
$$+ \pi_d \int_0^t \mathrm{d}\tau' \int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\, \mathcal{F}_{r,+}(0, t-\tau)\phi(\tau-\tau') f_{r,+}(0, \tau').$$

对方程（4.5）进行拉普拉斯变换并求解$\widetilde{\mathcal{F}}_{r,+}(0, s)$，得到

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{r,+}(0, s) = \frac{\pi_b \widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,+}(0, s)}{1 - \pi_d \widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,+}(0, s)}, \tag{4.6}$$

我们将其代入方程（4.4），以确定首次通过时间矩，

$$\mathfrak{T}^{(n)}_{r,k_0}(x_0) := \int_0^\infty t^n \mathcal{F}_{r,k_0}(x_0, t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \widetilde{\mathcal{F}}_{r,k_0}(x_0, s)\Big|_{s=0}. \tag{4.7}$$

此外，假设 ϕ 不是重尾的，我们代入级数展开式

$$\widetilde{f}_{r,+}(0, s) \sim 1 - s\mathcal{T}_{r,+}(0) + \frac{s^2}{2}\mathcal{T}^{(2)}_{r,+}(0) + \mathcal{O}(s^3)$$
$$\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0, s) \sim 1 - s\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0) + \frac{s^2}{2}\mathcal{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) + \mathcal{O}(s^3)$$
$$\widetilde{\phi}(s) \sim 1 - s\langle\tau\rangle + \frac{s^2}{2}\langle\tau^2\rangle + \mathcal{O}(s^3) \tag{4.8}$$

代入方程（4.6），并对 s进行泰勒展开，可得

$$\mathfrak{T}^{(1)}_{r,k_0}(x_0) = \mathcal{T}_{r,k_0}(x_0) + \langle\tau\rangle + \Gamma\big(\mathcal{T}_{r,+}(0) + \langle\tau\rangle\big), \tag{4.9}$$

其中 $\mathcal{T}_{r,+}(0)$ 由方程（3.20）给出，$\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)$ 在 $k_0=\pm$ 时由方程（3.24）和（3.25）给出，而 $\Gamma\equiv\pi_d/\pi_b$。

式（4.9）的物理解释十分直接；右侧第一项是从 x_0 开始的平均吸附时间，第二项是最后一次吸附事件之后的平均吸收时间，第三项则是由（中间的）解吸事件所累积的平均时间。特别地，恰好发生 n 次解吸事件的概率为 $p_n := \pi_b\pi_d^n$，因此其均值恰好为

$$\overline{n} := \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_b\pi_d^n = \Gamma. \tag{4.10}$$

此外，游程间平均时间恰好为$\mathcal{T}_{r,+}(0) + \langle\tau\rangle$。

高阶矩对系统参数的依赖关系更加微妙。收集式（4.6）泰勒展开中的二阶项，可得二阶首次通过时间矩

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) &= (1+\Gamma)\big(\mathcal{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) + \langle\tau^2\rangle + 2\langle\tau\rangle\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)\big)\\ &+ \Gamma\big(\mathcal{T}^{(2)}_{r,+}(0) - \mathcal{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) + 2\mathcal{T}_{r,+}(0)\big[\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0) - \mathcal{T}_{r,+}(0)\big]\big)\\ &+ 2\Gamma(1+\Gamma)\big(\mathcal{T}_{r,+}(0) + \langle\tau\rangle\big)^2 \end{aligned}\tag{4.11}$$

with

$$\mathcal{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) = \frac{d^2\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0,s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = v\frac{d^2\widetilde{p}_{r,-|k_0}(0,s|x_0)}{ds^2}\Big|_{s=0} \tag{4.12}$$

对于 $\mathcal{T}_{(2)\,r,+}(0)$ 也可类似得到。注意，由式（4.9）和（4.11）可知，在没有解吸的情况下（$\Gamma=0$），首次通过时间方差简单地等于不可逆吸附的方差与在边界处等待的方差之和，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) - (\mathfrak{T}^{(1)}_{r,k_0}(x_0))^2\\ &\quad= \mathcal{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) - (\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0))^2 + \langle\tau^2\rangle - \langle\tau\rangle^2.\end{aligned}\tag{4.13}$$

我们在图中展示这些结果。7 但将分析留到下一节，在那里我们可以将这种解吸方案与解吸诱导的重置进行比较。

B. 解吸后重置

与第III节一样，如果粒子在解吸后立即重置到 (x_0, k_0)，则分析会简化，见图6中的情形 (i)。在一般更新方程 (A.14) 中令 $(x^*,k^*) = (x_0,k_0)$，现在可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0,t) &= \pi_b\int_0^t \mathrm{d}\tau\phi(t-\tau)f_{r,k_0}(x_0,\tau)\\ &+ \pi_d\int_0^t \mathrm{d}\tau'\int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\,\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0,t-\tau)\phi(\tau-\tau')f_{r,k_0}(x_0,\tau').\end{aligned}\tag{4.14}$$

对方程 (4.14) 进行拉普拉斯变换，得到

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{r,k_0}(x_0,s) = \frac{\pi_b\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0,s)}{1-\pi_d\widetilde{\phi}(s)\widetilde{f}_{r,k_0}(x_0,s)}, \tag{4.15}$$

我们用它来确定首次通过时间矩，

$$\mathfrak{T}^{(n)}_{r,k_0}(x_0) = \Big(-\frac{d}{ds}\Big)^n\widetilde{\mathcal{F}}_{r,k_0}(x_0,s)\Big|_{s=0}. \tag{4.16}$$

再次假设 ϕ 不是重尾的，我们将式（4.8）中的相关级数展开代入式（4.15），并对 s的幂进行泰勒展开，得到

$$\mathfrak{T}^{(1)}_{r,k_0}(x_0) = \mathcal{T}_{r,k_0}(x_0) + \langle\tau\rangle + \Gamma\big(\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0) + \langle\tau\rangle\big). \tag{4.17}$$

也就是说，吸收的平均首次通过时间等于从 x_0 开始的平均吸附时间、最后一次吸附事件之后的平均吸收时间，以及解吸事件所累积时间的总和。

如前所述，收集式（4.15）泰勒展开中的二阶项，得到二阶首次通过时间矩，

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) =&(1+\Gamma)\big(\mathcal{T}^{(2)}_{r,k_0}(x_0) + \langle\tau^2\rangle + 2\langle\tau\rangle\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0)\big)\\ &+ 2\Gamma(1+\Gamma)\big(\mathcal{T}_{r,k_0}(x_0) + \langle\tau\rangle\big)^2.\end{aligned}\tag{4.18}$$

在没有解吸的情况下，我们重现了公式（4.13）。然而，必须注意的是，尽管两种解吸方案下的吸收平均首次通过时间仅通过等待时间密度的均值而依赖于该密度，但等待时间密度的选择会体现在更高阶矩中。特别是，通过允许 ϕ 呈非指数形式，我们可以独立改变等待时间密度的均值和方差。

C. 结果

在图 7(a,d) 中，我们分别将方程（4.9）和（4.17给出的平均首次通过时间绘制为体相重置率 r的函数。我们观察到平均首次通过时间随 r呈现典型的单峰关系。不过，还可以推导出一些其他非平凡结果。首先，在解吸后进行重置时，最优重置率 r^* 不受 Γ 的影响。也就是说，体相重置的作用仅在于加快随机翻转粒子从 x_0返回边界所需的时间；而当重置从边界开始持续进行时，重置也会影响解吸态。其次，尽管在图 $k_0=-$7(a,d) 中，$k_0=+$ 对应的平均首次通过时间小于7(a,d) 中的情况，但最优体相重置率（以下记为 r^*）却更大。这一现象反映出，当 $k_0=-$ 时，更快的重置仍然有益，因为随机翻转粒子会重置为左行状态。翻滚率对吸收平均首次通过时间的影响也有类似规律（见图7(b,e)）；不过，不出所料，若 $k_0=-$，完全消除翻滚会使平均首次通过时间达到最小。

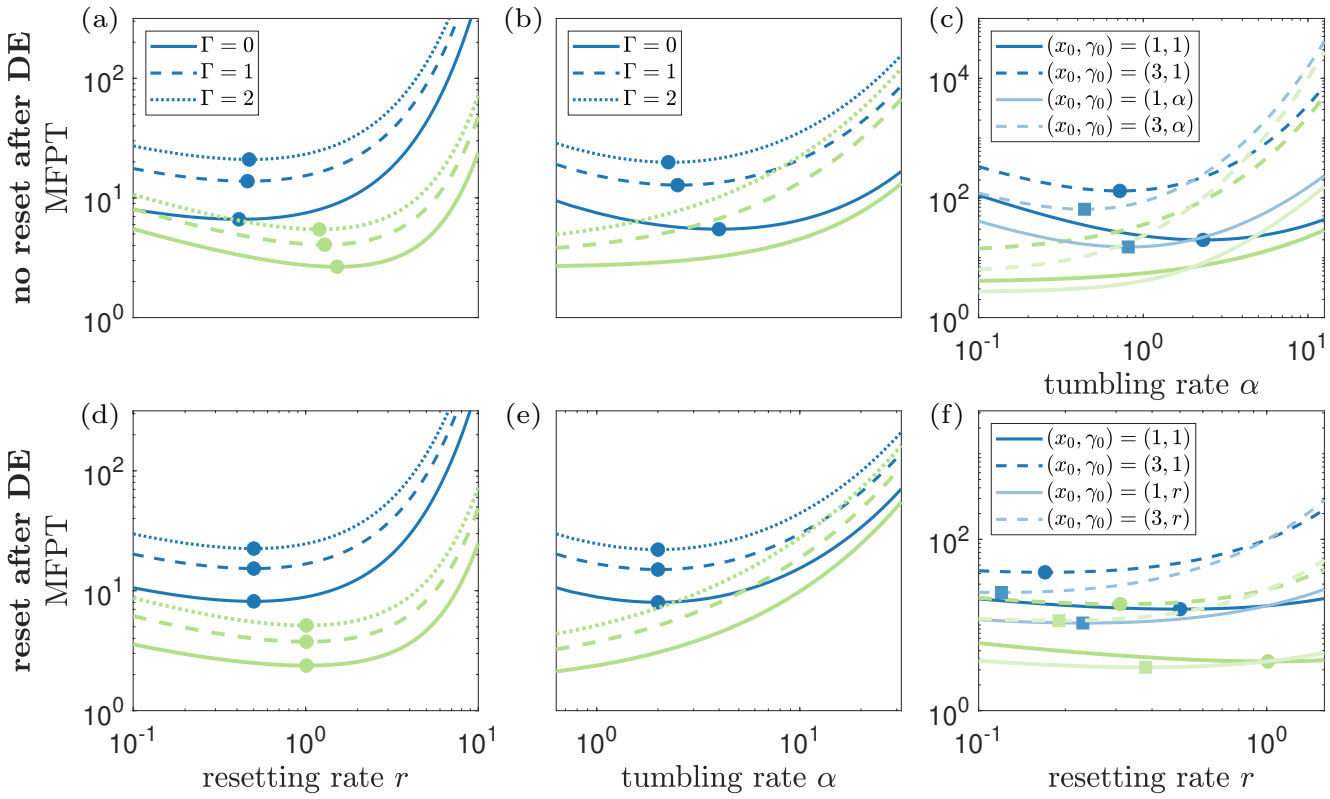


图7. 对于（a–c）在解吸后不进行重置（如第 IVA、B 节所述）以及（d–f）解吸诱导重置至（x_0，k_0）（如第 IVC 节所述）时的吸收平均首次通过时间。在第一列中，$\alpha = 1$ 并改变重置率；在第二列中，$r = 1$ 并改变翻滚率。第三列展示了以下情况下平均首次通过时间的变化：（c）在非重置解吸方案中，解吸率与体相翻滚率相同；（f）在解吸诱导重置方案中，解吸率与体相重置率相同。蓝色曲线表示 $k_0 = +$，绿色曲线表示$k_0 = -$。极小值以标记标出。其他参数为 $x_0 = 1$、$v = 2$和 $\gamma_0 = 1$。

当解吸方案与体相动力学相关联时，吸收平均首次通过时间的行为或许最为有趣。在图7(c) 中，我们比较了解吸与翻滚率相同时，无重置脱附条件下的吸收平均首次通过时间。同样，在解吸诱导重置方案下，我们比较了解吸率与体相重置率相同时的吸收平均首次通过时间；见图7(f)。在这两种情形下，显然，这种等同关系会造成一种权衡：加快吸附时间也可能使解吸相对于吸收更易发生。因此，最优重置率落在 $[0, r^*]$ 范围内；此外，存在一段超过 r^* 的重置率范围，在此范围内，$\gamma_0 = r$ 对应的平均首次通过时间仍小于体相重置率与解吸重置率相互独立时的平均首次通过时间（非重置解吸下的最优翻滚也有类似情况）。

暂且不论重置和翻滚动力学，图 4 和 7共同凸显了初始方向和重置方向对粒子非平衡稳态及吸收平均首次通过时间的显著影响 k_0 。图8 总结了参数空间（α，r）中平均首次通过时间的这些差异；对于 $k_0 = \pm$，平均首次通过时间随体相重置率呈单峰变化 r 对于任意固定的翻滚率 α_0。（此外，该最优体相重置率 r^* 随翻滚率呈非单调变化，见近似水平的红色曲线。）然而，反过来则仅对 $k_0 = +$ 成立，因此在这种情况下，存在一个最优坐标对（α^*，r^*）$\in \mathbb{R}^2_{>0}$，使吸收平均首次通过时间最小；见图 8（a、c）。注意，α^* 仅在解吸诱导的重置方案中与 r 无关。

在图 9 中，我们展示了图8 中不同解吸方案对应等高线图的差异。具体而言，图9(a) 的数据是用图 8(c) 的数据减去图 8(a) 的数据所得；图 9(b) 与图8(d) 和8(b) 之间的关系也相同。对于初始时向右运动（$k_0 = +$）的随机翻转粒子 (RTP)，采用非重置解吸方案时，吸收首次通过时间的平均值始终短于采用解吸诱导重置方案时的结果；见图 9(a)。更高的翻滚率会进一步强化这一结果，因为对于解吸后不重置的 RTP，翻滚率升高会不成比例地促进其与边界的相互作用。不过，这种行为并不意外，因为在图$k_0 = +$ 和 $v = 2$ 所示的非吸收边界情形中，束缚时间分数5(c,d) 对所有翻滚率和重置率都始终大于 1。

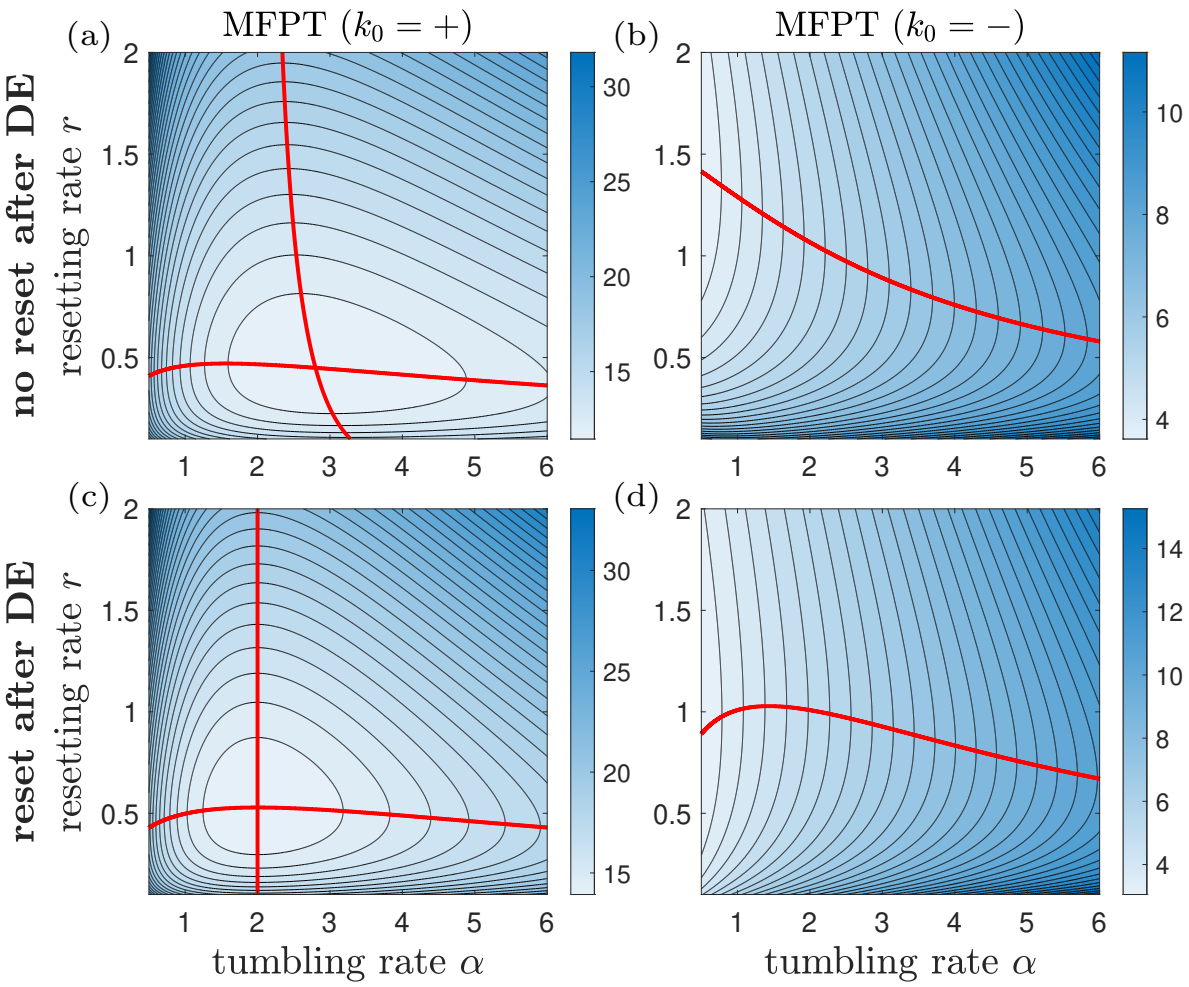


图8. 非重置解吸（上排）和解吸诱导重置至初始状态（x_0, k_0）（下排）情况下，吸收平均首次通过时间在（α, r）平面上的等高线图。在（a,c）中，$k_0 = +$；在（b,d）中，$k_0 = -$。极小曲线以红色标示。其他参数为 $x_0 = 1$, $v = 2$, $\gamma_0 = \gamma_0 = 1$。

初始时向左运动（$k_0 = -$）的 RTP 情形则明显不同；见图9(b)。我们可以看到，只要翻滚率 α 不太大，解吸诱导重置方案所对应的吸收首次通过时间平均值就更短。这一现象可以这样解释：解吸会使粒子随后朝边界运动，而非重置解吸方案则会使粒子随后远离边界运动。我们还可以从相应的束缚时间分数中看到这一差异，其中 $k_0 = -$ 和 $v = 2$；见图5(c,d)。

图 10 同样展示了位于 (α, r) 平面上不同解吸方案之间吸收平均首达时间之差的等高线图，只不过现在我们将非重置协议的解吸速率取为等于体相翻滚率 $\gamma_0 = \alpha$，对重置诱导吸收亦同样取 $\gamma_0 = r$。比较图 9 与10 在给定初始取向 k_0 时，几乎呈现出完全相反的、用于最小化吸收平均首次通过时间的“优选”解吸方案。我们观察到过大的翻滚率会使非重置解吸方案下的吸收逐渐变得更不可能。类似地，过大的重置率会使解吸诱导重置方案下的吸收变得不太可能。

五、讨论

在本文中，我们建立了一套一般的更新形式，用于刻画随机重置和黏滞边界对半直线上随机翻转粒子动力学的影响。我们首先假设位于 $x = 0$ 的边界不可吸收，且粒子不会发生重置。当与边界碰撞（吸附）时，随机翻转粒子会黏附一段随机等待时间，随后改变运动方向并重新进入体相区域（解吸）。接着，我们考虑随机翻转粒子在体相区域中运动时瞬时重置到其初始位置和朝向。在解吸过程中，随机翻转粒子既可以像之前一样从 $x = 0$ 重新进入区域，

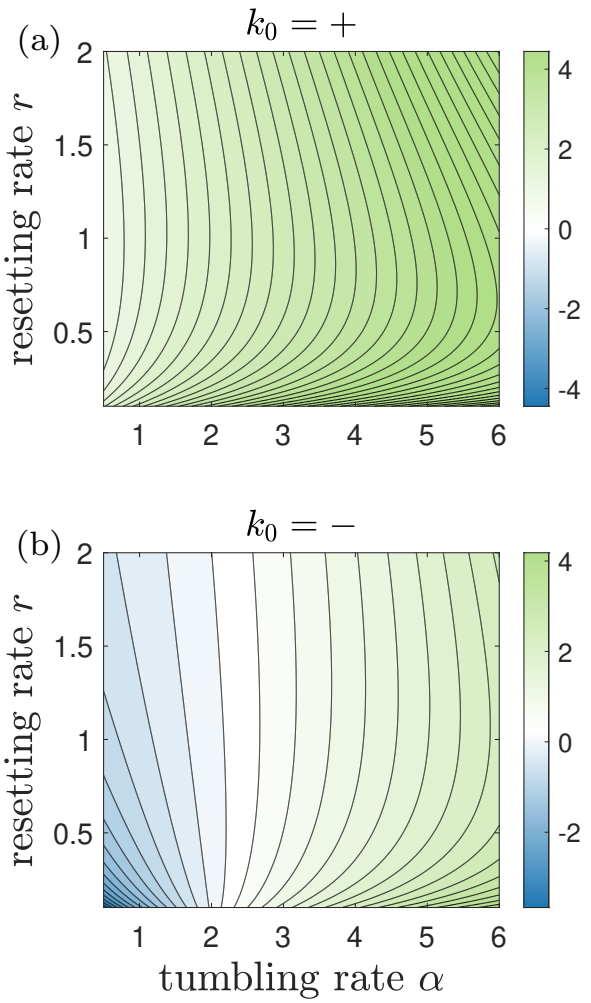


图9. 在(α, r)平面上，(a)$k_0 = +$ 和(b) $k_0 = -$对应的不同解吸方案的吸收平均首次通过时间之差的等高线图；绿色表示非重置方案的平均速度更快；蓝色表示解吸诱导重置方案的平均速度更快。其他参数为 $x_0 = 1$、 $v = 2$和 $\gamma_0 = \gamma_0 = 1$。

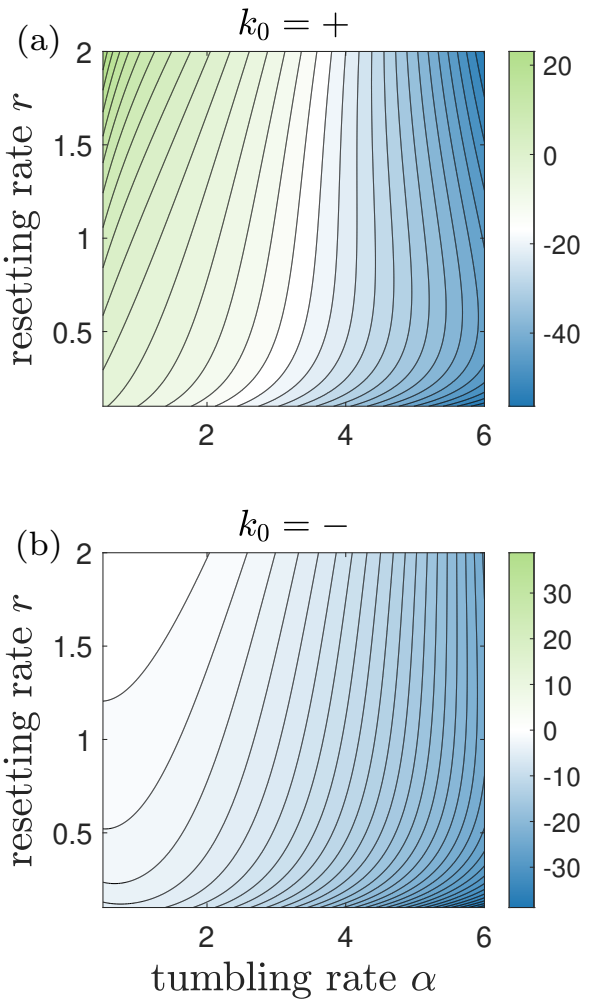


图10. 在脱附方案的吸收平均首次通过时间之差的 (α, r) 平面上的等高线图，分别对应 (a)$k_0 = +$ 和 (b) $k_0 = -$ 。此处脱附与体相动力学相匹配，即对于非重置脱附，脱附与体相翻滚率相等 ($\gamma_0 = \alpha$)；对于重置诱导脱附，脱附与体相重置率相等 ($\gamma_0 = r$)。绿色表示非重置方案的平均速度更快；蓝色表示脱附诱导重置方案的平均速度更快。其他参数为 $x_0 = 1$、 $v = 2$ 和 $\gamma_0 = 1$。

也可以像体相中那样进行重置。最后，在允许边界吸收的情况下，我们确定了随机重置的随机翻转粒子的首次通过时间统计特性。

本研究的技术进展在于利用更新形式，根据连续的重置事件和边界碰撞来刻画黏性边界之间的重置随机搜索过程。也就是说，我们通过随机翻转粒子（RTP）在不发生重置时的一系列连续游程来分析其概率密度；类似地，通过一系列连续的解吸事件来分析吸收时间密度。正如第II节所示，更新方法通常更易于使用，而且还能无缝适用于更一般的等待时间模型，例如重置过程、解吸和吸收的非马尔可夫模型。

为便于说明，我们将模型分析限定于马尔可夫重置和边界相互作用

。在此过程中，我们观察到随机翻转粒子在初始取向方面存在显著的不对称性。我们发现，在非平衡稳态（不存在吸收时）， x_0越靠近边界、体相重置率 r越高，这些不对称性就越明显。平均束缚时间分数也存在显著差异：对于 $k_0 = +$，非重置解吸方案的束缚时间分数始终较高；但对于 $k_0 = -$，这种差异则微妙得多。

对于任一种初始取向，我们发现吸收平均首次通过时间随重置率呈单峰变化

并且在其他参数均相同的情况下，$k_0 = +$ 的最优重置率小于 $k_0 = -$，因为重置会诱导粒子远离边界。更令人惊讶的是，我们发现最优体相重置率 r^* 与翻滚率 α 之间的相互作用并不简单：r^* 相对于 α 可能呈非单调变化或单峰变化，具体取决于初始取向和解吸方案。当 $k_0 = +$ 时，存在严格为正的全局最优坐标对（α^*，r^*），使吸收平均首次通过时间最小化。这些最优值因解吸方案而异。最后，尽管当 $k_0 = +$ 时（并保持其他参数不变），非重置解吸方案总能产生更快的平均首次通过时间，但只要翻滚率不过大，解吸诱导重置方案也能产生更快的平均首次通过时间。因此，体相重置和解吸重置都可以加速边界吸收。

作为对带有黏滞边界的重置随机翻转粒子行为的最后一项研究，我们考察了 (i) 解吸率与体相翻滚率相同的非重置解吸方案 ($\gamma_0 = \alpha$)，以及 (ii) 解吸率与体相重置率相同的解吸诱导重置方案 ($\gamma_0 = r$)。第一种情形的动机在于：在更高空间维度中，随机翻转粒子的边界行为通常由粒子在体相中持续变化的翻滚方向所决定。在这两种情形下，最小化平均首次通过时间都需要在以速率 α^*（相应地为 r^*）优化与边界的碰撞时间，以及通过 $\gamma = 0$促进吸收而非解吸之间取得权衡。最终，这些情形下的最优速率均落在范围 (0，α^*)（相应地为 (0，r^*)）内。最后，这项工作的一个或许最重要的结果是，对于任意参数组 (α，r，k_0)，当解吸率与体相动力学速率相同时，使平均首次通过时间最小的解吸方案，几乎总是与两者不同时的情形相反。简言之，解吸动力学对带有黏滞边界的重置随机翻转粒子的整体行为至关重要，但其作用又相当微妙。

当前工作的可能扩展有很多。首先，我们可以参照文献 [7, 8]，将扩散对一维随机翻转粒子的影响纳入考量。然而，这需要修改不含脱附诱导重置时更新方程的推导，因为每次到达事件之后，无论粒子处于左行还是右行状态，边界都会完全吸收粒子。对于半无限通道中的其他主动粒子模型，例如活性布朗粒子（ABP）和活性奥恩斯坦-乌伦贝克粒子（AOUP），也存在同样的问题 [1–4]。其次，我们可以将随机翻转粒子重新诠释为主动版本的随机搜索者，例如觅食动物，其中边界是一个部分可达目标 [17]。在这种情况下，脱附诱导重置相当于搜索者每次未能到达目标（即未被吸收）时返回基地。从动物觅食的角度来看，我们的模型有一项重要的简化：当前模型假设搜索者没有记忆。也就是说，搜索者不会改变其体相动力学，而且每当它返回目标时，都会像之前到访时那样与目标相互作用。对此的一种生物学解释是，至少对于单细胞生物而言，保留先前搜索的记忆需要消耗能量。在主动搜索过程的一般理论中，一个颇具挑战性的问题是将模型扩展到更高空间维度下的多个目标。需要解决若干困难。首先，高维空间中主动粒子的体相动力学分析并非易事。其次，正如先前针对扩散搜索过程所展示的那样，在 $\mathbb{R}^d$, $d > 1$[16, 17]，中，更新方程涉及对 $d-1$ 维目标表面上的点进行空间积分。第三，寻找效率最高的搜索方案，取决于目标在搜索区域中的分布、基地的位置，以及每个目标处的脱附方案。第四，相关的时间尺度可能不是单目标搜索时间，而是找到所有目标所需的时间。频繁重置极限下，已有研究刻画了无记忆随机翻转粒子的这类“覆盖时间”统计量 [20]，但更一般的结果仍难以获得。最后，可以在资源积累的背景下研究该模型，其中资源在目标位置依次生成；在这种情况下，近期提出的排队论框架非常适合用于分析 [21]。

VI. 数据可用性

本研究未创建或分析任何数据。

VII. 致谢

SL 获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2503350 的资助。

附录A：更新方程的推导

在本附录中，我们推导部分吸收的黏性边界情形下传播子与首次通过时间密度的更新方程。为了一般性，我们假设既存在重置到初始状态 (x_0, k_0) 的体相重置，也存在重置到状态 (x^*, k^*) 的脱附诱导重置。在正文中，我们取 $(x^*, k^*) = (x_0, k_0)$。无脱附诱导重置的情形可通过令 $(x^*, k^*) = (0, +)$ 得到。令 $X(t) \in [0, \infty)$ 表示随机翻转粒子在时刻 t 的位置，并令 $\sigma(t)$ 表示相应的速度状态。初始条件为$X(0) = x_0$ 与 $\sigma(0) = k_0$。给定吸收的首次通过时间$\mathcal{T}$，传播子可表示为

$$\rho_{r,k|k_0}(x, t|x_0) = \mathbb{E}[\delta(x - X(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}] \qquad (A.1)$$

其中$\mathbf{1}$为指示函数，且 $\mathbb{E}[\cdot]$表示关于翻滚、重置以及解吸/吸附过程的双重期望。类似地，令 $X(t)$ 表示完全吸收（非黏滞）边界情形下随机翻转粒子的位置，其相应的首次通过时间为$\mathcal{T}$ ，使得

$$p_{r,k|k_0}(x,t|x_0) = \mathbb{E}[\delta(x-\overline{X}(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\overline{\mathcal{T}}>t}]. \tag{A.2}$$

A.1 传播子的更新方程

为了推导联系$\rho_{r,k|k_0}$ 与$p_{r,k|k_0}$的更新方程，我们对随机翻转粒子（RTP）首次到达边界$x=0$的时间τ_f 进行条件化，计算总期望。首先考虑如下分解

$$\begin{aligned}\rho_{k|k_0}(x,t|x_0) = {}& \mathbb{E}[\delta(x-X(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}|\tau_f>t] \\ &+ \mathbb{E}[\delta(x-X(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}|\tau_f\le t].\end{aligned} \tag{A.3}$$

如果 $\tau_f > t$，那么必然有 $\mathcal{T} > t$，且 $X(t)$ 与 $X(t)$ 在 $\mathcal{T} > t$ 下具有相同的统计特性。因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\delta(x-X(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}|\tau_f>t] \\ &\quad = \mathbb{E}[\delta(x-\overline{X}(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\overline{\mathcal{T}}>t}] = p_{r,k|k_0}(x,t|x_0).\end{aligned} \tag{A.4}$$

另一方面，如果 $\tau_f < t$，那么随机翻转粒子会在时刻 τ_f 附着于壁面。经过一段随机等待时间 τ_1，其概率密度为 $\phi(\tau)$，粒子要么以概率 π_d 脱附并重置到 (x^*,k^*)，要么以概率 π_b被永久吸收。因此，我们得到更新关系

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } \tau_f+\tau_1 < t \\ \widehat{X}(t-\tau_f-\tau) & \text{for } \tau_f+\tau_1 > t \text{ with Prob. } \pi_d \\ \emptyset & \text{for } \tau_f+\tau_1 > t \text{ with Prob. } \pi_a \end{cases} \tag{A.5}$$

这里，$\emptyset$ 表示永久吸收态$\widehat{\ }$，而随机过程 $X(t)$在初始条件 $X(0) = x^*$下与 $X(t)$具有相同的统计性质。此外，τ_f 的到达分布独立于 $X(t)$，由$\mathcal{T}$的首次通过时间密度$f_{r,k_0}(x_0,t')$给出。最后，如果随机翻转粒子（RTP）脱附，那么 $\sigma(t) = \widehat{\sigma}(t-\tau_f-\tau_1)$，其中$\widehat{\sigma}(t)$在初始条件 $\sigma(0) = k^*$下与 $\sigma(t)$具有相同的统计性质。

因此，对 $\tau_f = \tau'$ 和 $\tau_1 = \tau''$ 进行条件化，可得

$$\mathbb{E}[\delta(x-X(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}|\tau_f\le t] = \int_0^\infty \mathrm{d}t''\,\phi(t'')\int_0^t \mathrm{d}t'\,\mathbb{E}[\delta(x-X(t))\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}|\tau_1=t',\sigma_1=t'']f_0(x_0,t') \tag{A.6}$$

with

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\delta(x-X(t)\delta_{k,\sigma(t)}\mathbf{1}_{\mathcal{T}>t}|\tau_1=t',\sigma=t''] \\ &= \Theta(\tau'+\tau''-t)\delta(x) + \pi_d\mathbb{E}[\delta(x-\widehat{X}(t-\tau'-t\tau'))\delta_{k,\widehat{\sigma}(t-\tau'-\tau')}\mathbf{1}_{\widehat{\mathcal{T}}>t}]\Theta(t-\tau'-\tau'') \\ &= \Theta(\tau'+\tau'-t)\delta(x) + \pi_d\rho_{r,k|k^*}(x,t-\tau'-\tau''|x^*)\Theta(t-\tau'-\tau''),\end{aligned} \tag{A.7}$$

其中 $\Theta(x)$ 是一个赫维赛德函数。将方程（A.4）–（A.7）代入（A.3），得到更新方程

$$\begin{aligned}\rho_{r,k|k_0}(x,t|x_0) = {}& p_{r,k|k_0}(x,t|x_0) \\ &+ \int_0^t \mathrm{d}\tau'\left[\pi_d\int_0^{t-\tau'}\mathrm{d}\tau''\rho_{k|k^*}(x,t-\tau'-\tau''|x^*)\phi(\tau'')\,\mathrm{d}\tau'' + \delta(x)\int_{t-\tau'}^\infty\phi(\tau'')\,\mathrm{d}\tau''\right]f_{r,k_0}(x_0,\tau').\end{aligned} \tag{A.8}$$

最后，若排除由边界 $x=0$ 的黏滞性所产生的贡献，并进行变量代换$\tau = \tau''+\tau'$，即可得到正文中使用的更新方程，

$$\rho_{r,k|k_0}(x,t|x_0) = p_{r,k|k_0}(x,t|x_0) + \pi_d\int_0^t\mathrm{d}\tau'\int_{\tau'}^t\mathrm{d}\tau\,\rho_{r,k|k^*}(x,t-\tau|x^*)\phi(\tau-\tau')f_{r,k_0}(x_0,\tau'). \tag{A.9}$$

Renewal equation for the FPT density

吸收首次通过时间密度可表示为

$$\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0,t) = \mathbb{E}[\delta(t-\mathcal{T})]. \tag{A.10}$$

按照推导传播子的类似思路，我们需要 $\mathcal{T} > \tau_f$，因为只有当粒子在 $x=0$ 附着于边界时才会发生吸收。取 $\tau_f < t$，并同时对 τ_f

以及等待时间 τ_1 进行条件化，便得到

$$\mathcal{F}(x_0,t) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau''\,\phi(\tau'') \int_0^t \mathrm{d}\tau' \times \mathbb{E}[\delta(\mathcal{T}-t)|\tau_f=\tau', \tau_1=\tau']f_0(x_0,\tau'). \tag{A.11}$$

吸收以概率 π_b 在时刻 $\mathcal{T}=\tau_f+\tau_1$ 发生，或者以概率 $\pi_d=1-\pi_b$ 脱离并重新进入体相区域，从而有 $\tau_f+\tau_1<\mathcal{T}$。因此，我们得到更新关系

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \tau_f+\tau_1 & \text{with probability } \pi_b \\ \widehat{\mathcal{T}}+\tau_f+\tau_1 & \text{with probability } \pi_d \end{cases}. \tag{A.12}$$

其中，$\widehat{\mathcal{T}}$ 是 $X(t)$的首次通过时间。由此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0,t) &= \int_0^\infty \mathrm{d}\tau''\,\phi(\tau'')\left[\int_0^t \mathrm{d}\tau' \left([\pi_b\delta(t-\tau'-\tau'')+\pi_d\mathbb{E}[\delta(\widehat{\mathcal{T}}+\tau'+\tau''-t)]\right) f_{r,k_0}(x_0,\tau')\right. \\ &= \pi_b\int_0^t \mathrm{d}\tau'\phi(t-\tau'')f_{r,k_0}(x_0,\tau') + \pi_d\int_0^t \mathrm{d}\tau' \int_0^{t-t'} \mathrm{d}\tau\,\mathcal{F}_{r,k^*}(x^*,t-\tau'-\tau'')\phi(t'')f_{r,k_0}(x_0,\tau').\end{aligned} \tag{A.13}$$

最后进行变量替换 $\tau=\tau'+\tau''$，得到正文中使用的首次通过时间更新方程，

$$\mathcal{F}_{r,k_0}(x_0,t) = \pi_b\int_0^t \mathrm{d}\tau'\phi(t-\tau')f_{r,k_0}(x_0,\tau') + \pi_d\int_0^t \mathrm{d}\tau' \int_{\tau'}^t \mathrm{d}\tau\,\mathcal{F}_{r,k^*}(x^*,t-\tau)\phi(\tau-\tau')f_{r,k_0}(x_0,\tau'). \tag{A.14}$$

附录B：$\widetilde{p}_{r,\ k|k_0}$的计算

对方程（3.1）进行拉普拉斯变换，并代入（$y_0,\ j_0$）=（$x_0,\ k_0$），得到

$$\begin{aligned} vk\frac{\partial\widetilde{p}_{r,k|k_0}}{\partial x} + (\alpha+r+s)\widetilde{p}_{r,k|k_0} - \alpha\widetilde{p}_{r,-k|k_0} \\ = \delta_{k,k_0}\left(1+r\widetilde{S}_{r,k_0}(x_0,s)\right)\delta(x-x_0),\end{aligned} \tag{B.1}$$

满足边界条件$\widetilde{p}_{r,\ +|k_0}(0,\ s|x_0)=0$。将 $k=-k_0$ 代入方程（B.1），可将$\widetilde{p}_{r,\ k_0|k_0}$ 表示为$\widetilde{p}_{r,\ -k_0|k_0}$ 的函数，具体如下

$$\widetilde{p}_{r,k_0|k_0} = \frac{v}{\alpha}\left[-k_0\frac{\partial\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}}{\partial x} + \lambda(s+r)\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}\right] \tag{B.2}$$

其中 $\lambda(s)=(\alpha+s)/v$。为求解 $\widetilde{p}_{r,\ k_0|k_0}$，我们将方程(B.2) 两边乘以算子 $k_0v\partial_x+(\alpha+r+s)$，并利用 B.1) 式及 $k=k_0$。经过一些代数运算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}}{\partial x^2} - \Lambda(r+s)^2\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0} \\ = -\frac{\alpha}{v^2}\left(1+r\widetilde{S}_{r,k_0}(x_0,s)\right)\delta(x-x_0)\end{aligned} \tag{B.3}$$

with

$$\Lambda(s) = \frac{1}{v}\sqrt{s(2\alpha+s)}. \tag{B.4}$$

方程（B.3）的通解为

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{r,-k_0|k_0}(x,s|x_0) = \frac{1}{v}\left(1+r\widetilde{S}_{r,k_0}(x_0,s)\right)G(x,r+s|x_0) \\ + \delta_{k_0,+}A(x_0,s)\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x}\end{aligned} \tag{B.5}$$

其中

$$G(x,s|x_0) = \frac{\alpha}{2v\Lambda(s)}\left[\mathrm{e}^{-\Lambda(s)|x-x_0|} - \mathrm{e}^{-\Lambda(s)(x+x_0)}\right] \tag{B.6}$$

其中 $A(x_0,\ s)$ 以及生存概率 $S_{r,\ k_0}(x_0,\ s)$ 通过对方程 (3.4) 进行拉普拉斯变换后自洽地确定，

$$\widetilde{S}_{r,k_0}(x_0,s) = \frac{1-v\widetilde{p}_{r,-|k_0}(0,s|x_0)}{s}. \tag{B.7}$$

首先考虑 $k_0=+$ 的情形，此时

$$\widetilde{f}_{r,+}(x_0,s) \equiv 1-s\widetilde{S}_{r,+}(x_0,s) = vA(x_0,s). \tag{B.8}$$

此外，在方程 (B.1) 中令 $x\to 0$，并取 $k_0=+$的极限，可得

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial\widetilde{p}_{r,-|+}(0,s|x_0)}{\partial x} + \lambda(r+s)\widetilde{p}_{r,-|+}(0,s|x_0) \\ &= -\frac{\alpha}{v^2}(1+rS_{r,+}(x_0,s))\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x_0} \\ &\quad + (\Lambda(r+s)+\lambda(r+s))\,A(x_0,s).\end{aligned} \tag{B.9}$$

因此，

$$A(x_0,s) = \frac{\alpha}{v^2}\frac{(r+s)\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x_0}}{s[\Lambda(r+s)+\lambda(r+s)]+(\alpha r/v)\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x_0}}. \tag{B.10}$$

还可得

$$\lim_{s\to 0}A(x_0,s) = v^{-1} \tag{B.11}$$

并由式（B.8）

$$
\begin{aligned}
T_{r,+}(x_0) &= -v\,\frac{d}{ds}A(x_0,s)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{v}{\alpha}\Big[\Lambda(r)+\lambda(r)\Big]\mathrm{e}^{\Lambda(r)x_0}-1\right) \qquad \text{(B.12)} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\sqrt{r(2\alpha+r)}+\alpha+r}{\alpha}\mathrm{e}^{\sqrt{r(2\alpha+r)}x_0/v}-1\right).
\end{aligned}
$$

转而考虑 $k_0 = -$，式（B.5）变为

$$
\widetilde{p}_{r,+|-}(x,s|x_0) = \frac{1}{v}\left(1+r\widetilde{S}_{r,-}(x_0,s)\right)G(x,r+s|x_0). \qquad \text{(B.13)}
$$

此外，由公式（B.2）可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{p}_{r,-|-}(x,s|x_0) &= \frac{1}{\alpha}\left(1+r\widetilde{S}_{r,-}(x_0,s)\right) \qquad \text{(B.14)} \\
&\times\left[\frac{\partial G(x,r+s|x_0)}{\partial x}+\lambda(s+r)G(x,r+s|x_0)\right].
\end{aligned}
$$

公式（B.7）导出隐式方程

$$
\begin{aligned}
1-s\widetilde{S}_{r,-}(x_0,s) &= \frac{v}{\alpha}\left(1+r\widetilde{S}_{r,-}(x_0,s)\right)\frac{\partial G(0,r+s|x_0)}{\partial x} \\
&= \left(1+r\widetilde{S}_{r,-}(x_0,s)\right)\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x_0}. \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

重新整理得

$$
\widetilde{S}_{r,-}(x_0,s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x_0}}{s+r\mathrm{e}^{-\Lambda(r+s)x_0}}. \qquad \text{(B.16)}
$$

最后，取 $s\to 0$ 式（B.16），可得

$$
T_{r,-}(x_0) = \frac{1}{r}\left[\mathrm{e}^{\Lambda(r)x_0}-1\right]. \qquad \text{(B.17)}
$$

[1]S. Ramaswamy. 活性物质的力学与统计。《凝聚态物理年度评论》**1**, 323-345 (2010) [2] T. Vicsek and A.Zafeiris. 集体运动。《物理报告》**517**, 71-140 (2012). [3] R. Romanczuk, M. Bar, W. Ebeling, B. Lindner and L. Schimansky-Geier. 活性布朗粒子：从个体到集体随机动力学。《欧洲物理杂志·专题》**202**, 1-162 (2012) [4] G. Bechinger, R. Di Leonardo, H. Lowen, C. Reich- hardt, G. Volpe and G. Volpe. 复杂且拥挤环境中的主动粒子。《现代物理评论》**88**, 045006 (2016) [5] L. Angelani. 一维受限跑动-游泳粒子。《物理学杂志A》**50** 325601 (2017) [6] L. Angelani. 具有一般边界条件的一维跑动翻滚运动。 *J. Phys. A* **56** 455003(2023) [7] K. Malakar, V. Jemseena, A. Kundu, V Kumar, S. Sabhapandit, S. N. Majumdar, S. Redner and A. Dhar. 一维跑动-翻滚粒子的稳态、弛豫与首次通过性质，《统计力学杂志》043215 (2018). [8] P. C. Bressloff. 带扩散的跑动-翻滚粒子：边界局部时间与零扩散极限。《统计力学杂志》**113201** (2025). [9] P. C. Bressloff. 基于遭遇的跑动-翻滚粒子模型 II：黏性边界处的吸收。《统计力学杂志》**043208** (2023). [10] P. C. Bressloff. 跑动翻滚运动的随机演算：应用视角。《英国皇家学会会刊A辑》481 20240815 (2025) [11] M. R. Evans 和 S. N. Majumdar。重置条件下的跑动-翻滚粒子：一种更新方法。《物理学杂志A：数学与理论》**51** 475003 (2018)。[12] P. C. Bressloff，重置条件下跑动-翻滚粒子的占据时间。《物理评论E》**102** 042135 (2020)。[13] I. Santra、U. Basu 和 S. Sabhapandit，随机重置条件下二维跑动-翻滚粒子。《统计力学杂志》**113206** (2020)。[14] P. C. Bressloff。随机重置条件下跑动-翻滚粒子的基于遭遇的模型。《物理学杂志A》58 125002 (2025) [15] A, Dhar、A. Kundu、S. N. Majumdar、S. Sabhapandit 和 G. Schehr。一维限制势中的跑动-翻滚粒子：稳态、弛豫和首次通过性质。《物理评论E》**99**，032132 (2019) [16] P. C. Bressloff。部分反应靶点上的扩散介导吸附与吸收：一种更新方法。《物理学杂志A》58 245003 (2025) [17] P. C. Bressloff。随机重置下的随机搜索：找到目标并非终点。《物理评论》111 054127 (2025) [18] D. S. Grebenkov，具有非马尔可夫结合/解离动力学的扩散控制反应。《化学物理杂志》**158** 214111 (2023)。[19] Y.Scher、S. Reuveni 和 D. S. Grebenkov 黏性粒子的逃逸。《物理评论研究》**5** 043196 (2023) [20] S. Linn 和 S. D. Lawley。随机重置下的覆盖时间。《混沌》**35**(4)，043124 (2025)。[21] J Giral-Barajas 和 P. C. Bressloff。作为 *G/M/c* *J. Phys. A: Math. Theor.* **58** 355001 2025 排队模型的随机一维搜索与捕获。( )。