网络化 SIR 动力学的鲁棒安全关键控制

Saba Samadi、Brooks A. Butler 和 Philip E. Par´e*

arXiv:2602.02452v1 [eess.SY] 2 Feb 2026

摘要——**本文提出一种面向网络化易感-感染-康复（SIR）流行病动力学的鲁棒安全关键控制框架，利用控制屏障函数（CBF）和鲁棒控制屏障函数应对流行病传播与防控方面的挑战。在我们的网络化 SIR 模型中，为确保公共卫生安全，每个节点都必须将感染水平控制在临界阈值以下，即使相邻节点之间存在动态交互，且流行病参数和测量误差存在固有的不确定性。我们首先推导出一种基于 CBF 的控制器，保证在标称情况下感染水平不会超过阈值。随后，我们通过引入补偿项来增强该框架，使其能够应对存在不确定性的现实流行病情景，从而强化对不确定性的安全防护：一种是针对均匀不确定性的独立方法，采用恒定边界；另一种是新颖的方法，其补偿量随状态变化，以捕捉疫情暴发早期或受抑制阶段相对噪声的增加。网络化 SIR 系统的仿真结果表明，在不确定性较低时，标称 CBF 控制器能够维持安全；而在不确定性较高时，鲁棒方法则可提供形式化的安全保证。具体而言，新方法采用更保守的控制力度，以提供更大的安全裕度；独立方法则通过允许感染水平在稳定的流行病阶段接近边界，优化资源分配。**

I. 引言

随着全球流动性不断增强，主要人口中心之间的互联互通日益密切，传染病可能在不同地区迅速传播，从而加剧流行病暴发的风险。因此，制定复杂且可解释的疫情控制策略是公共卫生研究的关键领域 [1]–[4], , 因为决策者在流行病估计和缓解过程的每个阶段都面临着重大的复杂性和不确定性。在这项工作中，我们研究网络化易感-感染-康复（SIR）流行病过程的控制 [5],[6],, 该过程描述了疾病的传播：互联系统种群中的感染者康复后，不会再次感染同一种疾病。在这样的系统中，我们旨在深入了解每个节点（即人口中心）的决策者如何确保感染人数不超过某个在不超过规定限值的同时，还要考虑相邻节点在不确定性程度各异时所产生的动态影响。在此背景下，应用控制障碍函数（CBF） [7], [8] 可作为一种有用工具，通过障碍函数所定义的标准来保障人群安全。这一点尤为重要，因为疫情控制通常侧重于防止感染水平达到不安全程度，以免医疗/治疗设施不堪重负。

尽管已有一些初步研究证明，控制屏障函数（CBFs）有助于在疫情暴发时实施安全条件 [9]–[11], , 但将控制屏障函数应用于动态耦合非线性网络系统，仍是安全关键控制领域中一项具有挑战性且尚未解决的问题 [12], [13]。对于网络化流行病，我们尤其关注如何在流行病缓解的决策中纳入鲁棒性；在这一过程中，对感染者实际数量的估计存在高度不确定性，而且旨在降低感染率或提高康复率的缓解政策的有效性也存在不确定性 [14]–[20]。由于存在这些不确定性，决策者在制定缓解措施时，可能会过于谨慎（付出高昂的经济代价），也可能过于放松（造成严重的公共卫生代价）。为此，我们采用鲁棒安全关键控制中的工具 [21], , 这类工具提供了一个可解释的框架，能够在不确定性下选择成本最低且仍能保障安全的行动；此外，我们还进一步提出一种针对流行病设计的新型低流行率放大补偿，以便在疫情早期病例数难以测量时维持安全性。

与以往工作不同，我们构建了一个用于网络化 SIR 疫情过程安全关键控制的框架，主要贡献如下：

1) 我们提出了一种闭式节点级控制障碍函数控制器，可根据相邻节点的安全条件确保 SIR 疫情过程中每个节点的安全。2) 我们将该框架扩展为一种针对疫情控制的鲁棒控制屏障函数（RCBF）形式，在应对不确定性的同时保留形式化安全保证。3) 为了提高疫情早期阶段的鲁棒性，我们提出了一种新颖的不确定性模型，用于刻画感染水平较低时噪声放大的现象，并据此设计了一种新的 RCBF 框架。

本文其余部分安排如下。第二节介绍网络化SIR模型的动力学。第三节阐述问题的构建。第四节探讨标称控制障碍函数设计。第五节

*Saba Samadi 和 Philip E. Par´e 任职于普渡大学 Elmore 电气与计算机工程学院。Brooks A. Butler 任职于加利福尼亚大学欧文分校电气工程与计算机科学系。电子邮箱：ssamadi@purdue.edu、philpare@purdue.edu、bbutler2@uci.edu。本研究部分由美国国家科学基金会资助（资助项目 NSF-ECCS #2238388），并得到加利福尼亚大学欧文分校通过橡树岭科学与教育研究所（ORISE）管理的情报界博士后研究奖学金计划支持；该计划依据美国能源部与国家情报总监办公室（ODNI）之间的机构间协议设立。

通过补偿项引入不确定性，将该框架扩展至鲁棒控制屏障函数。第六节通过在流行病网络上进行仿真，展示所提出控制器的有效性。最后，第七节总结全文并讨论未来的研究方向。

II. 网络化SIR模型动力学

本节介绍网络化SIR模型的动力学如下：

$$\dot{x}_i = -(\gamma_i + u_i)x_i + s_i \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j, \tag{1a}$$

$$\dot{r}_i = (\gamma_i + u_i)x_i, \tag{1b}$$

其中，n 表示网络中的节点数；x_i，$r_i \in [0,1]$ 分别表示节点 i处感染者和康复者所占的比例；

$s_i = 1 - x_i - r_i$ 表示节点 i处易感者所占的比例，这确保节点 i 处的总人口保持恒定且定义良好；每个节点的康复（移除）率表示为 $\gamma_i > 0$；$\beta_{ij} \geq 0$ 表示从节点 j 到节点 i的感染率；节点 i 处的控制输入记为 $u_i \in U_i = [0, \bar{u}_i] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$，其中 $\bar{u}_i$ 表示可用的最大控制力度。控制输入 u_i 可解释为旨在提高节点 i处康复率的干预力度；可通过加强医疗治疗、强制隔离、快速检测与隔离或加快疫苗接种计划等措施来实现这种提升。节点之间通过项$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j$产生的耦合，反映了相邻人群对节点 i感染动力学的影响。为将系统表示为控制仿射形式，可将动力学改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{r}_i \end{pmatrix} = f_i(\mathbf{x}_i, r_i) + g_i(x_i)u_i,$$

$$f_i(\mathbf{x}_i, r_i) = \begin{pmatrix} -\gamma_i x_i + (1 - x_i - r_i)\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j \\ \gamma_i x_i \end{pmatrix}, \tag{2a}$$

$$g_i(x_i) = \begin{pmatrix} -x_i \\ x_i \end{pmatrix}, \tag{2b}$$

其中，$\mathbf{x}_i = (x_i, x_{\mathcal{N}_i^+})$ 表示一跳邻域状态向量，$\mathcal{N}_i^+$ 是直接影响节点 i 的节点集合，$x_{\mathcal{N}_i^+}$ 表示这些一跳邻居中感染个体所占的比例。

III. 问题陈述

为确保每个节点的感染水平低于临界阈值，我们引入安全约束。我们将每个节点的安全约束定义为：

$$h_i(x_i) = \bar{x}_i - x_i, \tag{3}$$

其中，$\bar{x}_i \in (0,1]$ 是节点 i处允许的最高感染水平。我们将安全函数$h_i(x_i)$的时间导数记为 $h_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i)$，它同时取决于 x_i 和 r_i。节点 i的安全集为

$$C_i = \{x_i \in [0,1] : h_i(x_i) \geq 0\}, \tag{4}$$

这要求对于所有时间，$x_i(t) \leq \bar{x}_i$，才能将节点i 视为安全。安全条件可以理解为：在医疗资源有限的情况下，一个节点收治感染者的最大能力。

注1. 在无病平衡点 $x_i = 0$处，控制输入 u_i 对动力学没有影响，因为 $g_i(x_i) = 0$。当 x_i 从上方趋近于 0 时，系统的可控性逐渐降低，$g_i(x_i)$ 的幅度与 x_i成比例地减小，从而削弱控制权。然而，由于 $h_i(x_i) = \bar{x}_i > 0$ (3)，状态已经处于安全集内，因此无需干预 *[22]*。因此，在本文余下部分中，我们关注非平凡情形$x_i \in (0,1]$。

定义1. 如果存在一个可行的控制输入 $u_i \in U_i$，使得相应的状态轨迹 $x_i(t)$ 对所有$t \geq 0$都保持在(4) 中的安全集内，则称节点 i是安全的。等价地，如果控制输入能够确保

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) \geq -\alpha_i(h_i(x_i)), \tag{5}$$

其中 α_i 是扩展类-$\mathcal{K}$ 函数 *[7]*。

定义 2. 对于每个节点 i，定义 $\mathcal{V}_i := \{\mathbf{x}_i : h_j(x_j) \geq 0, \forall j \in \mathcal{N}_i^+\}$，为所有邻居均满足其安全约束的一跳邻域状态集合。若存在状态$\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}_i$，使得不存在能够满足(5)的输入 $u_i \in U_i$，则称节点 i 是易受攻击的 。

问题表述： 考虑一个由式 (1) 中的 SIR 动力学建模的相互连接人群网络。每个节点 i 都必须使用局部控制输入 $u_i \in U_i$，将其感染水平 x_i 控制在安全阈值 $\bar{x}_i$ 以下。由于非线性感染项，节点 i 的安全性取决于其自身状态以及邻居的感染水平。给定节点 i邻居的感染容忍度（预定义的安全边界），我们的目标是确定节点 i所需的最小控制力度 $\bar{u}_i$ 。目标是确保该节点按照定义 2 所述不易受攻击。具体而言，控制力度必须保证在安全边界$x_i = \bar{x}_i$处，$h_i(x_i)$ 的时间导数非负。即使相邻节点的感染水平达到最大值、对节点 i的安全性产生最强负面影响时，这一要求也必须成立。应对这一最坏情况促使我们需要采用鲁棒缓解策略。

IV. 名义安全关键控制

为保持安全，我们采用控制障碍函数框架 [7], [8]。在本节中，我们首先推导刻画可容许控制输入的控制障碍函数条件，然后分析节点级易受攻击性。根据注1，我们在 $x_i \in (0, \bar{x}_i]$上分析CBF条件。

A. 控制障碍函数推导

我们利用李导数计算 $h_i(x_i)$ 的一阶导数，如下所示

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) = \mathcal{L}_{f_i} h_i(\mathbf{x}_i) + \mathcal{L}_{g_i} h_i(x_i) u_i, \tag{6}$$

其中，光滑函数 h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 沿向量场 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在 z 处的李导数定义为

$$\mathcal{L}_f h(z) \triangleq \frac{\partial h(z)}{\partial z} f(z).$$

根据 (3)， $\mathcal{L}_{f_i} h_i$（$\mathbf{x}_i$）和 $\mathcal{L}_{g_i} h_i$（x_i）的计算如下:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = -1, \quad \frac{\partial h_i}{\partial r_i} = 0.$$

因此:

$$\mathcal{L}_{f_i} h_i = \gamma_i x_i - (1 - x_i - r_i) \sum_j \beta_{ij} x_j,$$

$$\mathcal{L}_{g_i} h_i = x_i, \text{and}$$

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) = (\gamma_i + u_i) x_i - (1 - x_i - r_i) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j.$$

我们的目标是找到满足 u_i 满足 (5) 所需的最小 $u_i \in U_i = [0, \bar{u}_i]$; 因此，控制输入必须选为

$$(\gamma_i + u_i) x_i - (1 - x_i - r_i) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j + \alpha_i(\bar{x}_i - x_i) \geq 0,$$

$$u_i \geq \frac{(1 - x_i - r_i) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j - \gamma_i x_i - \alpha_i(\bar{x}_i - x_i)}{x_i}, \quad (7)$$

$$u_i = \min\Bigg(\bar{u}_i, \quad (8)$$

$$\max\Big(0, \frac{(1 - x_i - r_i) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j - \gamma_i x_i - \alpha_i(\bar{x}_i - x_i)}{x_i}\Big)\Bigg).$$

不等式 $u_i \leq \bar{u}_i$ 是控制输入 u_i可行的必要条件，这保证了 $u_i \in U_i$。将 u_i解释为实施安全措施所需的资源，有助于我们评估受 $\bar{u}_i$ 限制的资源是否足以确保节点安全。当所需资源超过 $\bar{u}_i$时，该节点即如第 IV-B 节所定义的那样易受攻击，这与推论1中的界一致；这一视角也为接下来的脆弱性分析提供了动机。

B. 节点脆弱性分析

我们采用基于边界的方法，研究节点在何种条件下会变得易受攻击。具体而言，我们关注节点的感染水平达到其上阈值的情形，即当 $x_i = \bar{x}_i$ （或等价地， h_i（x_i）$= 0$ (3)）时。因此，在边界处，要确保安全，时间导数 $\dot{h}_i$（$\mathbf{x}_i$， $\bar{x}_i$， r_i， u_i）必须保持非负，

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, \bar{x}_i, r_i, u_i) \geq -\alpha_i(0) = 0.$$

其中， $\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, \bar{x}_i, r_i, u_i)$ 表示在边界 $x_i = \bar{x}_i$ 处计算 $\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i)$。

定义3. 对每个节点 i，定义

$$\mathcal{S}_i := \Big\{ \mathbf{x}_i : h_i(x_i) \geq 0 \textit{ and } h_j(x_j) \geq 0, \ \forall j \in \mathcal{N}_i^+ \Big\},$$

它表示这样的一组一跳邻域状态：在这些状态下，节点 i 及其所有直接影响的邻居都处于安全状态。如果对于每个 $\mathbf{x}_i \in \mathcal{S}_i$，都存在一个可容许控制输入 $u_i \in U_i$满足安全条件(5)，即该集合是正向不变的，那么我们称 $\mathcal{S}_i$ 为节点级可行域。我们将 ∂S_i 记作可生存域 $\mathcal{S}_i$ 中满足 $h_i(x_i) = 0$ 和 $h_j(x_j) = 0$的点集。

定义 4. 给定(1) 中的网络化 *SIR* 动力学和安全约束 (3)，如果对于节点 i 的节点级可行域 ∂S_i 边界上的所有$\mathbf{x}_i$，都存在一个控制输入 u_i 使得(5)成立，则称函数 $h_i(x_i)$ 是节点 i 的节点级控制屏障函数（NCBF）。

NCBF 通过适当选择 u_i，并考虑相邻节点的影响，确保节点 i的感染者数量保持在阈值 $\bar{x}_i$ 以下。

假设 1. 对于每个节点 i，最大控制力度 $\bar{u}_i$ 足够大，因此，对于每个感染水平 $x_i \in (0, \bar{x}_i]$，以及所有允许的恢复率 $r_i \in [0, 1 - x_i]$ 和相邻节点的所有可能感染水平 $x_j \in (0, \bar{x}_j]$，至少存在一个控制输入 $u_i \in U_i$，能够满足(7)中的安全条件。

在已确定每个节点都具有足够大的控制输入以满足其局部安全要求之后，我们考虑保证整个网络安全得以维持的条件。具体而言，我们要求每个节点的邻居也具备合适的控制屏障函数，从而确保局部安全分析能够有效扩展到整个网络。

假设2. 设 $n_j = 1 + |\mathcal{N}_j^+|$，其中 $\mathcal{N}_j^+$ 表示直接影响节点 j 的节点集合。对于每个邻居$j \in \mathcal{N}_i^+$，存在一个节点级控制屏障函数h_j： $\mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}$，以及相应的可生存域 S_j，如定义*3*所定义。

需要指出的是，假设2是关于邻居能力的最佳情形；我们将在下一节讨论影响邻居的不确定性。在这些假设下，我们现在可以正式给出每个节点的安全集为正向不变的条件。

定理1. 基于***NCBF***的易感-感染-康复模型正向不变性对于由 (1) 定义的网络化动态*SIR*系统，在假设*1*与假设*2*下，集合 $S_i \subseteq C_i$ 为正向不变，当且仅当 h_i 是一个*NCBF*。

证明。 **必要性:**

由于 h_i 是NCBF，根据定义4，对于所有$\mathbf{x}_i \in \partial S_i$，存在 $u_i \in U_i$ 使得:

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) \geq -\alpha_i(h_i(x_i)).$$

由于 $h_i(x_i) = \bar{x}_i - x_i$，且在边界 $x_i = \bar{x}_i$处，我们有 $h_i(x_i) = 0$:

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, \bar{x}_i, r_i, u_i) \geq 0.$$

为确保节点 i即使在最不利条件下仍然安全，我们假设每个邻居 $j \in \mathcal{N}_i^+$ 都处于其感染阈值（$x_j = \bar{x}_j$）。由于 h_i 是NCBF，在

这种最坏情况下，并根据假设1与假设2，必然存在一个控制输入 $u_i \in U_i$ ，使得：

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, \bar{x}_i, r_i, u_i) = (\gamma_i + u_i)\bar{x}_i - (1 - \bar{x}_i - r_i)\left(\beta_{ii}\bar{x}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^+} \beta_{ij}\bar{x}_j\right) \geq 0.$$

因此，存在一个可行的 u_i （可能是 $\bar{u}_i$），能够维持. $h_i \geq 0$。将不等式两边除以 $\bar{x}_i$ ，可得到以下等价形式。令 u_i 取其上界 $\bar{u}_i$，我们得到一个保守条件，以保证 $h_i \geq 0$：

$$\gamma_i + \bar{u}_i - (1 - \bar{x}_i - r_i)\beta_{ii} - (1 - \bar{x}_i - r_i)\sum_{j \in \mathcal{N}_i^+} \beta_{ij}\frac{\bar{x}_j}{\bar{x}_i} \geq 0,$$

这确保 $h_i(x_i(t))$不会降至零以下，从而维持 $x_i(t) \leq \bar{x}_i$。因此，对于任意初始状态$x_i(0) \in S_i$，系统都不会离开 S_i。由此， $S_i \subseteq C_i$ 是正向不变的。

充分性：

已知 $S_i \subseteq C_i$ 是正向不变的。反设 h_i 不是 NCBF。因此，存在某个$\mathbf{x}_i \in \partial S_i$ ，使得对所有 $u_i \in U_i = [0, \bar{u}_i]$：

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) < -\alpha_i(h_i(x_i)) = 0.$$

如果 h_i 不是 NCBF，那么对于边界条件 $x_i = \bar{x}_i$，有 $h_i(x_i) = 0$，且对所有 u_i，控制条件均不满足：

$$u_i < (1 - \bar{x}_i - r_i)\left(\beta_{ii} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^+} \beta_{ij}\frac{\bar{x}_j}{\bar{x}_i}\right) - \gamma_i,$$

这意味着：

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) < -\alpha_i(\bar{x}_i - x_i).$$

因此， $h_i(x_i(t))$会降至零以下，导致$x_i(t) > \bar{x}_i$，从而违反正向不变性。因此，如果 $S_i \subseteq C_i$ 正向不变，则 h_i 必须是 NCBF。 ■

这一结果保证，只要某个节点具有有效的 NCBF，其安全集就保持正向不变。定理1表明，要使 $h_i(x_i)$成为 NCBF，对于 S_i内的所有状态，都必须存在可行的控制输入 $u_i \in U_i$ 。接下来，我们推导一个关于必要控制输入的推论。

推论1. 如果最大控制力度 $\bar{u}_i$ 满足

$$\bar{u}_i \geq (1 - \bar{x}_i - r_i^0)\beta_{ii} + (1 - \bar{x}_i - r_i^0)\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\frac{\bar{x}_j}{\bar{x}_i} - \gamma_i,$$

其中 $r_i^0 = r_i(0)$，则始终存在一个可容许控制输入 $u_i \in U_i$ ，以保证节点 i 安全。

根据定义1和定理1的证明，推论1考虑了节点 i安全性的最坏情形条件，即所有节点均处于其感染阈值，且恢复状态尽可能小。若恢复状态的初始条件未知，则 r_i^0 可替换为零，并假设当前未感染者均为易感者。

由于真实流行病涉及模型和报告不确定性，我们用鲁棒控制屏障函数扩展该框架，通过增加不确定性缓冲来保持这些保证。

V. 网络化 SIR 模型的鲁棒控制屏障函数

在本节中，我们将不确定性纳入我们的框架。首先，我们将在[21] 中提出的鲁棒性框架应用于网络化 SIR 模型。我们从一般的不确定系统开始

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_i \\ \dot{r}_i\end{pmatrix} = f_i(\mathbf{x}_i, r_i) + g_i(x_i)u_i + \mu_i(\mathbf{x}_i, u_i), \tag{9}$$

其中，对于每个节点 i，不确定性 $\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i)$ 表示未建模效应或扰动。当存在不确定性时，根据式 (9) 中的完整动力学计算 $h_i(x_i)$ 的时间导数，可得

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) = \mathcal{L}_{f_i}h_i(\mathbf{x}_i) + \mathcal{L}_{g_i}h_i(x_i)u_i + \mathcal{L}_{\mu_i}h_i(\mathbf{x}_i, u_i),$$

其中

$$\mathcal{L}_{\mu_i}h_i(\mathbf{x}_i, u_i) = \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i).$$

由于 $h_i(x_i) = \bar{x}_i - x_i$ 且 $\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = -1$，项 $\mathcal{L}_{\mu_i}h_i(\mathbf{x}_i, u_i)$ 可简化为

$$\mathcal{L}_{\mu_i}h_i(\mathbf{x}_i, u_i) = -\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i).$$

不确定性使我们无法找到一个控制输入u_i ，使其对所有可能的 μ_i都满足式 (5)。鲁棒控制障碍函数（ RCBF）框架 [21]通过引入补偿项 $\sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i)$ 解决了这一问题。根据 [21], 中的引理 2，保证鲁棒安全性的一个充分条件是补偿项满足

$$\mathcal{L}_{\mu_i}h_i(\mathbf{x}_i, u_i) + \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq 0. \tag{10}$$

我们的目标是找到一个控制器集合 $u_i \in \mathcal{K}_i^{RCBF} \subseteq U_i$ ，其中

$$\mathcal{K}_i^{RCBF} = \Big\{u_i \in U_i \ : \ \mathcal{L}_{f_i}h_i(\mathbf{x}_i) + \mathcal{L}_{g_i}h_i(x_i)u_i - \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq -\alpha_i\big(h_i(x_i)\big), \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_{\mu_i}h_i(\mathbf{x}_i, u_i) + \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq 0\Big\}. \tag{11}$$

换言之，从集合 $\mathcal{K}_i^{RCBF}$中选取的任意控制器 u_i 都能保证修改后的鲁棒安全条件

$$\mathcal{L}_{f_i}h_i(\mathbf{x}_i) + \mathcal{L}_{g_i}h_i(x_i)u_i - \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq -\alpha_i\big(h_i(x_i)\big) \tag{12}$$

成立，同时还必须满足不等式 (10)。现在，我们将鲁棒安全性的概念从 [21] 推广到流行病学场景。

定义 5. </style}若对于不确定性$(\mathbf{x}_i, u_i)$ 的每个可容许实现以及每个初始状态 $x_i(0) \in C_i$，都存在一个控制输入 $u_i \in U_i$ 使得(12)成立，则称节点 i 为鲁棒安全的 。

不确定性在流行病过程中起着核心作用，因为病例数往往存在漏报，而且小规模疫情暴发难以准确测量。因此，除非妥善处理不确定性，否则名义安全性保证可能无法成立。为应对这一挑战，我们设计了补偿项

，将不确定性在流行病动力学中的可能表现纳入RCBF框架。我们介绍了两种补偿项（σ_i）选择。

A. 与控制输入无关的有界不确定性

在网络化SIR模型中，每个节点都可能面临报告误差或随机波动，例如由行为变化或环境因素引起的、不可预测的疾病传播变化，而这些变化并不取决于节点降低感染的力度。例如，无论本地隔离规则如何，每个节点都可能持续存在一定比例的漏报感染或季节性变化。在这种情况下，不确定性上界 $\bar{\mu}_i$ 可被视为控制障碍函数约束中的固定偏移，从而得到一种更为保守但直接的策略：每个节点的控制器始终预留足够的安全裕度，以应对最坏情况下的偏移。尽管在感染水平较低时该方法可能高估误差，但这种独立方法能够确保每个节点在不断变化的网络交互中保持稳健安全，而无需对控制如何影响不确定性作出详细假设。

假设该不确定性有上界，且存在一个上界 $\bar{\mu}_i \geq 0$ 满足

$$\|\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i)\| \leq \bar{\mu}_i \quad \forall \mathbf{x}_i, u_i. \tag{13}$$

一个自然的选择是假设 $\sigma_i(\mathbf{x}_i) = \bar{\mu}_i \|\frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}_i}\|$。由于 $\|\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\| = 1$，我们得到

$$\sigma_i = \bar{\mu}_i. \tag{14}$$

B. 低流行率放大不确定性

在疫情暴发初期（或成功遏制疫情后），节点的感染比例 x_i 可能极低。在这种情况下，病例数来自极为有限的样本，容易出现漏报、延迟确诊和较高的相对统计噪声。众所周知，疾病监测系统恰恰会在这种低流行率情形下失效：病例数有限时，基于算法的检测效果不佳。

如果报告的感染数服从泊松计数统计，计数的标准差会随计数的平方根增长。在泊松假设下，报告的感染比例 $(\hat{x}_i)$ 的 $\mathrm{std}(\hat{x}_i) \propto \sqrt{\hat{x}_i}$（绝对误差）。然而，变异系数 $\mathrm{std}(\hat{x}_i)/\mathbb{E}[\hat{x}_i] \propto 1/\sqrt{\hat{x}_i}$（其中 std 表示标准差，$\mathbb{E}$表示期望），因此当 $\hat{x}_i \to 0$[23] 时，相对误差会急剧增大。基于泊松卡尔曼滤波的疾病监测模型记录了低发生率下泊松近似的这一失效现象：当发生率远小于 [24] 时，近似便会失效。

为描述这一现象，我们引入一种不确定性，其幅度随 $x_i \to 0$ 增大：

$$\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i) = \frac{d_i(\mathbf{x}_i, u_i)}{\sqrt{(x_i + \delta)}}, \tag{15}$$

其中，$0 < \delta \ll 1$ 在 $x_i = 0$ 附近对表达式进行正则化，而 $d_i(\mathbf{x}_i, u_i)$ 表示潜在的不确定性分量。我们假设 $\|d_i(\mathbf{x}_i, u_i)\| \leq d_{i\circ}$ 因此，李导数的计算变为

$$\mathcal{L}_{\mu_i} h_i(\mathbf{x}_i, u_i) = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \mu_i(\mathbf{x}_i, u_i) = -\frac{d_i(\mathbf{x}_i, u_i)}{\sqrt{(x_i + \delta)}},$$

因此，在最坏情况下

$$\|\mathcal{L}_{\mu_i} h_i(\mathbf{x}_i, u_i)\| \leq \frac{\bar{d}_i}{\sqrt{(x_i + \delta)}},$$

从而得到保守的补偿项 m

$$\sigma_i(x_i) = \frac{\bar{d}_i}{\sqrt{(x_i + \delta)}}. \tag{16}$$

C. 鲁棒安全综合与理论保证

根据不确定性的类型，可为节点 i选择补偿项 (14) 或 (16)。从鲁棒安全集中选取的控制器 u_i

$$\mathcal{K}_i^{RCBF} = \Big\{ u_i \in U_i \ : \ \gamma_i x_i - (1 - x_i - r_i) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j + x_i\, u_i - \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq -\alpha_i(\bar{x}_i - x_i) \Big\}, \tag{17}$$

其中，根据式 (10) 的要求，

$$-\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i) + \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq 0,$$

确保即使在不确定性的最坏情况实现下，安全条件仍然成立。

假设 3。设存在一个补偿项$\sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i)$ ，使得(12) 中的修正的鲁棒控制屏障函数条件成立，对所有$(\mathbf{x}_i, u_i)$均成立，并且还满足 (10)。

在对补偿项作出这一假设的基础上，我们可以给出先前正向不变性结果的鲁棒对应形式，从而确保即使存在未建模扰动，系统仍然安全。

引理 1（鲁棒控制屏障函数下的正向不变性）。考虑(9) 中节点 i 的不确定动力学，并定义(5) 中的安全约束 $h_i(x_i)$ 以及 (4) 中的安全集 C_i 。在假设 *3* 下，对于任何满足 (12)的控制输入 u_i ，安全集 C_i 均为正向不变集。

证明。由于 $h_i(x_i) = \bar{x}_i - x_i$， h_i 关于不确定性向量场 μ_i 的李导数为

$$\mathcal{L}_{\mu_i} h_i(\mathbf{x}_i, u_i) = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \mu_i(\mathbf{x}_i, u_i) = -\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i).$$

因此，(10)可以写为

$$-\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i) + \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i) \geq 0,$$

这意味着不确定性的最坏情况影响由 σ_i 补偿。回顾 $h_i(x_i)$ 的时间导数，

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) = \mathcal{L}_{f_i} h_i(\mathbf{x}_i, r_i) + \mathcal{L}_{g_i} h_i(x_i) u_i + \mathcal{L}_{\mu_i} h_i(\mathbf{x}_i, u_i).$$

通过加上并减去 $\sigma_i(\mathbf{x}_i,\ u_i)$，我们得到

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) = \Big[\mathcal{L}_{f_i} h_i(\mathbf{x}_i, r_i) + \mathcal{L}_{g_i} h_i(x_i) u_i - \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i)\Big] + \Big[\mathcal{L}_{\mu_i} h_i(\mathbf{x}_i, u_i) + \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i)\Big].$$

根据 (12)，第一个括号中的各项都有下界$-\alpha_i\big(h_i(x_i)\big)$；根据 (10)，第二个括号中的项非负。因此，

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) \geq -\alpha_i\big(h_i(x_i)\big).$$

根据 [21], 的定理1（Nagumo 定理），众所周知，若对于某个扩展类-$\mathcal{K}$函数 α_i，有 $\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) \geq -\alpha_i\big(h_i(x_i)\big)$，则集合 $C_i = \{x_i \in [0,1] :\ h_i(x_i)\ \geq 0\}$ 是正向不变的。 ■

为正式保证鲁棒安全控制器的存在性，我们提出以下假设，并随后给出相应的理论结果。

假设 4. 对于动力学由 (9) 定义、安全函数 $h_i(x_i)$由 (5)定义的节点 i，假设存在一个根据 (14) 或(16)选取的补偿项 $\sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i)$，且对于可生存域中的每个 x_i，由 (17)定义的集合$\mathcal{K}_i^{RCBF}$非空。此外，存在一个类-$\mathcal{K}$ 函数 α，使得集合 $\mathcal{K}_i^{RCBF}$ 对所有 $x_i \in (0, \bar{x}_i]$都保持非空。

命题 1（鲁棒安全控制器的存在性）。在假设 *4* 下，对于任意输入 $u_i^* \in \mathcal{K}_i^{RCBF}$，闭环动力学均保持鲁棒安全，这意味着在 （4） 中定义的安全集 C_i 是正向不变的。

证明。根据假设 4，对于任意 x_i，在（17）中定义的集合 $\mathcal{K}_i^{RCBF}$ 非空。因此，对于每个状态 x_i，至少存在一个控制输入 u_i^* 满足鲁棒控制障碍函数不等式：

$$\mathcal{L}_{f_i} h_i(\mathbf{x}_i) + \mathcal{L}_{g_i} h_i(x_i) u_i^* - \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i^*) \geq -\alpha_i\big(h_i(x_i)\big).$$

此外，根据构造，补偿项满足

$$\mathcal{L}_{\mu_i} h_i(\mathbf{x}_i, u_i^*) + \sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i^*) \geq 0,$$

则沿闭环轨迹的 $h_i(x_i)$ 的总时间导数为

$$\dot{h}_i(\mathbf{x}_i, r_i, u_i) \geq -\alpha_i\big(h_i(x_i)\big).$$

由此可知，闭环动力学在控制器 u_i^* 作用下满足安全集 C_i 正向不变性所要求的鲁棒安全条件。直接应用引理 1，我们可以得出集合 C_i 是正向不变的，这意味着所选控制器 u_i^* 使系统保持鲁棒安全。 ■

推论2. 设假设*3*成立。若最大控制努力 $\bar{u}_i$ 满足

$$\bar{u}_i \ \geq\ (1-\bar{x}_i-r_i^0)\beta_{ii} + (1-\bar{x}_i-r_i^0)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\frac{\bar{x}_j}{\bar{x}_i} - \gamma_i + \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{x}_i},$$

其中 $r_i^0 = r_i(0)$ 和 $\bar{\sigma}_i = \max_{\mathbf{x}_i}\sigma_i(\mathbf{x}_i, u_i)$，始终存在一个可容许输入 $u_i \in U_i = [0, \bar{u}_i]$，保证节点 i 具有鲁棒安全性。

VI. 实验与结果

我们在具有 $n = 3$ 个互联节点的网络化SIR模型上评估所提出的安全关键控制框架。每个节点的动力学由（1）描述。在仿真中，网络拓扑由一组有向边定义，使得每个节点都影响其他所有节点。感染率矩阵（B）定义为

$$B = 0.55\, I_n + 0.45\,(1_n 1_n^\top - I_n),$$

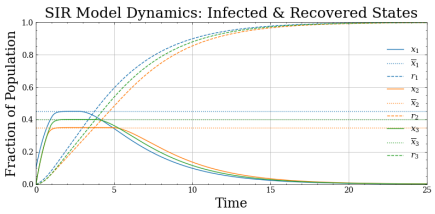
这意味着对 $i \neq j$有 $\beta_{ii} = 0.55$ 和 $\beta_{ij} = 0.45$。康复率对所有节点统一设为 $\gamma_i = 0.3$。在我们的设置中，最大可接受感染阈值$\bar{x}_i = [0.45, 0.35, 0.4]$，而最大控制输入$\bar{u}_i = [0.55, 0.77, 0.41]$，它们是介于0和1之间的随机数。

仿真在时间区间 $t \in [0, T]$ 上进行，时间步长为 $dt = 10^{-4}$ 以及 $T = 25$。初始条件的选取使得节点 $i = 1$ 以感染水平 $x_1(0) = 1 - s_1(0) = 0.1$ 开始（其中 $s_1(0) = 0.9$），而其他节点从零感染开始。在每个时间步，依据CBF条件(8)在每个节点计算安全关键控制输入 u_i，以确保感染水平保持低于阈值 $\bar{x}_i$。

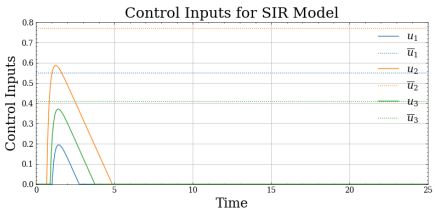
A. 标称条件下的*CBF*

我们对CBF进行仿真，其中安全关键控制器基于障碍函数条件 (5) 计算，并确保在不存在不确定性的情况下，感染水平 x_i 保持低于阈值 $\bar{x}_i$。当某个节点的感染水平开始接近或超过其安全阈值时，相应的控制输入会在允许范围内增大，以提高康复率并使状态回到安全区域。图 1a 展示了所有节点的感染与康复状态，其中感染水平均保持在安全标准以下。图 1b 展示了施加于各节点的控制输入随时间的变化，这些输入始终处于规定的限值内。仿真结果（图 1a 和图 1b）表明，标称CBF控制器能够有效地将感染水平限制在安全阈值以下，并且仅在需要时启用控制输入。这些观察结果表明，在不存在扰动的情况下，控制器能够有效平衡最小干预与流行病遏制之间的权衡。

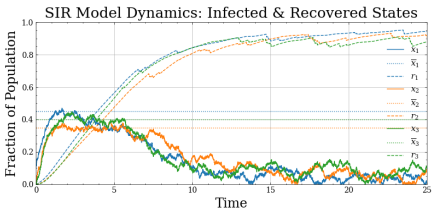
我们还通过施加方差为 1.0 的独立同分布高斯过程噪声，在扰动条件下考察了CBF。图 1c 显示，所有节点中感染者和康复者所占的比例都在允许范围内波动。结果还表明，由于噪声的存在，节点感染数偶尔会超过阈值。这些结果说明，CBF在存在不确定性时并不可靠，尤其是在噪声幅度增大或最大安全感染阈值降低的情况下。为解决这一问题，我们将鲁棒CBF方法应用于含噪网络。



(a) 标称动力学

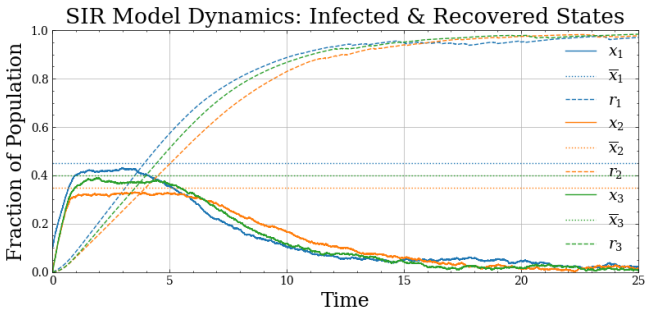


(b) 标称条件下的控制输入

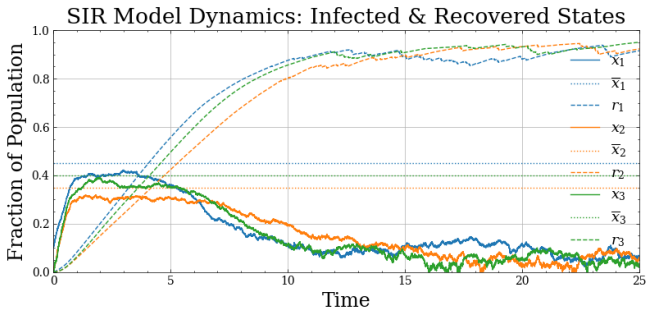


(c) 含噪动力学

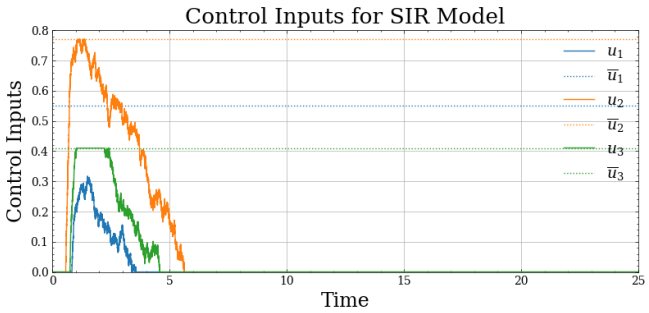
图 1：标称条件下及存在噪声时，网络化SIR模型中感染与康复状态的时间演化，以及相应的控制输入。



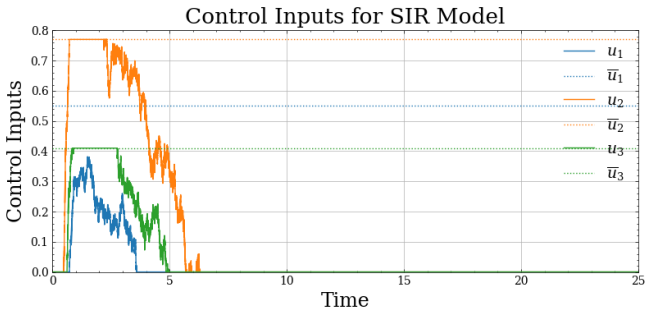
(a) 存在独立不确定性时的动力学



(b) 存在低流行率放大不确定性时的动力学



(c) 控制输入（独立不确定性）



(d) 控制输入（低流行率放大不确定性）

图 2：独立不确定性和低流行率放大不确定性下，含噪网络化SIR模型中的感染与康复状态及控制输入的时间演化。

B. 不确定性下的鲁棒控制障碍函数

我们通过补偿项 $\sigma_i(\mathbf{x}_i,\ u_i)$ 对障碍条件进行鲁棒化，从而实现鲁棒CBF框架，具体如第 V 节所述。我们考虑了两种补偿项的选择：独立 (14) 和 低流行率增强 (16)。

为评估我们的鲁棒框架，我们考察式 (14) 和式 (16) 中不同补偿项选择在反映不同不确定性模型的各种噪声结构下的表现。具体而言，我们考虑：(i)独立 不确定性，由加性高斯噪声 $\mathcal{N}(0,1)$ 建模，其上界通过将不确定性上界设为 $\bar{\mu}_i = 0.15$ 来限定，且该上界独立于 x_i 和 u_i；(ii) 低流行率放大不确定性，该不确定性随感染水平缩放，使得$\underline{\mu_i(\mathbf{x}_i, u_i)} \overset{\epsilon_i}{=} \sqrt{(x_i+\delta)}$，其中 $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$，$\delta = 0.01$，且扰动项的上界设为 $d_i = 0.15$。

图 2 比较了应用于含噪网络的独立和低流行率放大补偿策略已运行的易感-感染-康复模型。如图2a和图2c所示，独立方法以及图2b和图2d所示的低流行率放大方法中，两种鲁棒控制障碍函数控制器都能有效地将所有感染轨迹维持在各自阈值以下，但其运行特性

表I：两种方法下每个节点的最大感染量和控制输入。

Node	**独立**		**低流行率放大**	
	$x_i^{\max}$	$u_i^{\max}$	$x_i^{\max}$	$u_i^{\max}$
节点1	0.426	0.316	0.422	0.382
节点2	0.329	0.770	0.319	0.770
节点3	0.396	0.410	0.391	0.410

表I：整个网络的汇总结果。

方法	**平均最小安全裕度**	**积分控制**
独立	0.016	3.311
低流行率	0.023	4.858

有所不同。独立策略假设存在恒定的最坏情况扰动界（13），因此在整个仿真时域内采取的控制干预相对一致。相比之下，低流行率公式（16）在感染水平较低时分配更多补偿，从而采取更有力的早期行动，遏制初发疫情暴发，并为抵御噪声留出更大余量，但代价是总体输入力度更大。动力学方面也存在其他差异：例如，低流行率放大方法使各节点的感染峰值较低，但累积控制努力更高。从这些比较中可以看出，策略选择涉及一项根本性的权衡：控制效率（在扰动水平稳定的情形下倾向于独立方法）与增强的保守性（在高不确定性、低感染水平的情形下倾向于低流行率放大方法）之间的权衡，使决策者能够根据具体的疫情背景和资源约束作出选择。

表I汇总了两种方法下各节点的最高感染水平（$\max_{t\geq 0} x_i(t)$）和最大控制动作（$\max_{t\geq 0} u_i(t)$）。表II对整个网络的结果进行了汇总。“平均最小安全裕度”列显示所有节点上感染阈值与感染水平之差的最小值随时间的平均值，计算方式为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\min_{t\geq 0}(\bar{x}_i - x_i(t))$；数值越高，表明在维持安全缓冲方面越保守。“积分控制”列将整个网络的总控制力度量化为 $\int_0^T \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\,dt$。这些表证实了图 2中观察到的权衡：独立策略的累积力度较小，但运行时更接近安全边界；而低流行率策略使用更多资源，以确保更大的安全余量。

VII. 结论与未来工作

我们针对网络化 SIR 疫情模型，提出了一种基于控制屏障函数和鲁棒控制障碍函数的安全关键控制框架。通过将感染水平约束视为障碍函数，并通过补偿项 (σ_i) 纳入噪声，我们的方法提供了一种系统性方法，可在存在测量噪声和模型不确定性的情况下，将感染控制在预设阈值以下。仿真结果表明，我们提出的低流行率放大公式比独立方法更加保守：当感染水平较低时，它会分配更强的干预措施，以维持更大的安全裕度；而独立方法的保守性较低，因此控制效率更高，在确保轨迹安全的同时，使其运行状态更接近规定阈值。在不确定性较高或存在结构化扰动时，这些鲁棒方法至关重要，因为此时名义控制障碍函数无法提供安全保证。未来的工作将研究更贴近实际的时变扰动模型，包括报告延迟。

参考文献

[1] R. M. Anderson 和 R. M. May，《人类传染病：动力学与控制》。牛津大学出版社，1992年。

[2] H. Andersson 和 T. Britton，《随机流行病模型及其统计分析》。Springer Science & Business Media，2012年，第151卷。[3] M. J. Keeling 和 P. Rohani，《人类与动物传染病建模》。新泽西州：普林斯顿大学出版社，2008年。[4] J. Sereno、A. Anderson、A. Ferramosca、E. A. Hernandez-Vargas 和 A. H. Gonz´alez，“在控制感染者峰值患病率的同时最小化流行病最终规模”，Automatica，第144卷，文章编号110496，2022年。[5] R. Pastor-Satorras、C. Castellano、P. Van Mieghem 和 A. Vespig- nani，“复杂网络中的流行病过程”，《现代物理评论》，第87卷，第3期，第925页，2015年。[6] P. E. Par´e、C. L. Beck 和 T. Bas¸ar，“网络上流行病的建模、估计与分析：综述”，《控制年度评论》，第50卷，第345–360页，2020年。[7] A. D. Ames、X. Xu、J. W. Grizzle 和 P. Tabuada，“基于控制屏障函数的安全关键系统二次规划”，《IEEE自动控制汇刊》，第62卷，第3861–3876页，2016年，第8期。[8] A. D. Ames、S. Coogan、M. Egerstedt、G. Notomista、K. Sreenath 和 P. Tabuada，“控制屏障函数：理论与应用”，载于《2019年第18届欧洲控制会议（ECC）论文集》。IEEE，第3420–3431页。[9] A. D. Ames、T. G. Moln´ar、A. W. Singletary 和 G. Orosz，“COVID-19防控主动干预的安全关键控制”，《IEEE Access》，第8卷，第188 454–188 474页，2020年。[10] T. G. Moln´ar、A. W. Singletary、G. Orosz 和 A. D. Ames，“具有测量延迟的分舱流行病学模型的安全关键控制”，《IEEE控制系统快报》，第5卷，第5期，第1537–1542页，2020年。[11] B. A. Butler 和 P. E. Par´e，“流行病的最优安全关键控制”，《IEEE控制系统快报》，第7卷，第1819–1824页，2023年。[12] ——，“耦合协作系统对不遵从行为的韧性”，《IEEE控制系统快报》，第8卷，第2715–2720页，2024年。[13] ——，“动态耦合网络系统的协作式安全关键控制”，arXiv预印本 arXiv:2310.03289，2023年。[14] N. J. Watkins、C. Nowzari 和 G. J. Pappas，“连续时间流行病过程的鲁棒经济模型预测控制”，《IEEE自动控制汇刊》，第65卷，第3期，第1116–1131页，2019年。[15] M. Sharifi 和 H. Moradi，“存在不确定性时流感流行病的非线性鲁棒自适应滑模控制”，《过程控制杂志》，第56卷，第48–57页，2017年。[16] M. Small 和 D. Cavanagh，“利用网络对流行病传播实施强力控制措施建模——COVID-19案例研究”，《IEEE Access》，第8卷，第109 719–109 731页，2020年。[17] A. Ibeas、M. De la Sen 和 S. Alonso-Quesada，“SEIR流行病模型的鲁棒滑模控制”，《工程中的数学问题》，2014年，第2014卷，第1期，文章编号104764。[18] E. Badfar、E. J. Zaferani 和 A. Nikoofard，“基于状态和参数估计的COVID-19非线性流行病学模型鲁棒滑模控制器设计”，《非线性动力学》，第1–14页，2022年。[19] M. Bloem、T. Alpcan 和 T. Bas¸ar，“多个网络的最优鲁棒流行病应对策略”，《控制工程实践》，第17卷，第5期，第525–533页，2009年。[20] V. Azimi、M. Sharifi、S. Fakoorian、T. Nguyen 和 V. Van Huynh，“互动人类社会中基于状态估计的流感流行病鲁棒最优控制”，《信息科学》，第592卷，第340–360页，2022年。[21] A. Alan、T. G. Molnar、A. D. Ames 和 G. Orosz，“从控制器设计角度推广鲁棒控制屏障函数”，《IEEE开放控制系统期刊》，2025年。[22] J. Liu、P. E. Par´e、A. Nedi´c、C. Y. Tang、C. L. Beck 和 T. Bas¸ar，“连续时间双病毒模型的分析与控制”，《IEEE自动控制汇刊》，第64卷，第4891–4906页，2019年，第12期。[23] D. Ebeigbe、T. Berry、S. J. Schiff 和 T. Sauer，“用于疾病监测的泊松卡尔曼滤波器”，《物理评论研究》，第2卷，文章编号043028，2020年10月。[24] B. She、S. Sundaram 和 P. E. Par´e，“模型不确定性下SIR流行病的最优防控”，载于《2022年IEEE决策与控制会议（CDC）论文集》，第4333–4338页。