用于求解牛顿可压缩流动的时空 LATIN-PGD 策略

´E. Foulatier[a], *, P.-A. Boucard[a], F. Louf[a], D. N´eron[a], P. Junker[b]

[a]巴黎萨克雷大学、中央理工-高等电力学院、巴黎萨克雷高等师范学校、法国国家科学研究中心、巴黎萨克雷力学实验室，吉夫叙尔伊韦特，*91190*，法国[b]汉诺威莱布尼茨大学，连续介质力学研究所，汉诺威，德国

arXiv:2602.02616v1 [math.NA] 2 Feb 2026

摘要

流动问题的模拟是许多工程应用的核心，但往往需要耗费大量计算资源，尤其是在处理复杂模型时。本文提出了一种利用 LATIN-PGD 求解器求解流动问题的新方法。本文研究的是牛顿型可压缩层流。在这一特定且相对简单的情况下，可以聚焦于状态方程能够直接关联压力与密度的流动。随后，可利用 LATIN 求解器建立压力-速度解耦算法。此外，求解器原生集成了适当广义分解（PGD），可分别对速度场和压力场进行独立的时空分解。首先，采用具有解析解的问题对求解器进行验证，随后将其应用于稍复杂的问题。结果与已有文献吻合良好，我们预计该求解器未来可用于计算更复杂的材料定律。

关键词：牛顿型流动，解耦策略，适当广义分解，LATIN-PGD

1. 引言

尽管纳维-斯托克斯方程早在18世纪上半叶便已形式化，但多年来解析解仅能针对特定情形获得。在20世纪50年代，计算科学领域的进展使这些方程固有的复杂性得以求解。求解不可压缩流动问题的第一种计算方法采用了有限差分法 [1, 2] ，而Taylor [3] 在数年后提出了一种采用有限元法的方法，从而能够处理更为复杂的几何形状。

专门针对流动问题的数值求解器正在不断演进，以满足特定需求。例如，近期研究采用了多种方法，包括先进稳定化技术 [4], 、用于黏弹性流动的对数构象重新表述 [5], 以及用于演化域的PFEM [6]。直接耦合方法，亦称压力-速度形式，被广泛用于求解流体问题。这些方法将问题的全部方程汇集到单一矩阵中，如 [7]所述，这可能导致较高的计算成本。因此，可以采用 [8, 9]中提出的压力-速度解耦策略。

然而，所有这些方法都需要大量计算资源，主要是因为问题具有非线性。在这种情况下，建议研究代理模型或模型降阶技术。尽管代理方法（如元模型或神经网络）是非侵入式的，但它们旨在计算特定的感兴趣量；若要获取其他数据，则需要完整重建模型。对于需要计算许多场的深入研究，构建降阶模型似乎更为合适。在大多数情况下，模型降阶技术分为两个阶段：离线阶段，其计算成本较高；以及在线阶段，其速度显著更快。离线阶段需要针对不同的参数集计算多个高保真解，这些解称为快照。利用快照计算降阶基，获得降阶基后，在线阶段即可快速计算新问题的解。正交分解 (POD)[10] 是一种广泛应用的模型降阶技术。在线阶段，该技术通过将新问题的方程投影到约化基上，获得快速且准确的解。

*通讯作者

在许多计算流体力学问题中 [11, 12, 13], ，我们都会用到本征正交分解，但 gappy-POD [14], 约化基 [15], 或流形插值 [16]等方法也可能适用。所有这些方法在参数化研究中都被证明十分有效，但对于计算次数较少的研究，离线阶段的成本会变得高昂且不值得。因此，可以考虑研究模型降阶技术，以便在计算过程中逐步丰富解。

适当广义分解 （PGD） [17, 18]为流动问题提供了这种可能性。PGD 首次应用于纳维-斯托克斯方程时, [19], 分离变量分解仅针对空间变量。此后，PGD 被用于模拟港口波动， [20] 解场被分解为空间函数以及仅依赖于波向和频率的函数。流体求解格式通常采用增量式，因此，若不考虑所有时间步，就无法在整个时空域上构建解。这一问题对 PGD 的应用至关重要，因此必须开发非增量格式，以实现时空分解。 [21], 中介绍了一种初步尝试，其中使用不动点算法生成新的模态。围绕前一次迭代获得的解进行线性化，使我们能够处理非线性。然而，作者承认这种线性化技术并非最优， [22]在此背景下，寻找一种合适的非增量、非线性求解器显得至关重要。

20世纪80年代，Pierre Ladev`eze提出了一种称为LATIN方法的新途径，用以处理非线性结构力学问题 [23, 17]。此外，该方法原生包含PGD，从而能够实现解的时空分解。LATIN-PGD求解器已被应用于多个领域，包括几何与材料非线性、接触和复合材料损伤等。在流体力学领域，已发展出一种基于LATIN 求解器并结合多尺度区域分解方法的策略，用于流固相互作用 [24]。然而，该方法并未使用PGD。关于 LATIN 求解器应用领域的更多细节，可参见 [25]。特别是，面向多物理场问题的LATIN-PGD版本在此可能值得关注，因为速度与压力之间的耦合策略在纳维-斯托克斯方程中至关重要。该求解器最初在 [26]中针对孔隙弹性问题提出，其依赖于困难分离。算法的每一次迭代包含两个阶段：一个阶段仅使用耦合的非线性本构关系，另一个阶段则对各个物理场分别采用全局容许方程。该方法被证明具有很强的模块性，可为每个原始场构建独立的基，并在时间和空间上使用不同的离散化 [27, 28]。最近，该求解器已以更为稳健的版本扩展至更复杂的多物理场问题（热孔隙弹性） [29]。后者在处理参数化问题时显示出优势。

本文提出了一种基于LATIN-PGD方法的纳维-斯托克斯方程求解新方法。据作者所知，此类工作此前尚未在文献中发表。该方法有望克服与非线性流动相关的若干困难：通过解耦策略降低问题复杂度，借助PGD提高计算效率，处理非线性，并在局部阶段引入复杂的材料定律。为展示该求解器求解流动问题的能力，本文聚焦于相对简单的二维和三维问题，具体而言是牛顿层流。此外，为获得能够耦合压力和速度的本构定律，本文研究了可压缩流动。

本文的组织结构如下。在第2节中，介绍参考流动问题的连续控制方程，随后在第3节中介绍其数值离散化。第4节聚焦于流体研究中的LATIN-PGD求解器。在第5节中，我们通过三个数值算例证明该方法的有效性。第一个算例是一个具有解析解的简单问题。随后，我们复现绕圆柱流动这一广为人知的基准算例。最后，展示该代码向三维几何扩展的能力。第6节给出本文的结论性意见及可能的后续研究方向。

2. 参考流动问题

本节通过介绍与可压缩牛顿型流动相关的方程来描述参考问题。我们在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内、时间区间 $I = [0, T]$ 上开展研究。流动方程由守恒原理 [30] 推导得出。质量守恒给出连续性方程（1）：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

其中 ρ 表示流体密度，$\boldsymbol{v}$ 表示流速。

第二个流动方程来自动量守恒 (2)：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}=\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为对称应力张量，$\boldsymbol{b}$ 为体积体力。$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 表示速度的物质导数，定义如下 (3)：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \tag{3}$$

本构关系使方程组闭合。应力张量的表达式见 (4)，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为偏应力，p 为压力。

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}-p\boldsymbol{I} \tag{4}$$

正如引言中所强调的，本研究仅讨论牛顿可压缩流动。在这种情况下，偏应力由 (5) 给出，其中 $\mathcal{M}$ 为四阶黏度张量，μ 和 λ 分别表示动力黏度和第二黏度 [31]:

$$\boldsymbol{\tau}=\mathcal{M}:\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}=2\mu\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}+\lambda\mathrm{Tr}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{I} \tag{5}$$

第二个本构方程涉及密度 ρ。对于可压缩流动，状态方程将密度与压力联系起来。这里，我们采用理想气体方程 (6)，其中 R为理想气体常数，M 为摩尔质量：

$$p=f(\rho)=\frac{R}{M}T\rho=rT\rho \tag{6}$$

对于空气，可取 $r=287.04\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ [32]。同样，我们假设温度恒定，并设$T=T_0=293\mathrm{K}$。

最后，还需要给出边界条件和初始条件。边界条件包括狄利克雷型 (7a)、(7b) 和诺伊曼型 (7c)：

$$\begin{cases}p=p_d \quad \text{over } \partial_p\Omega\times I & \text{(7a)}\\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_d \quad \text{over } \partial_v\Omega\times I & \text{(7b)}\\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{F}_d=-p_d\boldsymbol{n} \quad \text{over } \partial_F\Omega\times I & \text{(7c)}\end{cases}$$

初始条件 (8a) 和 (8b) 给出了密度和速度，因为该流动是可压缩的 e:

$$\begin{cases}\rho(t=0,\boldsymbol{x})=\rho_0=f^{-1}(p_0) & \forall\boldsymbol{x}\in\Omega \quad \text{(8a)}\\ \boldsymbol{v}(t=0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} & \forall\boldsymbol{x}\in\Omega \quad \text{(8b)}\end{cases}$$

其中 p_0 是介质中的初始压力。

3. 数值离散

本节讨论数值离散：我们先对空间进行离散，然后对时间进行离散。这里，$\mathcal{H}^1(\Omega)$ 表示由平方可积函数构成的索伯列夫空间，其中这些函数的一阶导数也平方可积。

定义以下函数空间：

- $\mathcal{V}=\{\boldsymbol{v}\mid\boldsymbol{v}\in\mathcal{H}^1(\Omega),\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_d\text{在 }\partial_v\Omega\}$上；
- $\mathcal{V}_0$，相应的齐次空间；
- $\mathcal{P}=\{\rho\mid\rho\in\mathcal{H}^1(\Omega),\ \rho=\rho_d\text{在 }\partial_\rho\Omega\}$上；
- $\mathcal{P}_0$，相关的齐次空间。

第2节给出的平衡方程 (1) 和 (2) 可通过变分形式写成弱形式。因此，积分后，可压缩流动问题为：

求$\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, \rho \in \mathcal{P}$，使得 $\forall t \in I$：

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\rho^\star \, d\Omega + \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega = 0 \qquad \forall \rho^\star \in \mathcal{P}_0 \tag{9a}$$

$$\int_\Omega \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}^\star \, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}^\star \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}^\star \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \boldsymbol{F}_d \cdot \boldsymbol{v}^\star dS \qquad \forall \boldsymbol{v}^\star \in \mathcal{V}_0 \tag{9b}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t = 0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{9c}$$

$$\rho(\boldsymbol{x}, t = 0) = \rho_0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{9d}$$

将应力张量和压力替换为本构关系 (4) 和 (6) 给出的表达式后，可得到该问题的后续弱形式：

求$\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, \rho \in \mathcal{P}$，使得 $\forall t \in I$：

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\rho^\star \, d\Omega + \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega = 0 \qquad \forall \rho^\star \in \mathcal{P}_0 \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}^\star \, d\Omega + \int_\Omega 2\mu \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}^\star \, d\Omega + \int_\Omega \lambda \mathrm{Tr}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v} \, \mathrm{Tr}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}^\star \, d\Omega \\ - \int_\Omega f(\rho)\mathrm{Tr}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\boldsymbol{v}^\star \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}^\star \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \boldsymbol{F}_d \cdot \boldsymbol{v}^\star dS \qquad \forall \boldsymbol{v}^\star \in \mathcal{V}_0\end{aligned} \tag{10b}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t = 0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{10c}$$

$$\rho(\boldsymbol{x}, t = 0) = \rho_0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{10d}$$

待求解的系统是一个非线性耦合偏微分方程组，其中未知量为密度和速度。我们采用有限元法对空间域进行离散。出于稳定性考虑，我们使用 Taylor-Hood单元[33]。此外， [34] 建议在二维问题中使用四边形单元（在三维问题中使用六面体），而不是三角形单元（四面体）。因此，对于二维流动问题，我们将使用 Qua4/Qua9 单元；对于三维问题，则使用 Hex8/Hex27单元。

离散后的未知量 $\boldsymbol{\rho}$ 和$\mathbf{v}$ 汇集于未知量向量$\mathbf{X} = (\boldsymbol{\rho}\ \mathbf{v})^{\mathrm{T}}$中。未知量的时间导数写作 $\dot{\mathbf{v}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$，包含外载荷的右端项写作$\mathbf{F}$。因此，问题的矩阵形式为 (11)：

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\rho})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\rho})\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{11}$$

方程（11）为半离散形式，因为有限元法仅针对空间域Ω。时间域$I = [0, T]$ 被离散为N_t 个时间步，并采用后向欧拉格式进行时间积分。

4. 可压缩流动的LATIN-PGD求解器

本节介绍用于牛顿可压缩流动的 LATIN-PGD算法。LATIN-PGD求解器是一种迭代非增量算法。这意味着在求解器的每次迭代中，都能得到一个定义在整个时空域上的解。对此存在两种变体：泛函表述和内变量表述。为了节省计算时间和内存，建议在 [25] 中采用泛函表述。在第2节中，我们指出流动模型依赖于守恒原理。此外，正如本构关系中所强调的，该问题是耦合的。未知量为速度和密度，它们可以直接与压力相关联。因此，可以借鉴 [26]中提出并在 [35]中改用泛函表述的多物理场求解器。

4.1. 问题的重新表述

LATIN-PGD方法依赖于困难分离，即将所有方程分成两组，分别称为$\mathbf{A_d}$ 和 $\mathbf{\Theta}$。第一组方程$\mathbf{A_d}$ 应当是线性且解耦的，并且可以是全局的。第二组 $\mathbf{\Theta}$ 由所有局部方程组成，这些方程可以是耦合的，也可以是非线性的。因此，参考解位于这两组方程的交点处。现在我们将说明组成这两组方程$\mathbf{A_d}$和 $\mathbf{\Theta}$的具体方程。我们引入新的变量，以满足上述两组方程的性质。

对于密度部分，我们引入变量 $\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{W}$ 和 ξ，并重新表述连续性方程 (1)。由此得到的方程 (12) 属于 $\mathbf{A_d}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\nabla}\rho \quad \text{over } \Omega \times I \\ -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{W} = \xi \quad \text{over } \Omega \times I \end{cases} \tag{12}$$

对于速度部分，我们引入变量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$，并重新表述动量守恒方程 (2)。由此得到的方程 (13) 属于 $\mathbf{A_d}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla v} + \boldsymbol{\nabla v}^{\mathrm{T}}) \quad \text{over } \Omega \times I \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Gamma} \quad \text{over } \Omega \times I \end{cases} \tag{13}$$

我们还将所有边界条件 (14) 纳入$\mathbf{A_d}$：

$$\begin{cases} \rho = \rho_d \quad \text{over } \partial_\rho\Omega \times I \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_d \quad \text{over } \partial_v\Omega \times I \\ \boldsymbol{\sigma n} = \boldsymbol{F}_d \quad \text{over } \partial_F\Omega \times I \end{cases} \tag{14}$$

$\mathbf{\Theta}$ 汇集了所有可视为本构关系的方程 (15):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{M} : \boldsymbol{\varepsilon} - f(\rho)\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{\Gamma} &= \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{W} &= \rho\boldsymbol{v} \\ \xi &= \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases} \tag{15}$$

这些本构关系包含时间导数。因此，初始条件 (8a) 和 (8b) 也纳入$\mathbf{\Theta}$。

4.2. 具有两个交替搜索方向的迭代算法

如前一小节所述，流动问题的参考解满足:

$$\mathbf{s}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{A_d} \cap \mathbf{\Theta} \tag{16}$$

该算法在$\mathbf{A_d}$ 与 $\mathbf{\Theta}$ 之间迭代，直至找到$\mathbf{s}_{\mathrm{ref}}$的足够好的近似解。为此，算法的每一次迭代由两个阶段组成:

- A**局部 阶段**: 由已知解$\mathbf{s}_n \in \mathbf{A_d}$出发，利用搜索方向$\mathbf{H}^+$计算解$\widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \mathbf{\Theta}$;
- A **全局 s 阶段**: 从已知解$\widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \mathbf{\Theta}$出发，我们沿搜索方向$\mathbf{H}^-$计算得到解$\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A_d}$.

连接局部阶段与全局阶段中各量的搜索方向$\mathbf{H}^+$ 和$\mathbf{H}^-$ 如下:

$$\mathbf{H}^+ \equiv \left\{ \Delta\mathbf{s} = (\Delta\mathbf{s}^{\mathrm{v}}, \Delta\mathbf{s}^{\rho}) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \Delta\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{H}^+_{\varepsilon\sigma} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{0} \\ \Delta\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{H}^+_{v\Gamma}\Delta\boldsymbol{v} &= \mathbf{0} \\ \Delta\boldsymbol{W} + \boldsymbol{H}^+_{ZW}\Delta\boldsymbol{Z} &= \mathbf{0} \\ \Delta\xi + H^+_{\rho\xi}\Delta\rho &= 0 \end{array} \right\} \tag{17}$$

$$\mathbf{H}^{-} \equiv \left\{ \Delta\mathbf{s} = (\Delta\mathbf{s}^{\mathrm{v}}, \Delta\mathbf{s}^{\rho}) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \Delta\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{H}^{-}_{\varepsilon\sigma} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} & = \mathbf{0} \\ \Delta\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{H}^{-}_{v\Gamma}\Delta\boldsymbol{v} & = \mathbf{0} \\ \Delta\boldsymbol{W} - \boldsymbol{H}^{-}_{ZW}\Delta\boldsymbol{Z} & = \mathbf{0} \\ \Delta\xi - H^{-}_{\rho\xi}\Delta\rho & = 0 \end{array} \right\} \tag{18}$$

其中， $\Delta\square$ 是量 $\square$ 在两个连续阶段之间的差值。搜索方向的选择会显著影响算法 [36]的收敛速度。正如 [37, 29], 中所建议的，这里应基于本构定律（15）选择$\mathbf{H}^{+}$ 和$\mathbf{H}^{-}$ ，以优化收敛速度。因此：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} &= \boldsymbol{H}^{-}_{\varepsilon\sigma} = \boldsymbol{H}^{+}_{\varepsilon\sigma} = \mathcal{M} \\ \boldsymbol{H}_{v\Gamma} &= \boldsymbol{H}^{-}_{v\Gamma} = \boldsymbol{H}^{+}_{v\Gamma} = \frac{1}{t_v}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{H}_{ZW} &= \boldsymbol{H}^{-}_{ZW} = \boldsymbol{H}^{+}_{ZW} = -\frac{L_c^2}{T}\boldsymbol{I} \\ H_{\rho\xi} &= H^{-}_{\rho\xi} = H^{+}_{\rho\xi} = \frac{1}{t_\rho} \end{aligned}$$

L_c 表示几何形状的特征长度，T 对应仿真的最终时间步。t_v 和t_ρ 分别是速度部分和密度部分的特征时间，可通过 [29]中的示例估算。

4.3. 实践进展

本节将更详细地说明 LATIN-PGD 算法各步骤所需的操作。在进行迭代之前，算法首先进行初始化。初始化包括计算两个场 $\boldsymbol{\rho}_0$ 和$\mathbf{v}_0$, ，二者均属于$\mathbf{A_d}$。初始化阶段所求解问题的详细信息将在第4.3.2节中给出。

4.3.1. 局部阶段

已知前一次迭代的解$\mathbf{s}_n \in \mathbf{A_d}$，即可计算解 $\overset{\frown}{\mathbf{s}}_{n+1} \in \boldsymbol{\Theta}$。搜索方向$\mathbf{H}^{+}$ 给出：

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_n}_{\boldsymbol{A}_n} & \text{(19a)} \\ \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{n+1} + \boldsymbol{H}_{v\Gamma}\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}_n + \boldsymbol{H}_{v\Gamma}\boldsymbol{v}_n}_{\boldsymbol{\beta}_n} & \text{(19b)} \\ \widehat{\boldsymbol{W}}_{n+1} + \boldsymbol{H}_{ZW}\widehat{\boldsymbol{Z}}_{n+1} = \underbrace{\boldsymbol{W}_n + \boldsymbol{H}_{ZW}\boldsymbol{Z}_n}_{\boldsymbol{\delta}_n} & \text{(19c)} \\ \widehat{\xi}_{n+1} + H_{\rho\xi}\widehat{\rho}_{n+1} = \underbrace{\xi_n + H_{\rho\xi}\rho_n}_{\gamma_n} & \text{(19d)} \end{cases}$$

利用本构方程，可得：

$$\begin{cases} (\mathcal{M} + \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}) : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - f\left(\widehat{\rho}_{n+1}\right)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}_n & \text{(20a)} \\ \widehat{\rho}_{n+1}\dfrac{\partial\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1}}{\partial t} + \widehat{\rho}_{n+1}\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1}\boldsymbol{\nabla}\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} + \boldsymbol{H}_{v\Gamma}\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n & \text{(20b)} \\ \widehat{\rho}_{n+1}\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} + \boldsymbol{H}_{ZW}\widehat{\boldsymbol{Z}}_{n+1} = \boldsymbol{\delta}_n & \text{(20c)} \\ \dfrac{\partial\widehat{\rho}_{n+1}}{\partial t} + H_{\rho\xi}\widehat{\rho}_{n+1} = \gamma_n & \text{(20d)} \end{cases}$$

(20d) 是一个解耦的常微分方程，并使用后向欧拉格式求解。然后，将$\widehat{\rho}_{n+1}$ 代入(20a)，即可直接得到$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$。已知$\widehat{\rho}_{n+1}$后，(20b) 中唯一未知的量是$\overset{\frown}{\boldsymbol{v}}_{n+1}$。然而，(20b) 是一个非线性

方程。为求解该方程，可以使用牛顿-拉夫逊算法。最后，假设$\widehat{\rho}_{n+1}$和$\widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1}$已知，则可通过(20c)直接计算密度梯度$\boldsymbol{Z}_{n+1}$。由于这些方程都是局部的，因此可以针对每个积分点独立求解。

本文研究层流，这意味着可以忽略式（20b）中的非线性项。因此，该方程的求解只需采用经典方法求解一阶常微分方程。耦合阶段所求解的系统可简化为：

$$\begin{cases} (\mathcal{M} + \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}) : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - f\left(\widehat{\rho}_{n+1}\right) \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}_n & \text{(21a)} \\ \widehat{\rho}_{n+1} \dfrac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1}}{\partial t} + \boldsymbol{H}_{v\Gamma} \widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n & \text{(21b)} \\ \widehat{\rho}_{n+1} \widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} + \boldsymbol{H}_{ZW} \widehat{\boldsymbol{Z}}_{n+1} = \boldsymbol{\delta}_n & \text{(21c)} \\ \dfrac{\partial \widehat{\rho}_{n+1}}{\partial t} + H_{\rho\xi} \widehat{\rho}_{n+1} = \gamma_n & \text{(21d)} \end{cases}$$

最后，利用搜索方向 $\mathbf{H}^+$ 可得到对偶量：

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} & \text{(22a)} \\ \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n - \boldsymbol{H}_{v\Gamma} \widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1} & \text{(22b)} \\ \widehat{\boldsymbol{W}}_{n+1} = \boldsymbol{\delta}_n - \boldsymbol{H}_{ZW} \widehat{\boldsymbol{Z}}_{n+1} & \text{(22c)} \\ \widehat{\xi}_{n+1} = \gamma_n - H_{\rho\xi} \widehat{\rho}_{n+1} & \text{(22d)} \end{cases}$$

4.3.2. 全局阶段

搜索方向 $\mathbf{H}^-$ 给出：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \underbrace{(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})}_{\widehat{\boldsymbol{A}}_{n+1}} + \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} & \text{(23a)} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} = \underbrace{(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{n+1} - \boldsymbol{H}_{v\Gamma} \widehat{\boldsymbol{v}}_{n+1})}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{n+1}} + \boldsymbol{H}_{v\Gamma} \boldsymbol{v}_{n+1} & \text{(23b)} \\ \boldsymbol{W}_{n+1} = \underbrace{(\widehat{\boldsymbol{W}}_{n+1} - \boldsymbol{H}_{ZW} \widehat{\boldsymbol{Z}}_{n+1})}_{\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}} + \boldsymbol{H}_{ZW} \boldsymbol{Z}_{n+1} & \text{(23c)} \\ \xi_{n+1} = \underbrace{(\widehat{\xi}_{n+1} - H_{\rho\xi} \widehat{\rho}_{n+1})}_{\widehat{\gamma}_{n+1}} + H_{\rho\xi} \rho_{n+1} & \text{(23d)} \end{cases}$$

我们首先关注连续性方程的弱形式，其中代入了方程（23c）和（23d）。待求解的全局问题为：

求 $\rho_{n+1} \in \mathcal{P}$，使得 $\forall t \in I$：

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\rho_{n+1} \cdot \boldsymbol{H}_{ZW} \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega + \int_\Omega \rho_{n+1} H_{\rho\xi} \rho^\star \, d\Omega = \int_\Omega \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega \\ - \int_\Omega \widehat{\gamma}_{n+1} \rho^\star \, d\Omega \qquad \forall \rho^\star \in \mathcal{P}_0 \end{aligned} \tag{24}$$

在每次迭代中，我们计算修正量 $\Delta\rho_{n+1}$，使得：$\rho_{n+1} = \rho_n + \Delta\rho_{n+1}$。因此，问题转化为：

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(\Delta\rho_{n+1}) \cdot \boldsymbol{H}_{ZW} \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega + \int_\Omega \Delta\rho_{n+1} H_{\rho\xi} \rho^\star \, d\Omega = \int_\Omega \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega - \int_\Omega \widehat{\gamma}_{n+1} \rho^\star \, d\Omega \\ \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\rho_n \cdot \boldsymbol{H}_{ZW} \boldsymbol{\nabla}\rho^\star \, d\Omega - \int_\Omega \rho_n H_{\rho\xi} \rho^\star \, d\Omega \qquad \forall \rho^\star \in \mathcal{P}_0 \end{aligned} \tag{25}$$

ˆ 在初始化时，取 $\boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{0}$ 和 $\hat{\gamma}_0 = 0$。我们通过求解与式 (25) 对应的有限元问题 (26)，来获得 $\boldsymbol{\rho}$ 的初始猜测：

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\rho}_0(t) = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\rho}}(t) & \text{over } \Omega \\ \boldsymbol{\rho}_0(t) = \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{d}}(t) & \text{over } \partial_\rho\Omega \end{cases} \tag{26}$$

其中$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\rho}}$ 表示外载荷。矩阵$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}$ 与$\boldsymbol{H}_{ZW}$ 和$H_{\rho\xi}$ 的关系如下：

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}} = -\boldsymbol{H}_{ZW}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}} + H_{\rho\xi}\mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}} \tag{27}$$

其中$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}$ 和$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}$ 是有限元矩阵，分别对应于形函数乘积在域上的积分及其一阶导数乘积的积分。

在任意迭代$n > 0$处，弱形式的离散形式由（28）给出：

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}_{n+1}(t) = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\rho}}(t) & \text{in } \Omega \\ \Delta\boldsymbol{\rho}_{n+1}(t) = \mathbf{0} & \text{on } \partial_D\Omega \end{cases} \tag{28}$$

其中$\mathbf{g}_{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{f}_{\hat{\delta}} + \mathbf{f}_{\hat{\gamma}} - \mathbf{H}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}_n - \boldsymbol{\rho}_0)$，而$\mathbf{f}_{\hat{\delta}}$和$\mathbf{f}_{\hat{\gamma}}$指利用局部阶段量计算得到的右端项。采用相同的步骤可得到速度的初始化$\mathbf{v}_0$ 和修正 $\Delta\mathbf{v}_{n+1}$。利用方程（23a）和（23b）可得如下弱形式：

求$\boldsymbol{v}_{n+1} \in \mathcal{V}$，使得 $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\boldsymbol{v}_{n+1}) : \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^\star)\, d\Omega + \int_\Omega \Delta\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{H}_{v\Gamma}\boldsymbol{v}^\star\, d\Omega = \\ - \int_\Omega \widehat{\boldsymbol{A}}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^\star)\, d\Omega - \int_\Omega \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}^\star\, d\Omega \\ + \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}^\star\, d\Omega + \int_{\partial_N\Omega} \boldsymbol{F}_d \cdot \boldsymbol{v}^\star\, dS \\ - \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_n) : \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^\star)\, d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{H}_{v\Gamma}\boldsymbol{v}^\star\, d\Omega \qquad \forall \boldsymbol{v}^\star \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \tag{29}$$

在初始化时，取$\hat{\boldsymbol{A}}_0 = \mathbf{0}$ 和$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \mathbf{0}$，并通过求解计算初始猜测$\mathbf{v}_0$：

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{v}_0(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{v}}(t) & \text{over } \Omega \\ \mathbf{v}_0(t) = \mathbf{v}_{\mathrm{d}}(t) & \text{over } \partial_v\Omega \end{cases} \tag{30}$$

其中$\mathbf{f}_{\mathbf{v}}$ 表示外载荷。矩阵$\mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ 与$\boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}$ 和$\boldsymbol{H}_{v\Gamma}$ 的关系如下：

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}\mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} + \boldsymbol{H}_{v\Gamma}\mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \tag{31}$$

$\mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ 和$\mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ 的定义方式与$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}$ 和$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}$ 相同，但它们对应于速度单元。

在任意迭代$n > 0$中，弱形式的离散形式由式（32）给出：

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}\Delta\mathbf{v}_{n+1}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{v}}(t) & \text{in } \Omega \\ \Delta\mathbf{v}_{n+1}(t) = \mathbf{0} & \text{on } \partial_v\Omega \end{cases} \tag{32}$$

其中$\mathbf{g}_{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_{\hat{\mathbf{A}}} + \mathbf{f}_{\hat{\beta}} - \mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0)$，其中$\mathbf{f}_{\hat{\mathbf{A}}}$ 和$\mathbf{f}_{\hat{\beta}}$ 表示根据局部阶段量计算得到的右端项 .

*4.3.3. LATIN*框架中的适当广义分解

该方法的优势在于使用适当广义分解 （PGD）求解解耦阶段。因此，我们可以将原始场表示为时间和空间函数的组合。经过算法的n 次迭代后，密度 $\boldsymbol{\rho}$和速度$\mathbf{v}$ 表示如下：

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n(t) = \mathbf{v}_0(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\overline{\mathbf{v}}_i \quad k \leqslant n \\ \boldsymbol{\rho}_n(t) = \boldsymbol{\rho}_0(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \gamma_i(t)\overline{\boldsymbol{\rho}}_i \quad l \leqslant n \end{cases} \tag{33}$$

在每次迭代中，对于每个原始变量，若有需要，则按照式（34）所示的形式寻找一对新的模态：

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_{n+1}(t) = \lambda(t)\overline{\mathbf{v}} \\ \Delta \boldsymbol{\rho}_{n+1}(t) = \gamma(t)\overline{\boldsymbol{\rho}} \end{cases} \tag{34}$$

解耦阶段始终以更新步骤开始，该步骤以远低于生成新空间模态的成本改变所有时间函数。如果更新步骤已充分改善解，之后便不再生成模态。有关在 LATIN 解耦阶段使用 PGD 的更多实践细节，请参阅 [38]。

4.4. 收敛指标

有必要定义一个一致的准则来停止迭代。我们定义一个误差指标，用于量化每次迭代结束时两个连续解 $\widehat{\ }\mathbf{s}_{n+1}$ 与 $\mathbf{s}_{n+1}$ 之间的差值。当差值足够小时，停止准则便表明对参考解的近似已足够准确。

我们引入两个误差指标，一个与密度有关，另一个与速度有关。对于每个指标，我们都引入一个特定的能量范数。

密度误差指标定义如下：

$$\eta^{\rho 2} = \frac{\left\| \mathbf{s}^{\rho}{}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \right\|^2_{H_{\rho\xi}}}{\frac{1}{2}(\|\mathbf{s}^{\rho}{}_{n+1}\|^2_{H_{\rho\xi}} + \left\|\widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\right\|^2_{H_{\rho\xi}})} \quad \text{with } \|\mathbf{s}^{\rho}\|^2_{H_{\rho\xi}} = \int_{I\times\Omega} \rho H_{\rho\xi} \rho \, d\Omega dt \tag{35}$$

速度误差指标定义如下：

$$\eta^{\mathrm{v}2} = \frac{\left\| \mathbf{s}^{\mathrm{v}}{}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \right\|^2_{\boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}}}{\frac{1}{2}(\|\mathbf{s}^{\mathrm{v}}{}_{n+1}\|^2_{\boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}} + \left\|\widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\right\|^2_{\boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}})} \quad \text{with } \left\|\mathbf{s}^{\mathrm{v}}\right\|^2_{\boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma}} = \int_{I\times\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{H}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega dt \tag{36}$$

设定一个记作 η_c 的容差阈值，当 $\eta = \max(\eta^{\mathrm{v}}, \eta^{\rho}) < \eta_c$ 时，算法便结束。因此，如果某一部分比另一部分更快收敛，就可以停止计算该部分的全局阶段。

4.5. 算法总结

图 1 中的流程图概述了用于牛顿可压缩流动的 LATIN-PGD算法。

5. 结果

5.1. 通道中的层流

我们首先将该方法应用于一个简单示例：通道的入流边界和出流边界之间存在压力差。首先，我们将结果与稳态下给定的解析解进行比较。随后，我们将展示整个时空域内的结果，并进一步介绍仿真过程中得到的 PGD模态。

5.1.1. 问题介绍

问题的几何形状和边界条件如图 2 所示，其中x轴沿通道轴方向。我们在流入边界 Γ_{in} 处施加压力$p_{in} = 2\mathrm{Pa}$，在流出边界 Γ_{out}处施加压力$p_{out} = 1\mathrm{Pa}$。在顶部和底部边界 Γ_D处，速度部分采用齐次狄利克雷条件（无滑移边界条件）。此外，对于速度部分，在 Γ_{in} 和 Γ_{out}处，还必须分别考虑由入流和出流压力引起的诺伊曼边界条件。

表 1 总结了材料属性。如 [39, 31] 所示，可以看出，第一黏度与第二黏度的数值差异显著。

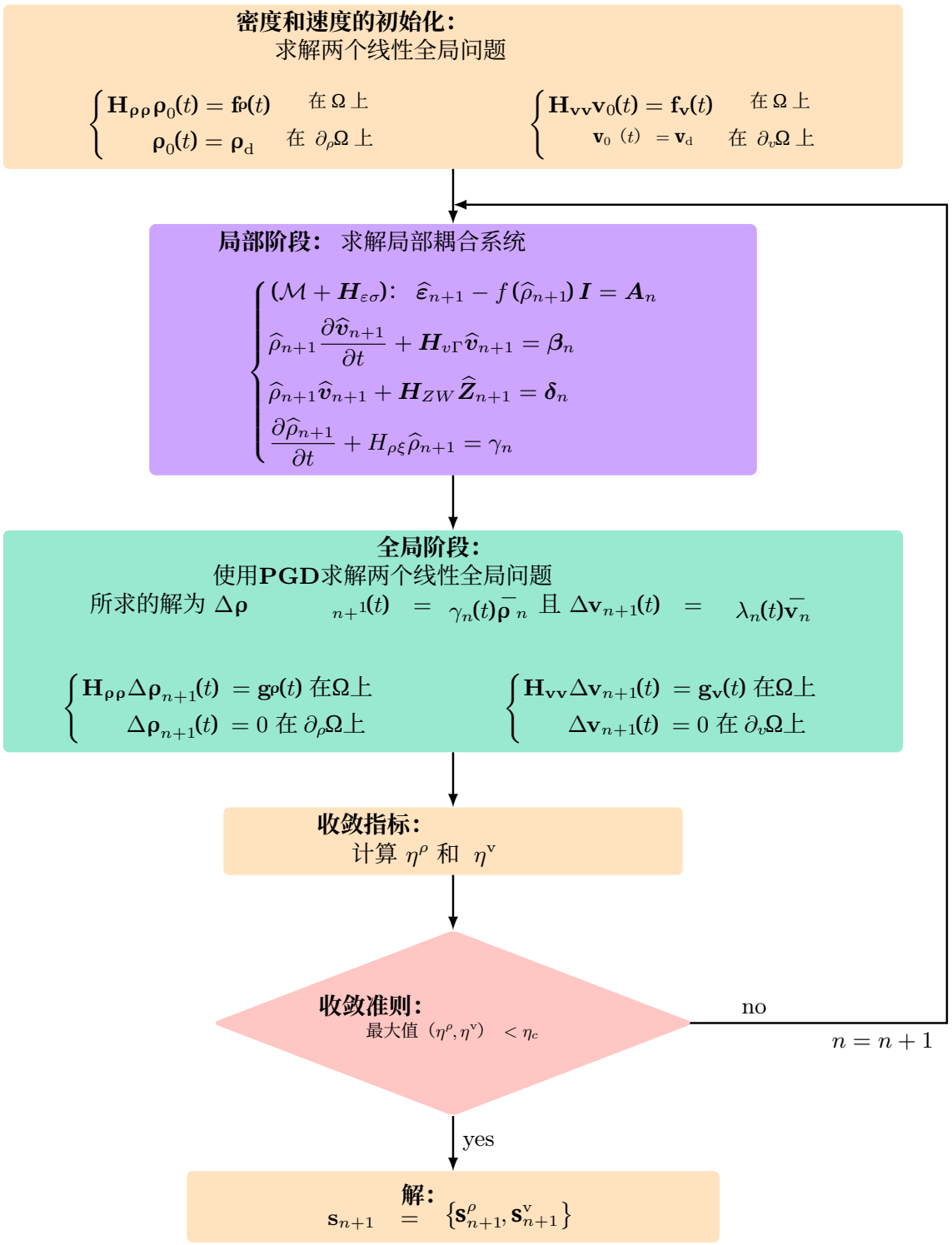


图 1：用于可压缩流动的 LATIN-PGD算法流程图

初始条件取为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(t=0,\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (37a) \\ \rho(t=0,\boldsymbol{x}) = \rho_0 = \dfrac{p_0}{rT_0} & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (37b) \\ p(t=0,\boldsymbol{x}) = p_0 = 1\,\text{Pa} & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (37c) \end{cases}$$

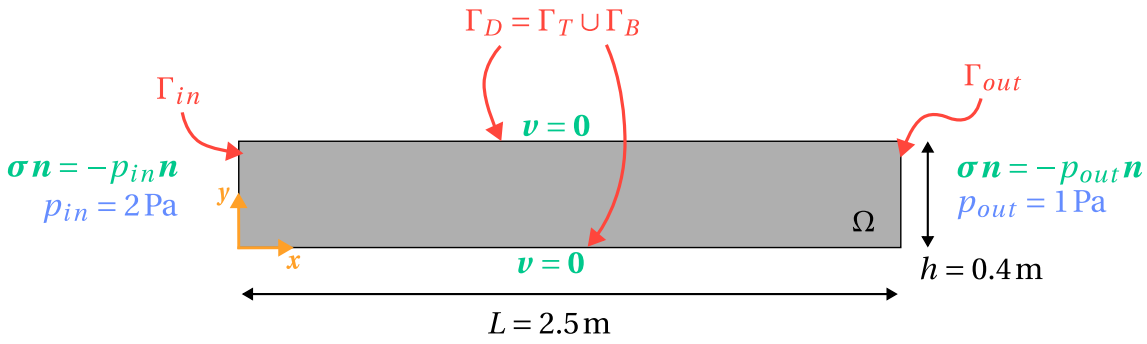


图 2：所研究问题示意图

表 1：通道层流问题所用的流体材料参数

参数	数值（SI 单位）
动力黏度 μ	1 千克·米$^{-1}$·秒$^{-1}$
第二黏度 λ	1 10^{3} 千克 米$^{-1}$ 秒$^{-1}$
参考温度 T_0	293 K
通用气体常数 R	8.314 焦耳 K^{-1} 摩尔$^{-1}$
摩尔质量 M	28.9645 10^{-3} 千克 摩尔$^{-1}$

我们使用结构化网格，沿通道长度方向有 128 个单元，沿通道高度方向有 16 个单元，共计 2048 个 Qua4/Qua9 单元。速度有 16,962 个自由度，密度有 2,193 个自由度。

5.1.2. 稳态结果

我们首先关注已知解析解的稳态结果。在定常性假设下，需要求解斯托克斯方程，可解析地得到：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\left((h/2)^2 - y^2\right)}{2\mu}\dfrac{|\Delta p|}{L}\boldsymbol{e}_x & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (38a) \\ p(\boldsymbol{x}) = p_{in} + \dfrac{\Delta p}{L}x & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (38b) \end{cases}$$

其中 $\Delta p = p_{out} - p_{in}$。速度随后在中线上达到最大值，等于 (39)：

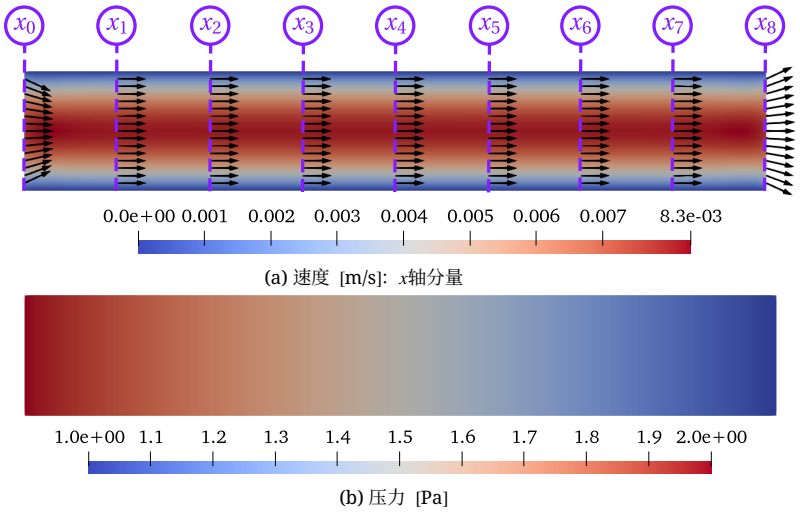
$$v_{max} = \frac{(h/2)^2}{2\mu}\frac{|\Delta p|}{L} \tag{39}$$

对于所研究的问题，数值为$v_{max} = 8\ 10^{-3}\ \text{m s}^{-1}$。

采用 LATIN-PGD方法得到的速度场和压力场如图 3 所示。

我们定性地再现了上述两个场的特性。压力场沿x轴均匀递减，而速度场在每个通道横截面上保持恒定，并在中线上达到最大值。图 3a 显示，速度场的y 分量几乎处处为零，边界处除外。我们确实预期流体在入流处朝向中线流动，在出流处则向外流动。

在图 4a 中，我们绘制了不同截面处沿 y 轴的速度值 x_k，使得 $x_k = k \times 0.3125\ \text{m}$，$k \in \mathbb{N}$。首先，可以看出通道各截面上的速度几乎恒定。其次，速度场恰好呈抛物函数形状。最后，最大值非常接近 $8\ 10^{-3}$ ms^{-1}，这正是预期值。在图 4b 中，我们描绘了沿通道中线的速度 x 分量和压力场



(a) 速度 [m/s]: x轴分量

(b) 压力 [Pa]

图 3：稳态时的场

。我们清楚地看到压力呈线性下降。除$x = 0$和 $x = L$处存在边界效应外，速度几乎处处恒定。

我们在图 5 中绘出了 LATIN-PGD 解与解析解之间的相对误差。

误差率很低，尤其是压力数据。靠近边界处，误差略高，这是由于速度的 y 分量存在误差。我们通过在解析计算中假设通道无限长来解释这些误差。

5.1.3. 整个时空域的结果

上一节给出的结果与达到稳态时斯托克斯方程的解一致。然而，纳维-斯托克斯方程具有时间依赖性。因此，本节将重点介绍整个时间域 $I = [0, 5]$ ms 内的结果。时间域被划分为 100 个时间步，时间步长为 $\Delta t = 5\ 10^{-2}$ms。

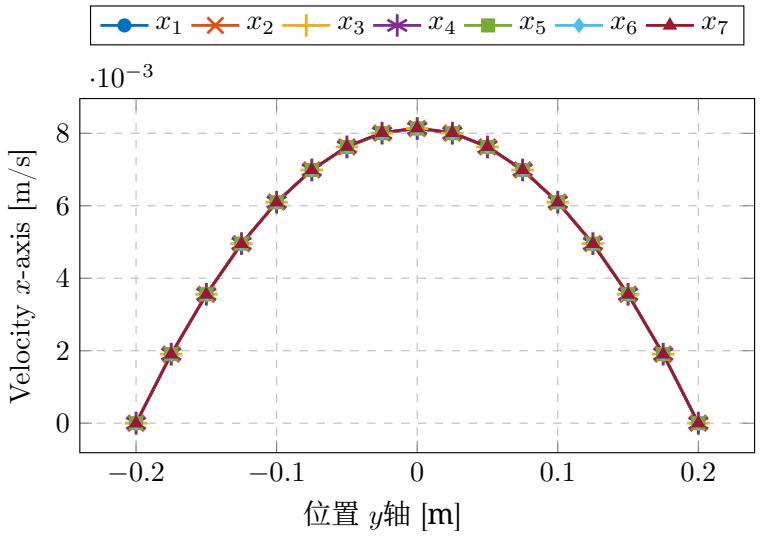
首先可以考察速度x分量和压力随时间的演化。我们在图 6 中绘制了这两个量随中线上位置和时间的变化。

我们观察到，解现在呈现出时间依赖性，并在几毫秒内达到稳态。为了更仔细地观察非稳态，我们在图 7 中展示了点 (1.25,0) 处的速度和压力（该点对应通道的中点）。非稳态持续时间约为 0 ms 至 3 ms。随后，稳态下的各个量与通道中部的预期数值相符。

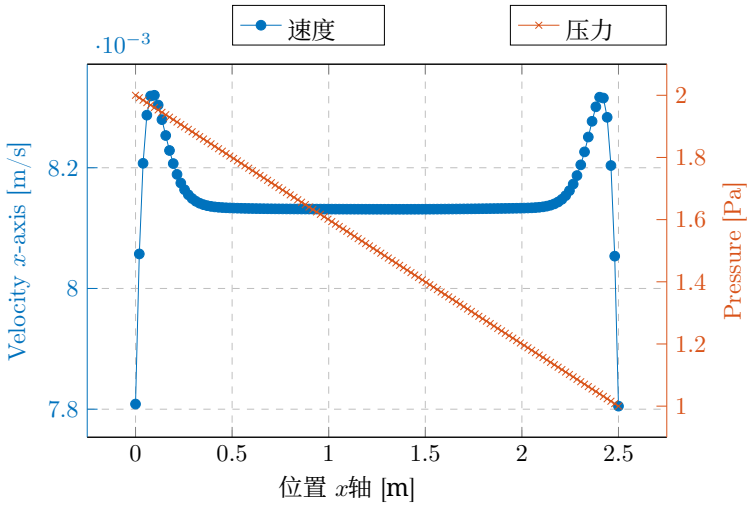
此外，讨论 PGD 生成的模态也很重要。图8展示了收敛指标 η^v和 η^ρ 随迭代的变化，以及相对于采用极低收敛阈值（$\eta_c = 1\ 10^{-8}$）得到的全阶解的误差。此外，还可以读出计算过程中使用的模态数。我们采用数值{style}t$_v = T_f$和 $t_\rho = T_f/10$，得到以下结果。

速度的模态数高于密度的模态数，这是意料之中的，因为速度解更复杂。要理解为何需要更多模态来描述速度，不妨观察最初生成的速度模态（见图9）。

前两个模态主要描述入流和出流边界附近的速度变化。由于我们采用即时降阶技术，最初生成的模态并非最优模态，这一点合乎情理。事实上，算法初始化时使用的解与参考解相差甚远。随后生成的模态（模态 3 至 8）则代表通道内部速度的演变。借助这前八个模态，我们在定性上恢复了参考解中的速度分布形状。不过，误差仍在 5% 至 10% 之间。后续模态的幅值较低，可在局部改进解。



(a) 通道不同截面的速度场



(b) 沿中线的速度和压力

图 4：稳态下的速度和压力结果

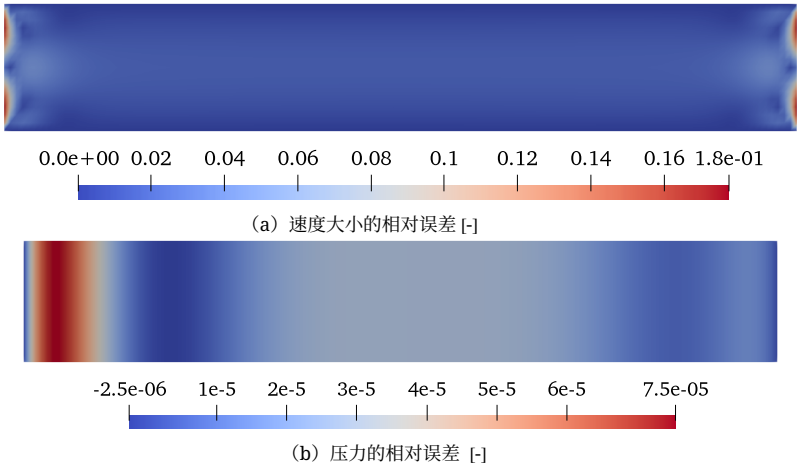
5.2. 二维 2D-1 基准算例的求解

现在，我们希望复现层流的 2D-1 基准算例。考虑一条长度为 $L = 2.2$ m、高度为 $h = 0.41$ m 的通道，其中 x 轴沿通道主轴方向。正如 [40]，所述，该通道内有一个半径为 $r = 0.05$ m 的圆柱体，其原点位于 (0.2, 0.2)m。该基准算例所用的结构化网格如图 10 所示。网格划分为 2,368 个四边形单元，速度对应 16,896 个自由度，密度对应 2,176 个自由度。

材料属性与表 1 中所列的相同。

图 11 展示了最后时间步的速度场和压力场。我们观察到圆柱边界处的速度最大，这与文献 [40] 中的结果一致。与其他研究相比，圆柱左右两侧的速度场完全对称，因为我们完全消除了非线性对流项。

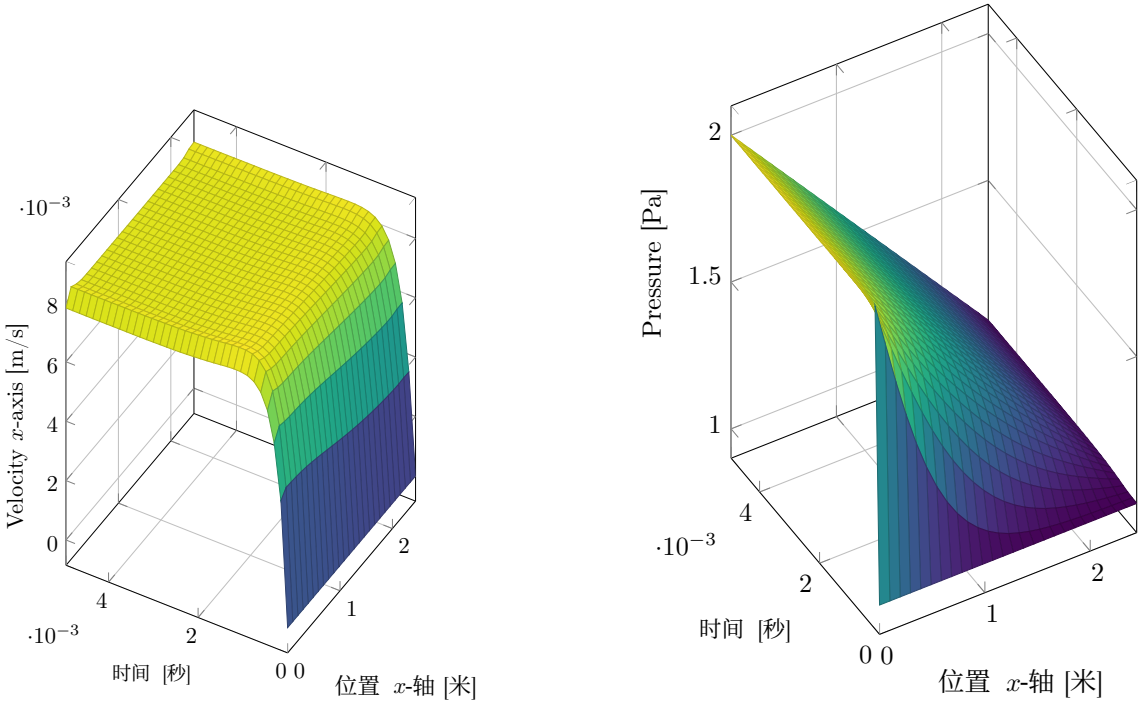
图 12 展示了圆柱体周围的放大视图，使我们能够观察圆柱体周围的流线。速度流线以规则的方式绕过圆柱体，这与层流有关。



（a）速度大小的相对误差 [-]

（b）压力的相对误差 [-]

图 5：数值解与解析解之间的相对误差



(a) 速度

(b) 压力

图 6：中线上速度和压力随时间的变化

计算结束时，我们构建了一个包含 15 个模态、用于表示速度的基，以及另一个包含 6 个模态、用于表示压力的基。使用这些基，我们经过 39 次迭代后，速度的全局相对误差达到 0.1%，压力的全局相对误差达到 0.3%。尽管该基准算例的复杂度更高，收敛速度和基的大小与第 5.1 节所述的非常相似。

5.3. 向三维问题的扩展

本节旨在证明该求解器同样适用于三维问题。我们拟研究一个由两个不同直径的同轴通道组成的变径管。与前两个算例一样，该变径管

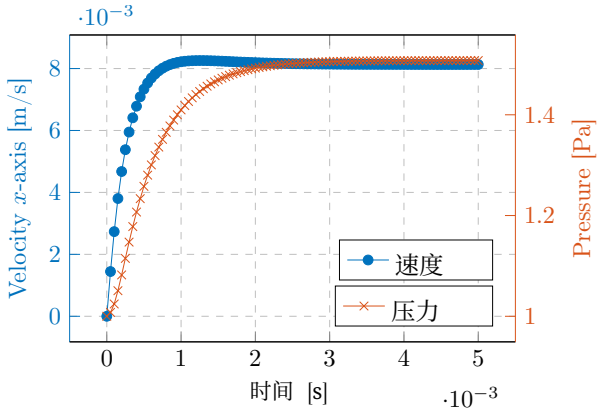
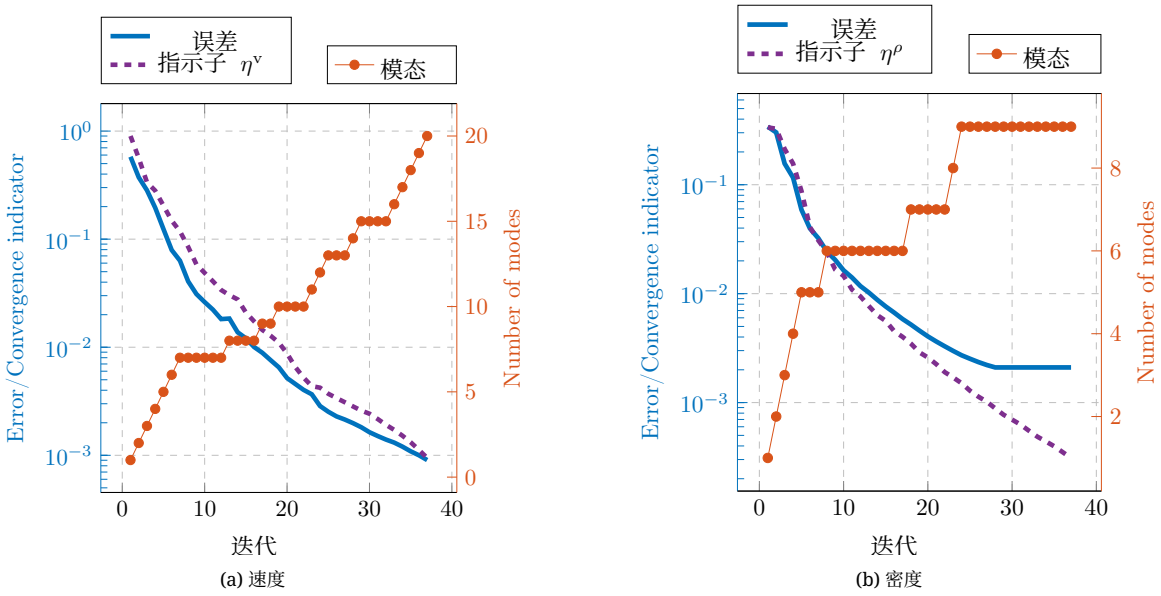
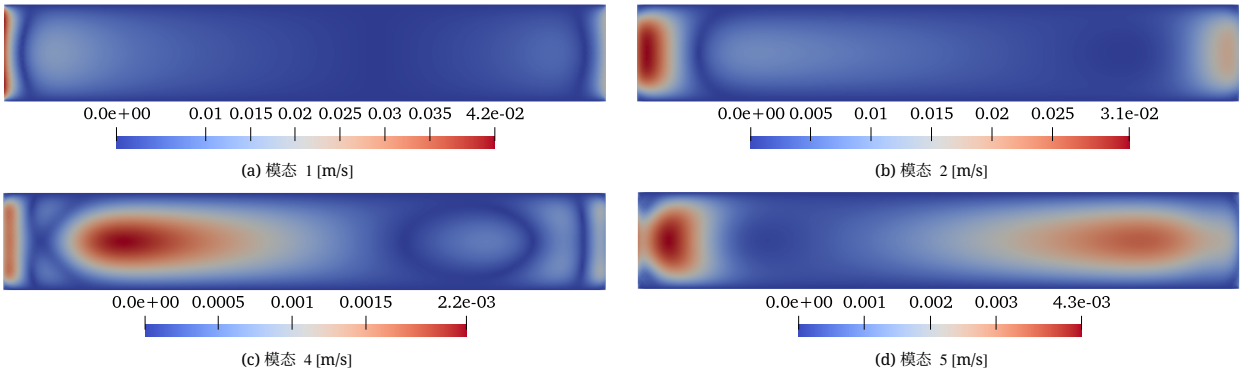


图 7：点 (1.25, 0) 处压力和速度随时间的演化



(a) 速度　　(b) 密度

图8：速度和密度部分的误差、指示子及模态数随 LATIN 迭代的变化



(a) 模态 1 [m/s]　(b) 模态 2 [m/s]

(c) 模态 4 [m/s]　(d) 模态 5 [m/s]

图9：LATIN-PGD算法给出的最后时间步的一些速度模态

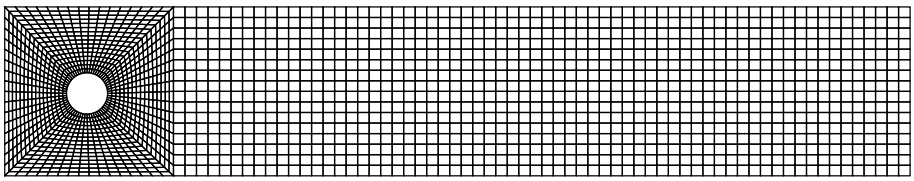


图 10：用于 2D-1 基准算例的网格

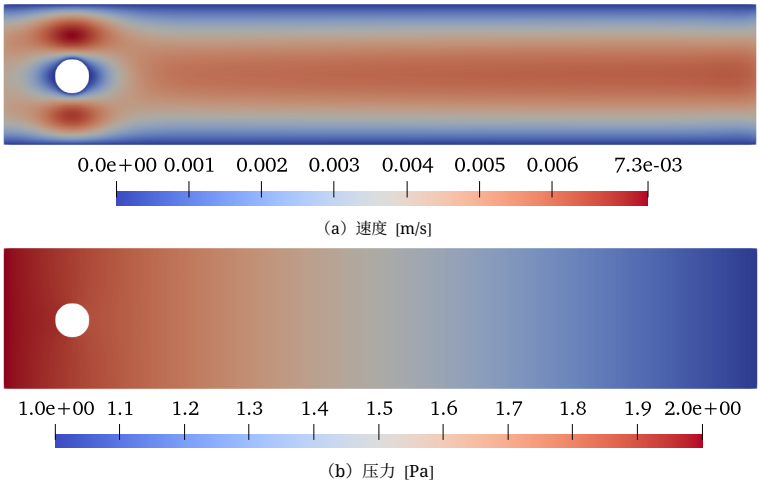


图 11：2D-1 基准算例最后时间步的场

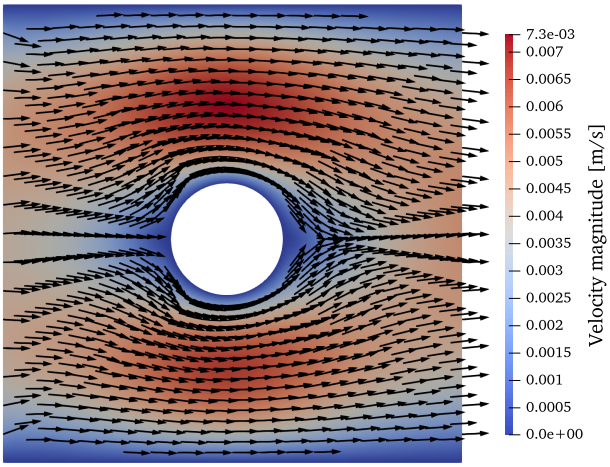


图 12：圆柱周围的速度场和流线 r

在流入边界施加压力 p_{in} = 2Pa，在流出边界施加压力 p_{out} = 1 Pa。我们还对变径管的外表面速度采用无滑移边界条件。问题的边界条件和几何形状如图 13 所示。

我们采用了由 12,026 个单元构成的结构化网格，该网格为速度部分带来 256,851 个自由度，为密度部分带来 11,176 个自由度。

速度和压力的结果如图 14 所示。压力沿主轴呈规律性下降。对于速度，我们可以清楚地看到两个横截面不同的区域。当流体进入横截面最小的通道时，其速度显著增加。此外，通过流线，我们观察到

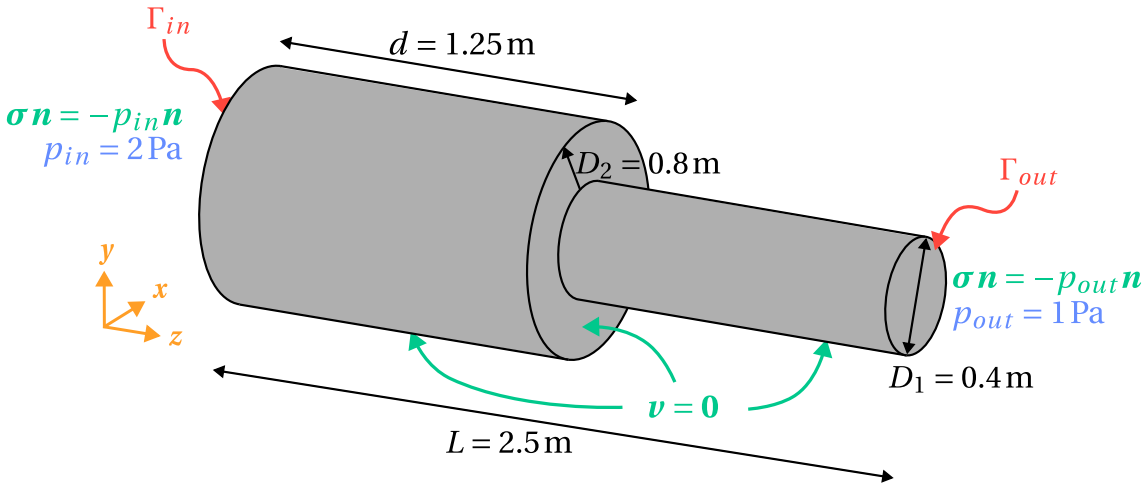
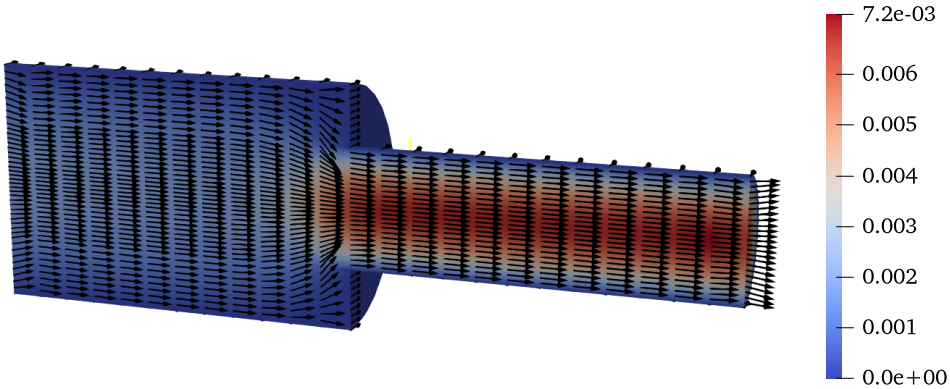
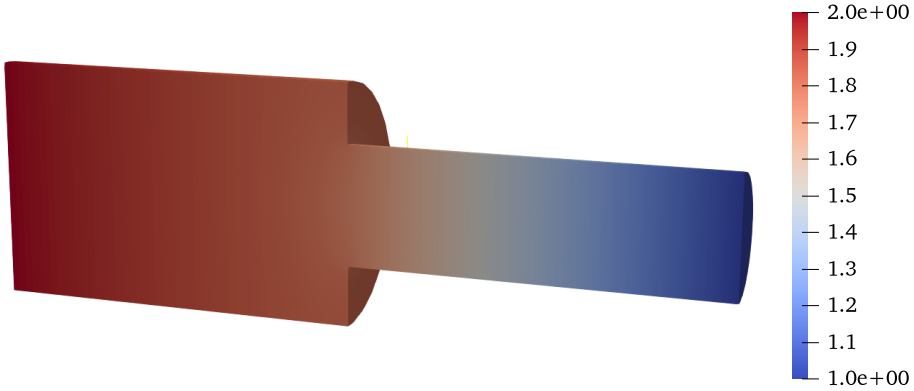


图 13：所研究问题的示意图

通道直径发生变化处的黏性效应。



(a) 速度 [m/s]



(b) 压力 [Pa]

图 14：变径管内最后时间步的场

仿真在 40 次迭代后得出这些结果。然而，由于变径管的自由度数量显著更多，这些迭代所需时间比前两个问题更长。速度基包含 20 个模态，而压力基包含 9 个。使用这些基，我们使速度的全局相对误差达到 0.2%，

速度为 0.2%，压力为 0.2%。

因此，我们证明了该代码适用于不同的二维与三维几何。由此可以预见，该方法也可应用于更复杂的网格。

6. 结论

以往的研究曾使用 PGD 处理流动问题，或使用 LATIN 求解器处理流固耦合这一特定问题。然而，本研究首次尝试将 LATIN-PGD方法应用于流体问题的求解。初步结果表明，该求解器能够有效地计算出有意义的解。我们复现了泊肃叶流动的解析结果，并重现了文献中有关标准基准算例的结果。此外，也可以求解三维几何问题。在所有这些算例中，压力和速度均采用时空分离变量形式进行分解。只需使用规模相对较小的基，就能得到全阶模拟的精确近似解。

然而，我们的模型作出了若干假设。我们将研究范围限制在牛顿型可压缩层流。若要考虑非线性对流项，则需在局部阶段引入经典的 Newton-Raphson格式。我们还可以借鉴速度-压力解耦策略（例如 [7, 41] 中所述的方法），来处理经典的不可压缩流动问题。

更重要的是，本研究仅仅是流体问题领域迈出的第一步，并为未来研究提供了诸多可能性。回顾来看，LATIN-PGD求解器已证明适用于在固体力学中整合复杂材料本构定律。因此，该求解器可能适用于处理复杂的非牛顿流动问题。对于这类问题，黏度不再是常数，文献中已提出复杂程度各异的模型（[42, 43, 44]）。该求解器也适用于参数化问题，其参数可以涉及几何形状、材料或边界条件。

声明

- 数据和材料的可用性 本文所述研究未使用任何数据或材料。

- 利益冲突 作者声明，他们不存在可能影响本文所报告研究的已知经济利益冲突或个人关系。

- 作者贡献 E. F.：撰写初稿、软件、方法学、调查研究、概念构思。P.-A. B.：审阅与编辑、监督、方法学。F. L.：审阅与编辑、监督、方法学。D. N.：审阅与编辑、监督、方法学。P.J.：审阅与编辑、监督、方法学、调查研究、概念构思。

- 致谢 本研究使用了由法国国家科学研究中心（CNRS）和法兰西岛大区支持的巴黎中央理工-高等电力学院ˆ与巴黎萨克雷高等师范学院´的“M´esocentre”计算中心提供的高性能计算资源。https://mesocentre.universite-paris-saclay.fr/。作者谨此感谢德国研究联合会（DFG）通过国际研究培训组 2657（IRTG 2657）提供的支持。该项目题为“高维计算力学技术”（资助编号：433082294）。

参考文献

[1] A. J. Chorin, 《求解不可压黏性流动问题的数值方法》, 《计算物理学杂志》2 (1)(1967) 12–26。doi:10.1016/0021-9991(67)90037-X.[2] A. J. Chorin, 《纳维-斯托克斯方程的数值解》, 《计算数学》22 104 1968 745 762 doi:10.1090/()()-。。S0025-5718-1968-0242392-2

[3] C. Taylor、P. Hood, 《采用有限元技术求解纳维-斯托克斯方程的数值方法》, 《计算机与流体》1 (1)（1973年1月）。 doi:10.1016/0045-7930(73)90027-3. [4] D. Arndt、H. Dallmann、G. Lube, 《含时不可压缩纳维-斯托克斯问题的局部投影有限元稳定化》, 《偏微分方程数值方法》31 (4) (2015) 1224–1250。 [5] F. Habla、M. W. Tan、J. Haßlberger、O. Hinrichsen, 《采用对数构象重构在OpenFOAM®中对三维顶盖驱动空腔内黏弹性流动进行数值仿真》, 《非牛顿流体力学杂志》 212 2014 47 62 doi:https:()–。 //doi.org/10.1016/j.jnnfm.2014.08.005 。 [6] M. Cremonesi 、 A. Franci 、 S. Idelsohn 、 E. O˜nate 等, 《粒子有限元法（ PFEM ）现状综述》, 《工程计算方法档案》27 (5) (2020) 1709–1735。 [7] H. Wang、H. Wang、F. Gao、P. Zhou、Z. J. Zhai, 《建筑环境计算流体力学模拟中压力-速度解耦算法的文献综述》, 《建筑与环境》143 (2018) 671–678。 doi:10.1016/j.buildenv.2018.07.046. [8] V. Haroutunian、M. S. Engelman、I. Hasbani, 《用于大型不可压缩流动问题数值求解的分离式有限元算法》, 《国际流体数值方法杂志》17 (4) (1993) 323–348。 doi:10.1002/fld.1650170405. [9] A. C. Benim、W. Zinser, 《采用有限元的纳维-斯托克斯方程分离式表述》, 《应用力学与工程中的计算机方法》57 (2) (1986) 223–237。 doi:10.1016/0045-7825(86)90015-0. [10] A. Chatterjee, 《本征正交分解简介》, 《当代科学》(2000) 808–817。 [11] G. Berkooz、P. J. Holmes、J. Lumley, 《本征正交分解在湍流分析中的应用》, 《流体力学年度评论》25 (2003) 539–575。 doi:10.1146/annurev.fl.25.010193.002543. [12] M. A. Mendez、M. Balabane、J.-M. Buchlin, 《复杂流体流动的多尺度本征正交分解》, 《流体力学杂志》870 (2019)。 doi:10.1017/jfm.2019.212. [13] M. Beckermann、M. Cremonesi、A. Barbarulo, 《采用重新网格划分的拉格朗日有限元求解器的流形可约性》, 《应用力学与工程中的计算机方法》446 (2025) 118212。 doi:10.1016/j.cma.2025.118212. [14] K. Willcox, 《基于缺损本征正交分解的非定常流动传感与估计》, 《计算机与流体》35 (2) (2006) 208–226。 [15] A. Quarteroni、G. Rozza, 《采用约化基方法求解参数化纳维-斯托克斯方程》, 《偏微分方程数值方法：国际期刊》23 (4) (2007) 923–948。 [16] T. Franz、R. Zimmermann、S. G¨ortz、N. Karcher, 《基于流形学习的定常跨声速流动插值降阶建模》, 《国际计算流体动力学杂志》28 (3-4) (2014) 106–121。 [17] P. Ladev`eze, 《非线性计算结构力学：计算新方法与非增量方法》, 机械工程丛书, Springer, 纽约州纽约, 1999。 doi:10.1007/978-1-4612-1432-8. [18] F. Chinesta、P. Ladev`eze、E. Cueto, 《基于正规广义分解的模型降阶简评》, 《工程计算方法档案》18 (4) (2011) 395–404。 doi:10.1007/s11831-011-9064-7. [19] A. Dumon、C. Allery、A. Ammar, 《用于求解纳维-斯托克斯方程的正规广义分解（PGD）》, 《计算物理学杂志》230 (4) (2011) 1387–1407, 出版方：Elsevier BV。 doi:10.1016/j.jcp.2010.11.010. [20] D. Modesto、S. Zlotnik、A. Huerta, 《非均匀无界域中参数化亥姆霍兹问题的正规广义分解：港池振荡应用》, 《应用力学与工程中的计算机方法》295 (2015) 127–149。 [21] M. Aghighi、A. Ammar、C. Metivier、M. Normandin、F. Chinesta, 《采用PGD对Rayleigh–B´enard对流模型进行非增量瞬态求解》, 《非牛顿流体力学杂志》200 (2013) 65–78。 doi:10.1016/j.jnnfm.2012.11.007. [22] A. Ammar、M. Normandin、F. Daim、D. Gonzalez、E. Cueto、F. Chinesta, 《基于分离表示的非增量策略：计算流变学中的应用》, 《数学科学通讯》8 (3) (2010) 671–695。 [23] P. Ladev`eze, 《关于结构力学中的一类算法》, 《关于结构力学中的一类算法》300 (2) (1985) 41–44, 地点：巴黎, 出版方：Gauthier-Villars。 [24] E. Vergnault、O. Allix、S. Maison-le Po¨ec, 《采用多尺度区域分解方法的流固耦合》, 《欧洲计算力学杂志/欧洲数值力学评论》19 (1-3) (2010) 267–280。 [25] R. Scanff、S. Nachar、P. A. Boucard、D. N´eron, 《LATIN-PGD方法研究：结合最新进展分析若干变体》, 《工程计算方法档案》28 (5) (2021) 3457–3473。 doi:10.1007/s11831-020-09514-1. [26] D. Dureisseix、P. Ladev`eze、B. A. Schrefler, 《用于多物理场问题的LATIN计算策略：孔隙弹性应用》, 《国际工程数值方法杂志》56 (10) (2003) 1489–1510, 电子印本：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.622。 doi:10.1002/nme.622. [27] D. N´eron、D. Dureisseix, 《采用时空界面耦合的热-孔隙弹性结构计算策略》, 《国际工程数值方法杂志》75 (9) (2007) 1053–1084, 出版方：Wiley。 doi:10.1002/nme.2283. [28] D. N´eron、D. Dureisseix, 《耦合物理场之间设有时间界面的孔隙弹性问题计算策略》, 《国际工程数值方法杂志》73 (6) (2008) 783–804, 出版方：Wiley。 doi:10.1002/nme.2091. [29] ´E. Foulatier、D. N´eron、F. Louf、P.-A. Boucard, 《针对参数化非线性强耦合热-孔隙弹性问题的降阶模型策略》, 《工程科学高级建模与仿真》12 (1) (2025) 32。 [30] H. Schlichting、K. Gersten, 《边界层理论》, Springer, 2016。 [31] L. Rosenhead, 《引言——第二黏性系数：基本原理简述》, 《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》226 (1164) (1954) 1–6。 [32] P. H. Oosthuizen、W. E. Carscallen, 《可压缩流体流动导论》, CRC出版社, 2013。 [33] V. Girault、P.-A. Raviart, 《纳维-斯托克斯方程的有限元逼近》, Springer, 1979。 [34] R. Rannacher, 《不可压缩纳维-斯托克斯方程的有限元方法》, 载于：G. P. Galdi、J. G. Heywood、R. Rannacher（编）, 《数学流体力学基础方向》, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2000年, 第191–293页。 doi:10.1007/978-3-0348-8424-2_6. [35] F. Wurtzer、D. N´eron、P.-A. Boucard, 《用于求解参数化强耦合热-力学问题的模块化模型降阶方法》, 《有限元分析与设计》239 (2024) 104207。 doi:10.1016/j.finel.2024.104207. [36] R. Scanff、D. N´eron、P. Ladev`eze、P. Barabinot、F. Cugnon、J.-P. Delsemme, 《用于求解固体力学含时非线性参数化问题的弱侵入LATIN-PGD》, 《应用力学与工程中的计算机方法》396 (2022) 114999。 doi:https:

//doi.org/10.1016/j.cma.2022.114999. [37] D. N´eron, P. Ladev`eze, D. Dureisseix, B. A. Schrefler，考虑多物理场问题中的非线性因素：在孔隙弹性中的应用，载于：《国际计算科学会议》，Springer，2004年，第612–620页。[38] C. Heyberger, P.-A. Boucard, D. N´eron，正规广义分解框架内的多参数分析，《计算力学》49 (3) (2012) 277–289。 doi:10.1007/s00466-011-0646-x. [39] L. N. Liebermann，液体的第二黏度，《 Phys. Rev. 》 75 (1949) 1415–1422。 doi:10.1103/PhysRev.75.1415. [40] M. Sch¨afer, S. Turek, F. Durst, E. Krause, R. Rannacher，绕圆柱层流的基准计算，载于：《使用高性能计算机进行流动模拟 II：德国科学基金会重点研究计划 1993–1995 年成果》，Springer，1996年，第547–566页。[41] V. DeCaria, T. Iliescu, W. Layton, M. McLaughlin, M. Schneier，一种人工压缩降阶模型，《SIAM 数值分析杂志》58 (1) (2020) 565–589。[42] C. U. Ikoku, H. J. Ramey Jr，多孔介质中非牛顿幂律流体的瞬态流动，《石油工程师学会期刊》19 (03) (1979) 164–174。[43] N. Roussel, C. Lanos, Z. Toutou，利用简单挤压试验识别宾汉流体的流动参数，《非牛顿流体力学杂志》135 (1) (2006) 1–7。[44] P. Junker, T. Wick，采用内部变量对非牛顿流体进行时空建模与数值模拟，《国际流体数值方法杂志》97 (12) (2025) 1457–1481。
arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/fld.5406,
doi:https://doi.org/10.1002/fld.5406 .