复杂度与三维引力的希尔伯特空间维数

Vijay Balasubramanian ,[1, 2, 3] Rathindra Nath Das ,[4, 5, 6, *] Johanna Erdmenger ,[4] Jonathan Karl ,[4], [†] 和 Herman Verlinde [7]
[1] *David Rittenhouse Laboratory, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*
[2] *Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, Santa Fe, NM 87501, USA*
[3] *Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium*
[4] *Institute for Theoretical Physics and Astrophysics and Würzburg-Dresden Cluster of Excellence ctd.qmat, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg, Germany*
[5] *Faculty of Physics, Weizmann Institute of Science, Rehovot 7610001, Israel*
[6] *Center for Theoretical Physics—a Leinweber Institute, MIT, Cambridge, MA 02139, USA*
[7] *Department of Physics, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA*
(日期：2026年2月4日)

构建量子引力理论的一个核心问题，是确定黑洞希尔伯特空间的大小和结构。这里，我们采用量子动力学克雷洛夫复杂度方法，计算 2+1 维反德西特空间中黑洞的希尔伯特空间维数。为此，我们求得初始热场双态在克雷洛夫基上的扩散。相应的 Lanczos 系数与 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 群上的混沌运动相匹配。通过在路径积分中纳入非微扰效应——该路径积分用于计算粗粒化系综平均——我们发现复杂度在晚期趋于饱和。饱和值等于贝肯斯坦-霍金熵的指数。我们的结果提出了一种新方法，可以根据扩散复杂度的饱和值计算复杂相互作用系统的希尔伯特空间维数。

arXiv:2602.02645v1 [hep-th] 2 Feb 2026

引言—— 量子引力领域的一个重要难题，是理解描述不同引力物体的希尔伯特空间的大小和结构。确定希尔伯特空间维数的一种方法，是求出完备正交归一基中的向量数目。文献 [1]采用了这一方法来解释弦理论中某些极端超对称黑洞的熵。第二种方法是考虑任意一组足够大的不同向量。这些向量的重叠所构成的格拉姆矩阵的秩，等于希尔伯特空间维数。文献 [2–8] 采用了这一方法来解释一般黑洞的熵。后一种方法使用了欧几里得引力路径积分及其鞍点近似，并假设该路径积分可由某种高能完备化（或许是弦理论）良好定义。还有第三种方法，适用于混沌系统，或至少适用于具有足够遍历性的系统：计算一个一般初始向量随时间演化时所遍历的所有态所张成空间的维数。

我们将这一第三种方法应用于渐近反德西特$_3$引力，通过计算演化中的热场双态（TFD态） [9]的扩散复杂度，来描述近极端永恒黑洞。扩散复杂度根据量子态在克雷洛夫基上的支撑来计算，该基经构造可张成时间演化。我们的克雷洛夫基将与 [4, 5]中的广义热场双态相关。在混沌理论中，通用初始态最终会在克雷洛夫基上完全离域 [9–11], ，因此测量其扩散即可揭示希尔伯特空间中可访问部分的维数。我们研究的是三维引力的热态，它们在整个无限维能量本征空间上都有支撑；不过，高能量的指数抑制实际上限制了动力学到统计力学中的微正则带。

我们从返回振幅入手，即态保持不变的概率，并将其处理为克雷洛夫基态链之间的跃迁振幅，这些振幅称为 Lanczos 系数 [9]。对于初始 TFD态，返回振幅是由态密度确定的、经过解析延拓的配分函数求和。随后，扩散复杂度可用谱密度以及由 Lanczos 系数 [12–14]构造的能量正交多项式来表示。将这些多项式识别为随机矩阵系综的正交多项式后，我们的方法借助具有矩阵势的随机矩阵理论（RMT），引入了关于哈密顿量特征值统计的一种新物理概念$e^{-V(E)} = |\phi_0(E)|^2\rho(E)$；该矩阵势由参考态$\phi_0(E)$和微观谱密度 $\rho(E)$指定。

我们将这一程序应用于近极限下的三维引力，此时谱密度 $\rho(E)$ 已知[15–17]。这超越了人们对 1+1 维 JT引力 [18–20]这一例子的深入理解。我们表明，Lanczos 系数与在 $SL(2,\mathbb{R})$流形上运动的量子粒子的系数相匹配；与之相关的拉盖尔多项式使扩散复杂度单调递增。[15–17] 中的谱密度 $\rho(E)$ 是通过欧几里得引力路径积分（GPI）推导得出的；许多研究（例如关于三维引力的 [2, 21, 22] 和 [23] ）表明，应将该谱密度 $\rho(E)$ 解释为某个底层系综的粗粒化平均。因此，扩散复杂度公式中的 $\rho(E)\rho(E')$等乘积应理解为该系综中的谱关联函数，而非简单的乘积。我们假设这些关联函数遵循随机矩阵普适性，这一假设受到虫洞效应的支持；虫洞对配分和的贡献

在二维和三维引力中，虫洞会影响配分和的乘积[17, 23]。同样的虫洞意味着，黑洞希尔伯特空间是有限维的，并由时间平移的TFD态 [4, 5] 张成。计入这一效应后，扩散复杂度会饱和于一个随贝肯斯坦-霍金熵呈指数增长的值，即黑洞希尔伯特空间的维数。

正交多项式与复杂度——扩散复杂度旨在量化波函数随时间演化时在希尔伯特空间中的扩散程度[9, 24–26]。考虑一个初始态 $|\psi_0\rangle$，其演化形式为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH}\,|\psi_0\rangle \equiv \sum_n \psi_n(t)\,|K_n\rangle\ , \tag{1}$$

其中，克雷洛夫基 $\{|K_n\rangle \,|\, n\in\mathbb{N}\}$ 通过正交化过程，从集合 $\{H^n\,|\psi_0\rangle \,|\, n\in\mathbb{N}\}$ 递归地构造得到。根据构造，基向量满足递推关系

$$H\,|K_n\rangle = a_n\,|K_n\rangle + b_n\,|K_{n-1}\rangle + b_{n+1}\,|K_{n+1}\rangle\ , \tag{2}$$

其中 a_n 和 b_n 是 Lanczos 系数。由于$|K_n\rangle$ 构成一组标准正交基，我们可将态 (1) 在克雷洛夫基中的系数表示为 $\psi_n(t)$，即 $\psi_n(t) = \langle K_n|\psi(t)\rangle$。扩散复杂度定义为

$$C_S(t) = \sum_n n|\psi_n(t)|^2\,. \tag{3}$$

我们也可以将 (1) 按能量基展开，得到

$$|\psi(t)\rangle = \int dE\,\rho(E)\,\phi_0(E)e^{-iEt}\,|E\rangle\ , \tag{4}$$

其中 $\rho(E)$ 是谱密度，且 $\phi_0(E) = \langle E|\psi_0\rangle$。对于具有离散谱 $\rho(E) = \sum_i \delta(E_i - E)$ 的理论，其中 E_i 是能量本征值；我们在热力学极限下工作，并将谱密度近似为连续分布。能量本征态的归一化方式为

$$\langle E|E'\rangle = \frac{\delta(E-E')}{\rho(E)}\,,\quad \mathbb{1} = \int dE\rho(E)\,|E\rangle\,\langle E|\ . \tag{5}$$

将式 (4) 投影到 $|K_n\rangle$上，得到

$$\psi_n(t) = \int dE\,\rho(E)\,\phi_0(E)e^{-iEt}c_n^*(E)\,, \tag{6}$$

其中 $c_n(E) \equiv \langle E|K_n\rangle$。由式 (2) 可知，$c_n(E)$ 也满足递推关系 (A.1)，其初始条件为 $c_{-1}(E) = 0$ 和 $c_0(E) = \phi_0(E)$（另见 [27,28]）。我们在附录中证明，该递推关系的解具有如下形式

$$c_n(E) = \phi_0(E)\,h_n(E)\,, \tag{7}$$

其中，$h_n(E)$ 是一个 n 次多项式，其系数完全由 Lanczos 系数 (A.5) 确定。由克雷洛夫基的正交归一性可知

$$\int dE\,\rho(E)\,|\phi_0(E)|^2\ h_n^*(E)h_m(E) = \delta_{nm}\,, \tag{8}$$

这是将恒等式 (5) 代入重叠量 $\langle K_n|K_m\rangle$ 后得到的。因此，多项式 $h_n(E)$ 关于测度 $\rho(E)\,|\phi_0(E)|^2$ 正交。此外，由 (6) 和 (7) 可得，扩展复杂度 (3) 可用这些多项式表示为 [12–14]

$$\begin{aligned} C_S(t) = \int dE\,dE'\,e^{-i(E-E')t}\,\rho(E')\rho(E) \\ \times\,|\phi_0(E)|^2\,|\phi_0(E')|^2 \sum_n n\,h_n(E')h_n^*(E)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

早期复杂度增长。— 现在考虑反德西特$_{d+1}$中的一个永恒黑洞。哈特尔-霍金无边界欧几里得路径积分构造出一个热场双态（TFD）形式的真空波函数

$$|\mathrm{TFD}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}}\int dE\,\rho(E)e^{-\frac{\beta}{2}E}e^{-iEt}\,|E\rangle \tag{10}$$

其中 $Z(\beta)$ 是正则配分函数

$$Z(\beta) = \int dE\,\rho(E)\,e^{-\beta E}\,, \tag{11}$$

并且我们采用简写 $|E\rangle \equiv |E\rangle_L \otimes |E\rangle_R$，如[20, 29]中所示。Lanczos 系数可由返回振幅 [9] 的矩得到

$$S_{\mathrm{TFD}}(t) := \langle \mathrm{TFD}(0)|\mathrm{TFD}(t)\rangle = \frac{Z(\beta+it)}{Z(\beta)}\,. \tag{12}$$

在有效低能描述中，Z 由对边界为 $S^1_\beta \times S^{d-1}$ [30] 的流形进行引力路径积分（GPI）得到，该积分计算引力希尔伯特空间 [8] 上的迹。

对于一般的时空维数，该路径积分必须用主导鞍点来近似。然而，对于 $d+1=3$，Maloney–Witten–Keller（MWK）计算了满足环面边界条件 [15, 16] 的爱因斯坦方程所有经典解的求和。环面参数为 $\tau = \frac{\theta+i\beta}{2}$，其中 θ 是空间圆周的周期，τ 是黑洞角动量 J 的对偶变量。在接近极值性时，[31]，即 $|J| \gg \frac{L}{G_N}$ 且 $0 < E - |J| \ll \frac{L}{G_N}$，其中 L 是反德西特半径，G_N 是牛顿常数，MWK 态密度的主导贡献为 [17]

$$\rho_J^{\mathrm{MWK}}(E) \simeq Ae^{S_0}\sqrt{E-|J|} + \frac{B\,(-1)^J e^{S_0/2}}{\sqrt{E-|J|}}\,, \tag{13}$$

其中 $S_0 \equiv S_0(J)$ 是 BTZ 黑洞的贝肯斯坦-霍金熵。MWK 密度的返回振幅 (12) 由 (11) 得到，并在附录中以 (A.15) 给出。如附录所示，所得 Lanczos 系数 (A.16)-(A.17) 在指标 n 很大 [9]时，与 $SL(2,\mathbb{R})$ 群流形上一个粒子的相应系数相符。

事实上，MWK 态密度不能用来为多项式 h_n 定义积分测度 (8)，因为当 $E-|J|$ 指数级地很小且为奇数自旋时，(13) 变为负的 [32]。更糟的是，这种负性意味着底层理论不可能是幺正的。为解决态密度的负性而提出的一种方案，是在引力路径积分 [17]中纳入额外的离壳贡献。这会移动基态能量，并且三维引力在近极端极限下的完整谱密度变为

$$\rho_J^{\rm MT}(E) \simeq A\, e^{S_0}\sqrt{E-E_0(J)}\,, \tag{14}$$

其中 $E_0(J)-|J| \propto -(-1)^J e^{-\frac{S_0}{2}}$。同样，能量密度通过式 (11) 决定返回振幅 (12)

$$S_{\rm MT}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta+it}\right)^{3/2} \exp[-i\,E_0(J)\,t]\ . \tag{15}$$

我们可以从返回振幅 [9] 推导初始态中的哈密顿量矩和 Lanczos 系数:

$$a_n = -\frac{4n+3}{2\beta} - E_0(J)\,, \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n=0\,, \\ \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{n(2n+1)}{2}} & \text{if } n>0\,, \end{cases} \tag{16}$$

其形式与 $SL(2,\mathbb{R})$ [9] 上粒子的情形相同

$$a_n = \gamma(h+n)+\xi\,, \quad b_n = \sigma\sqrt{n(2h+n-1)}\,. \tag{17}$$

一般的 $SL(2,\mathbb{R})$ 情形已在 [33] 中得到研究，方法是直接求解式 (2)，并取标度维数为 h 的最高权态，且哈密顿量是显式给出的。一种实现方式是谐振子，它在 $h=1/2$ [9] 时给出式 (17)。这里我们发现，近极端三维引力的配分函数在 $h=3/4$ 时导出式 (17)。

式 (16) 中的系数与式 (17) 中的 $SL(2,\mathbb{R})$ 形式相符，因为三维引力的近极端极限可约化为含缺陷的 JT 引力 [17]。约化后的理论包含一个具有 $SL(2,\mathbb{R})$ 对称性的 Schwarzian 扇区。在近极端极限下，Schwarzian 理论的能量密度可近似为 $\sqrt{E-E_\star}$，从而得到式 (13) 中的第一项。另一方面，根据 [9]，Schwarzian 理论的扩散复杂度在晚时刻与 $SL(2,\mathbb{R})$ 模型的扩散复杂度相同；或者，也可在大 C/β 极限下得到这一结果。在此范围内，Schwarzian 理论描述 JT 引力，而 C 被解释为胀子的边界值。

我们在附录中证明，对于 Lanczos 系数 (16)，多项式 (7) 具有形式 (A.13)。

$$h_n(E) = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})n!}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}}L_n^{(1/2)}\Big(-\beta(E+E_0(J))\Big)\,, \tag{18}$$

其中 $L_n^{(\alpha)}$是广义拉盖尔多项式。这些多项式 $L_n^{(\alpha)}$(y)关于测度 μ(y) $\propto y^\alpha e^{-y}$正交。因此，(18)确实与(8)一致，因为对于热场双重态(10)，我们有$\phi_0(E)$ $\propto e^{-\beta E/2}$，而(14)意味着 $\alpha=1/2$。广义拉盖尔多项式曾被用于计算 [12], 中的复杂度，而对于 $\alpha=1/2$，这导致

$$C_S^{\rm MT}(t) = \frac{3t^2}{2\beta^2}\,. \tag{19}$$

将 (17) 与 (16) 对比后，我们发现 $\gamma^2/4-\sigma^2=0$。这与 $SL(2,\mathbb{R})$ [9]，上粒子的复杂度增长相符。

量子引力中的复杂度饱和——我们预期，扩散复杂度会在晚期饱和，其饱和值由底层希尔伯特空间的维数决定。对于我们正在研究的黑洞，这意味着复杂度应在 e^{S_0} 处饱和。(19) 之所以没有饱和，是因为它是根据连续能谱 (14) 得出的，而该能谱在任意能带中都有无限多个态。相比之下，如果有限的黑洞熵具有合理的微观解释，那么完整的量子引力理论应具有离散谱。这些考量表明，上述计算仅适用于短于典型能级间距 $t \ll 1/\delta E \sim e^{S_0}$ 倒数的时间尺度；若要研究更晚的时刻，我们就必须找到一种方法来解析能谱的离散性。

式（14）中的连续谱密度是通过引力路径积分（GPI）得到的；引力路径积分是一种对底层紫外完备理论的有效场论描述。按照构造，GPI 只包含关于基本自由度的粗粒化信息，并被认为能够计算出表现得如同某个底层系综中的平均值的物理量（例如，见 [2, 21–23, 34–36]）。这表明，态密度（14）应被理解为对本质上离散的谱进行粗粒化后的系综平均。

从这一角度来看，我们不能简单地将（14）代入扩散复杂度（9）的积分表达式。相反，如果我们用 GPI 计算被积函数，那么 $\rho(E')\rho(E)$ 因子应当起到有效系综中的密度-密度关联函数的作用。因此，如果我们用 GPI 直接计算复杂度积分中的被积函数，实际上计算的是

$$\begin{aligned}\overline{C_S(t)} = \int dE\, dE'\, e^{-i(E-E')t}\,\overline{\rho(E')\rho(E)} \\ \times\, |\phi_0(E)|^2\,|\phi_0(E')|^2\,A(E,E')\,,\end{aligned} \tag{20}$$

其中，上横线表示该量由 GPI 计算，因此实际上起到系综平均的作用。我们还引入了复杂度核

$$A(E,E') = \sum_n n\, h_n(E') h_n^*(E)\,. \tag{21}$$

谱的精细结构编码于密度-密度关联函数 $\rho(E')\rho(E)$ 之中。

该谱关联函数可计算为双边界配分函数 $Z(\beta',\beta)$ 的逆拉普拉斯变换，其中 β,β' 是两个热圆的周期。该配分函数的领头路径积分贡献是不连通的 [5], ，从而得到因子化形式 $Z(\beta')Z(\beta)$，并导致形如 (9) 的扩散复杂度，且该复杂度不会饱和。对因子化配分函数的领头非微扰修正来自连接两个边界的欧几里得虫洞。对于三维引力，这一贡献已在 [23] 中计算。在上文讨论的近极端极限 (13) 中，虫洞贡献具有普适的随机矩阵形式 [37], ，这与有效降维描述在高斯酉系综（GUE）普适类中具有已知随机矩阵对偶这一事实相符 [17]。

因此，式 (20) 中的谱关联函数显示出 $E\approx E'$ 的随机矩阵普适性，因此 [21]

$$\overline{\rho(E')\rho(E)}\approx\rho(E')\rho(E)-\frac{\sin^2(\pi\rho(\overline{E})(E'-E))}{\pi^2(E'-E)^2}+\dots. \tag{22}$$

这里，$\overline{E}=\frac{E+E'}{2}$ 和“...”表示与 $\delta(E-E')$ 成正比的接触项贡献，它们会使扩散复杂度 (20) 产生一个可以略去的常数偏移。式 (22) 中的第二项源自路径积分的连通虫洞贡献，称为正弦核；对于任何属于 GUE 普适类 [21] 的矩阵模型，它都是普适的。由于式 (22) 在 $E\to E'$ 时趋于零，谱关联函数的普适形式表明能量本征值之间存在能级排斥，这是基本理论中谱离散性的标志 [20, 29]。

现在，我们可以计算复杂度积分 (20) 了——两个关键要素是刚才讨论的密度-密度关联函数，以及正交多项式 (18)，借助后者我们可以显式计算复杂度核 (21)。请注意，我们关注的是 (20) 的晚时行为，此时积分由频率 $\omega:=E-E'$ 主导，其量级为 $1/t$。在此情形下，谱关联函数具有式 (22) 的形式；我们将在附录中证明，核 (21) 可表示为

$$A(E,E')\;=\;\frac{\mathcal{C}(\overline{E})}{(E-E')^2}\;+\;(\text{terms regular in }E-E'), \tag{23}$$

其中 $\mathcal{C}$ 是一个非零且光滑的函数 (A.31)。

我们在附录中证明，当 $E-E'\to 0$ 时，谱关联函数 (22) 按 $(E-E')^2$ 的量级趋于零（见 (A.34)）；因此，被积函数在 $\omega=E-E'$ 处是正则的，从而使扩散复杂度在晚时趋于有限值。若没有非微扰修正（它们使谱关联函数中出现正弦核贡献），(23) 中的二重极点就会导致复杂度像 (19) 中那样出现晚时发散。按照 [18], 中类似积分的处理方法，计算附录中的 ω 积分

在 JT 引力中虫洞长度的语境下，我们得到 (A.35)

$$\overline{C_S(\hat{t})}\;=\;C_0+\frac{2\pi^2e^{S_0}}{3\hat{Z}(\beta)^2}\int_{\overline{E}_\star(\hat{t})}^{\infty}d\overline{E}\;e^{-2\beta\overline{E}}\;\hat{\rho}(\overline{E})^3\;\mathcal{C}(\overline{E})\times\Big(1-X(\hat{t};\overline{E})\Big)^3 \tag{24}$$

其中 $e^{S_0}\hat{\rho}(\overline{E})=\rho(\overline{E})$，$e^{S_0}\hat{Z}(\beta)=Z(\beta)$，以及 $e^{S_0}\hat{t}=t$。此外，$X(\hat{t};\bar{E})$ 和 $\overline{E}_\star(\hat{t})$ 定义于 (A.36) 和 (A.37)，且 C_0 是一个常数。我们在附录中证明，对于 $\hat{t}\to\infty$，(24) 中的积分消失。因此，我们从 (24) 中的常数项得到复杂度的晚期饱和值；该常数项我们在附录中确定，并得到 (A.39)

$$C_0=e^{S_0}\,\frac{A\pi^3}{8}\,(2E_0(J))^{\frac{3}{2}}e^{4\beta E_0(J)}\Gamma\Big(-\frac{3}{2},\,4\beta E_0(J)\Big). \tag{25}$$

这种饱和依赖于随机矩阵普适性 (22) 以及复杂度核 (23) 中的二重极点，类似于 [27, 29] 中由 JT 引力及其与双重缩放 SYK 模型的关系所启发的观察 [18, 20, 38]。我们的最终结果 (25) 表明，接近极值性的三维引力的希尔伯特空间具有有限维数，该维数随黑洞熵 S_0 呈指数增长。

总结与展望— 我们利用扩散复杂度研究了三维引力中黑洞希尔伯特空间的结构。对于具有离散且有界能谱的混沌系统的一般初始态，扩散复杂度的饱和值与希尔伯特空间维数相关。在引力的语境中，挑战在于：若没有完备的微观理论，我们只能在由引力路径积分描述的有效理论中，依据态密度来计算复杂度。由于这一方法得到的是连续且无界的能谱，我们发现若直接计算，复杂度会在所有时刻持续增长，从而表明希尔伯特空间是无限维的。我们通过从复杂度的谱表示中出现的密度-密度关联函数提取微观理论中能谱离散性的信息，克服了这一障碍。该关联函数可由有效路径积分计算得到，而有效路径积分对基本理论的微观细节取平均。其结果是，扩散复杂度在一个随黑洞熵呈指数的数值处达到饱和。

有一种猜想认为，在引力全息理论中，演化 TFD态的复杂度可以被几何化；在引力描述中，它可能对应于穿过爱因斯坦-罗森桥的特定类空切片的体积 [39, 40]。其他一些提议则认为，复杂度可能与其他微分同胚不变量有关 [41–44]。在这些提议中，所讨论的复杂度大多是从对偶场论的角度来构想的。不过，既然在全息理论中，场论态与量子引力态必定互为对偶，那么只要能够做到，我们不妨

直接在体引力中计算复杂度。问题在于应采用何种复杂度概念。本文考察了一种与扩散量子态 [9] 相关的复杂度度量，它已得到广泛应用。事实上，最近，[45, 46] 的作者表明，将这种扩散复杂度应用于双重缩放 SYK 模型的 TFD态[47, 48] ，恰好能够复现对偶二维 Jackiw-Teitelboim 引力中虫洞不断增长的经典长度。随后， [19, 49, 50] 的作者通过调用 Lanczos 系数中的随机矩阵理论关联，证明扩散复杂度会在晚期趋于饱和，这意味着经典长度概念存在较大的量子修正。

作为一种互补的方法， [18] 的作者直接从一类二维胀子引力理论的路径积分中定义了虫洞长度的非微扰概念，这类理论包括含缺陷的 JT 引力；它是三维引力近极端扇区的降维描述 [17]（另见 [20, 38]）。由此得到的二维虫洞长度表达式与我们的扩散复杂度结果 (24) 非常相似，唯一的区别在于 $\mathcal{C}(E)$ 的函数形式（比较 (A.31) 和 (24) 与 [18]中的公式 3.10 和 4.6）。造成这一差异的一种解释是， [18] 中的非微扰虫洞长度是通过对所有具有单一圆形边界的欧几里得二维几何中的测地线求和来定义的，其中最简单的例子是圆盘，它经解析延拓后对应洛伦兹黑洞。如果我们以类似的方式为三维引力定义非微扰虫洞长度，就必须对具有单一环面边界的几何求和 $S^1_\beta \times S^1$。其中一些几何在降维后会得到上述二维几何。然而，还有无穷多个三维几何无法用这种二维方式解释。因此， [18]的二维结果将会获得修正，而这应当导向我们的三维公式 (24)。我们将三维引力中虫洞长度的非微扰研究留待未来工作。

致谢— 我们感谢 Poulami Nandi 在本工作早期阶段的合作，并感谢 Souvik Banerjee、Ben Craps、Gabriele Di Ubaldo、Felix Haehl、Thomas K¨ogel、Andrew Sontag 和 Tom Yildirim 的有益讨论。RND、JE 和 JK 由德国卓越战略通过 W¨urzburg-德累斯顿卓越集群 ctd.qmat——量子物质中的复杂性、拓扑与动力学（EXC 2147，项目编号 390858490）资助，并由德国研究基金会（DFG）通过“ToCoTronics”协作研究中心（项目编号 258499086-SFB 1170）资助。RND 由德国学术交流中心（DAAD）的 PRIME 计划资助，资金来自德国联邦研究、技术与航天部（BMFTR）。VB 的部分工作得到美国能源部通过 DE-SC0013528 以及 QuantISED 资助 DE-SC0020360 的支持。本项目亦得到佛兰德斯研究基金会项目 G0A2226N 的支持。

补充材料

递推关系、*Lanczos* 系数与正交多项式— 这里我们更详细地讨论 $c_n(E)$ 所满足的递推关系，并证明通解可由正交多项式（7）给出。随后我们证明，对于三维引力情形——其 Lanczos 系数与 $SL(2,\mathbb{R})$ 上的粒子相同（17）——正交多项式可由拉盖尔多项式（18）给出。回想一下，根据定义我们有$c_n(E) = \langle E|K_n\rangle$，并由（2）可知它们满足该递推关系

$$E\, c_n(E) = a_n\, c_n(E) + b_n\, c_{n-1}(E) + b_{n+1} c_{n+1}(E)\,, \tag{A.1}$$

满足初始条件 $c_{-1}(E) = 0$ 和 $c_0(E) = \phi_0(E)$。现在我们用归纳法证明，该递推关系的解具有形式 (7)，其中多项式的次数为 n

$$h_n(E) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} E^k\,. \tag{A.2}$$

证明： 我们首先证明 $c_1(E)$ 具有形式 (7)，其中多项式 $h_1(E)$ 的次数为一。事实上，由 (A.1) 可得

$$c_1(E) = b_1^{-1}(E\, c_0(E) - a_n c_0(E) - b_0 c_{-1}(E)) = \frac{\phi_0(E)}{b_1}(E - a_0)\,, \tag{A.3}$$

因此 $h_1(E) = (E - a_0)/b_1$。现在用归纳法证明：若所有 $c_n(E)$ 均具有形式 (7)，且 $h_n(E)$ 由 (A.2) 给出，直到某个固定的有限 $n \in \mathbb{N}$，则有 $c_{n+1}(E) = \phi_0(E) h_{n+1}(E)$，其中多项式 $h_{n+1}(E)$ 由 (A.2) 给出。事实上，由 (A.1) 可得

$$\begin{aligned} c_{n+1}(E) &= b_{n+1}^{-1}(E\, c_n(E) - a_n c_n(E) - b_n c_{n-1}(E)) = \frac{\phi_0(E)}{b_{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} E^{k+1} - a_n \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} E^k - b_n \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1,k} E^k \right) \\ &= \phi_0(E) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha_{n,k-1} - (a_n \alpha_{nk} + b_n \alpha_{n-1,k})}{b_{n+1}} E^k = \phi_0(E) \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{n+1,k} E^k = \phi_0(E) h_{n+1}(E)\,, \end{aligned} \tag{A.4}$$

其中我们令 $\alpha_{nk} = 0$ 对 $k < 0$ 和 $k > n$成立。因此， $c_{n+1}(E)$ 具有形式 (7)，且 $h_{n+1}(E)$ 是次数为 $n+1$ 的多项式，其系数满足递推关系

$$\alpha_{n+1,k} = \frac{\alpha_{n,k-1} - (a_n \alpha_{nk} + b_n \alpha_{n-1,k})}{b_{n+1}}\,, \tag{A.5}$$

在初始条件 $\alpha_{00} = 1$ 下，证明得以完成。

□

现在考虑三维引力的情形。我们证明，此时方程 (A.1) 的解由广义拉盖尔多项式 (18) 给出。因此，我们首先定义无量纲平移能量 $x := \beta(E + E_0(J))$，并将系数 (16) 的显式形式代入 (A.1)

$$\sqrt{(n+1)(2h+n)}\, c_{n+1}(x) = \big[x + 2(h+n)\big] c_n(x) - \sqrt{n(2h+n-1)}\, c_{n-1}(x)\,, \tag{A.6}$$

其中 对我们而言， $h = \frac{3}{4}$。为消去平方根，我们定义一个依赖于 n 的前因子 A_n v ia

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(2h+n)}}\,, \tag{A.7}$$

其解为

$$A_n = A_0 \sqrt{\frac{\Gamma(2h)}{n!\Gamma(n+2h)}}\,, \tag{A.8}$$

其中我们使用了 $\prod_{j=0}^{n-1}(j+1) = n!$ 和 $\prod_{j=0}^{n-1}(2h+j) = \Gamma(n+2h)/\Gamma(2h)$。令 $c_n(x) = A_n P_n(x)$，则 (A.6) 变为

$$P_{n+1}(x) = \big[x + 2(h+n)\big]P_n(x) - n(n+2h-1)P_{n-1}(x)\,, \tag{A.9}$$

我们将其与 广义拉盖尔多项式满足的标准递推关系进行比较

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(y) = (2n+1+\alpha-y)L_n^{(\alpha)}(y) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(y)\,. \tag{A.10}$$

这意味着

$$P_n(x) = n!L_n^{(\alpha)}(-x)\,, \tag{A.11}$$

其中 $\alpha := 2h-1$。因此，根据 (A.8)，我们得到 (A.1) 的解的闭式为

$$c_n(E) = A_0\sqrt{\frac{\Gamma(2h)n!}{\Gamma(n+2h)}}L_n^{(2h-1)}\Big(-\beta(E+E_0(J))\Big)\,, \tag{A.12}$$

其中，前因子 A_0 由初始条件 $A_0 = c_0(E) = \phi_0(E)$确定。此外，对于我们的情形，有$h = \frac{3}{4}$，这意味着

$$c_n(E) = \phi_0(E)\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})n!}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}}L_n^{(1/2)}\Big(-\beta(E+E_0(J))\Big)\,, \tag{A.13}$$

它满足任意初始 $\phi_0(E)$下的 (A.1)。

MWK 密度的 *Lanczos* 系数——这里我们将进一步介绍如何从 MWK 态密度（13）得到 Lanczos 系数。首先，我们根据（11）确定 MWK 配分函数，并得到

$$Z_{\mathrm{MWK}}(\beta) = e^{-\beta|J|}\left[\frac{A\,e^{S_0}\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\beta^{3/2}} + \frac{B\,(-1)^J e^{S_0/2}\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\beta^{1/2}}\right]. \tag{A.14}$$

因此，根据（12）可得返回振幅

$$S_{\mathrm{MWK}}(t) = \frac{e^{-i|J|t}}{1+\delta}\left[\Big(\frac{\beta}{\beta+it}\Big)^{3/2} + \delta\cdot\Big(\frac{\beta}{\beta+it}\Big)^{1/2}\right], \tag{A.15}$$

其中我们设 $\delta = 2\frac{B}{A}(-1)^J e^{-S_0/2}\beta$。由此返回振幅，我们确定 Lanczos 系数

$$\begin{aligned} a_0 &= -|J| - \frac{1}{2\beta}\left(1+\frac{2}{1+\delta}\right), \\ a_n &= -|J| - \frac{1}{2\beta}\left[(4n+1) - (2n-1)(2n)\frac{Q_{n-2}(\delta)}{Q_{n-1}(\delta)} + (2n+1)(2n+2)\frac{Q_{n-1}(\delta)}{Q_n(\delta)}\right], \quad n\geq 1\,, \end{aligned} \tag{A.16}$$

and

$$b_0 = 1\,, \qquad b_n = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{n(2n-1)}{2}\,\frac{Q_{n-2}(\delta)\,Q_n(\delta)}{Q_{n-1}(\delta)^2}}\,, \quad n\geq 1\,, \tag{A.17}$$

其中我们引入函数

$$Q_n(\delta) := 2^{n+1}(n+1)!\,L_{n+1}^{(-1/2)}\left(-\frac{\delta}{2}\right), \tag{A.18}$$

对于 $n \geq -1$。现在我们证明，当 n 很大时，这些 Lanczos 系数趋近于式（17）。因此，我们考察该比值的渐近行为

$$R_n := \frac{Q_{n-1}(\delta)}{Q_n(\delta)} = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{\sqrt{\delta/2}}{\sqrt{n}} + \frac{\delta-1}{2n} + O(n^{-3/2})\right), \tag{A.19}$$

其中我们使用拉盖尔多项式的标准渐近公式。因此，我们得到 Lanczos 系数在 n 很大时的行为:

$$a_n = -\frac{4n+3}{2\beta} - |J| \,, \quad b_n = \frac{n}{\beta} \,. \tag{A.20}$$

这与 粒子在 $SL(2,\mathbb{R})$ 群流形上的 Lanczos 系数形式 [9] ，

$$a_n = \gamma(h+n) + \xi, \qquad b_n = \sigma\sqrt{n(2h+n-1)} \,, \tag{A.21}$$

在大 n 时的结果一致。

扩散复杂度核的计算——在本附录中，我们详细推导复杂度核（21），并证明它在 $\omega = E - E'$ 处有一个二重极点。因此，我们引入生成函数

$$F(s; E, E') := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} h_n(E) h_n(E') \,, \tag{A.22}$$

它与（21）的关系为

$$A(E, E') = -\partial_s F(s; E, E')\Big|_{s=0^+} \,. \tag{A.23}$$

注意，（A.22）中的正交多项式由广义拉盖尔多项式（18）给出。因此，我们使用希勒-哈迪核，将生成函数（A.22）显式地计算为

$$F(s; x, y) = \Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot e^{-sn}}{\Gamma\big(n+\frac{3}{2}\big)} L_n^{(1/2)}(-x) L_n^{(1/2)}(-y) = \Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) \frac{\exp\left(\frac{x+y}{e^s-1}\right)}{\big(1-e^{-s}\big)\big(xy\,e^{-s}\big)^{1/4}} I_{1/2}\!\left(\frac{2\sqrt{xy\,e^{-s}}}{1-e^{-s}}\right) , \tag{A.24}$$

这里我们再次设 $x := \beta(E + E_0(J))$，以及 $y := \beta(E' + E_0(J))$。我们令 $t = e^{-s}$，并通过下式计算 (A.23) 的右侧

$$-\partial_s \log(F) = t\partial_t \log F = \frac{t}{1-t} - \frac{t(x+y)}{(1-t)^2} - \frac{1}{4} + \sqrt{xy}\,\frac{t^2+t}{(t-1)^2\sqrt{t}}\,\frac{I'_{1/2}\left(\frac{2\sqrt{xy\,t}}{1-t}\right)}{I_{1/2}\left(\frac{2\sqrt{xy\,t}}{1-t}\right)} \,, \tag{A.25}$$

这里我们令 $I'_{1/2}(u) = \frac{d}{du} I_{1/2}(u)$。实际上，我们不需要这些代数项的完整闭式；我们需要的是当 $x \to y$ 时的奇异行为。因此，我们令 $x = z + \frac{\beta\omega}{2}$，并令 $y = z - \frac{\beta\omega}{2}$，其中 $\omega := E - E'$，且 $z = \frac{x+y}{2}$。于是，当 $t \to 1^-$，即 $s \to 0^+$ 时，

$$\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t} = \frac{2z}{1-t}\sqrt{1 - \frac{\beta^2\omega^2}{4z^2} + O(\omega^3)} \sim \frac{2z}{1-t} - \frac{\beta^2\omega^2}{4(1-t)z} + O(\omega^3). \tag{A.26}$$

利用贝塞尔函数 $I_{1/2}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\sinh u$ 和 $\sinh u \sim \frac{1}{2}e^u$ 的闭式，我们得到特征边缘指数

$$e^{\frac{t(x+y)}{1-t}} \sinh\left(\frac{2\sqrt{xy\,t}}{1-t}\right) \sim \tfrac{1}{2}\exp\left[\frac{\beta^2\omega^2}{4z(1-t)}\right] . \tag{A.27}$$

因此，除去整体的光滑前因子 $G(z)$（当 $t \to 1$ 和 $\omega \to 0$ 时，该因子有限且非零），我们有

$$F(t; z, \omega) \;\sim\; \frac{G(z)}{\sqrt{1-t}} \exp\left[-\frac{\beta^2\omega^2}{4z(1-t)}\right], \quad \text{with} \quad (1-t) = 1 - e^{-s} \sim s. \tag{A.28}$$

由（A.23）可得复杂度核（21）的首项奇异项为

$$A(z, \omega) \;\sim\; \frac{G(z)}{(1-t)^{3/2}} \left[1 + \frac{\beta^2\omega^2}{2z(1-t)} + \cdots\right] \exp\left[\frac{\beta^2\omega^2}{4z(1-t)}\right] . \tag{A.29}$$

在严格的 $s \to 0^+$ 极限下，固定 ω 时，我们发现核在 ω处有一个二重极点

$$A(\overline{E},\omega) \;=\; \frac{\mathcal{C}(\overline{E})}{\omega^2} \;+\; (\text{terms regular in } \omega)\,, \tag{A.30}$$

具有一个非零的光滑系数

$$\mathcal{C}(\overline{E}) = -\frac{\pi}{8}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\beta^2 z} \;= -\frac{\pi}{8}\,\frac{\sqrt{\pi}/2}{\beta^3(\overline{E}+E_0(J))}\,, \tag{A.31}$$

其中 $z = \beta(\overline{E} + E_0(J))$。

扩散复杂度的晚期行为——我们在此分析式（20）的晚期行为，并证明其会饱和于一个有限值，该值随黑洞熵呈指数增长。由式（10）和（23）可得，扩散复杂度的谱表示为

$$\overline{C_S(t)} = \frac{1}{Z(\beta)^2}\int dE\,dE'\,e^{-i(E-E')t}\,e^{-\beta(E+E')}\,\overline{\rho(E')\rho(E)}\,\frac{\mathcal{C}(\overline{E})}{(E-E')^2}\,, \tag{A.32}$$

其中 $\mathcal{C}$ 仅依赖于 $E = (E+E')/2$，由式（A.31）给出。由于振荡因子 $e^{-i(E-E')t}$，积分的晚期行为由较小的能量差 $\omega = E - E' \sim 1/t$ 主导。在此范围内，谱关联函数具有普适形式（22）；目前我们将态密度保持为任意形式。引入重标度变量 $\hat{}\omega = \omega t$，式（A.32）可写为

$$\overline{C_S(t)} = C_0 + \frac{t}{Z(\beta)^2}\int d\overline{E}\;e^{-2\beta\bar{E}}\;\rho(\bar{E})^2\,\mathcal{C}(\bar{E})\int d\hat{\omega}\,e^{i\hat{\omega}}\,\frac{1}{\hat{\omega}^2}\left[1-\left(\frac{t}{\pi\rho(\bar{E})\hat{\omega}}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi\rho(\bar{E})\hat{\omega}}{t}\right)\right]\,, \tag{A.33}$$

其中，常数项源于谱关联函数中的接触项；我们将在下文确定该常数，使得 $C_S(0) = 0$。我们还利用了当能量差 $E \approx \overline{E \approx E'}$ 较小时的结果。尽管 $\hat{}\omega$ 积分包含 $1/\hat{}\omega^2$，但被积函数在 $\hat{}\omega = 0$ 处有限，因为括号中的表达式在 $\hat{}\omega$ 较小时的展开为

$$1-\left(\frac{t}{\pi\rho(\bar{E})\hat{\omega}}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi\rho(\bar{E})\hat{\omega}}{t}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi\rho(\bar{E})\hat{\omega}}{t}\right)^2 + O(\hat{\omega}^4)\,, \tag{A.34}$$

从而抵消了$\hat{}\omega = 0$处的极点。$\hat{}\omega$ 积分已在 [18], 中求解；它曾出现在一大类二维膨胀子引力模型的非微扰虫洞长度定义中。因此，我们得到

$$\overline{C_S(\hat{t})} = C_0 + \frac{2\pi^2 e^{S_0}}{3\hat{Z}(\beta)^2}\int_{\bar{E}_*(\hat{t})}^{\infty} d\bar{E}\;e^{-2\beta\bar{E}}\;\hat{\rho}(\bar{E})^3\,\mathcal{C}(\bar{E})\,\Big(1-X(\hat{t};\bar{E})\Big)^3\,. \tag{A.35}$$

其中，我们引入了重新缩放后的量 $\hat{\rho}(\bar{E}) = e^{S_0}\hat{}\rho(\bar{E})$、$\hat{Z}(\beta) = e^{S_0}\hat{}Z(\beta)$和 $t = e^{S_0}\hat{}t$，以显式展示对黑洞熵 S_0 的依赖。我们还有

$$X(\hat{t};\bar{E}) = \frac{\hat{t}}{2\pi\hat{\rho}(\bar{E})}\,, \tag{A.36}$$

而 $\bar{E}_*(\hat{}t)$由下式隐式定义

$$\pi\hat{\rho}(\bar{E}_*) = \hat{t}\,. \tag{A.37}$$

对于 Maxfield-Turiaci 密度（14），我们有 $\bar{E}_*(\hat{}t) = E_0(J) + \left(\frac{\hat{}t}{-\pi A}\right)^2$。因此，在晚期 $\hat{}t \to \infty$ 时，下限$\bar{E}_*(\hat{}t)$趋于无穷大，且（A.35）中的积分趋于零。因此，我们通过常数项确定（A.35）的晚期饱和值；该常数项必须确定为使得 $C_S(0) = 0$。对于 $\hat{}t \to 0$，我们同样有 $\bar{E}_*(\hat{}t) \to E_0(J)$ 以及 $X(\hat{}t;\,\bar{E}) \to 0$，并发现该常数为

$$C_0 = -\frac{2\pi^2 e^{S_0}}{3\,\hat{Z}(\beta)^2}\int_{E_0(J)}^{\infty} d\bar{E}\;e^{-2\beta\bar{E}}\;\hat{\rho}(\bar{E})^3\,\mathcal{C}(\bar{E})\,. \tag{A.38}$$

利用（A.31）和马克斯菲尔德-图里亚奇态密度（14），直接计算（A.38）中的积分可得

$$C_0 = e^{S_0}\, A\, \frac{\pi^3}{8}\, (2E_0(J))^{3/2}\, e^{4\beta E_0(J)}\, \Gamma\left(-\frac{3}{2},\, 4\beta E_0(J)\right) . \tag{A.39}$$

对于 $E_0(J)\beta \ll 1$，这可以进一步简化为

$$C_0 \simeq e^{S_0}\, A\, \frac{\pi^3}{12}\, (2\beta)^{-3/2} . \tag{A.40}$$

---

* das.rathindranath@uni-wuerzburg.de † jonathan.karl@uni-wuerzburg.de

[1] A. Strominger 和 C. Vafa，物理快报B 379，99（1996年）。[2] V. Balasubramanian、A. Lawrence、J. M. Magan 和 M. Sasieta，《物理评论X》 **14**, 011024 2024 2212 02447 ( )，arXiv: . 高能物理理论。[ ]

[3] A. Climent、R. Emparan、J. M. Magan、M. Sasieta 和 A. Vilar L ´ **109**, 086024 2024 2401 08775 opez，《物理评论D》( )，[ ] arXiv: . 高能物理理论。[4] J. M. Magan 和 Q. Wu，（2024年），arXiv:2411.08186 [量子物理]。[5] S. Banerjee、J. Erdmenger 和 J. Karl，《物理评论D》112，L021902（2025年），arXiv:2411.09616 [高能物理理论]。[6] V. Balasubramanian、B. Craps、J. Hernandez、M. Khramtsov 和 M. Knysh，（2024年），arXiv:2412.06884 [高能物理理论]。[7] V. Balasubramanian 和 T. Yildirim，（2025年），arXiv:2506.04319 [高能物理理论]。[8] V. Balasubramanian 和 T. Yildirim，（2025年），arXiv:2506.15767 [高能物理理论]。[9] V. Balasubramanian、P. Caputa、J. M. Magan 和 Q. Wu，《物理评论D》106，046007（2022年），arXiv:2202.06957 [高能物理理论]。[10] V. Balasubramanian、J. M. Magan 和 Q. Wu，物理评论E 111，014218（2025年），arXiv:2312.03848 [高能物理理论]。[11] J. Erdmenger、S.-K. Jian 和 Z.-Y. Xian，《高能物理学杂志》08，176（2023年），arXiv:2303.12151 [高能物理理论]。[12] W. M¨uck 和 Y. Yang，核物理学B 984，115948（2022年），arXiv:2205.12815 [高能物理理论]。[13] P. Caputa、G. Di Giulio 和 T. Q. Loc，（2025年），arXiv:2509.12992 [高能物理理论]。[14] V. Balasubramanian、P. Caputa 和 J. Sim´on，（2025年），arXiv:2511.03775 [高能物理理论]。[15] A. Maloney 和 E. Witten，《高能物理学杂志》02，029（2010年），arXiv:0712.0155 [高能物理理论]。[16] C. A. Keller 和 A. Maloney，《高能物理学杂志》02，080（2015年），arXiv:1407.6008 [高能物理理论]。[17] H. Maxfield 和 G. J. Turiaci，《高能物理学杂志》01，118（2021年），arXiv:2006.11317 [高能物理理论]。[18] L. V. Iliesiu、M. Mezei 和 G. S´arosi，《高能物理学杂志》07，073（2022年），arXiv:2107.06286 [高能物理理论]。[19] V. Balasubramanian、J. M. Magan、P. Nandi 和 Q. Wu，（2024年），arXiv:2412.02038 [高能物理理论]。[20] M. Miyaji、S.-M. Ruan、S. Shibuya 和 K. Yano，《高能物理学杂志》06，251（2025年），arXiv:2502.12266 [高能物理理论]。[21] P. Saad、S. H. Shenker 和 D. Stanford，（2019年），arXiv:1903.11115 [高能物理理论]。[22] D. Marolf 和 H. Maxfield，《高能物理学杂志》08，044（2020年），arXiv:2002.08950 [高能物理理论]。[23] J. Cotler 和 K. Jensen，《高能物理学杂志》04，033（2021年），arXiv:2006.08648 [高能物理理论]。[24] P. Nandy、A. S. Matsoukas-Roubeas、P. Mart´ınez-Azcona、A. Dymarsky 和 A. del Campo，物理报告 1125-1128，1（2025年），arXiv:2405.09628 [量子物理]。[25] S. Baiguera、V. Balasubramanian、P. Caputa、S. Chapman、J. Haferkamp、M. P. Heller 和 N. Y. Halpern，物理报告 1159，1（2026年），arXiv:2503.10753 [高能物理理论]。[26] E. Rabinovici、A. S´anchez-Garrido、R. Shir 和 J. Sonner，（2025年），arXiv:2507.06286 [高能物理理论]。[27] M. Alishahiha 和 S. Banerjee，SciPost物理 15，080（2023年），arXiv:2212.10583 [高能物理理论]。[28] M. Alishahiha、S. Banerjee 和 M. J. Vasli，欧洲物理杂志C 85，749（2025年），arXiv:2408.10194 [高能物理理论]。[29] M. Miyaji、S.-M. Ruan、S. Shibuya 和 K. Yano，（2025年），arXiv:2507.23667 [高能物理理论]。[30] G. W. Gibbons 和 S. W. Hawking，《物理评论D》15，2752（1977年）。[31] A. Ghosh、H. Maxfield 和 G. J. Turiaci，《高能物理学杂志》05，104（2020年），arXiv:1912.07654 [高能物理理论]。[32] N. Benjamin、H. Ooguri、S.-H. Shao 和 Y. Wang，《物理评论D》100，066029（2019年），arXiv:1906.04184 [高能物理理论]。[33] P. Caputa、J. M. Magan 和 D. Patramanis，物理评论研究 4，013041（2022年），arXiv:2109.03824 [高能物理理论]。[34] A. Belin 和 J. de Boer，经典与量子引力 38，164001（2021年），arXiv:2006.05499 [高能物理理论]。[35] M. Sasieta，《高能物理学杂志》03，158（2023年），arXiv:2211.11794 [高能物理理论]。[36] J. de Boer、D. Liska、B. Post 和 M. Sasieta，《高能物理学杂志》2024，003（2024年），arXiv:2311.08132 [高能物理理论]。[37] J. Boruch、G. Di Ubaldo、F. M. Haehl、E. Perlmutter 和 M. Rozali，《物理评论快报》 **135**, 121602 2025 2503 00101 ( )，arXiv: . 高能物理理论。[ ]

[38] M. Miyaji、S. Mori 和 K. Okuyama，《高能物理学杂志》08，084（2025年），arXiv:2505.13194 [高能物理理论]。[39] 萨斯坎德，物理学进展 64，24（2016年），[补遗：物理学进展 64，44–48（2016年）], arXiv:1403.5695 [高能物理理论]。[40] D. Stanford 和萨斯坎德，《物理评论D》90，126007（2014年），arXiv:1406.2678 [高能物理理论]。[41] A. R. Brown、D. A. Roberts、萨斯坎德、B. Swingle 和 Y. Zhao，《物理评论快报》 **116**, 191301 2016 1509 07876 ( )，arXiv: . 高能物理理论。[ ]

[42] A. Belin、R. C. Myers、S.-M. Ruan、G. S
´
128, 081602 2022 2111 02429 arosi 和 A. J. Speranza，《物理评
[ ]
论快报》( )，arXiv: . 高能物理理论。[43] J. Erdmenger、A.-L. Weigel、M. Gerbershagen 和 M. P. Heller，《物理评论D》
108, 106020 2023 2212 00043 ( )，arXiv: . 高能物理理论。[44] R.
[ ]
N. Das 和 T. Mori，《物理评论快报》**136**，030201（2026年），arXiv:2408.00826 [高能物理理论]。[45] H. W. Lin，《高能物理学杂志》**11**，060（2022年），arXiv:2208.07032 [高能物理理论]。[46] E. Rabinovici、A. S´anchez-Garrido、R. Shir 和 J. Sonner，《高能物理学杂志》**08**，213（2023年），arXiv:2305.04355 [高能物理理论]。[47] M. Berkooz、P. Narayan 和 J. Simon，《高能物理学杂志》**08**，192（2018年），arXiv:1806.04380 [高能物理理论]。[48] M. Berkooz、M. Isachenkov、V. Narovlansky 和 G. Torrents，《高能物理学杂志》**03**，079（2019年），arXiv:1811.02584 [高能物理理论]。[49] V. Balasubramanian、J. M. Magan 和 Q. Wu，《物理评论D》**107**，126001（2023年），arXiv:2208.08452 [高能物理理论]。[50] P. Nandy，《高能物理学杂志》**01**，072（2025年），arXiv:2410.07847 [高能物理理论]。