arXiv:2602.02664v1 [math.AG] 2 Feb 2026

特征层模空间

Gabriel Ribeiro

摘要。我们研究交换连通代数群 G 上的德拉姆特征层，它们定义为带有可积联络的乘性线丛。我们构造了一个群代数空间 $G^\flat$，用于表示这些特征层在半正规测试概形上的模问题，并探讨其函子性和几何性质。主要技术工作是研究德拉姆空间 G_{dR}上的扩张层。附录给出了关于德拉姆空间基本结果的自成一体的初等证明，这些结果或许也具有独立的研究价值。

1. 引言

数论中的动机

设 p 和 ℓ是不同的素数，且 G 是定义在 $\mathbb{F}_p$上的交换连通代数群。记 $\mathrm{Fr}_G\colon G \to G$ 为算术弗罗贝尼乌斯，则*Lang*同源

$$L_G\colon G \to G, \qquad x \mapsto \mathrm{Fr}_G(x)\,x^{-1}.$$

是一个自同构群为 $G(\mathbb{F}_p)$ 的有限平展伽罗瓦覆盖。因此，L_G 将 $G(\mathbb{F}_p)$ 实现为 $\pi_1^{\text{ét}}(G)$ 的一个商。一个特征 $\chi\colon G(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ 随即自然诱导出 $\pi_1^{\text{ét}}(G)$ 的一个秩一 ℓ-进表示：

$$\pi_1^{\text{ét}}(G) \twoheadrightarrow G(\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\chi^{-1}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times.$$

等价地，我们在 G 上得到一个秩一 ℓ-进局部系统，将其记为 $\mathcal{L}_\chi$。

记 $m\colon G \times G \to G$ 为群律。在 G 上的秩一 ℓ-进局部系统中，上述局部系统恰好是乘法型的；那些允许一个同构的局部系统

$$m^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L},$$

反映单位元 $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$。更确切地说，该对应 ® ®

$$\left.\begin{array}{c}\text{Characters}\\ \chi\colon G(\mathbb{F}_p) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes of rank-one } \ell\text{-adic local}\\ \text{systems } \mathcal{L} \text{ on } G \text{ with } m^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}\end{array}\right\}$$

是一个群同构 [ST21，引理 2。16]。

这种特征的几何化在数论中产生了深远影响。它是 Deligne 的 ℓ-adic 傅里叶变换的基础，Laumon 利用该变换显著简化了 Deligne 对 Weil II 的证明 [Del80；Lau87]。此后，Deligne 的权理论通过迹函数和特征和，持续为解析数论提供核心依据；参见 [Del71；KL85；KMS17；FFK25]，其中有一些引人注目的例子。

特征层

此后，我们假设基域 k 的特征为零。受上述讨论启发，我们引入乘性局部系 $\mathscr{L}_\chi$的以下德拉姆 对应物。

定义。设 S 是一个 k-概形。相对于 S 的 G特征层是G_S 上的一个线丛 $\mathscr{L}$，配备一个相对于 S的可积联络 ∇，并满足

$$m_S^*(\mathscr{L},\nabla) \simeq (\mathscr{L},\nabla) \boxtimes (\mathscr{L},\nabla).$$

在绝对情形 $S = \operatorname{Spec} k$下，我们称这样的对象为 G上的特征层。

出于很快就会明了的原因，我们用 $H^1_m(G_{dR} \times S, \mathbb{G}_m)$ 表示相对于 S的 G上特征层的同构类群。为了初步了解这些对象，我们回顾 Barsotti–Chevalley定理：代数群 G 适合于一个短正合列

$$0 \to T \times U \to G \to A \to 0,$$

其中 T 是一个环面，U 是一个幺幂群，而 A 是一个阿贝尔簇。对于这些构件，群 $H^1_m(G_{dR}, \mathbb{G}_m)$ 有直接明了的描述。

■例。 在特征零的情况下，幺幂群 U 必然是向量群。群 $H^1_m(U_{dR}\ \mathbb{G}_m)$ 随后可与对偶向量空间 U^* 识别。选取 U 上的坐标x_1、……、x_n，该同构由下式给出

$$\begin{aligned} k^n &\to H^1_m(U_{dR}, \mathbb{G}_m) \\ (\chi_1, \dots, \chi_n) &\mapsto (\mathcal{O}_U, d - \chi_1\, dx_1 - \cdots - \chi_n\, dx_n)\,. \end{aligned}$$

给定一个环面 T，其特征群为 X，李代数为 t，群 $H^1_m(T_{dR}, \mathbb{G}_m)$ 同构于 t^*/X。经过 k 的有限扩张后，我们可以假设 T 是分裂的，其坐标为 $t_1, \dots, t_r$。于是，该同构可显式表示为

$$\begin{aligned} (k/\mathbb{Z})^r &\to H^1_m(T_{dR}, \mathbb{G}_m) \\ (\chi_1, \dots, \chi_r) &\mapsto \left(\mathcal{O}_T, d - \chi_1 \frac{dt_1}{t_1} - \cdots - \chi_r \frac{dt_r}{t_r}\right). \end{aligned}$$

对于阿贝尔簇 A，每个带可积联络的线丛都是一个特征层。这是因为配备可积联络的线丛具有消失的第一陈类，这意味着它属于$\mathrm{Pic}^0(A)$。（参见 [Lau96，引理 2.1。1]。）

■

可表性定理

在 [MM74], Mazur 和 Messing 在阿贝尔簇上构造了一个带可积联络的线丛模空间。根据上文的讨论，这等价于一个特征层模空间。此构造可视为后来在非阿贝尔霍奇理论中占据核心地位的模空间的早期实例 [Sim94]。然而，对于仿射群，带平坦联络的线丛通常多得远超任何合理意义下代数几何对象所能容纳的范围。[1] 施加特征条件可以恢复有限性，并导出一个性质良好的模问题。

定理A (3.17)。存在一个光滑交换连通群代数空间 $G^\flat$，满足$\dim\, G \leqslant \dim\, G^\flat \leqslant 2\dim G$, 其 S-点参数化了 G相对于 S对每个半正规 k-概形 S的特征层。

证明思路。此构造的灵感来自 Barsotti–Weil 公式[RR25，推论 3.6]。对于阿贝尔簇 A，该公式断言，在 fppf 网站（Sch/k）$_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层范畴中计算得到的扩张层 $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m)$，可由对偶阿贝尔簇 A' 表示。这是一个由满足 $m^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}$ 的 A 上的线丛 $\mathscr{L}$ 构成的模空间。

接下来要介绍的要素是所谓的德拉姆空间。对于光滑代数簇 X，德拉姆空间 X_{dR} 上的线丛对应于 X上的带平坦联络的线丛。因此，可以证明阿贝尔层 $A^\natural := \mathrm{Ext}^1(A_{\mathrm{dR}}, \mathbb{G}_m)$ 参数化了 A 上的特征层，并且可由一个交换连通代数群表示。这为 Mazur–Messing 代数群提供了一种更简单的构造。

对于一般的交换连通代数群 G以及一个约化的 k-概形S，定理2.28给出了 S层$G^\natural := \mathrm{Ext}^1(G_{\mathrm{dR}}, \mathbb{G}_m)$ 的 S-点与群$\mathrm{H}^1_m(G_{\mathrm{dR}} \times S, \mathbb{G}_m)$之间的函子同构。如果 G 是半阿贝尔的（即阿贝尔簇被环面扩张），那么这个阿贝尔层可由一个交换连通群代数空间表示，从而确立了该定理。

然而，当 G包含幺幂子群 U时，层 $G^\natural$ 便不再能由代数空间表示。命题 3.10 表明，问题源于 $G^\natural$ 的一个商同构于阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_m)$，该层在 [RR25], 中得到研究。它非零，但在所有半正规 k-概形上都消失。舍弃这个商后，便得到所需的模空间 $G^\flat$。

□

[1] 例如，$\mathbb{A}^1$ 上带可积联络的线丛的“模空间”是归纳概形$\mathbb{A}^\infty = \mathrm{colim}_n\, \mathbb{A}^n$，而 $\mathbb{G}_a$ 上的特征层模空间就是 $\mathbb{G}_a$ 本身。

为方便读者，我们指出，每个光滑 k-概形都是半正规的。之所以需要这一正则性假设，是因为 G 未必是真概形。相反，当 G是阿贝尔簇时， S-点的 $G^\flat$ 可参数化相对于 G 的 S 上特征层，对每个 k-概形 S均如此。类似现象也见于 [Ros25], ，作者证明，将范围限制在光滑测试概形后，非真概形上的皮卡函子具有（几乎）可表示性。

模空间的函子性与几何性质

受模空间 $G^\flat$ 与局部紧阿贝尔群的庞特里亚金对偶之间类比的启发，人们可能会预期，交换连通代数群的一个短正合列

$$0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$$

会诱导出一个阿贝尔 fppf 层的短正合列

$$0 \to G_3^\flat \to G_2^\flat \to G_1^\flat \to 0 \tag{$*$}$$

。有些出人意料的是，这一般并不成立；参见例 3.21，其中给出了一个反例： G_1 是椭圆曲线，而 $G_3 = \mathbb{G}_m$。尽管如此，下面的定理表明，在许多情形下，（$*$）是正合的。

定理 B（3.16、3.18、3.19）。 序列 （$*$） 总是左正合且右正合。此外，在以下各情形中，它在中间项处也是正合的：

1. G_1 是线性的，而 G_3 是阿贝尔簇；
2. G_1， G_2， G_3 均为线性的；
3. G_1， G_2， G_3 均为阿贝尔簇。

接下来，我们转而讨论这些模空间的几何。对于阿贝尔簇 A，某些大子集 $A^\flat$ 在非阿贝尔霍奇理论中 [Sim93]以及德拉姆上同调一般消失定理的表述中 [Sch15]发挥着核心作用。对于环面T，类似的大子集 $T^\flat$ 已在 [Sab92]中得到研究。在此，我们将这些子集的定义推广到任意交换连通代数群。

~定义(3.22、3.25)。对于一个 $\rho\colon G \twoheadrightarrow G$ 具有连通核的满态射， $\rho^\flat\colon \widetilde{G}^\flat \hookrightarrow G^\flat$ 的像称为线性子空间，它是 $G^\flat$的一个一般子空间； $G^\flat$ 是 $G^\flat$ 中具有正余维的线性子空间的平移之有限并的补集。

在仿射情形下，这些概念归结为熟悉的线性代数概念；而对于阿贝尔簇，它们则恢复了 Simpson 和 Schnell 所研究的集合。

■ 例 —3.23。 设 T 是一个环面，其特征群为 X，李代数为 $\mathfrak{t}$。 $T^\flat \simeq \mathfrak{t}^*/X$ 的线性子空间具有 V/Y 的形式，其中 Y 是 X 的一个子群，而 V 是在线性代数意义下由 Y 生成的 $\mathfrak{t}^*$ 的线性子空间。对于幺幂群 U， $U^\flat \simeq U^*$ 的一个线性子空间对应于 U^* 的底层向量空间的一个线性子空间，这里同样是在线性代数的意义下。

对于阿贝尔簇 A， $A^\flat \simeq A^\natural$ 的线性子空间首先由 Simpson 研究，他称之为 三重环面 [Sim93，第 365]页。Schnell 将 $A^\flat$ 的线性子空间的平移称为 线性子簇 [Sch15，定义 2。3]。
■

我们参阅第 3.3 小节，以详细研究线性子空间与通有子空间。例如，当 $k = \mathbb{C}$时，我们考虑解析化 $G^\flat_{an}$ （即模空间 $G^\flat$的解析化），并证明若 V 是 $G^\flat$的一般子空间，则 $V_{an} \subset G^\flat_{an}$ 关于解析拓扑为开且稠密；见命题3.28。

与Betti特征层的比较

将德拉姆上同调的系数替换为其 Betti 对应物，便得到特征的另一种自然几何化： $\mathbb{C}$-向量空间在解析化 G_{an} 上的秩一局部系。[2] 等价地，它们对应于拓扑基本群 $\pi_1(G_{an}) \to \mathbb{C}^\times$ 的特征。

这些对象在文献中有一个研究得相当充分的模空间：特征簇

$$\mathrm{Char}(G) := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\pi_1(G_{an})]).$$

其 $\mathbb{C}$-点与特征 $\pi_1(G_{an}) \to \mathbb{C}^\times$相对应，因而也与 G_{an}上的秩一局部系相对应。此外， $\mathbb{C}[\pi_1(G_{an})]$ 上的Hopf代数结构赋予 Char(G)一个自然的代数群结构，该结构对应于局部系的张量积。

在 de Rham 侧， G 上的一个特征层 $(\mathscr{L}, \nabla)$ 通过取水平截面确定 G_{an} 上的一个秩一局部系。这一构造诱导出一个群的全纯态射

$$G^\flat_{an} \to \mathrm{Char}(G)_{an}.$$

我们的最终定理是 Riemann–Hilbert对应的一个推论，它刻画了半阿贝尔簇的这些解析模空间之间的同构。

定理 C (3.30)。 *Riemann–Hilbert*映射 $G^\flat_{an} \to \mathrm{Char}(G)_{an}$ 是满射的。此外，当且仅当 G 是半阿贝尔簇时，它才是同构。

对于幺幂群，黎曼–希尔伯特映射远非同构：它们的特征簇是平凡的，而非平凡的特征层则是丰富多样的指数联络。这些是不规则现象的典型例子

[2] 在这一设定下，乘法性是自动具备的，因此这些正是 G_{an}上的乘性局部系。

联络。要在 Betti 侧处理它们，需要扩展局部系统范畴，例如 Kuwagaki 的不规则可构造层[Kuw21]，或 Scholze 的野 Betti 层 [Sch25]。我们将这一方向的研究留待未来开展。

致谢。本文大部分工作是在我攻读博士学位期间完成的。谨此感谢我的导师 Javier Fresán 的指导与支持。感谢 Thomas Krämer 提出，前述线性子空间的定义或许在阿贝尔簇之外也有意义；也感谢 Michel Brion，我从他那里学到了许多关于代数群的知识。

本文谨献给 Gérard Laumon。这个项目源于我试图理解他的论文 [Lau96]；他耐心听完我的问题后，为我提供了清晰明了的建议，指导我如何着手解决这些问题。作为一名天真的博士生，我很快便尝试了另一条途径——毫无疑问，Laumon 的思想始终在幕后发挥着作用——本文的大部分结果也在随后一周内得以证明。

2. 交换群栈的 Cartier 对偶

2.1. 定义与初步性质

令 Lat 为 Ab 的全子范畴，其对象为有限秩自由阿贝尔群。给定一个 ∞-范畴 C，若其具有有限积，我们将其阿贝尔群对象$\mathsf{Ab}(\mathsf{C})$ 范畴定义为 ∞-函子 $\mathsf{Lat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ 构成的范畴，其中这些函子与有限积相容。（更多内容参见[Lur17，§1。2]。）

当C 是集合范畴时，Ab(C) 与通常的阿贝尔群范畴一致。若C 是由 anima 构成的 ∞-范畴，则Ab(C) 是动画阿贝尔群的 ∞-范畴 An(Ab)；根据 Dold–Kan 对应，它等价于 $\mathsf{D}^{\leqslant 0}(\mathsf{Ab})$。更一般地，若X 是一个 ∞-拓扑斯，则Ab(X) 是以动画阿贝尔群为值的X 上的层的 ∞-范畴。这引出了下面的定义。

定义 2.1（交换群栈）。设C 是一个 1-位点。C 上的一个交换群栈是一个层

$$\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab}),$$

其中，$\mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab})$ 是An(Ab) 的全子范畴，由满足 $\pi_i(M) = 0$ 且 $i \neq 0$为 1 的动画阿贝尔群M 组成。

等价地，C 上的交换群代数栈是 2-toposSh(C,Grpd)中的一个阿贝尔群对象。这类对象最初由 Grothendieck 提出，随后

[3]我们参考 [ČS24, §5.1] 了解 animation 的定义以及 ∞-范畴 An 的 anima（也称为 ∞-空间范畴或 ∞-群胚）。

由 Deligne 在 [SGA 4_{III}, Exp. XVIII, §1.4]以严格交换 *Picard* 丛之名进行研究。

■注记 2.2。 遗忘函子 $\mathsf{An}(\mathsf{Ab}) \to \mathsf{An}$ 限制为 $\mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab}) \to \mathsf{Grpd}$。具体而言，$\mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab})$ 的对象是一个群胚 M，配备了对称幺半结构 $+$，使得其同构类集合 $\pi_0(M)$ 是一个群。此外，对于所有 x、y 属于 M，对称约束 $x+x \to x+x$ 和 $x+y \to y+x \to x+y$ 均假定为恒等映射。■

以下命题是 Dold–Kan 对应的一个推论，它为交换群栈提供了具体刻画。在本文中，几乎所有涉及这些对象的计算都将以此刻画为基础。

命题 2.3（Deligne）。 设C 为一个 *1*-位点。记 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C}))$ 为C 上次数集中在 -1 和 0 的阿贝尔层复形范畴 [4]。类似地，记 $\mathsf{D}^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C}))$ 为 $\mathsf{D}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C}))$ 的全子范畴，它由上同调集中在 -1 和 0 的对象组成。函子

$$\begin{aligned} \mathsf{Ch}^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C})) &\to \mathsf{Sh}(\mathsf{C}, \mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab})) \\ [\mathscr{F} \to \mathscr{G}] &\mapsto [\mathscr{G}/\mathscr{F}] \end{aligned}$$

经由 $\mathsf{D}^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C}))$分解，且诱导的函子 $\mathsf{D}^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C})) \to \mathsf{Sh}(\mathsf{C},\mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab}))$是一个 ∞-范畴之间的等价。

证明。 设D 是一个具有小极限的 ∞-范畴。回忆一下，函子 $\mathscr{F}\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}$是一个层，当且仅当它保持有限积，并且对于$\mathsf{C}$中的每个覆盖 $X \to S$，自然态射

$$\mathscr{F}(S) \to \lim \left[\mathscr{F}(X) \rightrightarrows \mathscr{F}(X \times_S X) \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; \mathscr{F}(X \times_S X \times_S X) \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; \cdots \right]$$

是可逆的。保持有限积且满足关于超覆盖 的类似下降条件（精确定义见 [HM24，定义 A.4.19] ）的函子称为超层。我们用$\mathsf{HSh}(\mathsf{C},\mathsf{D})$表示$\mathsf{Sh}(\mathsf{C},\mathsf{D})$的全子范畴，该子范畴由超层构成。

考虑 C 上的阿贝尔群层 $\mathscr{G}$。利用自然包含 $\mathsf{Ab} \hookrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{Ab})$，$\mathscr{G}$ 可以视为取值于导出 ∞-范畴 $\mathsf{D}(\mathsf{Ab})$ 的预层。虽然它通常不满足下降条件，但可以对其进行层化，得到函子 $\mathsf{Ab}(\mathsf{C}) \to \mathsf{Sh}(\mathsf{C}, \mathsf{D}(\mathsf{Ab}))$。这诱导出一个 t-正合的全忠实函子 $\mathsf{D}(\mathsf{Ab}(\mathsf{C})) \hookrightarrow \mathsf{Sh}(\mathsf{C}, \mathsf{D}(\mathsf{Ab}))$，其本质像恰为 $\mathsf{HSh}(\mathsf{C}, \mathsf{D}(\mathsf{Ab}))$ [SAG, Cor. 2.1.2.3]。

[4]将C 上的阿贝尔层范畴记作$\mathsf{Ab}(\mathsf{C})$，这种记法并不严谨，因为这实际上是相关联的*1*-拓扑斯上的阿贝尔群对象范畴。

超层与普通层之间的区别，是 ∞-范畴特有的现象。更确切地说，包含 $\mathsf{HSh}(C,D) \hookrightarrow \mathsf{Sh}(C,D)$ 在 D 是某个 n-范畴且具有某个 有限 n [HTT, Lem. 6.5.2.9] 时，就是一个等价。因此，

$$D^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}(C)) \to \mathsf{Sh}(C, D^{[-1,0]}(\mathsf{Ab}))$$

是 ∞-范畴之间的等价。

最后，回忆一下，Dold–Kan 对应给出一个等价 $D^{\leqslant 0}$(阿贝尔群) $\xrightarrow{\sim}$ 阿贝尔群(阿贝尔群)，其间是 ∞-范畴。右侧对象的第 i 个同伦群与左侧相应对象的第 $-i$ 个上同调群同构。特别地，这将限制为一个等价 $D^{[-1,0]}$(阿贝尔群) $\xrightarrow{\sim}$ 阿贝尔群$_{\leqslant 1}$(阿贝尔群)，从而得到所需的等价 $D^{[-1,0]}$(阿贝尔群(C)) $\xrightarrow{\sim}$ 层(C,阿贝尔群$_{\leqslant 1}$(阿贝尔群))。

□

暂且将与交换群栈 $\mathcal{G}^\circ$ 相关联的阿贝尔层导出范畴中的对象记作 $\mathcal{G}$。（我们很快就会开始识别这些对象。）这里，我们概述命题 2.3 的证明的一些推论。

■ 注 2.4。

1. 设 $\mathcal{G}$ 为阿贝尔层。将其与自然包含$\mathsf{Ab} \hookrightarrow \mathsf{An}_{\leqslant 1}(\mathsf{Ab})$复合，便得到一个以同一符号表示的交换群栈。于是，$\mathcal{G}^\circ$ 同构于复形 $[0 \to \mathcal{G}]$。类似地，$(B\mathcal{G})^\circ$ 同构于 $[\mathcal{G} \to 0]$。
2. 给定交换群栈 $\mathcal{G}$，阿贝尔层 $\mathscr{H}^0(\mathcal{G}^\circ)$同构于 $\mathcal{G}$的粗模层。它是如下预层的层化：该预层把C 的对象 X 送到 $\mathcal{G}(X)$的同构类群 $\pi_0(\mathcal{G}(X))$。类似地，$\mathscr{H}^{-1}(\mathcal{G}^\circ)$同构于 $\mathcal{G}$的一个零截面的自同构层。3. 设 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$ 为交换群叠。我们用$\mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{H})$表示交换群叠的内部$\mathrm{Hom}$。这是另一个交换群栈，满足$\mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{H})^\circ \simeq \tau_{\leqslant 0}\mathrm{RHom}(\mathcal{G}^\circ,\mathcal{H}^\circ)$。■

今后，我们将聚焦于与基概形 S相关联的大 fppf 位点 $C = (\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$。该位点上有一个特殊的阿贝尔层：乘法群$\mathbb{G}_m$，它将一个 S-概形 T映射到单位群 $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)^\times$。它的分类栈 $B\mathbb{G}_m$，在这里将发挥类似于圆群在局部紧阿贝尔群的庞特里亚金对偶性中的作用。

定义 2.5. 设 $\mathcal{G}$是 $(\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的一个交换群栈。我们将其*Cartier* 对偶 $\mathcal{G}^D$ 定义为 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)$，将其层叠 *Cartier* 对偶 $\mathcal{G}^\vee$ 定义为 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, B\mathbb{G}_m)$。

在我们看来，层叠 Cartier 对偶 $\mathcal{G}^\vee$ 是交换群栈的真正对偶，而 $\mathcal{G}^D$ 在某些情形下是足够好的近似。下面的注记解释了我们考虑 $\mathcal{G}^\vee$的动机。

■注记 2.6. 设 $\mathcal{G}$ 是 (Sch/S)fppf 上的交换群栈，其群律记为 $m\colon \mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$。给定一个 S-概形 T，群胚 $\mathcal{G}^\vee$(T)可描述如下：其对象是对 $(\mathscr{L},\alpha)$，其中 $\mathscr{L}$ 是 $\mathcal{G}\times_S T$ 上的线丛，α 是一个同构 $m^*\mathscr{L}\to\mathscr{L}\boxtimes\mathscr{L}$，使得紧邻 [Bro21, Rem. 3.13] 上方的图表 (A) 和 (B) 交换。从 $(\mathscr{L},\alpha)$ 到 $(\mathscr{L}',\alpha')$ 的态射是线丛的一个同构$\varphi\colon\mathscr{L}\to\mathscr{L}'$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} m^*\mathscr{L} & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{L}\boxtimes\mathscr{L} \\ {\scriptstyle m^*\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\boxtimes\varphi} \\ m^*\mathscr{L}' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathscr{L}'\boxtimes\mathscr{L}' \end{array}$$

交换。$\mathcal{G}^\vee$(T)上的对称幺半结构将$(\mathscr{L},\alpha)$和$(\mathscr{L}',\alpha')$映射为一对$(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}',\alpha\cdot\alpha')$，其中 $\alpha\cdot\alpha'$ 定义为以下复合

$$m^*(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}')\simeq m^*\mathscr{L}\otimes m^*\mathscr{L}'\xrightarrow{\alpha\otimes\alpha'}(\mathscr{L}\boxtimes\mathscr{L})\otimes(\mathscr{L}'\boxtimes\mathscr{L}')\simeq(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}')\boxtimes(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}').$$

读者或许也有兴趣将这一描述与 [SGA 7_{I}，Exp. VII，§1.1。6]或 [Mor85，§I.2。3]进行比较。■

本文所关注的大多数情形中，我们将使用由复形 $[\mathscr{F}\to\mathscr{G}]$定义的交换群栈$\mathcal{G}$，其中映射 $d\colon\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是单态射。在这种情况下，$\mathcal{G}\simeq\operatorname{coker} d$ 的取值落在Ab 的全子范畴$\mathsf{An}_{\leqslant 1}$(Ab)中。下面的命题给出了计算这些对象的层叠 Cartier 对偶的一个便捷判据。

命题2.7。设 $\mathscr{G}$ 是(Sch/S)fppf上的一个阿贝尔层。那么分类栈$\mathsf{B}\mathscr{G}$ 的层叠 *Cartier* 对偶同构于 $\mathscr{G}^{\mathrm{D}}$。若$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G},\mathbb{G}_m)=0$，则 $\mathscr{G}^\vee\simeq\mathsf{B}\mathscr{G}^{\mathrm{D}}$。类似地，若$\mathscr{G}^{\mathrm{D}}=0$，则 $\mathscr{G}^\vee\simeq\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G},\mathbb{G}_m)$。

证明。 第一个同构只不过是这样一个事实：$((\mathsf{B}\mathscr{G})^\vee)^\circ$ 由下式给出

$$\tau_{\leqslant 0}\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{G}[1],\mathbb{G}_m[1])\simeq\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{G},\mathbb{G}_m).$$

同理，利用 $(\mathscr{G}^\vee)^\circ$ 可明确表示为 $\tau_{\leqslant 0}\mathrm{RHom}(\mathscr{G},\mathbb{G}_m[1])$ 这一事实，其余同构可由以下事实推出：一个导出范畴中的对象，若其上同调集中在单一次数，则它同构于相应次数上的该上同调。

□

2.2. Cartier 对偶的计算

考虑一个基概形 S，并令 $\mathscr{G}$ 为 (Sch/S)fppf 上的阿贝尔层，将其视为交换群栈。我们计算层叠 Cartier 对偶 $\mathscr{G}^\vee$ 的方法主要遵循命题 2.7 中所概述的方法。我们通常要么证明

$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathbb{G}_m)$ 的消失并计算 $\mathscr{G}^D$，或者证明 $\mathscr{G}^D$ 消失并计算 $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathbb{G}_m)$。本节着重计算某些所关注的阿贝尔层 $\mathscr{G}$ 的 Cartier 对偶 $\mathscr{G}^D$。

命题 2.8。 设 A 是基概形 S 上的阿贝尔概形，T 是基概形 S 上的环面。则 A 的 *Cartier* 对偶 A^D 消失，而 T 的 *Cartier* 对偶 X 可由一个群概形表示，该群概形 *étale* 局部地同构于有限个常值群概形 $\mathbb{Z}$ 的乘积。此外，X 的 *Cartier* 对偶同构于 T。

证明。 记 $p\colon A \to S$ 为结构映射，并令 X 为一个 S-概形。根据整体谱的泛性质，概形态射 $A_X \to \mathbb{G}_{m,\,X}$（在 X 上）等价于一个 $\mathcal{O}_X$-代数的态射

$$\mathcal{O}_X[x, x^{-1}] \to p_{X,*}\mathcal{O}_{A_X} \simeq \mathcal{O}_X,$$

其中 $p_X\colon A_X \to X$ 是 p [Stacks，标签 0E0L]的基变换。由此可知，每个概形态射 $A_X \to \mathbb{G}_{m,\,X}$（在 X 上）都必须是常值的。如果它是一个群态射，则必为平凡态射。这就证明了 A^D 消失。关于环面的论述见 [SGA 3_{II}，Exp. X，推论 5。7]。

□

接下来，我们关注基概形 S 是特征零域 k的谱的情形。下面的命题回顾 Cartier 对偶性的标准设定 [SGA 3_I，Exp. VII_B，命题 2.2。2]。（命题2.9 与 k的特征无关，但下文的其他所有结果都要求其特征为零。）

命题 2.9。令 $G = \operatorname{Spec} R$ 是定义在 k上的仿射交换群概形。其 *Cartier* 对偶 G^D 由形式群 $\operatorname{Spf} R^*$表示，其中 R^* 是对偶 *Hopf* 代数。此外，二重对偶 $(G^D)^D$ 自然同构于 G。

令 U是定义在 k上的交换幂零代数群。由于指数映射给出了 U与其李代数之间的同构，U 必然是一个向量群[Mil17，命题 14。32] 并且我们将其记作 U^* 其向量空间对偶。

命题 2.10。 设 U 为交换幂零代数群，其对偶为 U^*。记$\widehat{U}$ 和$\frown U^*$ 为它们沿零截面的形式完备化。则 $U^D \simeq \frown U^*$ 和 $\widehat{U}^D \simeq U^*$。

证明。 计算 $U^D \simeq \text{”}U^*$ 可由以下事实推出：Sym(U^*)的对偶是Sym(U)在一次元理想处的完备化。（选取一组基后，这不过是同构 $k[x_1, \ldots, x_n]^* \simeq k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$。）另一个计算可由此通过对偶性推出。

□

“给定一个 k-代数 R，我们有$\mathbb{G}_a$(R)是 R 中的幂零元素群，并且“ “ “$\mathbb{G}_m$(R)是幂单元的群。我们指出，形式群 $\mathbb{G}_a$ 与 $\mathbb{G}_m$ 是

通过该映射同构

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}_m(R) &\to \widehat{\mathbb{G}}_a(R)\\ 1+x &\mapsto \log(1+x).\end{aligned}$$

这一现象是特征零中形式群的一般性质，并简化了对它们的研究。

命题 2.11 (Cartier)。 设 G 为 k 上的交换代数群，并设 $\mathfrak{g}$ 为其李代数，视为向量群。 G 与 $\mathfrak{g}$ 沿其零截面的形式完备化重合。

证明。 由于代数群与其形式完备化具有相同的李代数，该复合

$$\left.\begin{array}{c}\text{Algebraic}\\ \text{groups over } k\end{array}\right\} \xrightarrow{\widehat{(-)}} \left.\begin{array}{c}\text{Infinitesimal formal}\\ \text{groups over } k\end{array}\right\} \xrightarrow{\mathrm{Lie}(-)} \left.\begin{array}{c}\text{Lie algebras}\\ \text{over } k\end{array}\right\}$$

是将代数群对应到其李代数的函子。特别地， G 与 $\mathfrak{g}$，视为向量群，在上述复合下具有相同的像。现在，由 [SGA3$_{\mathrm{I}}$，Exp. VII$_{\mathrm{B}}$，推论 3.3。2]，右侧的函子是范畴等价。特别地， G 与 $\mathfrak{g}$ 具有同构的形式完备化。

□

前述命题使我们能够计算交换代数群之形式完备化的 Cartier 对偶。该结果以略有不同的证明亦见于 [BB09，引理 A.3。1]。

推论 2.12。 设 G 是定义在 k 上的交换代数群，并用 $\mathfrak{g}$ 表示其李代数。$\widehat{\ }$形式完备化 G 的 *Cartier* 对偶自然同构于 $\mathfrak{g}^*$。这也与 G的不变 微分 Ω_G 一致。

$\widehat{\ }$现在我们可以计算交换连通代数群 G 的德拉姆空间 $G_{dR} \simeq G/G$ 的 Cartier 对偶。

命题 2.13。 对于定义在 k 上的交换连通代数群 G，G_{dR} 的 *Cartier* 对偶为零。

证明。 根据 Barsotti–Chevalley 定理 [Mil17，定理 8.28 和推论 16。15] 可知G 是阿贝尔簇 A 与环面 T和幺幂群U的扩张。由于德拉姆函子 $(-)_{dR}$ 是正合的，德拉姆空间 G_{dR} 是A_{dR} 由 $T_{dR} \times U_{dR}$扩张而成。因此，我们得到一个诱导的正合列

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(A_{dR}, \mathbb{G}_m) \to \underline{\mathrm{Hom}}(G_{dR}, \mathbb{G}_m) \to \underline{\mathrm{Hom}}(T_{dR}, \mathbb{G}_m) \times \underline{\mathrm{Hom}}(U_{dR}, \mathbb{G}_m),$$

因此，只需证明当 G 是阿贝尔簇、环面或幺幂群时结论成立。

由于函子 $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{G}_m)$ 是左正合的，因此 G^{D}_{dR} 消失等价于 $\widehat{}$态射 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Hom}(G,\mathbb{G}_m)$ 是单态射。我们在相关的特殊情形下验证这一点。对于阿贝尔簇，其 Cartier 对偶消失保证了这一“$\widehat{}$”性质。对于幺幂群 U，相关态射同构于 $U^* \to U^*$，根据推论 A.5，它同样是单态射。

$\widehat{}$对于环面 T，$\mathrm{Hom}(T,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Hom}(T,\mathbb{G}_m)$ 是否为单态射的问题是局部于底空间的，因此我们可以假设 $T = \mathbb{G}_m$。于是，命题归结为以下内容：给定一个连通的 k-代数 R，若

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Uni}(B) & \hookrightarrow & B^\times & \to & B^\times \\ x & \mapsto & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

对每个 R-代数 B 都是单位映射，则 $n = 0$。这里，$\mathrm{Uni}(B)$ 表示 B 中幂单元构成的群。取 $B = R[z]/(z-1)^r$ （其中 $r > n$）即可证明，从而得到所需结果。

□

命题 G 2.13 中关于其连通性的假设至关重要。一般而言，基概形 G 上的 k交换代数群适合于一个短正合列

$$0 \to G^0 \to G \to \pi_0(G) \to 0,$$

其中，G^0 是包含单位元的 G 的连通分支，而 $\pi_0(G)$是连通分支所成的有限平展群。命题 A.6 表明，自然映射$\pi_0(G) \to \pi_0(G)_{dR}$ 是同构，因而前面的结果蕴含，G_{dR} 和 $\pi_0(G)$ 的 Cartier 对偶相同。

2.3. 通过乘法群的扩张

如同上一节，考虑一个基概形 S 以及其上的阿贝尔层 $\mathcal{G}$，定义在 $(\mathrm{Sch}/S)_{fppf}$上。为了继续我们在第 2.2 节开头概述的策略，现在我们专注于计算扩张层 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G},\mathbb{G}_m)$。我们先回顾一些基本计算。

命题 2.14。令 A 为一个阿贝尔概形，T 为定义在 S 上的环面，其 *Cartier* 对偶为 X。则 $\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m)$ 同构于 A的对偶阿贝尔概形，而 $\mathrm{Ext}^1(T,\mathbb{G}_m)$ 和$\mathrm{Ext}^1(X,\mathbb{G}_m)$ 均为零。

证明。将 $\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m)$ 与对偶阿贝尔概形等同，通常称为 *Barsotti–Weil* 公式。完整证明可见于 [RR25，推论 3.6]。（或者，这一等同也可直接由引理 2.21 得出。）消失

对 $\underline{\mathrm{Ext}}^1(T,\mathbb{G}_m)$ 的消失已在 [SGA 7_I，Exp. VIII，命题 3.3.1] 中确立。最后，$\mathrm{Ext}^1(X,\mathbb{G}_m)$ 的消失在 S 上是局部的，因此可化归到情形 $X\simeq\mathbb{Z}$。此时，该断言由函子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},-)$ 的正合性得出，而该函子同构于恒等函子。

□

现在我们描述 [RR25，§2] 中计算扩张层的策略，并将其特化到我们的情形。设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}$ 是$(\mathrm{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。由于$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{G},\mathscr{A})$ 是预层 $X\mapsto\mathrm{Ext}^i_X(\mathscr{G},\mathscr{A})$ SGA 4_I，命题 V.6. 中所述预层的层化，1], 存在一个自然的群态射

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathscr{G},\mathscr{A})\to\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathscr{G},\mathscr{A})(X),$$

关于 $\mathscr{G}$、 $\mathscr{A}$和 X的函子性。以下这个简单结果（也见于 [SGA 4_I，命题 V.6.）1],给出了这些对象之间的关系

命题 2.15。设 X 是一个在 S 上的概形，且 $\mathscr{G},\mathscr{A}$ 是$(\mathrm{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。存在一个正合列

$$0\to H^1(X,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{G},\mathscr{A}))\to\mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{G},\mathscr{A})\to\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathscr{G},\mathscr{A})(X)\to H^2(X,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{G},\mathscr{A})),$$

它关于 $\mathscr{G}$、 $\mathscr{A}$和 X具有函子性。

证明。 $\mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{A})$在 X 上的节群按定义为 $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{G},\mathscr{A})$。特别地，存在一个格罗滕迪克谱序列，通常称为局部到整体谱序列，其五项正合列给出了所需结果。

□

既然我们已经建立了扩张层与扩张群之间的联系，接下来将研究一种计算后者的方法。以下命题最初由 Grothendieck 在 [SGA 7_I，Exp. VII, Rem. 3.54] 中提出，并由 Breen 在 [Bre69], 中部分发展；此后，Deligne（在一封致 Breen 的信中证明，该信收录于 [Rib24，附录 B]）和 Clausen–Scholze [SC19，定理 410]）也分别独立证明了它。

命题 2.16（Breen–Deligne 分解）。设 $\mathscr{G}$ 是$(\mathrm{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的一个阿贝尔层。存在一个函子性分解，其形式为

$$\cdots\to\bigoplus_{j=1}^{n_i}\mathbb{Z}[\mathscr{G}^{r_{i,j}}]\to\cdots\to\mathbb{Z}[\mathscr{G}^3]\oplus\mathbb{Z}[\mathscr{G}^2]\to\mathbb{Z}[\mathscr{G}^2]\to\mathbb{Z}[\mathscr{G}]\to\mathscr{G},$$

其中 n_i 和$r_{i,\,j}$ 均为正整数。

Clausen 和 Scholze 的证明表明，分解的首项可以按以下方式选取：

$$\mathbb{Z}[\mathscr{G}^4]\oplus\mathbb{Z}[\mathscr{G}^3]\oplus\mathbb{Z}[\mathscr{G}^3]\oplus\mathbb{Z}[\mathscr{G}^2]\oplus\mathbb{Z}[\mathscr{G}]\xrightarrow{d_3}\mathbb{Z}[\mathscr{G}^3]\oplus\mathbb{Z}[\mathscr{G}^2]\xrightarrow{d_2}\mathbb{Z}[\mathscr{G}^2]\xrightarrow{d_1}\mathbb{Z}[\mathscr{G}]\xrightarrow{d_0}\mathscr{G},$$

其中微分由下式给出

$$\begin{aligned}
d_3([x,y,z,t]) &= ([x+y,z,t]-[x,y+z,t]+[x,y,z+t]-[x,y,z]-[y,z,t],0)\\
d_3([x,y,z]) &= (-[x,y,z]+[x,z,y]-[z,x,y],[x+y,z]-[x,z]-[y,z])\\
d_3([x,y,z]) &= ([x,y,z]-[y,x,z]+[y,z,x],[x,y+z]-[x,y]-[x,z])\\
d_3([x,y]) &= (0,[x,y]+[y,x])\\
d_3([x]) &= (0,[x,x])\\
d_2([x,y,z]) &= [x+y,z]-[x,y+z]+[x,y]-[y,z]\\
d_2([x,y]) &= [x,y]-[y,x]\\
d_1([x,y]) &= [x+y]-[x]-[y]\\
d_0([x]) &= x.
\end{aligned}$$

这里，上方的 $d_3([x,y,z])$ 作用于 $\mathbb{Z}[\mathscr{G}^3]$ 的第一个因子，而下方的 $d_3([x,y,z])$ 作用于第二个因子。此后，我们固定一个以这些项开头的 Breen–Deligne 分解。特别是，这一显式描述使我们能够定义两个重要的不变量。

定义 2.17. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}$ 是 $(\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。将函子 $\mathrm{Hom}(-,\mathscr{A})$作用于 $\mathscr{G}$的 Breen–Deligne 分解，得到复形

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\mathscr{G},\mathscr{A}) \to \Gamma(\mathscr{G}^2,\mathscr{A}) \to \Gamma(\mathscr{G}^3,\mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^2,\mathscr{A}) \\
&\quad\to \Gamma(\mathscr{G}^4,\mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^3,\mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^3,\mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^2,\mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G},\mathscr{A}).
\end{aligned}$$

我们将此复形的第一上同调记为 $H^2_s(\mathscr{G},\mathscr{A})$，第二上同调记为 $H^3_s(\mathscr{G},\mathscr{A})$。

设 $\mathscr{X}$ 是一个集合层，$\mathscr{A}$ 是 $(\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。我们将上同调群 $H^i(\mathscr{X},\mathscr{A})$定义为 i阶右导出函子在 $\mathscr{A}$ 处的取值

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{X},-)\colon \mathsf{Ab}((\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}) \to \mathsf{Ab}.$$

若 $\mathscr{X}$ 可由一个 S-概形 X表示，则米田引理蕴含 $H^i(\mathscr{X},\mathscr{A})$与通常的上同调群 $H^i(X,\mathscr{A})$一致。

一如既往，群 $H^1(\mathscr{X},\mathscr{A})$ 分类 $\mathscr{A}$ 上的 $\mathscr{X}$-扭子，其群律由收缩积给出。此外，任意态射 $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 都会诱导一个同态

$$f^*\colon H^1(\mathscr{Y},\mathscr{A}) \to H^1(\mathscr{X},\mathscr{A}),$$

它将一个 $\mathscr{A}$-扭子 $\mathscr{P} \to \mathscr{Y}$ 映射到其拉回 $\mathscr{P} \times_{\mathscr{Y}} \mathscr{X} \to \mathscr{X}$。当 $\mathscr{X} = \mathscr{G}$ 本身是一个阿贝尔层时，我们将 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{m}}(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 定义为 $\mathrm{H}^1(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 的子群，由那些与 $\mathscr{G}$上的群结构相容的、 $\mathscr{G}$ 上的$\mathscr{A}$-扭子组成。

定义 2.18. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}$ 是$(\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。记 $\mathrm{m}\colon \mathscr{G}\times\mathscr{G} \to \mathscr{G}$为 $\mathscr{G}$的群运算，记 $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\colon \mathscr{G}\times\mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 为自然投影。我们将 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{m}}(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 定义为态射 $\mathrm{m}^* - \mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^*$ 的核。

简言之，$\mathrm{H}^1_{\mathrm{m}}(\mathscr{G}, \mathscr{A})$是满足 $\mathrm{m}^*\mathscr{P} \simeq \mathrm{pr}_1^*\mathscr{P} \wedge \mathrm{pr}_2^*\mathscr{P}$的、 $\mathscr{A}$-扭子 $\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{G}$上的同构类群。我们通常称这些 $\mathscr{A}$-扭子为乘法型。明确了这一术语后，现在可以说明扩张群的计算。

命题2.19（Breen）。 设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}$ 是$(\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。存在一个正合列

$$0 \to \mathrm{H}^2_{\mathrm{s}}(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{m}}(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{s}}(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathscr{G}, \mathscr{A}),$$

该正合列关于 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}$是函子性的。

在深入证明之前，我们先说明态射 $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{m}}(\mathscr{G}, \mathscr{A})$。由于 $\mathrm{Ext}^1(-, \mathscr{A})$ 是加性函子，扩张 $\mathscr{E}$ of $\mathscr{G}$ by $\mathscr{A}$ 总是满足

$$\mathrm{m}^*\mathscr{E} = (\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2)^*\mathscr{E} \simeq \mathrm{pr}_1^*\mathscr{E} + \mathrm{pr}_2^*\mathscr{E},$$

其中右侧的和是扩张的 Baer 和。这样的扩张定义了一个$\mathscr{A}$-挠子[5] $\mathscr{P}$ over $\mathscr{G}$，它满足 $\mathrm{m}^*\mathscr{P} \simeq \mathrm{pr}_1^*\mathscr{P} \wedge \mathrm{pr}_2^*\mathscr{P}$。

命题的证明 2.19。 自由对象的泛性质给出 $\mathrm{H}^i(\mathscr{G}^n, \mathscr{A})$ 与 $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}[\mathscr{G}^n], \mathscr{A})$ 对所有 n 和 i 同构。于是，Breen–Deligne 分解给出一个谱序列

$$\mathrm{E}_1^{i,j}\colon \prod_{r=1}^{n_i} \mathrm{H}^j(\mathscr{G}^{s_{i,r}}, \mathscr{A}) \implies \mathrm{Ext}^{i+j}(\mathscr{G}, \mathscr{A}),$$

其五项正合列正是陈述中的正合列。 □

■ 注记 2.20。 在 [SGA 7I，Exp. VII, §1.2], Grothendieck 证明，$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 同构于由对 $(\mathscr{P}, \alpha)$ 构成的同构类群，其中 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{G}$ 上的一个 $\mathscr{A}$扭子，而 $\alpha\colon \mathrm{m}^*\mathscr{P} \to \mathrm{pr}_1^*\mathscr{P} \wedge \mathrm{pr}_2^*\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$ 上的 $\mathscr{A}$扭子同构，且使得

[5]更多解释请参阅备注 3.4 。

两个图表（要求 $\mathscr{P}$ 具有结合且交换的群律）是交换的。特别地，我们的不变量 $H^2_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 和 $H^3_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 控制映射偏离

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathscr{A}) &\to H^1_m(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \\ [\mathscr{P}, \alpha] &\mapsto [\mathscr{P}] \end{aligned}$$

与成为同构无关。 ∎

尽管 Breen–Deligne 分解的前几项是显式的，但不变量 $H^2_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 和 $H^3_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 通常很难计算。以下观察足以处理许多有趣情形下的计算。

引理 2.21. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}$ 是$(\mathrm{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$上的阿贝尔层。如果每个层态射 $\mathscr{G}^n \to \mathscr{A}$ （取值于集合 （对于 $n = 2,3$）） 都能表示为映射 $\mathscr{G} \to \mathscr{A}$之和，那么$H^2_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$和$H^3_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 均消失。

证明。 首先，我们证明 $H^2_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 消失。其核

$$\Gamma(\mathscr{G}^2, \mathscr{A}) \to \Gamma(\mathscr{G}^3, \mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^2, \mathscr{A})$$

由满足以下条件的映射 $f\colon \mathscr{G}^2 \to \mathscr{A}$ 构成： $f(x+y,z) - f(y,z) = f(x,y+z) - f(x,y)$ 以及 $f(x,y) = f(y,x)$。应用给定假设，我们得到态射 $f_1, f_2\colon \mathscr{G} \to \mathscr{A}$ ，使得 $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$。于是第一个方程化简为

$$f_1(x+y) - f_1(y) = f_2(y+z) - f_2(y).$$

通过令 $x = y = 0$ 和 $y = z = 0$，我们注意到 f 必须是常数。接下来，映射的像

$$\Gamma(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \to \Gamma(\mathscr{G}^2, \mathscr{A})$$

由如下形式的映射组成：$(x,y) \mapsto g(x+y) - g(x) - g(y)$，其中 $g\colon \mathscr{G} \to \mathscr{A}$。由于每个常值映射都具有这种形式，因此上同调为零。

我们将采用相同的策略来证明 $H^3_s(\mathscr{G}, \mathscr{A})$ 也为零。该态射的核

$$\Gamma(\mathscr{G}^3, \mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^2, \mathscr{A}) \to \Gamma(\mathscr{G}^4, \mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^3, \mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^3, \mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}^2, \mathscr{A}) \oplus \Gamma(\mathscr{G}, \mathscr{A})$$

由满足条件的映射 $p\colon \mathscr{G}^3 \to \mathscr{A}$和 $q\colon \mathscr{G}^2 \to \mathscr{A}$ 组成

$$p(x,y,z) + p(x,y+z,t) + p(y,z,t) = p(x+y,z,t) + p(x,y,z+t) \tag{1.1}$$

$$p(x,y,z) + p(z,x,y) + q(x,z) + q(y,z) = p(x,z,y) + q(x+y,z) \tag{2.1}$$

$$p(x,y,z) + p(y,z,x) + q(x,y+z) = p(y,x,z) + q(x,y) + q(x,z) \tag{3.1}$$

$$q(x,y) + q(y,x) = 0 \tag{4.1}$$

$$q(x,x) = 0. \tag{5.1}$$

为了梳理证明的其余部分，我们将方程（n.i）的简化版本记为（n.i + 1）。再次，我们写作 $p(x,y,z) = p_1(x) + p_2(y) + p_3(z)$，其中 $p_i \colon \mathcal{G} \to \mathcal{A}$；并写作 $q(x,y) = q_1(x) + q_2(y)$，其中 $q_i \colon \mathcal{G} \to \mathcal{A}$。利用方程（5.1），我们将每个 q_2 替换为 $-q_1$。由此得到以下关系。

$$p_3(z) + p_1(x) + p_2(y+z) + p_1(y) + p_3(t) = p_1(x+y) + p_3(z+t) \tag{1.2}$$
$$p_2(y) + p_3(z) + p_1(z) + p_2(x) + q_1(x) + q_1(y) = p_2(z) + q_1(x+y) + q_1(z) \tag{2.2}$$
$$p_1(x) + p_2(y) + p_2(z) + p_3(x) + q_1(y) + q_1(z) = p_2(x) + q_1(y+z) + q_1(x) \tag{3.2}$$

将 $x = y = 0$ 代入方程（2.2）和（3.2），我们得到

$$p_2(0) + p_3(z) + p_1(z) + q_1(0) = q_1(z) \tag{2.3}$$
$$p_1(0) + p_2(z) + p_3(0) = 0. \tag{3.3}$$

利用这些信息，我们可以简化方程（1.2）：

$$p_3(z) + p_1(x) + p_2(0) + p_1(y) + p_3(t) = p_1(x+y) + p_3(z+t). \tag{1.3}$$

将此方程分别限制到 $x = 0$ 和 $t = 0$，可得到两个新的关系，这表明 p_1和 p_3 本质上是相差常数的群态射。

$$p_1(x) + p_1(y) - p_1(0) = p_1(x+y) \tag{1.4}$$
$$p_3(z) + p_3(t) - p_3(0) = p_3(z+t) \tag{1.5}$$

总之，我们得到了以下方程：

$$p_1(x) + p_1(y) - p_1(0) = p_1(x+y) \tag{1.4}$$
$$p_3(z) + p_3(t) - p_3(0) = p_3(z+t) \tag{1.5}$$
$$p_1(z) - p_1(0) + p_3(z) - p_3(0) = q_1(z) - q_1(0) \tag{2.3}$$
$$p_1(0) + p_2(z) + p_3(0) = 0. \tag{3.3}$$

最后，为了证明 $H^3_s(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ 消失，我们需要找到一个态射 $h \colon \mathcal{G}^2 \to \mathcal{A}$，使得

$$p(x,y,z) = h(x+y,z) - h(x,y+z) + h(x,y) - h(y,z)$$
$$q(x,y) = h(x,y) - h(y,x).$$

利用先前建立的方程进行快速验证可知，态射$h(x,y) := p_1(x) - p_3(y)$满足这一判据。

□

下面的命题推广了 Colliot-Thélène 和 Gabber 的一个结果 [Col08，命题 3.2 和定理 5。6]。他们的证明方法也适用于我们的情形，但这一结果可由我们的工具直接推出。

定理 2.22。 设 G 是约化基底 S上的交换群概形。假设态射 $G \to S$ 光滑且具有连通几何纤维。那么自然映射

$$\mathrm{Ext}^1_S(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1_m(G, \mathbb{G}_m)$$

是一个同构。

证明。 这一结果是引理2.21的直接应用，使用 González-Avilés 对 Rosenlicht 引理的推广 [Gon17，定理 1。1]为方便读者，我们指出，这一结果在以下更一般的情形下也成立： G是定义在约化基底 S 上的交换群概形，且 $G \to S$ 是合成平坦的，并具有约化连通的极大几何纤维。这里， $G \to S$ 的极大几何纤维是一个概形 $G \times_S \operatorname{Spec} \kappa(\eta)$，其中 η 是 S的某个不可约分支的泛点。 □

■ 注2.23。 上面定理中基底 S 为约化的这一假设至关重要。事实上，设 R 是一个约化环，并令 $R' := R[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。正如 [RR25的注 7 中所述，3], 存在一个自然同构

$$\mathrm{H}^2_s(\mathbb{G}_{a,R'}, \mathbb{G}_{m,R'}) \simeq \mathrm{H}^2_s(\mathbb{G}_{a,R}, \mathbb{G}_{a,R}).$$

右侧已在 [RR25命题 7 中明确计算，1] 并证明它是一个自由的 R-模，其秩等于在 R中不可逆的素数个数。因此，除非 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，否则自然映射

$$\mathrm{Ext}^1_{R'}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1_m(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m)$$

不是单射。 ■

此后，我们将集中讨论基概形是特征零域的谱的情形。我们首先利用命题2.15证明在某些情形下，层化映射是同构。

命题 *2.24.* 设 T 是特征零域 k 上的一个环面， U 是一个幺幂群。对于不可约且几何单支的 k-概形 S，层化映射 $Ext^1_S(T, \mathbb{G}_m) \to Ext^1(T, \mathbb{G}_m)(S)$ 是同构。类似地，对于约化或仿射的 k-概形 S， 映射 $Ext^1_S(U, \mathbb{G}_m) \to Ext^1(U, \mathbb{G}_m)(S)$ 是同构。 ——

证明。 设 S 是一个不可约且几何单支的 k-概形。命题 2.14指出，层 $\mathrm{Ext}^1(T, \mathbb{G}_m)$ 消失，因此所需结果等价于上同调群 $\mathrm{H}^1(S, X) = 0$的消失，其中 $X := T^D$ 是 T的 Cartier 对偶。这由 [SGA 7_I，Exp. VIII，命题 5 得出。1]。

对于幺幂情形，我们可以假设 $U = \mathbb{G}_a$。如果 S 是一个仿射概形， [Bha22，注记 2.2。18] 表明 $\mathrm{H}^i(S, \widehat{\mathbb{G}}_a)$ 对所有 $i \neq 0$都消失。我们声称，对于一个约化的k-概形 S，上同调群 $\mathrm{H}^i(S, \widehat{\mathbb{G}}_a)$ 对所有 i都消失。首先，我们证明

étale 上同调群 $H^i_{ét}(S, \text{“}\mathbb{G}_a)$ 消失，然后我们将这些群与其 fppf类比对象对应起来。

回忆一下， $\mathbb{G}_a(\operatorname{Spec} R)$ 是 k-代数 R 的幂零根。因此，层条件意味着，对于约化的 S， “ $\mathbb{G}_a(S)$ 消失。接下来，上同调 $H^i_{ét}(S, \text{“}\mathbb{G}_a)$ 可在 S 的小 étale 位点上计算，并且根据 [Stacks，Tag 03PC.(8)]，， “ $\mathbb{G}_a$ 在此位点上的限制消失。

由于 $\mathbb{G}_{a,dR}$ 是 $\mathbb{G}_a$ 按 $\mathbb{G}_a$ 取商得到的 étale 商，我们得到如下长正合列的态射：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(S, \widehat{\mathbb{G}}_a) & \longrightarrow & \Gamma(S, \mathbb{G}_a) & \longrightarrow & \Gamma(S, \mathbb{G}_{a,dR}) & \longrightarrow & H^1(S, \widehat{\mathbb{G}}_a) & \longrightarrow & H^1(S, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \cdots \\ & & \| & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(S, \widehat{\mathbb{G}}_a) & \longrightarrow & \Gamma(S, \mathbb{G}_a) & \longrightarrow & \Gamma(S, \mathbb{G}_{a,dR}) & \longrightarrow & H^1_{ét}(S, \widehat{\mathbb{G}}_a) & \longrightarrow & H^1_{ét}(S, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \cdots . \end{array}$$

鉴于 S 是约化的，我们已证明对于所有 i，$H^i_{ét}(S, \text{“}\mathbb{G}_a) = 0$。此外，由于 $\mathbb{G}_a$ 是光滑的，自然映射 $H^i(S, \mathbb{G}_a) \to H^i_{ét}(S, \mathbb{G}_a)$ 是同构。利用这些事实，通过图追逐可得，对于所有 i，$H^i(S, \text{“}\mathbb{G}_a)$ 消失。 □

为了分析层化映射 $\operatorname{Ext}^1_S(G, \mathbb{G}_m) \to \operatorname{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)(S)$ 对于特征零域上的连通交换代数群 G，我们需要以下消失结果。关于这个难以捉摸的层的进一步讨论，请参阅 [RR25, §6]；特别是，我们指出，它并不消失：$\operatorname{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m)$。

——

命题2.25. 设 U 是特征零域 k上的幺幂群。对于所有半正规 k-概形 S，群$\operatorname{Ext}^1(U, \mathbb{G}_m)(S)$ 均消失。

证明。 由于半正规概形是约化的 [Stacks，标签 0EUQ], 定理2.22 和命题 2.24 推出 $\operatorname{Ext}^1(U, \mathbb{G}_m)(S) \simeq H^1_m(U_S, \mathbb{G}_{m,S})$。记 $p\colon U_S \to S$为结构映射，Traverso 定理 [Sad21, 引理 4.3] 给出

$$p^*\colon H^1(S, \mathbb{G}_m) \to H^1(U_S, \mathbb{G}_m)$$

是一个同构。特别地，$H^1_m(U_S, \mathbb{G}_m)$ 同构于 $H^1(S, \mathbb{G}_m)$ 的子群，该子群由满足 $p^*x \in H^1_m(U_S, \mathbb{G}_m)$ 的元素 $x \in H^1(S, \mathbb{G}_m)$ 构成。接下来，记 $m\colon U_S \times_S U_S \to U_S$ 为群运算，$\mathrm{pr}_i\colon U_S \times_S U_S \to U_S$ 为自然投影。那么， p^*x 属于 $H^1_m(U_S, \mathbb{G}_m)$ 当且仅当

$$m^*p^*x = \mathrm{pr}_1^*\, p^*x + \mathrm{pr}_2^*\, p^*x.$$

然而，态射 $p \circ m, p \circ \mathrm{pr}_1$，和 $p \circ \mathrm{pr}_2$ 都等于U_S^2的结构映射，而该映射有一个节 $S \to U_S^2$。因此， $m^*p^*x = \mathrm{pr}_1^*\, p^*x + \mathrm{pr}_2^*\, p^*x$ 成立当且仅当$x = 0$，证明完毕。 □

现在我们可以证明定理 2.22 关于特征为零的域上的交换连通代数群的一个加强版本。

定理 2.26. 设 G 是特征零域k上的交换连通代数群。对于正则 k-概形 S，自然映射

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(G,\mathbb{G}_m)(S) \leftarrow \mathrm{Ext}^1_S(G,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1_m(G_S,\mathbb{G}_m)$$

是同构。

证明。 右侧的箭头是同构，这一点已在定理2.22中证明。即使仅假设 S 是约化的，这一结果仍然成立。为方便读者，我们指出，定理 2.22 的假设由 [Mil17，推论 1.32 和 8.39] 得到满足。

现在我们转而考察左侧的层化映射。与命题 2.13 的证明一样，我们知道 G是阿贝尔簇 A 被线性群L扩张而成的 T；该线性群是环面 U与幺幂群的乘积。这导出交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_S(L,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_S(A,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_S(G,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_S(L,\mathbb{G}_m) \\
\| & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow\wr \\
\underline{\mathrm{Hom}}(L,\mathbb{G}_m)(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\mathbb{G}_m)(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1(G,\mathbb{G}_m)(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1(L,\mathbb{G}_m)(S),
\end{array}$$

其各行均正合。命题 2.14 和 2.25 推出 $\mathrm{Ext}^1(L,\mathbb{G}_m)(S)$ 消失，而命题 2.24 进一步保证 $\mathrm{Ext}^1_S(L,\mathbb{G}_m) = 0$。所需结论由图追逐得出。

□

下面的例子表明，如果 S 不是正则的，映射 $\mathrm{Ext}^1_S(G,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)(S)$ 可能不是同构。

■例 2.27. 设 k是一个域，并考虑节点曲线 $S = \mathrm{Spec}\ k[x,y]/(y^2-xy-x^3)$。命题 2.19 的证明表明，$\mathrm{Ext}^1_S(\mathbb{G}_m,\mathbb{G}_m)$ 可以在 étale 拓扑中计算。由于 Grothendieck 对命题 2.14 的证明也表明 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{G}_m)$在 étale 位点上消失，命题2.15 给出：

$$\mathrm{Ext}^1_S(\mathbb{G}_m,\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S,\mathbb{Z}).$$

正如 [Wei91，注 5.5。2], 中所述，étale 上同调群 $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S,\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}$；这意味着层 $\mathrm{Ext}^1_S(\mathbb{G}_m,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{G}_m)(S)$ 的层化映射不是同构。■

我们还证明了定理 2.22 在德拉姆空间情形下的一个类似结果。

定理 2.28。 设 G 是特征零域k上的交换连通代数群。对于约化的 k-概形 S，自然映射

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(G_{\mathrm{dR}}, \mathbb{G}_m)(S) \leftarrow \mathrm{Ext}^1_S(G_{\mathrm{dR}}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1_m(G_{\mathrm{dR}} \times S, \mathbb{G}_m)$$

是同构。

证明。 命题2.13 断言 G_{dR} 的 Cartier 对偶消失。因此，命题2.15 推出左侧的映射对于所有 k-概形 S都是同构。为了证明右侧的映射对于约化的 k-概形 S也同样是同构，我们使用引理2.21。

考虑一个 S-概形之间的态射 $f\colon G_{\mathrm{dR}}^n \times S \to \mathbb{G}_{m,S}$，其中 n 是 2 或 3。与定理 2.22 的证明一样，存在态射 $f_i\colon G_S \to \mathbb{G}_{m,S}$，对于 $i = 1, \ldots, n$，使得它们的乘积等于复合

$$G_S^n \to G_{\mathrm{dR}}^n \times S \to \mathbb{G}_{m,S}.$$

由于拓扑斯中的满态射在基变换下保持稳定，命题 A.18 推出映射 $G_S^n \to G_{\mathrm{dR}}^n \times S$ 是一个满态射。因此，态射 f_i 经由该商分解，得到映射

$$\bar{f}_i\colon G_{\mathrm{dR}} \times S \to \mathbb{G}_{m,S},$$

其乘积等于 f。 □

我们还需要两个消失结果。第一个涉及交换形式群的扩张层，并在 [Rus13，引理 1 中得到证明。14]该结果将$\widehat{\ }$主要应用于 G 特征零域 G 上的交换代数群 [BB09，附录 A.4 中首次出现了这一背景。6]。

命题 2.29。 设 $\mathcal{G}$ 是域上的交换形式群，其 *Cartier* 对偶为有限型。则 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)$ 消失。 ——

为方便读者起见，我们在基于本节所发展的方法的基础上，在基域具有特征零这一假设下，给出该命题的证明。

证明。 设 k 是特征 0的基域，并令 $L := \mathcal{G}^D$。根据 [Mil17，命题 2.37 和推论 16，15]，存在一个有限 étale 群概形 F、一个环面 T和一个向量群 U，它们组成一个短正合列

$$0 \to T \times U \to L \to F \to 0.$$

对该扩张取对偶（参见 [SGA 7_{I}，Exp. VIII，命题 3.3。1] 以及 [Stacks，标签 02KB]）可得一个短正合列

$$0 \to F^D \to \mathcal{G} \to T^D \times U^D \to 0.$$

取与 $(-)^D = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{G}_m)$ 相关的上同调长正合列，我们归结为证明

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(F^D, \mathbb{G}_m) = \underline{\mathrm{Ext}}^1(T^D, \mathbb{G}_m) = \underline{\mathrm{Ext}}^1(U^D, \mathbb{G}_m) = 0.$$

第一个消失由再次应用 [SGA 7_I，Exp. VIII，命题 3.3 得出。1],而第二个已在命题 2.14中处理。因此，只需证明 U^D 的消失。

由于 U 是一个向量群，在 U 中选取坐标后，我们有 U^D 是 $\mathbb{G}_a$ 的幂，因此只需证明

$$\mathrm{Ext}^1_R(\widehat{\mathbb{G}}_a, \mathbb{G}_m) = 0$$

对每个 k-代数 R 都成立。根据命题 2.19，这又归结为证明 $H^1_m(\text{“}\mathbb{G}_a,\ R, \mathbb{G}_m)$ 和 $H^2_s(\text{“}\mathbb{G}_a,\ R, \mathbb{G}_m)$ 是平凡的。现在我们来证明这两个消失结论。

对于 $n \geqslant 1$，令 $\mathbb{G}_a^{(n)}$，R 表示由 $\mathrm{Spec}\, R[t]/(t^n)$ 表示的阿贝尔层。根据定义，形式加法群$\text{“}\mathbb{G}_a,\ R$ 是“ fppf 层范畴中 $\mathbb{G}_a^{(n)}$，R 的滤余极限，而同一个余极限在 fppf 代数栈的 (2, 1)-范畴中计算 $\mathbb{G}_{a,\ R}$。因此，我们得到群胚之间的一个自然等价

$$\mathrm{Map}(\widehat{\mathbb{G}}_{a,R}, B\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Map}(\mathrm{colim}_n\, \mathbb{G}^{(n)}_{a,R}, B\mathbb{G}_m) \simeq \lim_n \mathrm{Map}(\mathbb{G}^{(n)}_{a,R}, B\mathbb{G}_m).$$

$\mathbb{G}_m$-torsor 在 $\mathbb{G}_a^{(n)}$ 上与 $\mathrm{Spec}\, R[t]/(t^n)$ 上的线丛相同；即 $\mathrm{Pic}(R[t]/(t^n))$ 的一个元素。由于皮卡群在取幂零理想 [的商后保持不变（Stacks，标签 0C6R），], 我们有一个自然同构 $\mathrm{Pic}(R[t]/(t^n)) \simeq \mathrm{Pic}(R)$。“ 因此，每个在 $\mathbb{G}_a$ 上的 $\mathbb{G}_m$-torsor，R 都拉回自 $\mathrm{Spec}\, R$。最后，正如命题 2.25 的证明中那样，这样的 torsor 当且仅当它是平凡的时才是乘法型的。换言之，群 $H^1_m(\text{“}\mathbb{G}_{a,R}, \mathbb{G}_m)$ 消失。

展开定义可知，群 $H^2_s(\text{“}\mathbb{G}_{a,R}, \mathbb{G}_m)$ 是复形的中间上同调

$$R[\![x]\!]^\times \xrightarrow{\alpha} R[\![x,y]\!]^\times \xrightarrow{\beta} R[\![x,y,z]\!]^\times \oplus R[\![x,y]\!]^\times,$$

其微分由下式给出

$$\alpha(p(x)) = \frac{p(x+y)}{p(x)p(y)}$$
$$\beta(q(x,y)) = \left(\frac{q(x+y,z)q(x,y)}{q(x,y+z)q(y,z)}, \frac{q(x,y)}{q(y,z)}\right).$$

设 $q(x,y) \in R[\![x,y]\!]^\times$ 是 β 的核中的一个形式幂级数。不失一般性，我们可以假设 $q(0,0) = 1$。由于 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，通常的指数函数和对数函数幂级数定义了互逆的群同构

$$\exp\colon (x_1,\dots,x_r)R[\![x_1,\dots,x_r]\!] \rightleftarrows 1 + (x_1,\dots,x_r)R[\![x_1,\dots,x_r]\!] : \log.$$

因此， $g(x,y) := \log(q(x,y)) \in (x,y)R[\![x,y]\!]$ 满足加法关系

$$g(x+y,z)+g(x,y) = g(x,y+z)+g(y,z) \quad \text{and} \quad g(x,y) = g(y,x). \tag{$*$}$$

首先，将 $y = z = 0$ 代入（$*$）可得 $g(x,0) = g(0,x)$。$= 0$接下来，对（$*$）中的第一个恒等式关于 z求导。记 g_i 为 g 关于其第 i个变量的偏导数，可得

$$g_2(x+y,z) = g_2(x,y+z) + g_2(y,z).$$

代入 $z = 0$ 并利用（$*$）中的第二个关系式，可得以下关系式

$$g_1(x,y) = \varphi(x+y) - \varphi(x) \quad \text{and} \quad g_2(x,y) = \varphi(x+y) - \varphi(y),$$

其中 $\varphi(x) := g_1(0,x) = g_2(x,0)$。

对 φ作形式积分，可得一个元素 $f(x) \in xR[\![x]\!]$，满足 $f'(x) = \varphi(x)$。我们断言

$$g(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

事实上，差值 $g(x,y) - f(x+y) + f(x) + f(y)$ 在 $(0,0)$ 处为零，且关于两个变量的偏导数均为零。因此，形式幂级数$p(x) := \exp(f(x)) \in 1 + xR[\![x]\!]$ 满足 $\alpha(p(x)) = q(x,y)$，证明完毕。 □

命题 2.30. 设 A 为特征零域上的阿贝尔簇。则阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^2(A,\mathbb{G}_m)$ 与 $\mathrm{Ext}^2(A_{dR},\mathbb{G}_m)$ 消失。

证明。 下述对象的消失：$\underline{\mathrm{Ext}}^2(A,\mathbb{G}_m)$（对任意基上的阿贝尔概形）已在 [RR25，定理 B] 中得到确立。阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^2(A_{dR},\mathbb{G}_m)$ 位于正合列

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(\widehat{A},\mathbb{G}_m) \to \underline{\mathrm{Ext}}^2(A_{dR},\mathbb{G}_m) \to \underline{\mathrm{Ext}}^2(A,\mathbb{G}_m),$$

并且由前述命题可知，左端项消失。 □

为了纵览本节，考虑如下定义 .

定义 2.31。设 G为特征零域 k 上的交换连通代数群。我们将阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^1(G_{dR},\mathbb{G}_m)$ 记为 $G^\natural$，并将阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$ 记为 $\underline{G'}$。

记 $m\colon G\times G \to G$ 为 G的群律。对于约化 k-概形 S，定理2.28给出同构

$$G^\natural(S) := \underline{\mathrm{Ext}}^1(G_{dR},\mathbb{G}_m)(S) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_S(G_{dR},\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^1_m(G_{dR}\times S,\mathbb{G}_m)$$

这些同构关于 G 和 S具有函子性。推论 A.20 随即推出， $G^\natural(S)$ 同构于 G_S 上带有相对于 S 的可积联络 ∇、且满足 $m^*(\mathscr{L},\nabla) \simeq (\mathscr{L},\nabla) \boxtimes (\mathscr{L},\nabla)$ 的线丛 $\mathscr{L}$ 的同构类集合。此外，$G^\natural(S)$ 的群结构对应于联络的张量积。

类似地，对于正则 k-概形 S，定理2.22 给出了同构

$$G'(S) := \underline{\mathrm{Ext}}^1(G,\mathbb{G}_m)(S) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_S(G,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_m(G_S,\mathbb{G}_m)$$

这些同构在 G和 S上具有函子性。如上所述，这意味着 $G'(S)$ 可以识别为满足 $m^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}$的、 G_S 上的线丛 $\mathscr{L}$ 的同构类群。

下面的注记解释了我们在定义2.31中选择该记号的原因。

■注记2.32。设 A 是特征零域 k上的阿贝尔簇。根据命题 2.14，定义 2.31 中的阿贝尔层 A' 由对偶阿贝尔簇表示。因此，我们的记号不存在歧义。

通过考虑与 Cartier 对偶函子 $(-)^D := \mathrm{Hom}(-,\mathbb{G}_m)$ 及以下短正合列相关的上同调长正合列

$$0 \to \widehat{A} \to A \to A_{dR} \to 0,$$

我们推得 $A^\natural$ 是 A' 的扩张， Ω_A是 A的不变微分所构成的向量群。（因此， $A^\natural$ 由一个代数群表示。[6]）我们断言， $A^\natural$ 是 A' 的泛向量扩张，其定义见 [MM74，§I1]。

定理 2.28 的证明给出了自然同构

$$A^\natural(S) := \underline{\mathrm{Ext}}^1(A_{dR},\mathbb{G}_m)(S) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_S(A_{dR},\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_m(A_{dR}\times S,\mathbb{G}_m)$$

对 所有 k-概形 S。这意味着预层 $S \mapsto \mathrm{H}^1_m(A_{dR}\times S,\mathbb{G}_m)$ 已经满足 fppf 下降。因此，$E^\natural$ [MM74，定义 I.4.1。6] 中的定义所用层化是多余的，从而得到如下识别 $A^\natural \simeq E^\natural$。

Mazur 和 Messing 还定义了一个阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^\natural(A,\mathbb{G}_m)$，根据注 2.20，它与 $A^\natural = \mathrm{Ext}^1(A_{dR},\mathbb{G}_m)$ 同构。特别地，我们的方法重新证明了他们的 [MM74，命题 I.4.2。1], 该命题比较 $\mathrm{Ext}^\natural(A,\mathbb{G}_m)$ 和 $E^\natural$。最后，根据 [MM74，命题 I.2.6.7 和 I.3.2。3], 我们得出结论，$A^\natural$ 确实是 A'的泛向量扩张。■

3. 特征层模空间

3.1. 广义 1-动机及其 Laumon 对偶

设 k 是一个任意特征的完美域。在本节中，我们将系统地应用命题 2.3 ，将 k 上的交换群叠表示为二项复形（位于

[6]更多说明请参阅备注3.4 。

次数 -1 和 0），其对象是网站（Sch/k）$_{fppf}$上的阿贝尔层。为方便读者，我们回顾一下：交换形式群的 Cartier 对偶由一个仿射交换群概形表示。

定义 3.1. 广义 *1*-动机是 $(\mathrm{Sch}/k)_{fppf}$ 中的阿贝尔层二项复形 $[\mathcal{G} \to G]$，其中 G 是光滑交换连通代数群，而 $\mathcal{G}$ 是其 Cartier 对偶光滑且连通的交换形式群。

按照 [Del74 §10 中的定义，通常1-动机1], 是上述定义的一个特殊情形，其中 k 是代数闭的， G是半阿贝尔簇，而 $\mathcal{G}$ 是有限生成自由的 $\mathbb{Z}$-模。我们的定义 3.1 受 [Rus 13] 中的定义启发，并将 Laumon 的[Lau96]推广到了可能具有正特征的基域。

设 $[\mathcal{G} \to G]$ 是一个广义 1-动机。Barsotti–Chevalley定理 [Mil17，定理 8。27] 指出， G具有一个最小子群 L，使得 G/L 是真。该子群是仿射、光滑且连通的，而商 G/L 是一个阿贝尔簇 A。换言之， G 可以函子性地分解为一个扩张

$$0 \to L \to G \to A \to 0,$$

of 一个阿贝尔簇 A 与一个仿射光滑交换连通代数群 L .

■ 注3.2。 特征零域上的每个代数群都是光滑的。在正特征下，奇异的连通代数群仍是由阿贝尔簇和线性群构成的扩张，但这种分解未必唯一。参见 [Bri17a，例 4.3。8]。 ■

定义 3.1的动机源于命题 2.9 中的 Cartier 对偶自然地限制为范畴的反等价

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Affine smooth}\\ \text{commutative connected}\\ \text{algebraic groups over } k\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Commutative formal groups}\\ \text{over } k \text{ whose Cartier dual is}\\ \text{smooth and connected}\end{array}\right\}$$

$$G = \operatorname{Spec} R \longmapsto G^D \simeq \operatorname{Spf} R^*$$

$$\mathcal{G}^D \simeq \operatorname{Spec} R^* \longmapsto \mathcal{G} = \operatorname{Spf} R.$$

利用这一点，我们将构造一个 $[\mathcal{G} \to G]$ 的对偶，其形式为 $[L^D \to K]$，其中某个光滑交换连通代数群 K嵌入一个短正合列

$$0 \to \mathcal{G}^D \to K \to A' \to 0,$$

其中， A' 是 A的对偶阿贝尔簇。 K 的函子性定义由以下引理给出。

引理 3.3. 设 $[\mathscr{G} \to A]$ 为由复合 $\mathscr{G} \to G \to A$定义的广义 *1*-动机。复形$\mathrm{RHom}([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m)$ 在0 次和2次上没有上同调。此外，$\mathrm{Ext}^1([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m)$ 可由一个光滑交换连通代数群表示。

证明。 将函子 $\mathrm{RHom}(-, \mathbb{G}_m)$ 应用于纤维序列 $\mathscr{G} \to A \to [\mathscr{G} \to A]$，我们得到如下长正合列：

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^0([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathscr{G}^D \longrightarrow \\ \quad \underline{\mathrm{Ext}}^1([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m) \longrightarrow A' \longrightarrow 0 \longrightarrow \\ \quad \underline{\mathrm{Ext}}^2([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m) \longrightarrow 0. \end{array}$$

这里，我们使用命题 2.8、2.29和 2.30 来证明上述非平凡零项。消失结果可直接得到，而 $\mathrm{Ext}^1([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m)$ 由下降可表示为一个光滑交换连通代数群。（关于这些下降论证如何运作，请参见下面的备注。）

□

■ 备注 3.4 ——关于扩张所继承的性质。 设 S 为一个基概形，并考虑网站 $(\mathrm{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 上阿贝尔层的一个扩张：

$$0 \to \mathscr{H} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{E} \xrightarrow{\psi} \mathscr{G} \to 0.$$

复合 $\mathscr{H} \times \mathscr{E} \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{id}} \mathscr{E} \times \mathscr{E} \xrightarrow{m} \mathscr{E}$（其中 m 是 $\mathscr{E}$ 的群运算）定义了 $\mathscr{H}$ 在 $\mathscr{E}$ 上的一个作用。此作用符合如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{H} \times \mathscr{E} & \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{id}} & \mathscr{E} \times \mathscr{E} & \xrightarrow{m} & \mathscr{E} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \mathscr{E} & & \xrightarrow{\qquad\qquad\psi\qquad\qquad} & & \mathscr{G}, \end{array}$$

从而得到 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{H}$ 在 $\mathscr{G}$ 上的挠子。换言之，我们有一个 $\mathscr{H}$-等变同构 $\mathscr{H} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{E}$。

假设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 分别由群代数空间表示 G 和 H，定义在 S上。根据 [Stacks，标签 00WN]，，存在一个概形 T 及一个映射 $T \to \mathscr{E}$，使得复合

$$T \to \mathscr{E} \to G$$

是一个 fppf 覆盖。这诱导出一个平凡化 $H \times T \simeq \mathscr{E} \times_G T$。由于代数空间的定义在 fppf 拓扑下是局部的 [Stacks，标签04SK]，，可知 $\mathscr{E}$ 可由一个代数空间表示 E，其定义在 G上。因此， E 也是定义在 S上的群代数空间。

设 $\mathcal{P}$ 是代数空间态射的一种性质，该性质在基变换下稳定，并且在底空间上是 fppf 局部的。同样的推理表明，若 $H \to S$ 满足 $\mathcal{P}$，则 $E \to G$也满足该性质。此外，若 $\mathcal{P}$ 在复合下稳定，且 $G \to S$满足该性质，则 $E \to S$ 也满足 $\mathcal{P}$。（有关此类性质的详尽列表，请参见 Stacks，标签 03H8和 03YE]。$\mathcal{P}$

现在，假设 S 是域 k的谱。如果 G 和 H 是概形，那么映射 $G \to S$ 和 $H \to S$ 必定是分离的 [Stacks，标签047L]。前面的讨论表明，$E \to S$也分离，因此 [Stacks，标签 0B8G] 说明 E也是一个概形。

在本讨论余下部分中，假设 G和 H 是 k上的局部有限型群代数空间。于是我们注意到，E 的维数为维 $G +$ 维 H。事实上，[Stacks，标签0AFH] 指出，$E \to G$ 的相对维数为维 $E -$ 维 G。然而，这个相对维数也就是纤维 H的维数，证明完毕。

由于 $E \to G$ 是忠实平坦且有限表现的，所诱导的态射 $|E| \to |G|$在底拓扑空间之间是一个商映射 [Stacks，标签 0413]。尽管 $|E| \to |G|$的纤维不一定与 |H|同胚，但存在一个从 |H| 到这些纤维的连续满射，正如 [Stacks，标签03H4]所述。特别地，如果 G和 H 是连通的，那么 E也是连通的。∎

遵循 Laumon，我们将系统地用 K 表示代表$\mathrm{Ext}^1([\mathcal{G} \to A], \mathbb{G}_m)$的代数群。下述（代数栈意义下的）Cartier 对偶的变体最初在 [Del74] 中引入，并随后在 [Lau96] 与 [Rus13]中得到推广。

定义 3.5. 设 $[\mathcal{G} \to G]$ 为一个广义 1-动机。我们定义 *Laumon* 对偶$[\mathcal{G} \to G]^\triangleright$ 为广义 1-动机 $[L^D \to K]$，其中 $L^D \to K$ 是由纤维序列 $L \to [\mathcal{G} \to G] \to [\mathcal{G} \to A]$ 经由 Cartier 对偶函子诱导的连接态射。

我们注意到，Laumon 对偶在广义 1-动机上是函子性的。事实上，由 Barsotti–Chevalley定理的函子性，一个复形的态射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & G_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_2 & \longrightarrow & G_2 \end{array}$$

两个广义 1-动机之间会诱导出映射 $L_1 \to L_2$ 和 $A_1 \to A_2$，使图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

交换。因此，我们在阿贝尔层的导出范畴中得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \longrightarrow & [\mathscr{G}_1 \to G_1] & \longrightarrow & [\mathscr{G}_1 \to A_1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & \longrightarrow & [\mathscr{G}_2 \to G_2] & \longrightarrow & [\mathscr{G}_2 \to A_2]. \end{array}$$

于是，Cartier 对偶函子诱导出一个态射 $[\mathscr{G}_2 \to G_2]^{\triangleright} \to [\mathscr{G}_1 \to G_1]^{\triangleright}$.

下面的命题比较上述定义的 Laumon 对偶与定义2.5中的层叠 Cartier 对偶。

命题 3.6。 设 $[\mathscr{G} \to G]$ 是一个广义 *1*-动机。存在一个导出范畴映射 $[\mathscr{G} \to G]^{\triangleright} \to [\mathscr{G} \to G]^{\vee}$，其余纤维为 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m)$。

证明。 定义 Laumon 对偶的纤维序列诱导出下述纤维序列。

$$R\underline{\mathrm{Hom}}([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m[1]) \to R\underline{\mathrm{Hom}}([\mathscr{G} \to G], \mathbb{G}_m[1]) \to R\underline{\mathrm{Hom}}(L, \mathbb{G}_m[1])$$

由引理 3.3，$\mathrm{Ext}^2([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m)$ 消失，因此 $\mathrm{Ext}^1([\mathscr{G} \to G], \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m)$是一个满态射。接着， [Bro21，引理 3.10]推出

$$\tau_{\leqslant 0} R\underline{\mathrm{Hom}}([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m[1]) \to \tau_{\leqslant 0} R\underline{\mathrm{Hom}}([\mathscr{G} \to G], \mathbb{G}_m[1]) \to \tau_{\leqslant 0} R\underline{\mathrm{Hom}}(L, \mathbb{G}_m[1])$$

也是一个纤维序列。再应用一次引理 3.3 可得

$$\tau_{\leqslant 0} R\underline{\mathrm{Hom}}([\mathscr{G} \to A], \mathbb{G}_m[1]) \simeq K$$

因此，经过一次移位后，刚得到的纤维序列就是 $L^{\vee}[-1] \to K \to [\mathscr{G} \to G]^{\vee}$。由于 $L^D \simeq \tau_{\leqslant 0}(L^{\vee}[-1])$，存在一个自然映射 $L^D \to L^{\vee}[-1]$，使得该方块

$$\begin{array}{ccccc} L^D & \longrightarrow & K & \longrightarrow & [L^D \to K] \\ \downarrow & & \| & & \\ L^{\vee}[-1] & \longrightarrow & K & \longrightarrow & [\mathscr{G} \to G]^{\vee} \end{array}$$

交换，并诱导出纤维序列之间的一个态射。由此我们得到所需的比较映射。

现在，根据 [Stacks，标签 08J5], 存在一个纤维序列 $L^D \to L^{\vee}[-1] \to \mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m)$。最后，八面体公理 [Stacks，标签 05R0] 说明，$[\mathscr{G} \to G]^{\triangleright} \to [\mathscr{G} \to G]^{\vee}$ 的余纤维同构于 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m)$。 □

本命题表明，比较映射 $[\mathscr{G} \to G]^{\triangleright} \to [\mathscr{G} \to G]^{\vee}$ 成为同构当且仅当 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m) = 0$。当 G为半阿贝尔时，该条件成立，从而表明由 Deligne 定义的 1-动机上的 Cartier 对偶与层叠 Cartier 对偶一致。推广这一结果，我们得到如下推论。

推论 3.7. 当基域 k 具有正特征时，比较态射 $[\mathscr{G} \to G]^{\triangleright} \to [\mathscr{G} \to G]^{\vee}$ 恒为同构。当 k 具有特征零时，比较映射为同构当且仅当 G 是半阿贝尔簇。

证明。在正特征下，阿贝尔层 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m)$ 总是消失，这是由于 [Ros23，推论 2.2.17]。如果 k 的特征为零，L 是环面与向量群的乘积 U [Mil17，推论 16.15]。特别地，命题 2.14 意味着 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_m)$。根据 [RR25，定理 C]，后一个层恰好在 U消失时消失。——

□

在本节余下部分，我们假设基域 k 的特征为零且 $\widehat{\mathscr{G}} = G$，因此 $[G \to G] \simeq G_{dR}$。现在我们给出$K = \mathrm{Ext}^1([\widehat{G} \to A], \mathbb{G}_m)$ 的一个更明确描述。由该扩张导出的长正合列

$$0 \to \widehat{A} \to A \to A_{dR} \to 0,$$

经由 Cartier 对偶函子，得到短正合列

$$0 \to \Omega_A \to A^{\natural} \to A' \to 0,$$

如备注 2.32中所述。现在，商映射 $\psi\colon G \to A$ 诱导出拉回映射$\psi^*\colon \Omega_A \to \Omega_G$，我们考虑相应的推出扩张。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_A & \longrightarrow & A^{\natural} & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi^*} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_G & \longrightarrow & (\Omega_G \times A^{\natural})/\Omega_A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

在此处及本文其余部分，Ω_G 表示由 G 的不变 微分构成的向量群。

命题 3.8。 代数群 $K = \mathrm{Ext}^1([\widehat{G} \to A], \mathbb{G}_m)$ 自然同构于商 $(\Omega_G \times A^{\natural})/\Omega_A$。

Proof. 考虑以下交换图，其各行均为纤维序列。

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{G} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & [\widehat{G} \to A] \\ \downarrow & & \| & & \downarrow \\ \widehat{A} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & [\widehat{A} \to A] \end{array}$$

Aft对 $\mathrm{RHom}(-, \mathbb{G}_m)$ 应用 RHom 并取上同调中的长正合列后，我们得到

如下正合行组成的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_A & \longrightarrow & A^\natural & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi^*} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_G & \longrightarrow & K & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

我们断言左侧的方框是余笛卡尔的。这意味着复形

$$0 \to \Omega_A \to \Omega_G \times A^\natural \to K \to 0,$$

在 $\Omega_G \times A^\natural$ 上由 Ω_A 作用（如典型的推出构造中那样）是正合的。这个复形是下列更大交换图的一部分。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & \Omega_G & = & \Omega_G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_A & \longrightarrow & \Omega_G \times A^\natural & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_A & \longrightarrow & A^\natural & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

在此图表中，每一列都是正合的，顶行和底行也都是正合的。因此，中间行也必定正合。□

我们先固定一些记号。已知代数群 K 是 $\Omega_G \times A^\natural$ 的商，我们将其点记作对 $(\omega, (\mathscr{L}, \nabla))$（即这些对的等价类），其中 $\omega \in \Omega_G$ 和 $(\mathscr{L}, \nabla) \in A^\natural$.[7] 我们还将系统地分别把自然映射 $L \to G$ 和 $G \to A$ 记作 φ 和 ψ。

■ 注 3.9。Laumon 对偶中的态射 $L^D \to K$ 也可以明确描述如下：它将一个特征 $\chi \in L^D$ 映射到 $[\omega,(\mathscr{L}, \nabla)]$, ，其中 ω 是满足 $\varphi^*\omega = d\chi/\chi$的 Ω_G 中的任意元素，而 $(\mathscr{L}, \nabla)$ 是满足$\psi^*(\mathscr{L}, \nabla) \simeq (\mathcal{O}_G, d - \omega)$的 $A^\natural$ 中的唯一元素。注意，由于 GdR 的 Cartier 对偶消失，映射$L^D \to K$ 是一个单态射。特别地， GdR 的 Laumon 对偶是一个通常的阿贝尔层。■

[7]这略微滥用了记号，因为定义商层时涉及的层化可能并非平凡。尽管如此，根据 Serre 消失定理，对于仿射 S， $K(S)$ 确实是 $\Omega_G(S) \times A^\natural(S)$ 关于 $\Omega_A(S)$ 的商。

最后，我们描述来自命题 $[\widehat{G} \to G]^{\triangleright} \to [\widehat{G} \to G]^{\vee}$ 的比较映射 3.6。推出的泛性质允许我们定义阿贝尔层的态射

$$\begin{aligned} K &\to G^{\natural} \\ [\omega, (\mathscr{L}, \nabla)] &\mapsto (\mathcal{O}_G, d + \omega) \otimes_{\mathcal{O}_G} \psi^*(\mathscr{L}, \nabla). \end{aligned}$$

此映射经由商分解，从而得到一个态射 $\gamma\colon K/L^{D} \to G^{\natural}$。

命题 3.10. 态射 $\gamma\colon K/L^{D} \to G^{\natural}$ 将等价类 $[\omega, (\mathscr{L}, \nabla)]$ 映到带有可积联络的线丛

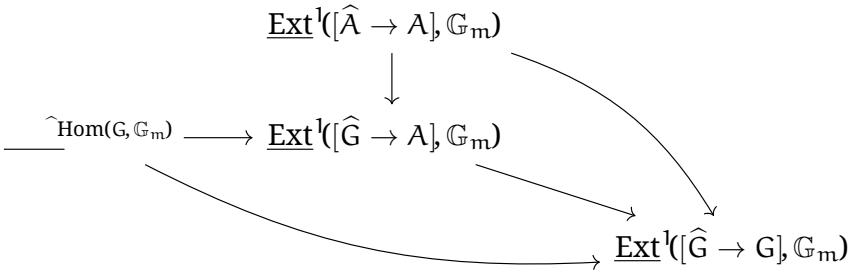
$$(\mathcal{O}_G, d + \omega) \otimes_{\mathcal{O}_G} \psi^*(\mathscr{L}, \nabla),$$

与比较映射 $G^{\triangleright}_{dR} \to G^{\vee}_{dR}$ 一致。特别地，γ 是一个单态射，其余核为 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m)$。

证明。 考虑上文利用推出的泛性质定义的态射 $K \to G^{\natural}$。我们断言图表

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & G^{\natural} \\ \downarrow \wr & & \| \\ \underline{\mathrm{Ext}}^1([\widehat{G} \to A], \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1([\widehat{G} \to G], \mathbb{G}_m), \end{array}$$

其中 $\underline{\mathrm{Ext}}^1([\widehat{G} \to A], \mathbb{G}_m) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1([\widehat{G} \to G], \mathbb{G}_m)$ 是由自然的 $\widehat{\ }$ 复形态射 $[G \to G] \to [G \to A]$ 诱导的，交换。此即证明图表



可交换。上方三角形显然由函子性而可交换；下方三角形则可通过将函子 $\mathbf{RHom}(-, \mathbb{G}_m)$ 应用于纤维序列之间的态射，并取上同调中的长正合列来验证其可交换。

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & [\widehat{G} \to G] \\ \| & & \downarrow \psi & & \downarrow \\ \widehat{G} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & [\widehat{G} \to A], \end{array}$$

现在，如命题的证明中所示3.6，有两个虚线态射使图表

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & [L^D \to K] & \longrightarrow & L^D[1] \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & G^\natural & \longrightarrow & L^\vee \end{array}$$

交换：命题的比较映射3.6 和 γ。它们相等这一事实由 [Stacks，标签 0FWZ]得出。

□

回顾一下， L 的线性部分 G 可分解为环面 T（其 Cartier 对偶记为 X）与向量群 U 的乘积。由于 $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_m)$没有 k-点（根据命题 2.14 和 2.25），这项计算对于获取特征层的具体信息特别有用。

推论 3.11。 特征层的同构类群$H^1_m(G_{dR}, \mathbb{G}_m)$ 在 G 上构成如下短正合列

$$0 \to X \to (\Omega_G \times A^\natural(k))/\Omega_A \to H^1_m(G_{dR}, \mathbb{G}_m) \to 0,$$

左侧的态射如备注 3.9所述，右侧的态射则如命题 3.10所述。特别地， G上的每个特征层都具有如下形式

$$(\mathcal{O}_G, d + \omega) \otimes_{\mathcal{O}_G} \psi^*(\mathscr{L}, \nabla),$$

对于某个 $\omega \in \Omega_G$ 以及 $(\mathscr{L}, \nabla) \in A^\natural(k)$。

证明。 前述命题给出了一个同构 $(K/L^D)(k) \simeq H^1_m(G_{dR}, \mathbb{G}_m)$。现在， k-点群 $(K/L^D)(k)$ 构成如下长正合列

$$0 \to X \to K(k) \to (K/L^D)(k) \to H^1(k, X) \times H^1(k, \widehat{U^*}),$$

其中，右侧项因 [SGA 7_I，Exp. VIII, 命题 5。1] 以及 [Bha22，注 2.2。18] 而消失。最后，正如脚注 7 中所述，群 $K(k)$同构于商$(\Omega_G \times A^\natural(k))/\Omega_A$，证明完毕。

□

3.2. 特征层模空间

正如上一节所讨论的，Laumon 定义了一种对偶 $[\widehat{G} \to G]^\triangleright$，它在某种意义上消除了层叠 Cartier 对偶 $U' = \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_m)$ 中的那个令人费解的对象 $G^\natural = G^\vee_{dR}$。现在，根据注 3.9， G_{dR} 的 Laumon 对偶同构于商$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$层 $K/(X \times U^*)$。由于 U^* 是一个形式群，因此不可表。由此引出如下定义。

定义 3.12（特征层模空间）。我们将 $G^\flat$ 记为阿贝尔层K/X，其中 $X \hookrightarrow K$ 是一个映射，它将 $\chi \in X$ 映到 $[\omega,(\mathscr{L},\nabla)]$, ，其中 ω 是 Ω_G 中满足 $\varphi^*\omega = d\chi/\chi$ 的任意元素，而 $(\mathscr{L},\nabla)$ 是 $A^\natural$ 中满足$\psi^*(\mathscr{L},\nabla) \simeq (\mathcal{O}_G, d - \omega)$的唯一元素。

请注意，尽管映射 $X \to K$是单态射，但它不是浸入。因此，尚不清楚商 $G^\flat = K/X$ 是否为概形，而且它确实可能不是。简要验证可知，态射

$$\begin{aligned} k &\to H^1_m(\mathbb{G}_{m,dR}, \mathbb{G}_m) \\ \alpha &\mapsto (\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d - \alpha\, dx/x) \end{aligned}$$

是满射，并诱导出同构 $H^1_m(\mathbb{G}_m,\ dR,\ \mathbb{G}_m) \simeq k/\mathbb{Z}$。因此，模空间 $\mathbb{G}^\flat_m$ 同构于 $\mathbb{G}_a/\mathbb{Z}$，这是一个代数空间[8] ，但不是概形。尽管如此，本节的主要结果定理 3.16在推论 3.17 中断言，$G^\flat$ 具有我们所能期望的良好性质。

■注记 3.13。 设 S 是一个 k-概形。根据命题 2.13、2.15和 3.6，存在自然态射

$$G^\flat(S) \xrightarrow{(1)} G^\triangleright_{dR}(S) \xrightarrow{(2)} G^\natural(S) \xrightarrow{(3)} H^1_m(G_{dR} \times S, \mathbb{G}_m).$$

命题 2.24 和定理 2.28 表明，当 S 为约化的时，映射 (1) 和 (3) 是同构。此外，命题 2.25 指出，对于半正规 k-概形，(2) 是同构 S。特别地， $G^\flat(k)$ 同构于 G上的特征层同构类群■，由此其名称便有了依据。

■注记 3.14。 赋值 $G \mapsto G^\flat$ 具有函子性。具体而言，考虑特征零域上交换连通代数群之间的一个态射$G_1 \to G_2$ 。由于 Barsotti–Chevalley 分解具有函子性，我们得到以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中 A_i 是阿贝尔簇，而 L_i 是仿射的。线性部分 L_i 进一步分解为环面的乘积 T_i 和幺幂群 U_i的乘积。根据 [Mil17，推论 14，18], 态射$L_1 \to L_2$ 是态射 $T_1 \to T_2$ 和 $U_1 \to U_2$ 的乘积。特别地，这诱导出一个

[8]我们强调，与 [Stacks，标签 025Y]相反，并且与 [LM00，定义 1.1], 一样，我们 不 假设代数空间是拟分离的。

映射 $X_2 \to X_1$，分别定义在 T_2 与 T_1的特征群之间。Laumon 对偶的函子性确保图表右侧的方块

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \longrightarrow & X_2 \times \widehat{U_2^*} & \longrightarrow & K_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & X_1 \times \widehat{U_1^*} & \longrightarrow & K_1 \end{array}$$

交换。因此，余核的泛性质给出了所需的映射$G_2^\flat \to G_1^\flat$。■

■例 3.15。照例，设 T 为一个环面，U 为一个幺幂群，A 为一个阿贝尔簇。我们有

$$T^\flat \simeq T^\natural \simeq \Omega_T/X \simeq \mathfrak{t}^*/X, \quad U^\flat \simeq \Omega_U \simeq U^*, \quad A^\flat \simeq A^\natural.$$

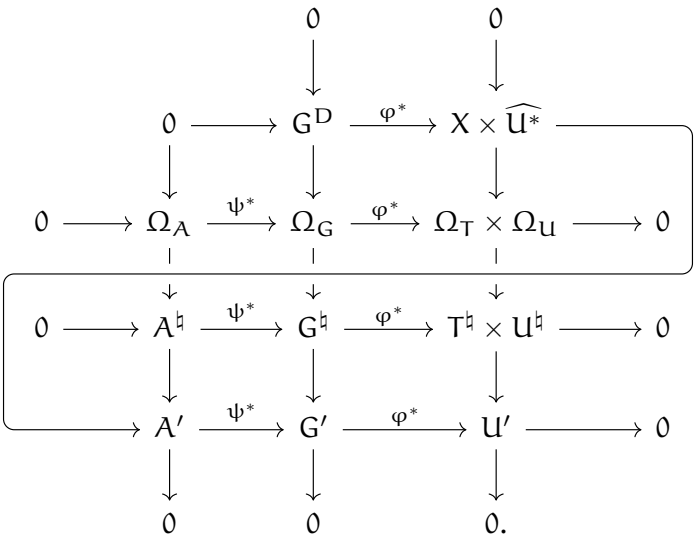
第一个是群代数空间，而另外两个是代数群 s. ■

在进一步讨论之前，我们注意到存在一个大型图表，它将本节中出现的许多对象联系起来。由于形式完备化和德拉姆函子都是正合的，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{T} \times \widehat{U} & \longrightarrow & \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{A} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T \times U & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T_{dR} \times U_{dR} & \longrightarrow & G_{dR} & \longrightarrow & A_{dR} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0, & & \end{array}$$

其中每一列和每一行都是正合的。应用 Cartier 对偶函子，并

转到上同调中的长正合列，我们得到



此处，每一行（包括锯齿路径）和每一列都是正合的。必要的计算和消失结果已在上一节讨论过。我们指出，列中的态射具有自然的几何解释，如下所示

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G^D & \longrightarrow & \Omega_G & \longrightarrow & G^\natural & \longrightarrow & G' \longrightarrow 0 \\ & & \chi & \longmapsto & d\chi/\chi & & (\mathscr{L},\nabla) & \longmapsto & \mathscr{L} \\ & & & & \omega & \longmapsto & (\mathcal{O}_G, d+\omega). & & \end{array}$$

现在我们可以陈述本节的主要定理。

定理 3.16. 设 G 是特征零域上的交换连通代数群。将 G 写成阿贝尔簇 A 被环面 T 与幺幂群 U 的乘积 $T \times U$ 扩张的形式。则复形 $0 \to A^\flat \to G^\flat \to T^\flat \times U^\flat \to 0$ 是正合的。

证明。 考虑由 $\varphi^*\colon \Omega_G \to \Omega_T \times \Omega_U$ 和 $0\colon A^\natural \to \Omega_T \times \Omega_U$ 诱导的映射 $K \to \Omega_T \times \Omega_U$。我们断言，复合 $K \to \Omega_T \times \Omega_U \to \Omega_T/X \times \Omega_U$ 可下降到商 K/X。根据商的泛性质，我们需要验证复合

$$X \to X \times \widehat{U^*} \to K \to \Omega_T \times \Omega_U \to \Omega_T/X \times \Omega_U$$

为零。将函子 $\mathrm{RHom}(-,\mathbb{G}_m)$ 应用于纤维序列之间的态射

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & [\widehat{L}\to L] & \longrightarrow & \widehat{L}[1] \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & [\widehat{G}\to G] & \longrightarrow & [\widehat{G}\to A], \end{array}$$

$\frown$并取上同调中的长正合列，我们发现复合 $X\times U^*\to K\to \Omega_T\times\Omega_U$ 正是第 35 页中出现的熟悉映射。特别是，该复合$\frown$是 $X\to\Omega_T$ 与 $U^*\to\Omega_U$的乘积。因此，大复合为零，我们得到一个映射 $K/X\to\Omega_T/X\times\Omega_U$。

现在，我们已经有了考察下列交换图所需的所有态射

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & = & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^\natural & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \Omega_T\times\Omega_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^\natural & \longrightarrow & K/X & \longrightarrow & \Omega_T/X\times\Omega_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0, & & \end{array}$$

其各列显然正合。由于顶行也正合，根据九引理，只需证明中间行正合。这可通过在定义 K 的推出扩张中应用蛇引理得到。

□

上面的定理意味着 $G^\flat$ 是 $G^\natural$的一个“粗模空间”，也就是说，$G^\flat$ 可由一个代数空间表示，且其 k-点与 $G^\natural$的 k-点相同。[9]

推论 3.17。 阿贝尔层 $G^\flat$ 可由一个光滑交换连通群代数空间表示。此外，它满足 维数 $G\leqslant$维数 $G^\flat\leqslant 2$维数 G；当且仅当 G 是仿射的时，左侧等号成立；当且仅当 G 是真的时，右侧等号成立。

证明。 备注 3.4 中的讨论表明 $G^\flat$ 可由一个维数为 维数 $T^\flat+$维数 $U^\flat+$维数 $A^\flat$的光滑交换连通群代数空间表示。

[9]然而，目前仍不清楚是否存在一个自然的态射 $G^\natural\to G^\flat$，或者这样的态射是否满足泛性质。

鉴于

$$\begin{aligned}\dim T^\flat &= \dim \Omega_{T/X} = \dim \Omega_T = \dim T\\ \dim U^\flat &= \dim U^* = \dim U\\ \dim A^\flat &= \dim A^\natural = \dim \Omega_A + \dim A' = 2\dim A,\end{aligned}$$

我们得到 $\dim\ G^\flat = \dim\ T + \dim U + 2\dim A = \dim\ G + \dim\ A$，从而完成证明。

□

由交换连通代数群构成的Ab((Sch/k)fppf)全子范畴在扩张下封闭。因此，它继承了正合范畴的结构。有人可能会认为，这使函子 $G \mapsto G^\flat$ 正合。以下结果为这一猜想提供了一些支持。

命题 3.18. 设 $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ 是特征零域上的阿贝尔簇的一个短正合列。那么复形 $0 \to A_3^\flat \to A_2^\flat \to A_1^\flat \to 0$ 是正合的。

证明。 由命题A.18，复形$0 \to A_{1,\mathrm{dR}} \to A_{2,\mathrm{dR}} \to A_{3,\mathrm{dR}} \to 0$ 是正合的。随后，Cartier 对偶函子导出正合列

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A_{1,\mathrm{dR}}, \mathbb{G}_m) = 0 \to A_3^\natural \to A_2^\natural \to A_1^\natural \to 0 = \underline{\mathrm{Ext}}^2(A_{3,\mathrm{dR}}, \mathbb{G}_m),$$

其中的消失结果归功于命题2.13 和2.30。 □

命题3.19。设 $0 \to L_1 \to L_2 \to L_3 \to 0$ 是特征零域上的线性交换连通代数群的一个短正合列。那么复形 $0 \to L_3^\flat \to L_2^\flat \to L_1^\flat \to 0$是正合的。

证明。首先，我们将线性群 L_i 分解为环面 T_i 与幺幂群 U_i的乘积。形式完备化函子的正合性导出短正合列

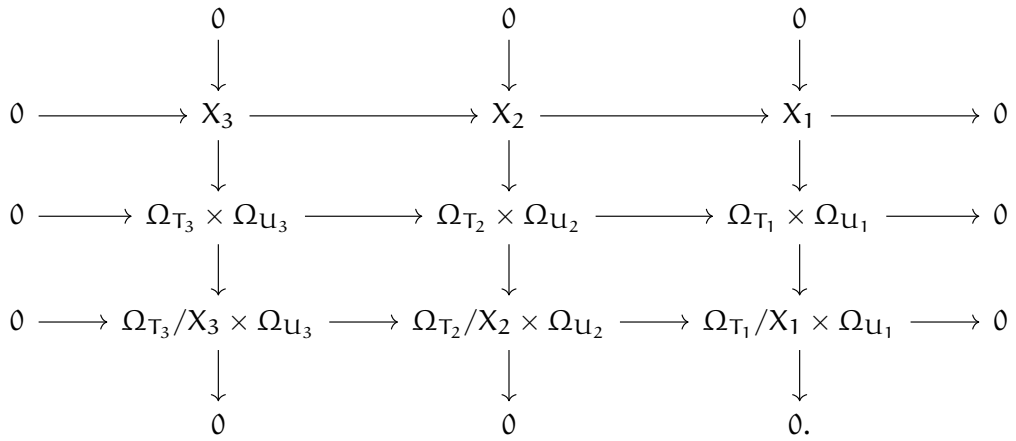
$$0 \to \widehat{T}_1 \times \widehat{U}_1 \to \widehat{T}_2 \times \widehat{U}_2 \to \widehat{T}_3 \times \widehat{U}_3 \to 0.$$

然后，Cartier 对偶函子给出正合列

$$0 \to \Omega_{T_3} \times \Omega_{U_3} \to \Omega_{T_2} \times \Omega_{U_2} \to \Omega_{T_1} \times \Omega_{U_1} \to 0 = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\widehat{T}_3 \times \widehat{U}_3, \mathbb{G}_m).$$

这里，我们使用推论2.12 和命题2.29。如备注3.14所示，我们得到诱导的

映射 $X_3 \to X_2 \to X_1$，它们位于环面 T_i的特征群之间，并构成图表

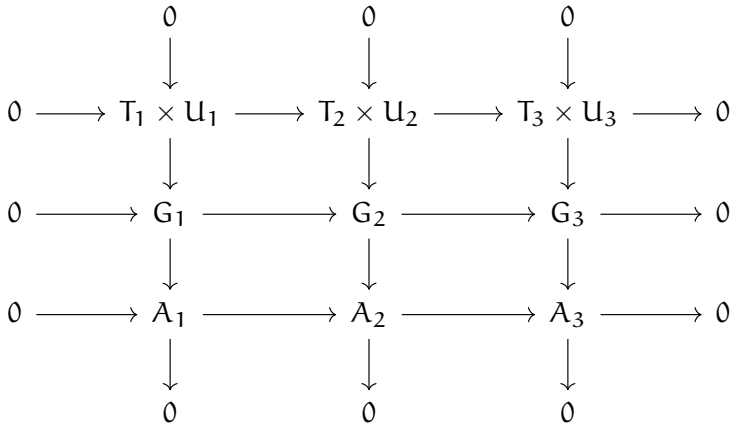


上方第一行正合，这是命题 2.14 的结论，而九引理表明底行也正合。

□

命题 3.20。 设 $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ 是特征零域上的交换连通代数群短正合列。那么 $G_3^\flat \to G_2^\flat$ 是单态射，且 $G_2^\flat \to G_1^\flat$ 是满态射。

证明。 考虑以下交换图，它由交换连通代数群短正合列 G_i以及其 Barsotti–Chevalley 分解上的诱导映射构成。

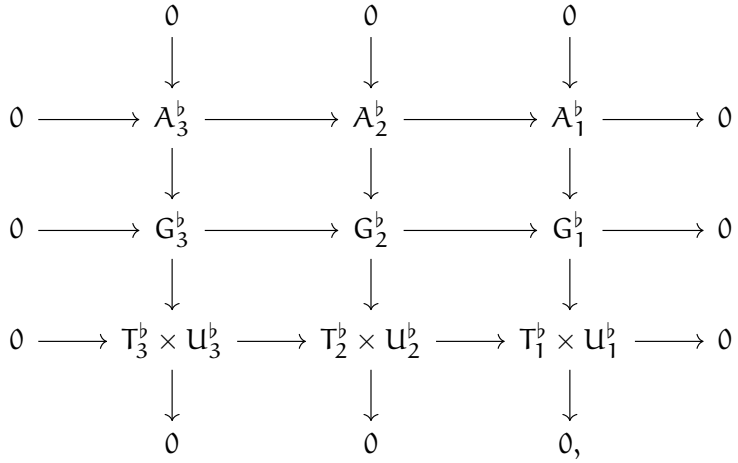


Barsotti–Chevalley 分解的正合性已由 Brion 在 [Bri17b]中进行了全面研究。他证明了复形 $0 \to U_1 \to U_2 \to U_3 \to 0$ 是正合的，但

$$0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0 \qquad \text{and} \qquad 0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

可能仅在同源意义下正合 [Bri17b，定理 2.9、引理 4.3 和 4.7]。尽管如此，映射 $T_1 \to T_2$ 是单态射，而 $T_2 \to T_3$ 和 $A_2 \to A_3$ 是满态射。[10]

接下来，我们将函子 $(-)^\flat$ 作用于上图，得到以下交换图



其行是复形，列是正合的。根据前述命题，映射 $A_3^\flat \to A_2^\flat$ 和 $T_3^\flat \times U_3^\flat \to T_2^\flat \times U_2^\flat$ 是单态射。上述复形短正合列所关联的上同调长正合列表明，$G_3^\flat \to G_2^\flat$ 也是单态射。

我们断言 $A_2^\flat \to A_1^\flat$ 是满态射。令 F 为 $A_1 \to A_2$ 的核， B为其余核。注意， F 是有限群，而 B是阿贝尔簇。考虑以下短正合列

$$0 \to F \to A_1 \to A_1/F \to 0 \qquad \text{and} \qquad 0 \to A_1/F \to A_2 \to B \to 0.$$

转到德拉姆空间，并考虑由 Cartier 对偶函子诱导的长正合列后，我们得到映射$A_2^\flat \to (A_1/F)^\flat$ 和 $(A_1/F)^\flat \to A_1^\flat$是满态射。因此，它们的复合也是满态射。由于 $T_2^\flat \times U_2^\flat \to T_1^\flat \times U_1^\flat$ 是满态射，用与上述相同的论证可证明 $G_2^\flat \to G_1^\flat$也是满态射。 □

事实证明，Barsotti–Chevalley 分解不具正合性，给上面的证明带来的麻烦远不止于此。受 [Bri17b，注 46], 的启发，我们在下文给出一个反例来反驳我们的猜想。

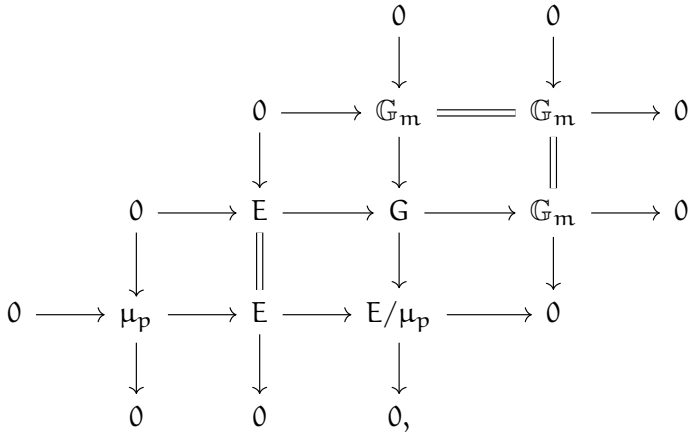
■ 例3.21. 假设基域 k 含有某个素数 p 对应的非平凡 p 次单位根。给定一条椭圆曲线 E, 其上含有一个阶为 p 的有理点，我们令 μ_p 作用

[10]Brion 的结果适用于任意特征，而此处所需的特征零情形则简单得多。

在乘积 $E \times \mathbb{G}_m$ 上作对角作用，并考虑商 G。这个群适合于短正合列

$$0 \to E \to G \to \mathbb{G}_m \to 0.$$

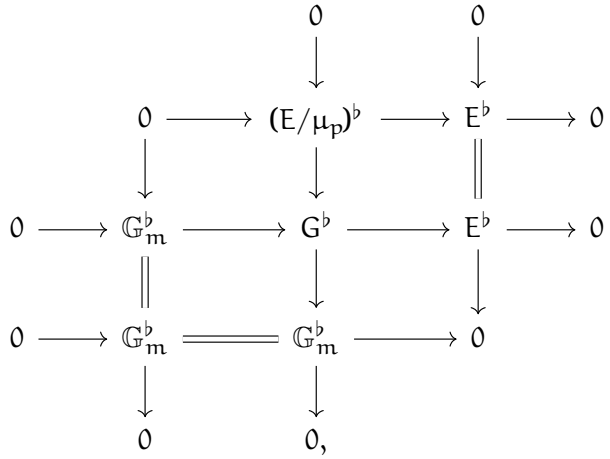
对每个群取 Barsotti–Chevalley 分解，得到以下交换图表



其行和列均为正合列。将底行转到德拉姆空间，并取由 Cartier 对偶诱导的上同调长正合列，可得正合列

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (E/\mu_p)^\flat \to E^\flat \to 0.$$

函子 $(-)^\flat$ 可应用于前述图表中由交换连通代数群构成的部分。由此得到交换图表



其中各列正合，各行构成复形。由复形的短正合列导出的上同调长正合列，进而确定了

的中间上同调

$$0 \to \mathbb{G}_m^\flat \to G^\flat \to E^\flat \to 0$$

借助 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，从而证明函子 $(-)^\flat$ 并非正合。 ∎

3.3. 模空间的线性子空间与通有子空间

对于阿贝尔簇 A，某些 大的子集在 $A^\flat$ 非阿贝尔霍奇理论中 [Sim93] 以及德拉姆上同调的一般消失定理的表述中 [Sch15]发挥着核心作用。对于环面 T，类似的 大 子集 $T^\flat$ 也曾在[Sab92]中进行研究。本节将这些子集的定义（见定义 3.25）推广到任意交换连通代数群。

定义 3.22（线性子空间）。设 G 是特征零域上的交换连通代数群。对于一个具有连通核的满态射 $\rho\colon G \twoheadrightarrow G$，称 $\rho^\flat\colon \widetilde{G}^\flat \hookrightarrow G^\flat$ 的像为 $G^\flat$的线性子空间。

以下注记具体刻画了当 G为仿射时，$G^\flat$ 的线性子空间。此外，当 G为阿贝尔簇时，这一概念与文献中已有的概念相关。

■注记 3.23。设 $G \twoheadrightarrow \widetilde{G}$是交换连通代数群之间的一个满态射，其核 N连通。若 G 是线性的、幺幂群、环面或阿贝尔簇，则 $\widetilde{G}$ 和 N 也具有相同的性质。以下刻画由此观察得出。

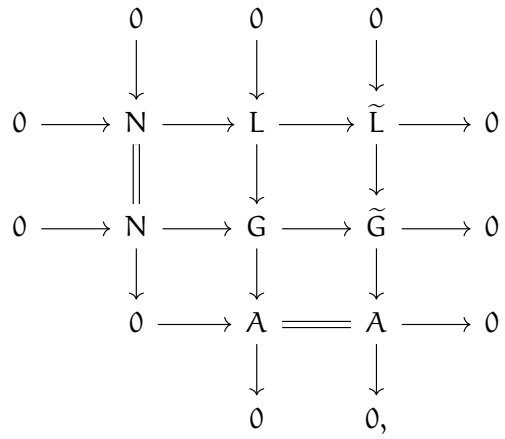
考虑一个环面 T，其特征群为 X。$T^\flat \simeq \Omega_T/X$的线性子空间具有 V/Y的形式，其中 Y是 X 的子群，而 V是由 Y在线性代数意义下生成的 Ω_T 的线性子空间。对于幺幂群 U，$U^\flat = U^*$的线性子空间对应于 U^*底层向量空间的线性代数意义下的线性子空间。

设 L 是一个线性交换连通代数群，并将其分解为环面 T 与幺幂群 U的乘积 $\widetilde{\ }$。若 $\rho\colon L \twoheadrightarrow L$ 是一个核连通的满态射，则 L 也是线性的，并分解为 $L \simeq T \times U$。此外，ρ 是满态射 $T \twoheadrightarrow \widetilde{T}$与 $U \twoheadrightarrow \widetilde{U}$的乘积。因此，$L^\flat$ 的一个线性子空间是 $T^\flat$ 与 $U^\flat$的线性子空间的乘积。

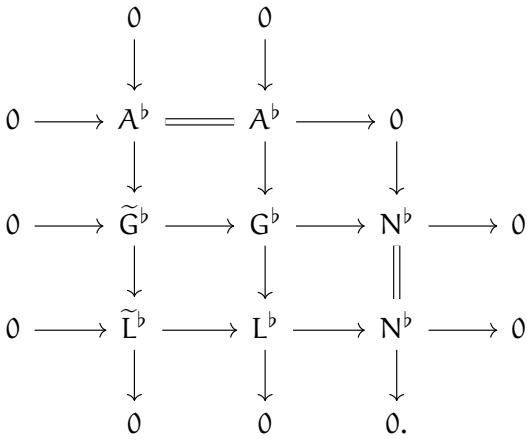
对于阿贝尔簇 A，$A^\flat \simeq A^\natural$ 的线性子空间最早由 Simpson 研究，他将其称为三重环面 [Sim93，第 365]页。Schnell 将 $A^\flat$ 的线性子空间的平移称为线性子簇 [Sch15，定义 2。3]。
∎

命题 3.24。设 G 是特征零域上的交换连通代数群，并将 G表示为阿贝尔簇 A 被线性群 L扩张。若 $V \subset L^\flat$ 是一个（平移后的）线性子空间，则它在 $G^\flat \to L^\flat$下的逆像也是线性子空间。

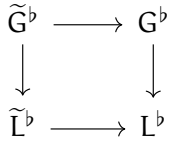
~证明。 设 $L \twoheadrightarrow L$ 是定义线性子空间 V的满态射，且 N 是其~核。记 G 为 G对 N的商；我们有一个交换图表



其行和列均为正合。应用函子 $(-)^\flat$，我们得到如下交换图



根据定理 3.16 和命题 3.19，其各列以及顶行和底行均为正合。因此，中间行也为正合。通过图追逐可知，方块



是笛卡儿的，至此证明完毕。 □

定义3.25（一般子空间）。设 G是特征零域上的交换连通代数群。 $G^\flat$ 的一般子空间是 $G^\flat$ 中有限个正余维线性子空间的平移之并的补集。

在代数几何中，如果某个性质在一个开稠密子集上成立，通常就称该性质泛成立。对于阿贝尔簇被幺幂群扩张的情形，这可以与我们上面的定义联系起来。

命题 3.26。 设 G是特征零域上的交换代数群，且它是阿贝尔簇被幺幂群扩张所得。若 V 是 $G^\flat$的一个一般子空间，则 V在 $G^\flat$中开且稠密。

证明。 由于有限个开稠密子集的交仍是开稠密的，只需证明正余维线性子空间的补集是开稠密的。设 $G \twoheadrightarrow G$ 是一个核连通的满态射，它定义了 $G^\flat$的线性子空间 $\widetilde{G}^\flat$ 。

首先，我们断言 G 也是阿贝尔簇被幺幂群扩张所得。记 U 为 G 的极大幺幂子群，记 A 为商 G/U。商的泛性质给出一个态射 $N/(U\cap N) \to A$，使得图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U\cap N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N/(U\cap N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & G \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

交换。一次简短的图追逐表明， $N/(U\cap N) \to A$ 是一个单态射。通常的同构定理进而推出，$(G/N)/(U/(U\cap N))$ 同构于 $(G/U)/(N/(U\cap N))$。用 B 表示这个共同的群，我们可以把上面的图表补全为

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U\cap N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N/(U\cap N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U/(U\cap N) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

这里每一列和每一行都是正合的。由于 B 是一个阿贝尔簇的商，它也是一个阿贝尔簇。类似地， $U/(U\cap N)$ 是一个幺幂群。

由推论 3.3 可知 G 以及 $G^\flat$ 是交换连通代数群。由于特征零下的代数群是光滑的， $G^\flat$ 是不可约的。根据[Mil17，定理 5。34], 映射 $\widetilde{G}^\flat \to G^\flat$ 是闭浸入，因此其补集是

开集。由于假设 $\widetilde{G}^\flat$ 具有正余维，其补集非空。$G^\flat$ 的不可约性进而意味着它是稠密的，从而完成证明。 □

前面的结果对一般的交换连通代数群并不成立。$\mathbb{G}_m^\flat \simeq \mathbb{A}^1/\mathbb{Z}$ 的扎里斯基拓扑过于粗糙。事实上，$\mathbb{G}_m^\flat$ 唯一的开稠密子集就是整个空间。这引出了以下定义。

定义 3.27（解析模空间）。设 G是 $\mathbb{C}$上的交换连通代数群。取定义模空间$G^\flat$的态射 $X \hookrightarrow K$ 的 $\mathbb{C}$-点，可得阿贝尔群单态射 $X \hookrightarrow K(\mathbb{C})$。赋予 X 离散拓扑，并赋予 $K(\mathbb{C})$解析拓扑。商 $K(\mathbb{C})/X$ 称为解析模空间，记作 $G_{an}^\flat$。

有趣的是，尽管 $G^\flat$ 通常不能由概形表示，$G_{an}^\flat$ 却是一个复流形。此外，对于阿贝尔簇 A，复流形 $A_{an}^\flat$ 是 Stein，尽管 $A^\flat$ 并非仿射。模空间 $A^\flat$ 甚至是反仿射的，这意味着每个代数簇之间的态射 $A^\flat \to \mathbb{A}^1$ 都是常值的 [Bri17a，命题 5.5。8]。

对于一般子空间 V（属于 $G^\flat$），我们用 V_{an} 表示集合 $V(\mathbb{C})$，并赋予其继承自 $G_{an}^\flat$ 的子空间拓扑。命题 3.26 的解析类似在完全一般的情形下成立。

命题 3.28. 设 G 是 $\mathbb{C}$ 上的交换连通代数群。若 V 是 $G^\flat$ 的一般子空间，则 V_{an} 是 $G_{an}^\flat$ 的开子集，其补集具有零测度。特别地，它是一个开稠密子集。

~证明. 设 $G \twoheadrightarrow G$ 是具有连通核 N 的满态射，它定义线性子空间 $\widetilde{G}^\flat$（属于 $G^\flat$，且具有正余维）。如同命题 3.26 的证明，只需证明 $\widetilde{G}_{an}^\flat$ 是 $G_{an}^\flat$ 的一个零测度闭子集。

根据 $(-)^\flat$ 的函子性（见注记 3.14），自然映射 $\widetilde{G}_{an}^\flat \hookrightarrow G_{an}^\flat$ 由概形态射 $\widetilde{K} \to K$ 诱导。因此，$\widetilde{G}_{an}^\flat$ 是 $G_{an}^\flat$ 的复李子群。由此可知，$\widetilde{G}_{an}^\flat \hookrightarrow G_{an}^\flat$ 是一个闭浸入 [Bou06，第 III 章，§1.3。5]。由于我们假设 $\dim \widetilde{G}^\flat < \dim G^\flat$，萨德定理蕴含 $\widetilde{G}_{an}^\flat$ 在 $G_{an}^\flat$ 中具有零测度。

□

定义 3.29（特征簇）。设 G 是 $\mathbb{C}$ 上的交换连通代数群。G 的特征簇记为 Char(G)，它是群代数 $\mathbb{C}[\pi_1(G_{an})]$ 的谱。

回想一下，群代数函子$\mathsf{Grp} \to \mathsf{Alg}(\mathbb{C})$ 是将 $\mathbb{C}$-代数 R 映射到其单位群 $R^\times$的函子的左伴随。因此，Char(G) 的 $\mathbb{C}$-点对应于基本群 $\pi_1(G_{an})$ 的特征 $\pi_1(G_{an}) \to \mathbb{C}^\times$。换言之，Char(G)

是 G_{an}上秩一局部系统的模空间。$\mathbb{C}[\pi_1(G_{an})]$ 中的 Hopf代数结构在 Char(G) 上诱导出代数群结构，编码了局部系统的张量积。

黎曼–希尔伯特等价表明， G_{an} 上的局部系统与 G上的正则联络相对应。由于幺幂群上的所有非平凡特征层都是不规则的，Char(G)一般而言无法参数化特征层。另一方面，半阿贝尔簇上的特征层是正则的，因此可以进行这样的比较。

命题 3.30。 设 G是定义在 $\mathbb{C}$上的半阿贝尔簇。那么，复李群 $G_{an}^{\flat}$ 与$\mathrm{Char}(G)_{an}$ 同构。

证明。 将 G 写成以阿贝尔簇 A 为商、环面 T为核的扩张。通过解析化，我们得到一个短正合列

$$0 \to T_{an} \to G_{an} \to A_{an} \to 0$$

复李群的短正合列。特别地， $G_{an} \to A_{an}$ 是一个纤维为 T_{an}的纤维化。考虑相关的同伦长正合列，我们有

$$0 = \pi_2(A_{an}) \to \pi_1(T_{an}) \to \pi_1(G_{an}) \to \pi_1(A_{an}) \to \pi_0(T_{an}) = 0.$$

这里， $\pi_0(T_{an})$为零，因为 T_{an} 是连通的； $\pi_2(A_{an})$为零，因为 A_{an} 是一个李群。这诱导出一个Hopf代数的短正合列

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}[\pi_1(T_{an})] \to \mathbb{C}[\pi_1(G_{an})] \to \mathbb{C}[\pi_1(A_{an})] \to \mathbb{C},$$

接下来是一个仿射代数群的短正合列

$$0 \to \mathrm{Char}(A) \to \mathrm{Char}(G) \to \mathrm{Char}(T) \to 0.$$

存在一个自然的全纯态射 $G_{an}^{\flat} \to \mathrm{Char}(G)_{an}$ ，它将特征层 $(\mathscr{L}, \nabla)$ 映射到局部系统 $\ker \nabla_{an}$。此态射与逆像和张量积相容，从而得到以下复李群的交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{an}^{\flat} & \longrightarrow & G_{an}^{\flat} & \longrightarrow & T_{an}^{\flat} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Char}(A)_{an} & \longrightarrow & \mathrm{Char}(G)_{an} & \longrightarrow & \mathrm{Char}(T)_{an} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于 A 和 T 上的特征层是正则的，Riemann–Hilbert对应表明，态射 $A_{an}^{\flat} \to \mathrm{Char}(A)_{an}$和 $T^{\flat}$一个 $\to \mathrm{Char}(T)_{an}$是单射。进一步，由于 A 上的带可积联络的线丛自动是特征层，因此 $A_{an}^{\flat} \to \mathrm{Char}(A)_{an}$ 是满射。

为了证明 $T^\flat$一个 $\to \mathsf{Char}(T)_{an}$是满射，我们可以假设 $T = \mathbb{G}_m$。$\mathbb{G}_m$ 上的带可积联络的线丛具有如下形式：$(\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d + f(x)\,dx/x)$，其中某个$f \in k[x, x^{-1}]$。当且仅当 f 为常数时，该联络是正则的。换言之，$\mathbb{G}_m$ 上的正则带可积联络的线丛与特征层相同。这就证明了 $(\mathbb{G}_m)^\flat_{an} \to \mathsf{Char}(\mathbb{G}_m)_{an}$ 是满射。

□

推论 3.31。设 G 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的半阿贝尔簇。那么 G 上的每个特征层都是正则的。

A. 联络与德拉姆空间

正如 Simpson 最先指出的 [Sim96], 给定一种上同调理论 H 和一个“空间” X，通常存在一个代数栈 X_H，其拟凝聚层范畴与作为H系数的范畴相同。此外，关联 $X \mapsto X_H$ 保留了给定上同调理论的函子性。

在本附录中，我们研究这个故事中德拉姆的一面。具体来说，给定一个簇 X，德拉姆空间 X_{dR} 具有一个奇妙的性质：其上的 $\mathbb{G}_m$-扭子与赋有平坦联络的 X 线丛相同。此外，也可以通过德拉姆空间来理解形式完备化。

作者声明，本附录中的所有结果均非原创：其中的结果要么已见于文献，要么属于众所周知的结果。（关于这一点，参见 [GR17]和 [Hen17] 。）不过，即使是已有公开证明的结果，通常也是在导出代数几何的背景下研究的，因此我们认为本附录或许能对一些读者有所帮助。

A.1. 德拉姆空间的基本性质

设 k 是一个域，并考虑仿射概形在 k 上构成的范畴 Aff/k 。为简化记号，我们通常将 Aff/k 中的对象 $\operatorname{Spec} R$ 记作 R。

定义 A.1（德拉姆空间）。给定 Aff/k 上的一个集合预层 X，其德拉姆空间X_{dR} 是由下式定义的预层

$$X_{dR}(R) := \operatorname*{colim}_{I \subset R} X(R/I),$$

其中，余极限遍历 R的幂零理想所构成的滤过偏序集。这个预层带有一个由平凡理想 $I = 0$诱导的态射 $X \to X_{dR}$。

此赋值具有函子性：给定预层的一个态射 $f\colon X \to Y$，便有一个

诱导映射 $f_{dR}\colon X_{dR} \to Y_{dR}$，使图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_{dR} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{dR}} \\ Y & \longrightarrow & Y_{dR} \end{array}$$

交换。如推论 A.7 中将形式化说明的那样，X_{dR} 至少对于光滑的 k-概形 X，其几何解释是：它是 X 对无穷小相近点取商。

我们以如下简单观察开始研究德拉姆空间，稍后将证明这一观察很有用。

命题 A.2。 函子 $(-)_{dR}\colon \mathsf{PSh}(\mathsf{Aff}/k) \to \mathsf{PSh}(\mathsf{Aff}/k)$ 保有限极限和任意余极限。

证明。 由于预层的极限和余极限是逐点计算的，这可由以下事实推出：集合范畴中的滤余极限与任意余极限及有限极限可交换。

□

对于有限型 k-代数 R（或更一般地，对于诺特 k-代数），幂零根 $\mathrm{Nil}(R)$ 是幂零的，因为它由有限多个幂零元素生成。因此，$X_{dR}(R) \simeq X(R/\mathrm{Nil}(R)) = X(R_{red})$。只要 X 是局部有限型 k-概形，这一性质对任意 k-代数都成立。

命题 A.3. 设 X 是一个在 k上的局部有限型概形。那么 $X_{dR}(R) \simeq X(R_{red})$ 对每个 k-代数 R都成立。

证明。 定义 $S := \mathrm{colim}_{I \subset R} R/I$，其中余极限取遍$R$的幂零理想。照例，将 S 的元素记作形如 $[I, x]$的等价类，其中I 是 R 中的一个幂零理想，且 x 是 R的一个元素。这里，$[I, x] = [I', x']$ 当且仅当存在一个包含 I 和 I' 的幂零理想 J，使得 $x \equiv x'$ 模 J。

对应于理想 $I = 0$的自然映射 $R \to S$将 R 中的每个幂零元映为零。换言之，它经由幂零根分解，得到一个映射 $R_{red} \to S$。我们断言此态射是单射。事实上，$[0, x] = 0$ 意味着存在一个包含 x的幂零理想 J。由此可知 x 是幂零的，因此在 R_{red}上为零。由于 $[I, x] \in S$是 $x \in R$的像，我们有 $R_{red} \to S$是一个同构。

由于 X 是局部有限型，[Stacks，标签01ZC] 给出 $X_{dR}(R) \simeq X(S) \simeq X(R_{red})$，从而完成证明。 □

鉴于前文对 X_{dR}的几何解释，概形的形式完备化可以用德拉姆空间来表示，这或许并不令人意外。

命题 A.4。 设 X 是一个 k-概形，且 Z 是 X的一个闭子概形。 X 沿 Z 的形式$\widehat{}$完备化 X_Z 与 $X \times_{X_{dR}} Z_{dR}$同构。

证明。 令 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ 为由 Z定义的理想层，并令 R 为一个 k-代数。我们的目标是得到一个函子同构

$$\operatorname*{colim}_{I \subset R} X(R) \times_{X(R/I)} Z(R/I) \simeq \operatorname*{colim}_{n \geqslant 0} \operatorname{Spec}_X(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1})(R),$$

其中，左侧的余极限遍历 R的幂零理想。对于一个理想 $I \subset R$，令 i_I 表示闭浸入 $\operatorname{Spec} R/I \to \operatorname{Spec} R$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname*{colim}_{I \subset R} X(R) \times_{X(R/I)} Z(R/I) &\simeq \operatorname*{colim}_{I \subset R} \{x \in X(R) \mid i_I^* x^* \mathcal{I} = 0\} \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{n \geqslant 0} \operatorname*{colim}_{I^{n+1}=0} \{x \in X(R) \mid i_I^* x^* \mathcal{I} = 0\} \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{n \geqslant 0} \{x \in X(R) \mid x^* \mathcal{I}^{n+1} = 0\} \simeq \widehat{X}_Z(R),
\end{aligned}$$

其中，最后一个同构来自相对谱的泛性质。 □

注意，即使 $Z \to X$ 不是闭浸入，表达式 $X \times_{X_{dR}} Z_{dR}$ 仍有意义。在这种情况下，它可用于定义形式完备化。此外，这一$\widehat{}$刻画清楚地表明，只要$Z \to X$是单态射，投影 $X_Z \to X$就是单态射。

$\widehat{}$推论A.5。若 Z 是一个 k-概形 X的闭子概形，则投影 $X_Z \to X$ 是预层的单态射。

证明。 根据 [Stacks，标签 01L7], 闭浸入 $i\colon Z \to X$ 是概形范畴中的单态射。现在，米田嵌入保持极限，而任何保持极限的函子都会保持单态射 [Stacks，标签 01L3]。换言之，i 是预层的单态射。由于德拉姆函子保持有限极限， $Z_{dR} \to X_{dR}$也如此。最后，纤维积保持单态射，证明至此完成。

□

对于 k-概形的态射 $p\colon X \to S$，纤维积的泛性质诱导出一个映射 $\iota_p\colon X \to X_{dR} \times_{S_{dR}} S$。如下命题所示，该映射忠实地编码了 p 中包含的微分信息。[11]

命题 A.6. 设 $p\colon X \to S$ 是 k-概形的态射。则 p 是形式光滑的（相应地，形式非分歧的），当且仅当 $\iota_p\colon X \to X_{dR} \times_{S_{dR}} S$ 是预层的满态射（相应地，单态射）。

[11]这一结果与如下格言颇为相似：“f 光滑（分别地，无分歧）当且仅当 df 是满射（分别地，单射）”。

证明。 回忆： p 是形式光滑的（相应地，形式非分歧的），如果对每个带有映射 $\operatorname{Spec} R \to S$ 的 k-代数R 以及对每个幂零理想 $I \subset R$，诱导映射

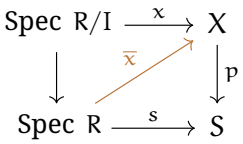
$$\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R, X) \to \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R/I, X)$$

是满射（分别地，单射）。我们将把这一条件转化为 $X(R) \to (X_{dR} \times_{S_{dR}} S)(R)$ 的满射性（分别地，单射性）。

假设 p 形式光滑，令 R 为任意一个 k-代数，并令 $[x, s]$ 为

$$(X_{dR} \times_{S_{dR}} S)(R) \simeq \operatorname{colim}_{I \subset R} X(R/I) \times_{S(R/I)} S(R).$$

也就是说，存在一个幂零理想 $I \subset R$，使得 $x \in X(R/I)$ 与 $s \in S(R)$ 在$S(R/I)$ 上一致。由形式光滑性可知，存在一个态射 $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} R \to X$，使图表



交换。（下方三角形交换，因为 x 是一个在 S 上的态射；上方三角形交换，因为 x 映射到 x。）这是 $X(R)$ 中的一个元素，它映射到 $(X_{dR} \times_{S_{dR}} S)(R)$。反过来，假设 R 是一个 k-代数，带有映射 $s\colon \operatorname{Spec} R \to S$，$I \subset R$ 是一个幂零理想，而 x 是 $\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R/I, X)$ 中的一个元素。这些数据定义了 $(X_{dR} \times_{S_{dR}} S)(R)$ 中的一个元素，因此存在一个 $x \in X(R)$ 映射到它。换言之，$\iota_p\colon X \to X_{dR} \times_{S_{dR}} S$ 是满态射，当且仅当 p 形式光滑。

现在，若 p 是形式非分歧的，考虑一个 k-代数 R，并设 x、$y \in X(R)$为两个元素，它们在$X_{dR} \times_{S_{dR}} S(R)$中的像重合。也就是说，存在一个幂零理想$I \subset R$，使得该图表

$$\operatorname{Spec} R/I \to \operatorname{Spec} R \rightrightarrows X \xrightarrow{p} S$$

交换。特别地，x 与 y 定义了$\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R, X)$中的元素，它们在$\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R/I, X)$上重合。由于 p 是形式非分歧的，我们有 $x = y$。

假设 $\iota_p\colon X \to X_{dR} \times_{S_{dR}} S$ 是一个单态射，并设 x、$y \in \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R, X)$为两个态射，它们在$\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} R/I, X)$上重合，其中对某个 k-代数 R，带有映射$\operatorname{Spec} R \to S$ 以及一个幂零理想 $I \subset R$。特别地，x 与 y 是 $X(R)$中的元素，它们在$(X_{dR} \times_{S_{dR}} S)(R)$上重合。由此可得 $x = y$，从而 p 是形式非分歧的。 □

设 $Y \to X$ 是 k-概形之间的浸入，并可分解为 $Y \to U \to X$，其中 $Y \to U$是理想为 $\mathcal{I}$ 的闭浸入，$U \to X$ 是开浸入。通常将 X 沿 Y 的形式完备化定义为 $\operatorname{Spec} U($ $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}^{n+1})$ 的余极限，其中 $n \geqslant 0$。前一个命题意味着 $U \simeq U_{dR} \times_{X_{dR}} X$，因此

$$U \times_{U_{dR}} Z_{dR} \simeq X \times_{X_{dR}} U_{dR} \times_{U_{dR}} Z_{dR} \simeq X \times_{X_{dR}} Z_{dR},$$

证明命题 A.4 也适用于局部闭浸入。

推论 A.7。 设 $X \to S$ 是 k-概形的形式光滑态射。那么， $X_{dR} \times_{S_{dR}} S$ 是以下对象的余等化子：

$$\widehat{(X \times_S X)}_\Delta \rightrightarrows X,$$

其中 $\widehat{\ }$ $(X \times_S X)_\Delta$ 是 $X \times_S X$ 沿对角的形式完备化。

证明。 为简化记号，令 $Y = X_{dR} \times_{S_{dR}} S$。由于拓扑斯中每个满态射都有效的，$X \to Y$ 是 $X \times_Y X \rightrightarrows X$ 的余等化子。现在，该结果由一般范畴论得出：.....的拉回

$$\begin{array}{ccc} & & X \times_S X \\ & & \downarrow \\ X_{dR} & \xrightarrow{\Delta_{dR}} & (X \times_S X)_{dR} \end{array}$$

是 $X \times_Y X$。 □

回顾一下，概形 X 的点函子是 étale 拓扑与 fppf 拓扑上的层。我们现在研究 X_{dR} 的下降性质，并从一条引理开始。

引理 A.8. 设 R 是一个 k-代数，且 $\{R \to R_i\}_{i\in I}$ 是一个 *étale* 覆盖。则约化 $\{R_{red} \to R_{i,red}\}_{i\in I}$ 也是一个 *étale* 覆盖。此外， R_{red} 的任何 *étale* 覆盖都以这种方式产生。

证明。 由于 $R \to R_i$ 是 étale 的，其基变换 $R_{red} \to R_{red} \otimes_R R_i$也是 étale 的。根据 [Stacks，标签 033B]，，我们有 $R_{red} \otimes_R R_i$ 是约化的，因此根据 [EGA I，推论 5.18]可得

$$R_{red} \otimes_R R_i = (R_{red} \otimes_R R_i)_{red} \simeq (R_{red} \otimes_{R_{red}} R_{i,red})_{red} \simeq R_{i,red}.$$

由此可知， $\{R_{red} \to R_{i,red}\}_{i\in I}$ 是 R_{red}的 étale 覆盖。

现在，考虑 R_{red}的一个 étale 覆盖 $\{R_{red} \to S_i\}_{i\in I}$。根据 étale 位点的拓扑不变性，存在一个覆盖$\{R \to R_i\}_{i\in I}$，以及对所有 $i \in I$ [Stacks，标签 04DZ]的同构 $R_{red} \otimes_R R_i \simeq S_i$。与上面相同的论证表明， S_i 是约化的，因此$S_i \simeq R_{i,\ red}$。

□

命题 A.9。 设 X 是 k上的局部有限型概形。德拉姆空间 X_{dR} 是Aff/k上的 *étale* 层。

证明。 设 R 是一个 k-代数，并设 $\{R \to R_i\}_{i\in I}$ 是 R 的一个 étale 覆盖。我们要证明该图表

$$X(R_{red}) \to \prod_i X(R_{i,red}) \rightrightarrows \prod_{i,j} X((R_i \otimes_R R_j)_{red})$$

是一个等化子。上面的引理表明，$\{R_{red} \to R_{i,red}\}_{i\in I}$ 也是一个 étale 覆盖；而 X 是一个 étale 层这一事实意味着该图表

$$X(R_{red}) \to \prod_i X(R_{i,red}) \rightrightarrows \prod_{i,j} X(R_{i,red} \otimes_{R_{red}} R_{j,red})$$

是一个等化子。与前一引理的证明中相同的论证表明$R_{i,\,red} \otimes_{R_{red}} R_{j,\,red}$ 是约化的。于是 [EGA I，推论 5.1.8] 给出同构$R_{i,\,red} \otimes_{R_{red}} R_{j,\,red} \simeq (R_i \otimes_R R_j)_{red}$，从而完成证明。□

特别地，前述命题蕴含：k 上交换代数群的德拉姆空间是 Aff/k 上的阿贝尔 étale 层。

命题 A.10。设 k 具有特征零。则函子 $(-)_{dR}$（从 k 上的交换代数群到 Aff/k 上的阿贝尔 *étale* 层）是正合的。

证明。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是在 k 上的交换代数群的正合列。特别地，它在阿贝尔预层（定义在 Aff/k 上）的范畴中是左正合的。由命题 A.2，所诱导的正合列 $0 \to A_{dR} \to B_{dR} \to C_{dR} \to 0$ 在阿贝尔预层中同样是左正合的。由于层化是正合的，该序列在阿贝尔 étale 层的范畴中是左正合的。

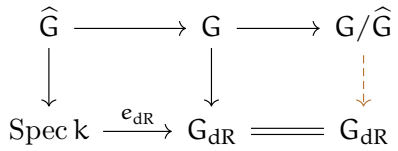
我们来验证 $B_{dR} \to C_{dR}$ 是阿贝尔层的满态射。给定一个 k-代数R 以及一个元素 $c \in C_{dR}(R) = C(R_{red})$，由 $B \to C$ 是 étale 层的满态射可知，存在一个覆盖 $\{R_{red} \to S_i\}_{i\in I}$，使得对于所有 $i \in I$ [Stacks，标签 00WN]，$c|_{S_i}$ 都属于 $B(S_i) \to C(S_i)$的像。于是，引理 A.8 给出一个覆盖$\{R \to R_i\}_{i\in I}$，其约化为 $\{R_{red} \to S_i\}_{i\in I}$。由此可知，对于所有 $i \in I$，$c|_{R_i} = c|_{S_i}$ 都属于 $B_{dR}(R_i) \to C_{dR}(R_i)$的像，证明完毕。□

我们在推论 A.7 中证明了 X_{dR} 是 X 的商，其中我们将无穷小相近的点视为相同。当 X 是一个交换代数群 G时，这样两个点之差必定属于单位元的某个无穷小邻域。这个直观想法导出了下面的结果。

命题 A.11. 设 G 是定义在 k 上的光滑交换代数群。那么 G_{dR} 与预层商 G/G 同构，其中 G 是沿单位元对 G 作的形式完备化。$\widehat{\ }$特别地，G_{dR} 也与层商 G/G 同构。

证明。在此证明中，我们将所有（余）极限都视为在 Aff/k 上的阿贝尔预层范畴中取得。由于恒等截面 $e\colon \operatorname{Spec} k \to G$ 的G余核就是其自身，阿贝尔预层版本的命题 A.2 表明 $e_{dR}\colon \operatorname{Spec} k \to G_{dR}$的余核为 G_{dR}。于是，利用余核的泛性质可诱导出下方的虚线

映射。



由于命题A.4，左侧的方块是笛卡儿的，且 $G \to G_{dR}$ 是满态射，因为 G 是光滑的。于是，[Stacks，标签 08N4] 蕴含左侧的方块也是$\widehat{\ }$余笛卡儿的，而 [Stacks，标签 08N3] 表明 $G/G \to G_{dR}$ 是同构。由于 $G_{dR}\widehat{\ }$已经是 étale 层，因此预层商与层商 G/G 相同。□

现在我们研究德拉姆空间关于更细的 fppf 拓扑的下降性质。我们指出，命题 A.10 以及下述命题及其推论，是本节中唯一需要基域 k 具有特征零的结果。

命题 A.12。 设 G是特征零域 k上的交换代数群。$\widehat{\ }$那么 G_{dR} 是一个与 G/G同构的 *fppf* 层，且函子 $(-)_{dR}$ 从 k上的交换代数群到阿贝尔 *fppf* 层是正合的。

$\widehat{\ }$证明。根据命题 2.11，形式完备化 G 是“ $\mathbb{G}_a$的若干拷贝的直和。然后，给定一个 k-代数 R， [Bha22，注记 2.2.18] 表明 $H^1_{fppf}(R, \text{“}\mathbb{G}_a) = 0$ 并且$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此 $(G/G)(R) \simeq G(R)/G(R) \simeq G_{dR}(R)$，其中左边的商是在 fppf$\widehat{\ }$ 拓扑上取的。换言之，G_{dR} 是一个与 G/G同构的平坦层。$(-)_{dR}$在此处的正合性是命题 A.10 的一个特例。□

推论 A.13. 设 X 是特征零域 k上的局部有限型概形。则X_{dR} 是一个平坦层。

证明。 设 R 是一个 k-代数，且 $\{R \to R_i\}_{i\in I}$ 是 R的平坦覆盖。由前一命题，该图表

$$R_{red} \to \prod_i R_{i,red} \rightrightarrows \prod_{i,j} (R_i \otimes_R R_j)_{red}$$

是 k-代数范畴中的一个等化子。点函子 $X(-)\colon$(仿射概形/k)$^{op} \to$ 集合将此图表映射为集合范畴中的一个等化子，从而完成证明。□

■ 注记 A.14 —— 正特征下的德拉姆空间。设 k 是特征为 $p > 0$ 的域。给定一个 k-代数 R，塔的余极限 R^{perf}

$$R \xrightarrow{x\mapsto x^p} R \xrightarrow{x\mapsto x^p} R \xrightarrow{x\mapsto x^p} \cdots$$

是 R 的所谓 余极限完美化。它总是一个完美的 k-代数，并且自然映射 $R \to R_{perf}$ 在从 R 到完美代数的态射中具有泛性质。我们定义一个

预层$\mathbb{G}_{a,\ \mathrm{perf}}$在$\mathsf{Aff}/k$上由$\mathbb{G}_{a,\ \mathrm{perf}}(R) := R_{\mathrm{perf}}$定义。正如 [Bha22，备注 2.2。18]所示，我们有一个阿贝尔 fppf 层的正合列

$$0 \to \widehat{\mathbb{G}}_a \to \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_{a,\mathrm{perf}} \to 0.$$

由此可知，阿贝尔 étale 层的自然映射$\mathbb{G}_{a,dR} \to \mathbb{G}_{a,\mathrm{perf}}$将$\mathbb{G}_{a,\mathrm{perf}}$与$\mathbb{G}_{a,dR}$的 fppf 层化等同起来。■

我们以将德拉姆空间的定义从Aff/k上的函子扩展到Sch/k上的函子来结束本节。

定义 A.15. 设 X 是一个 k上的概形，将其视为点函子 $(\mathsf{Sch}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$。我们通过取限制 $(\mathsf{Aff}/k)^{\mathrm{op}} \to (\mathsf{Sch}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 的德拉姆空间，再将其右 Kan 扩张到 $(\mathsf{Sch}/k)^{\mathrm{op}}$，来定义它的德拉姆空间 。

当 X 在 k上局部有限型时，这一定义实际上与朴素定义一致，不过这样更方便。事实上，给定一个 k-概形 S，命题A.3表明

$$X_{dR}(S) \simeq \lim_{\operatorname{Spec} R \to S} X(\operatorname{Spec} R_{\mathrm{red}}),$$

其中极限遍历所有带有到 S 的映射的仿射 k-概形。由于函子$X(-) = \mathrm{Mor}_k(-, X)$ 与极限可交换，因此这也等于

$$X\left(\operatorname*{colim}_{\operatorname{Spec} R \to S} \operatorname{Spec} R_{\mathrm{red}}\right) \simeq X(S_{\mathrm{red}}).$$

这个定义之所以有用，是因为我们有一个拓扑斯等价 $\mathsf{Sh}((\mathsf{Aff}/k)_{\text{ét}}) \simeq \mathsf{Sh}((\mathsf{Sch}/k)_{\text{ét}})$。这里，函子 $\mathsf{Sh}((\mathsf{Sch}/k)_{\text{ét}}) \to \mathsf{Sh}((\mathsf{Aff}/k)_{\text{ét}})$由限制给出，而函子 $\mathsf{Sh}((\mathsf{Aff}/k)_{\text{ét}}) \to \mathsf{Sh}((\mathsf{Sch}/k)_{\text{ét}})$是一个右 Kan 延拓 [Stacks，标签 021E]。

本节中所有对一般层成立的结果，都可以推广到这一情形。以^命题 A.11 为例：作为Sch/k上的预层， $G_{dR} \simeq G/G$不再成立；但 G_{dR} 同构于在$\mathsf{Ab}((\mathsf{Sch}/k)_{\text{ét}})$中取的商 G/G 。为完整起见，我们在下面给出精确陈述。

^命题 A.16. 设 Z 是一个 k-概形 X的闭子概形。那么， X 沿 Z 的形式完备化 $X_{Z}\hat{}$同构于 $X \times_{X_{dR}} Z_{dR}$ ，且投影 $X_{Z} \to X$ 是Sch/k上的 *étale* 层单态射。

命题 A.17。 设 $f\colon X \to S$ 是 k-概形之间的一个态射。当且仅当 f 是 Sch/k 上 *étale* 层的单态射时， f 形式非分歧。此外，若 f 形式光滑，则 $X \to X_{dR} \times_{S_{dR}} S$是 Sch/k 上 *étale* 层的满态射。

命题 A.18。 设 G是 k 上的交换代数群。那么 G_{dR} 同构于在 $\mathsf{Ab}((\mathsf{Sch}/k)_{\text{ét}})$ 中取的商 G/G 。此外，函子 $(-)_{dR}$ 从 k 上的交换代数群到 Sch/k 上的阿贝尔 *étale* 层是正合的。

由于 [Stacks，标签 021V], 只要 k 具有特征零，最后三个命题中的所有结果对 fppf 拓扑也成立。

A.2. 作为 de Rham 空间上挠子的联络

设 k 为一个特征零域， S 为一个 k概形， X 为一个光滑的 S概形。对于 X上的向量丛 V，回顾一下， V 相对于 S 的联络是一个 $\mathcal{O}_S$-线性映射$\nabla\colon V \to \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} V$，满足莱布尼茨法则

$$\nabla(fx) = df \otimes x + f\nabla(x),$$

对于 $\mathcal{O}_X$ 的局部截面 f 和 V的局部截面 x 。若联络 ∇ 满足 $\nabla_1 \circ \nabla = 0$，则称其为平坦的，其中 $\nabla_1\colon \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} V \to \Omega^2_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} V$定义为

$$\nabla_1(\omega \otimes x) = d\omega \otimes x - \omega \wedge \nabla(x).$$

以下结果使我们能够将这些对象作为德拉姆空间上的扭子来研究。

命题 A.19。 设 $p\colon X \to S$ 为概形的光滑态射，并设 $\iota_p\colon X \to X_{dR} \times_{S_{dR}} S$为命题 *A.6*中所述的诱导态射。对于整数 n，存在一个群胚等价（由下方虚线箭头表示），使得图表

$$\begin{array}{ccccc}
\left\{\begin{array}{c}\mathrm{GL}_n\text{-}torsors\\ over\ X_{dR}\times_{S_{dR}} S\end{array}\right\} & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & \left\{\begin{array}{c}Rank\ n\ vector\ bundles\ on\ X\\ with\ flat\ connection\ relative\ to\ S\end{array}\right\} & & (V,\nabla)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \iota_p^*} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow\\
\left\{\begin{array}{c}\mathrm{GL}_n\text{-}torsors\\ over\ X\end{array}\right\} & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \left\{\begin{array}{c}Rank\ n\ vector\\ bundles\ on\ X\end{array}\right\} & & V
\end{array}$$

在同构意义下可交换。此外，这一等价关于 p 具有函子性。对于 $n = 1$，该等价相对于扭子的收缩积和联络的张量积是对称幺半的。

证明。 赋予范畴 $\mathsf{Sh}((\mathsf{Sch}/S)_{\text{fppf}})$典范拓扑，其中覆盖由联合满态射族给出。根据命题 A.17，态射 ι_p 是满态射；又由于扭子在 $\mathsf{Sh}((\mathsf{Sch}/S)_{\text{fppf}})$上构成代数栈，$\mathrm{GL}_n$-扭子在 $X_{dR} \times_{S_{dR}} S$ 上的群胚等价于下降数据的群胚 $\mathrm{Desc}(\iota_p)$。

$\mathrm{Desc}(\iota_p)$ 的一个对象由一个 GL_n-挠子 V（位于 X 上）以及一个同构组成

$$\varepsilon\colon \mathrm{pr}_1^* V \to \mathrm{pr}_2^* V,$$

它满足余循环条件 $\mathrm{pr}_{12}^*(\varepsilon)\circ\mathrm{pr}_{23}^*(\varepsilon)=\mathrm{pr}_{13}^*(\varepsilon)$。这里我们令 $Y:=X_{\mathrm{dR}}\times_{S_{\mathrm{dR}}}S$，并用 pr_i（分别用 pr_{ij}）表示单纯形图表中到第 i 个因子的典范投影（分别到 (i,j) 因子的典范投影）

$$X\times_Y X\times_Y X \rightrightarrows X\times_Y X \rightrightarrows X.$$

与推论 A.7 的证明中一样，上文出现的投影映射可识别为典范投影

$$(\widehat{X\times_S X\times_S X})_\Delta \rightrightarrows (\widehat{X\times_S X})_\Delta \rightrightarrows X,$$

其中 $(\widehat{-})_\Delta$ 表示沿对角的形式完备化。

$\mathrm{Desc}(\mathfrak{p})$ 中的一个态射 $\varphi:(V,\varepsilon)\to(V',\varepsilon')$ 由一个 GL_n-扭子 $\varphi:V\to V'$ 的态射构成，使图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pr}_1^*V & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*(\varphi)} & \mathrm{pr}_1^*V' \\ \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon'} \\ \mathrm{pr}_2^*V & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2^*(\varphi)} & \mathrm{pr}_2^*V' \end{array}$$

交换。利用 GL_n-扭子与秩 n 向量丛之间的等价关系，我们得出 $\mathrm{Desc}(\mathfrak{p})$ 等价于 n 秩向量丛在 X 上相对于 S 具有层化的群胚，层化的意义见 [BO78，定义 2。10]。结论由 [BO78，定理 215] 得出。

□

在本文中，前述结果主要通过以下直接推论加以应用。为方便读者，我们指出 $X_{\mathrm{dR}}\times S\simeq(X\times S)_{\mathrm{dR}}\times_{S_{\mathrm{dR}}}S$。

推论 A.20。 设 X 是域 k 上的特征零光滑概形，且 S 是一个 k-概形。则 *fppf* 上同调群

$$\mathrm{H}^1(X_{\mathrm{dR}}\times S,\mathbb{G}_m)$$

刻画了 X 上赋予相对于 S 的可积联络的线丛的同构类。群律对应于联络的张量积。

参考文献

[BB09] Luca Barbieri-Viale 和 Alessandra Bertapelle。“Sharpde Rham realization”。载于：*Adv. Math.* 222.4 (2009)，第 1308–1338 页（引文见第 11、21页）。

[Bha22] Bhargav Bhatt. “棱柱 F-规范”。可在作者网站上查阅。2022（引于第18、32、52、53页）。

[BO78] Pierre Berthelot 和 Arthur Ogus。《晶体上同调笔记》。第 21 卷。数学札记。普林斯顿大学出版社和东京大学出版社，1978 年（引于第 55 页）。[Bou06] 尼古拉·布尔巴基。《李群与李代数》第 2、3 章。数学原理。Springer Berlin Heidelberg，2006 年（引于第 44 页）。[Bre69] Lawrence Breen。“阿贝尔层与艾伦伯格-麦克莱恩代数的扩张”。载于：《Invent. Math.》9（1969），第 15–44 页（引于第 13 页）。[Bri17a] Michel Brion。“代数群的一些结构定理”。载于：《代数群：结构与作用》。Mahir Bilen Can 编。第 94 卷。纯数学研讨会论文集。美国数学会，2017 年，第 53–126 页（引于第 25、44 页）。[Bri17b] Michel Brion。“同源意义下的交换代数群”。载于：《Doc. Math.》22（2017），第 679–725 页（引于第 38、39 页）。[Bro21] Sylvain Brochard。“交换群栈的对偶性”。载于：《Int. Math. Res. Not.》3（2021），第 2321–2388 页（引于第 9、28 页）。[Col08] Jean-Louis Colliot-Thélène。“连通线性群的拟分解”。载于：《J. Reine Angew. Math.》618（2008），第 77–133 页（引于第 17 页）。[ČS24] Kęstutis Česnavičius 和 Peter Scholze。“平坦上同调的纯度”。载于：《Ann. of Math.》199.1（2024），第 51–180 页（引于第 6 页）。[Del71] 皮埃尔·德利涅。“模形式与 ℓ-进表示”。载于：《Sém. Bourbaki》11（1971），第 139–172 页（引于第 2 页）。[Del74] 皮埃尔·德利涅。“霍奇理论：III”。载于：高等科学研究所数学出版物 44（1974），第 5–77 页（引于第 25、27 页）。[Del80] 皮埃尔·德利涅。“韦伊猜想：II”。载于：高等科学研究所数学出版物 52（1980），第 137–252 页（引于第 2 页）。[EGA I] Alexander Grothendieck 和让·迪厄多内。“代数几何原理：I. 概形语言”。载于：高等科学研究所数学出版物 4（1960），第 5–228 页（引于第 50、51 页）。[FFK25] Arthur Forey、Javier Fresán 和 Emmanuel Kowalski。“有限域上的算术傅里叶变换：一般消失、卷积与等分布”。2025 年。arXiv：2109.11961 [math.NT]（引于第 2 页）。[Gon17] Cristian González-Avilés。“乘积的单位群与皮卡群”。载于：《Eur. J. Math.》3.3（2017），第 471–506 页（引于第 18 页）。[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究：第二卷。形变、李理论与形式几何》。载于：《数学调查与专著》221（2017）（引于第 46 页）。

[Hen17] Benjamin Hennion. “高维形式环空间”。载于：高等师范学院科学年刊 50.3（2017），第 609–663 页（见第 46 页）。[HM24] Claudius Heyer 和 Lucas Mann。“六函子形式体系与光滑表示”。2024。arXiv：2410.13038 [math.CT]（见第 7 页）。[HTT] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》。第 170 卷。数学研究年刊。普林斯顿大学出版社，2009（见第 8 页）。[Jos09] Peter Jossen。“1-动机的算术”。博士论文。雷尼数学研究所，2009。[KL85] Nicholas Katz 和 Gérard Laumon。“傅里叶变换与指数和的估计”。载于：高等科学研究所数学出版物 62（1985），第 145–202 页（见第 2 页）。[KMS17] Emmanuel Kowalski、Philippe Michel 和 Will Sawin。“含克洛斯特曼和的双线性形式及其应用”。载于：数学年刊 186.2（2017），第 413–500 页（见第 2 页）。[Kuw21] Tatsuki Kuwagaki。“不规则反常层”。载于：组合数学 153.3（2021），第 573–624 页（见第 6 页）。[Lau85] Gérard Laumon。“几何傅里叶变换”。IHES/85/M/52 预印本。1985。[Lau87] Gérard Laumon。“傅里叶变换、函数方程常数与韦伊猜想”。载于：高等科学研究所数学出版物 65（1987），第 131–210 页（见第 2 页）。[Lau96] Gérard Laumon。“广义傅里叶变换”。1996。arXiv：alg-geom/9603004 [alg-geom]（见第 3、6、25、27 页）。[LM00] Gérard Laumon 和 Laurent Moret-Bailly。《代数叠》。第 39 卷。数学及其交叉领域成果。Springer Berlin Heidelberg，2000（见第 33 页）。[Lur17] Jacob Lurie。“椭圆上同调 I：谱阿贝尔簇”。作者个人网站可查。2017（见第 6 页）。[Mil17] James S. Milne。《代数群：域上有限型群概形理论》。第 170 卷。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，2017（见第 10、11、20、21、25、29、33、43 页）。[MM74] Barry Mazur 和 William Messing。《泛扩张与一维晶体上同调》。第 370 卷。数学讲义。Springer Berlin Heidelberg，1974（见第 3、24 页）。[Mor85] Laurent Moret-Bailly。“阿贝尔簇铅笔”。载于：Astérisque 129（1985），第 266 页（见第 9 页）。

[Rib24] Gabriel Ribeiro。“全纯 $\mathcal{D}$-模的一般消失：通过 Cartier 对偶进行研究”。博士论文。巴黎综合理工学院，2024（见第 13 页）。[Ros23] Zev Rosengarten。“函数域上正维情形的 Tate 对偶”。载于：美国数学会回忆录 290.1444（2023），第 v 页（见第 29 页）。[Ros25] Zev Rosengarten。“受限 Picard 函子”。2025。arXiv：2404.07040[math.AG]（见第 4 页）。[RR25] Gabriel Ribeiro 和 Zev Rosengarten。“阿贝尔概形与加法群的扩张”。2025。arXiv：2506.17393 [math.AG]（见第 3、12、13、18、19、23、29 页）。[Rus13] Henrik Russell。“完美域上的带模数 Albanese 簇”。载于：代数与数论 7.4（2013），第 853–892 页（见第 21、25、27 页）。[Sab92] Claude Sabbah。“有限差分方程全纯系统的极点位置”。载于：法国数学会通报 120.3（1992），第 371–396 页（见第 4、41 页）。[Sad21] Vivek Sadhu。“等变 Picard 群与 Laurent 多项式”。载于：太平洋数学杂志 312.1（2021），第 219–232 页（见第 19 页）。[SAG] Jacob Lurie。“谱代数几何”。作者个人网站可查。2018（见第 7 页）。[SC19] Peter Scholze 和 Dustin Clausen。“凝聚数学讲义”。作者个人网站可查。2019（见第 13 页）。[Sch15] Christian Schnell。“阿贝尔簇上的全纯 $\mathcal{D}$-模”。载于：高等科学研究所数学出版物 121（2015），第 1–55 页（见第 4、5、41 页）。[Sch25] Peter Scholze。“野 Betti 层”。2025。arXiv：2505.24599 [math.AG]（见第 6 页）。[SGA 3_{I}] Michel Demazure、Alexander Grothendieck 等。《群概形：布瓦-马里代数几何研讨班 1962–1964》。第一卷：群概形的一般性质。第 7 卷。数学文献。法国数学会，2011（见第 10、11 页）。[SGA 3_{II}] Michel Demazure、Alexander Grothendieck 等。《群概形：布瓦-马里代数几何研讨班 1962–1964》。第二卷：乘法型群与一般群概形的结构。第 152 卷。数学讲义。Springer Berlin Heidelberg，1970（见第 10 页）。

[SGA 4_{I}] Michael Artin、Alexander Grothendieck 和 Jean-Louis Verdier。《拓扑斯与概形的 étale 上同调：布瓦-马里代数几何研讨班 1963–1964》。第 1 卷。第 269 卷。数学讲义。Springer Berlin Heidelberg，1972（引文见第 13 页）。[SGA 4_{III}] Michael Artin、Alexander Grothendieck 和 Jean-Louis Verdier。《拓扑斯与概形的 étale 上同调：布瓦-马里代数几何研讨班 1963–1964》。第 305 卷。数学讲义。Springer Berlin Heidelberg，1973（引文见第 7 页）。[SGA 7_{I}] Alexander Grothendieck 等。《代数几何中的单值群：布瓦-马里代数几何研讨班 1967–1969》。第 288 卷。数学讲义。Springer Berlin Heidelberg，1972（引文见第 9、13、15、18、21、22、32 页）。[Sim93] Carlos Simpson。“秩一局部系统模空间的子空间”。载于：《高等师范学校科学年报》26.3（1993），第 361–401 页（引文见第 4、5、41 页）。[Sim94] Carlos Simpson。“光滑射影簇基本群的表示模空间 I”。载于：《高等科学研究所数学出版物》79（1994），第 47–129 页（引文见第 3 页）。[Sim96] Carlos Simpson。“复数上的同伦与广义德拉姆上同调”。载于：《向量丛模空间》。Masaki Maruyama 编。第 179 卷。纯粹与应用数学讲义。CRC出版社，1996，第 229–263 页（引文见第 46 页）。[ST21] Will Sawin 和 Nicolas Templier。“函数域上的自守形式的拉马努金猜想 I：几何”。载于：《美国数学会杂志》34.3（2021），第 653–746 页（引文见第 1 页）。[Stacks] Stacks Project 作者。Stacks Project。网址：https://stacks.math.columbia.edu。2018（引文见第 10、19、21、22、26–28、32、33、47、48、50–54 页）。[Wei91] Charles Weibel。“Pic 是一个收缩函子”。载于：《数学发明》103（1991），第 351–377 页（引文见第 20 页）。

Gabriel Ribeiro，苏黎世联邦理工学院数学系，8092苏黎世，瑞士电子邮箱：
gabriel.ribeiro@math.ethz.ch