arXiv:2602.02673v1 [quant-ph] 2 Feb 2026

PXP模型中的弗洛凯工程化保真度复苏

F. Perciavalle,[1,2] F. Plastina,[1,2] 和 N. Lo Gullo[1,2]
[1] *Dipartimento di Fisica, Università della Calabria, 87036 Arcavacata di Rende (CS), Italy*
[2] *INFN–Gruppo collegato di Cosenza*
(日期：2026年2月4日)

我们探究周期驱动下PXP模型的动力学，并揭示谱性质与初始态之间的相互作用如何决定动力学复苏的出现，以及其随驱动参数变化的演化。对于N´éel有序初始态，复苏在驱动参数空间中遵循明确的轨迹，其主要由Floquet谱中的一个主导准能量间距决定。介于N´éel态与完全极化构型之间的初始态则呈现混合动力学；通过调节驱动参数改变它们与Floquet本征态的重叠，可以对这种动力学加以控制。这种控制还可引导系统以不同路径避免Floquet热化，表明初始态的选择和驱动协议都会塑造受驱多体量子系统中的长寿命动力学。

I. 引言

近年来，随着功能多样且可编程的量子平台问世，控制量子物质的动力学已成为一个十分活跃的研究领域 [1–9]。在这一广阔领域中，孤立量子系统的热化研究从理论和实验角度都备受关注 [10–18]。理解热化的一个关键概念是本征态热化假说（ETH） [10–12], 该假说认为，典型相互作用量子系统的单个能量本征态包含热行为的信息，因此在长时间极限下，局域可观测量的期望值会趋近于其热平均值。尽管ETH为典型系统提供了稳健的理论框架，但某些非遍历现象却无法用其描述。特别是，PXP模型等量子系统 [14, 19–22]含有量子多体疤痕（QMBS） [21, 23–32],这些非典型本征态具有异常低的纠缠，使系统能够持续表现出相干动力学，并从特定初始态出发产生周期复苏，尽管周围的能谱整体上呈现热行为。

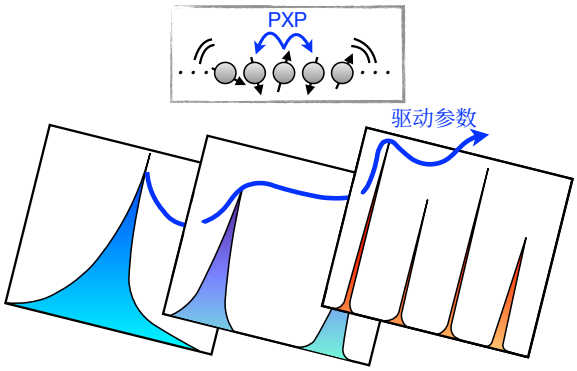

图1. 我们研究周期驱动的量子PXP模型，其示意图见图上方方框。当系统初始化为N´eel态时，驱动参数控制复苏动力学，使其沿着一条定义明确的路径演化。对于其他初始态，调节相同的驱动参数则可能产生不同的路径，在性质迥异的动力学区域之间进行插值。因此，系统能够进入不同的动力学区域，如蓝色箭头穿过图中不同区域所示。

此外，周期驱动为进一步控制和调控量子多体系统的动力学提供了强大的工具。这类系统的哈密顿量随时间周期性变化，因此能够呈现与静态系统显著不同的长时间有效行为。弗洛凯理论通过将系统的演化描述为驱动周期整数倍时刻的频闪步进，为理解这些动力学提供了一个框架，并由此定义出一个在离散时刻支配系统演化的弗洛凯哈密顿量 [33–39]。这种方法使我们能够探究新的动力学区域，包括经调控实现的非遍历行为、次谐波响应和时间晶体，以及可控复苏；这些现象可通过改变振幅和频率等驱动参数进行调节 [22, 40–47]。

本文研究受驱动PXP模型中复苏出现背后的机制，并它们与Floquet谱的联系。我们分析从不同初始态出发的动力学，并追踪驱动参数空间中复苏的演化，如图1所示，展示了复苏的发生如何取决于某些驱动参数，例如振幅和频率。对于N´eel态，我们确定了一种定义明确的复现机制；而对于在Neel态和完全极化态之间连续插值的初始态，复苏行为则可以通过驱动参数连续调节。更有趣的是，我们表明，在保持初始态不变的情况下，也可以利用驱动参数在不同的动力学区域之间进行调节，即不规则区域和N´eel型区域。不同的动力学行为源于初始态在Floquet态上的投影差异，而这种差异可以通过驱动协议加以控制。此外，我们还研究了

系统在周期性驱动下发生热化的倾向，这一研究置于Floquet热化框架 [48–52]，该框架预言，一般的受驱动系统会吸收能量，并最终趋近于有效的无限温态。这一状态可能在平均意义下达到（弱热化），也可能在特定时刻达到（强热化）。我们发现，极化态的动力学至少与弱热化相一致，而N´eel态则不表现出热化行为。对于在这两个极限之间插值的初始态，可调的重叠结构产生了不同的避免热化机制，而这些机制可以通过驱动参数加以控制。

本文其余部分安排如下。在第II节，我们介绍受驱动PXP模型，并概述弗洛凯理论。在第III节，我们分析系统以 N´eel 态为初始态时，驱动参数空间中的复现机制；在第IV节，我们探究其谱起源。在第5节，我们分析初始态在 N´eel 态与完全极化态之间连续变化时的复现机制；在第VI节，我们讨论它们的热化性质。最后，在第VII节，我们给出结论，并展望本研究带来的启示。

II. 受驱动PXP模型与弗洛凯理论

我们考虑一条由 L个量子比特构成的量子自旋链，其由具有开放边界条件（OBC）的周期驱动PXP模型描述，其哈密顿量为

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_{\mathrm{PXP}} - V(t)\hat{N}, \tag{1}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{PXP}} = \frac{\Omega}{2}(\hat{X}_1\hat{P}_2 + \sum_{j=2}^{L-1}\hat{P}_{j-1}\hat{X}_j\hat{P}_{j+1} + \hat{P}_{L-1}\hat{X}_L),$$

$$V(t)\hat{N} = h\sin(\omega_d t)\sum_{j=1}^{L}\hat{N}_j = h\sin(\omega_d t)\sum_{j=1}^{L}\frac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}}_j + \hat{Z}_j),$$

其中，$\hat{} Z_j = |1\rangle_j\langle 1| - |0\rangle_j\langle 0|$ 是 z-泡利矩阵，$\hat{} X_j = |1\rangle_j\langle 0| + |0\rangle_j\langle 1|$ 是 x-泡利矩阵，$\hat{P}_j = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}}_j - \hat{Z}_j)$是投影到态 $|0\rangle_j$上的投影算符，而 $N_j = |1\rangle_j\langle 1|$。下文中，我们将剩余的泡利矩阵记为$\hat{Y}_j$。参数 h 和 ω_d 分别为驱动振幅和频率，而 L 表示系统尺寸。在全文中，我们取 $\hbar = 1$，并以Ω（和Ω^{-1}）为单位测量能量（和时间）。

PXP模型自然存在于处于阻塞机制下运行的相互作用里德堡原子系统中 [13,14, 19–21, 32, 53]。周期驱动项可以通过时变失谐在实验中实现 [22, 40–43]。在没有驱动时，PXP模型展现出丰富的动力学现象，其特征是对初始态选择的敏感依赖。若系统以完全极化态作为初始态 $|\mathbf{0}\rangle = |0000\ldots\rangle$，系统会迅速探索可用的希尔伯特空间，并表现出符合本征态热化假说（ETH）的遍历行为 [14]。相比之下，以 N`eel 态 $|\mathbb{Z}_2\rangle = |1010\ldots\rangle$ 作为初始态会导致本征态热化假说显著失效，并产生长寿命的量子复现 [14]。这些复现源于 N`eel 态与一组非典型多体本征态（称为 QMBS）之间的重叠；这些态在原本呈热谱的系统中具有异常低的纠缠，并产生相干振荡动力学。近来研究还表明，除极化态和 N`eel 构型外，PXP模型中还存在其他类别的非遍历初态。这些态被定义为局部记忆态，因为它们在很长时间内都保留了对初始局部结构的大量记忆 [30], ，进一步凸显了该模型所支持的动力学行为的多样性。

该模型的动力学被限制在一个子空间内，其中不允许两个相邻的激发同时存在，这一条件称为里德伯阻塞。事实上，哈密顿量与算符$\mathcal{P} = \prod_j(1 - \hat{} N_j\,\hat{} N_{j+1})$ [54]，对易；该算符在阻塞子空间内的态上作用为恒等算符，并将子空间外的态湮灭。因此，该子空间中的任意初始态都会始终在其中演化。对于这类态，有效希尔伯特空间的维数从 2^L 降至大小为 F_{L+2}的斐波那契数列规模子空间，其中 F_n 是 n阶斐波那契数 [13, 14]。式（1）中的驱动也与 $\mathcal{P}$对易，因此在驱动模型中，阻塞约束仍然成立。

一般而言，引入周期驱动会进一步丰富PXP模型的动力学图景，在特定参数区间产生次谐波响应和增强的保真度复现等现象 [22,40–43, 55]。一般而言，满足 $H(t) = H(t+T)$的哈密顿量的周期驱动量子系统$T = 2\pi/\omega_d$，可以在弗洛凯理论框架下进行分析 [33, 34, 39, 56]。时间演化算符$\hat{} \mathcal{U}(t,0) = \mathcal{T}\exp\left(-i\int_0^t dt'\,\hat{} H(t')\right)$，可表示为单周期演化算符的重复作用：$\hat{} \mathcal{U}(t+nT,0) = \hat{} \mathcal{U}(t,0)\left[\hat{} \mathcal{U}(T,0)\right]^n$。在频闪时刻 $t = nT$，动力学完全由Floquet算符 $\mathcal{U}(T,0)$控制。在频闪时刻，任意时间演化态可写为

$$|\psi(nT)\rangle = \sum_m c_m e^{-i\epsilon_m^F nT}|\epsilon_m^F\rangle, \quad c_m = \langle\psi(0)|\epsilon_m^F\rangle, \tag{2}$$

其中，$|\epsilon_m^F\rangle$ 表示单周期演化算符的Floquet本征态，$\lambda_m^F = e^{-i\epsilon_m^F T}$ 为相应的本征值。量 ϵ_m^F 称为准能量，其定义模 $\omega_d = 2\pi/T$，因为 $\exp\left[-i(\epsilon_m^F + \omega_d)T\right] = \exp\left(-i\epsilon_m^F T\right)$。因此，准能量被限制在弗洛凯布里渊区（FBZ）内，即$\epsilon_m^F \in (-\omega_d/2, \omega_d/2]$。因此，Floquet谱的结构在决定系统的长时间动力学方面起着核心作用，并自然地引出了以下定义：

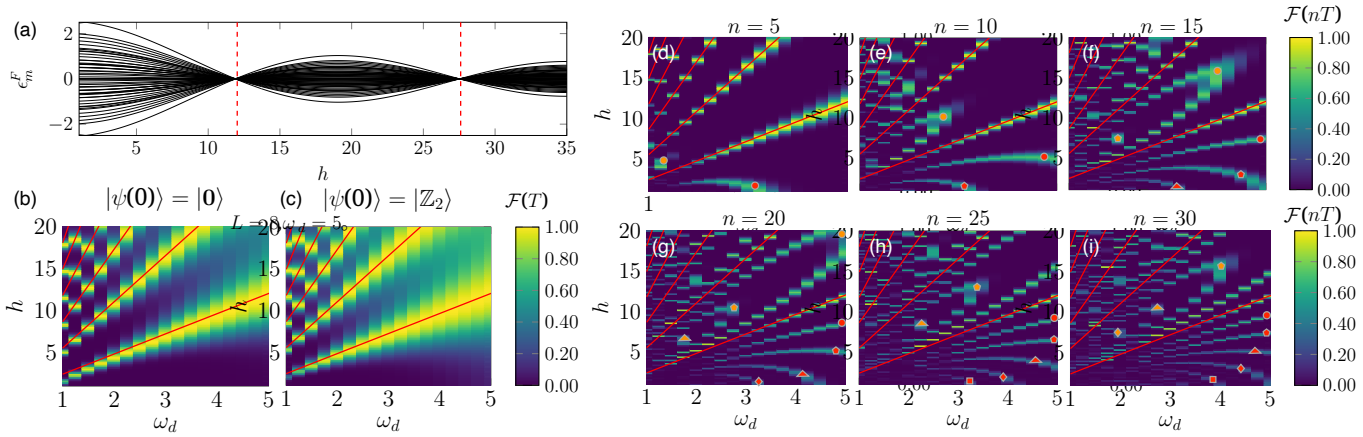

图 2。面板 (a)：在固定 $\omega_d = 5$ 和 $L = 8$ 时，Floquet谱随驱动振幅 h 的变化。竖直红色虚线表示 $J_0(h/\omega_d)$ 贝塞尔函数的前两个零点： $h/\omega_d \approx 2.4048$，5。5201。面板 (b)：偏振 $|0\rangle$ （面板 (b)）和 N`eel $|\mathbb{Z}_2\rangle$ （面板 (c)）初始态的单周期保真度 $\mathcal{F}(T)$ 随 $h$ 和 $\omega_d$ 的变化，其中 $L = 12$。红线对应于 $J_0(h/\omega_d)$ 的零点。面板 (d)、(e)、(f)、(g)、(h)、(i) 展示了初始态（系统初始化于 N`eel 态）与不同频闪时刻的时间演化态之间的保真度；这些时刻标注在每个面板顶部的 n 处，其中 $L = 12$。演化机制具有一种波在特定空间区域中传播的结构，这些区域由贝塞尔函数的零点确定。空间平面是虚构的，由驱动参数 h 和 ω_d 给出。我们通过不同的红色和橙色符号追踪演化波的波峰。红色符号追踪 $h/\omega_d < 2.4048$ 区域中的波峰，橙色符号追踪 $2.4048 < h/\omega_d < 5.5201$ 中的波峰。

弗洛凯哈密顿量 $\hat{H}^F$，其通过下式隐式定义：$\hat{\mathcal{U}}(T,0) = \exp\left(-i\hat{H}^F T\right)$。

因此，周期驱动可被视为一种有效工具，用于构造重整化哈密顿量，并进入静态条件下难以实现的动力学区域。特别是，对于受驱动PXP模型，已有研究表明，在适当的微扰区域内，有效弗洛凯哈密顿量可表示为 PXP 项与 PYP 项的组合 [41]。这些贡献的相对重要性由比值 h/ω_d控制，该比值决定了弗洛凯准能量的特征能量尺度。在高频展开的首阶近似下，有效哈密顿量按 $J_0(h/\omega_d)$ [41], 缩放，其中J_0 表示零阶第一类贝塞尔函数。

下文中，我们将追踪驱动参数空间中复苏轨迹的变化（如图1所示），以阐明受驱动PXP模型中量子复现出现的机制。具体而言，我们旨在理解决定其出现的因素和条件。

III. 受驱动PXP模型中的复现机制

在本节中，我们对系统在频闪时刻的动力学进行一般性分析，此时系统的演化完全由其 Floquet 谱决定。这种方法使我们能够辨明驱动的影响，并确定导致复现行为的谱特征。因此，第一步是仔细分析不同驱动参数下的 Floquet 谱。根据文献 [41], , 在高振幅高频区域，弗洛凯哈密顿量可以有效地描述为 PXP 和 PYP 模型的组合，并由因子 $J_0(h/\omega_d)$调制，但该函数的零点除外，这些零点为 $h/\omega_d \approx 2.4048$， 5。5201，.....。

在图2(a)中，我们展示了弗洛凯准能量随驱动振幅 h 的变化，其中 $\omega_d = 5$和 $L = 8$固定。谱呈现出独特的糖果状结构，其弗洛凯带宽定义为最高与最低准能量之差，并近似遵循 $|J_0(h/\omega_d)|$，这与微扰理论的预测一致。当驱动振幅小于驱动频率时，准能量分布于整个弗洛凯布里渊区，其边界由 $-\omega_d/2$ 和 $\omega_d/2$确定。在 $J_0(h/\omega_d)$ 的零点附近，弗洛凯谱显著变窄，但仍保有有限的带宽。我们将这一区域称为弗洛凯谱变窄（FSN）。正如我们将要讨论的，FSN区域对于调控复现机制以及理解受驱动系统中相干动力学的出现起着核心作用。

为探究这一机制，我们考察频闪保真度

$$\mathcal{F}(nT) = |\langle\psi(nT)|\psi(0)\rangle|^2, \tag{3}$$

它量化了初始态与频闪时刻的时间演化态之间的相似度，是探究系统周期性动力学的有力工具。通过分析频闪时刻的时间演化，我们可以捕捉导致复苏出现的关键特征，并深入了解

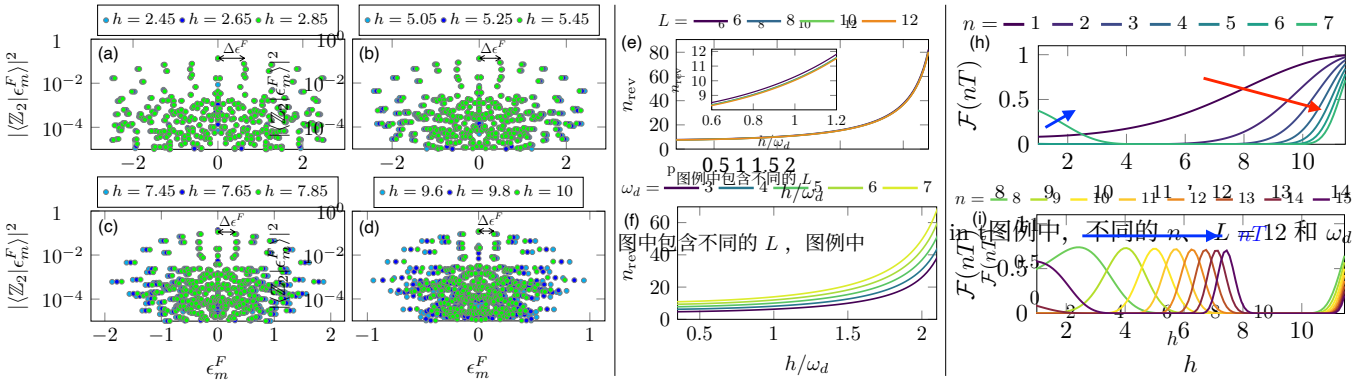

图 3. $|\mathbb{Z}_2\rangle$ 态在 $h/\omega_d < 2.4048$区域（即 $J_0(h/\omega_d)$的第一个零点处）的谱性质与动力学。面板 (a)–(d)：不同驱动振幅 h下，N`eel 态与 Floquet态之间重叠的变化，其中 $\omega_d = 5$ 和 $L = 12$。这四个面板对应驱动振幅 $h$的三个特定区域。面板 (e) 和 (f)：根据 Floquet谱估算的复现时间 $n_{\rm rev}$，即$n_{\rm rev} = {}_{T_{\rm rev}T}$，其中 $T_{\rm rev} = 2\pi/\Delta\epsilon^F$； $\Delta\epsilon^F$由 N`eel 态与 Floquet态之间的重叠提取，并绘制为驱动振幅 h的函数，且以驱动频率 ω_d归一化。面板 (e) 展示了系统尺寸 L取不同值时的结果，其中 $\omega_d = 5$。插图展示了相同的量，但放大了 h的一个特定区域。面板 (f) 展示了相同的量，但 ω_d取不同值且 $L = 10$ 固定。面板 (h)、(i) 展示了系统以 N`eel 态初始化时的 n周期保真度 $\mathcal{F}(nT)$随 h的变化：面板 (h) 展示早期时间 $n \leq 7$，面板 (i) 展示较晚时间 $n \in [8, 15]$。红色和蓝色箭头分别引导视线，展示复苏在衰减阶段和复苏阶段的时间演化。我们取 $L = 12$ 和 $\omega_d = 5$。

决定复苏出现条件的因素。注意到 $\hat{\mathcal{U}}(nT,\ 0) = \left[\hat{\mathcal{U}}(T,\ 0)\right]^n$，频闪保真度满足 $|\langle\psi((n+k)T)|\psi(kT)\rangle|^2 = |\langle\psi(nT)|\psi(0)\rangle|^2 = \mathcal{F}(nT)$。因此，频闪保真度通常用于衡量以 nT 为间隔的时间区间内记忆的退化情况，反映系统在各个频闪周期中保留其初始构型的程度。

图2(b)、(c) 显示了 $\mathcal{F}(T$，该量度了一个周期内的记忆损失，涵盖极化态 $|\mathbf{0}\rangle$和 N`eel $|\mathbb{Z}_2\rangle$ 初始态，系统尺寸固定为$L = 12$。 $\mathcal{F}(T)$ 在 FSN 区域附近尤其大，这是因为 Floquet 带宽缩小，相应地，动力学的频闪时间尺度延长。远离该区域时，可通过改变驱动参数和初始态选择来调节一个周期内的记忆损失。例如，对于 $h/\omega_d < 2.4048$， $\mathcal{F}(T)$ 对两种初始态都接近于零，表明记忆几乎完全丧失。相比之下，在较高的驱动振幅和频率下， $\mathcal{F}(T)$ 显著增大，其中 N`eel 态在一个周期内表现出更好的记忆保持。总之，这一结果主要源自图2(a)，为实现一个周期内所需的记忆行为提供了明确指引：在 FSN 区域内强烈保持记忆，对于 $h/\omega_d < 2.4048$，记忆保持可忽略；而在高驱动振幅和频率下，记忆得到部分保持，尤其是 N´eel 态。

现在我们聚焦于复现机制：当系统初始化为 N`eel 态时，该机制由 n 周期保真度 $\mathcal{F}(nT)$ 量化。这个量不仅衡量初始态在频闪时刻的复现情况，还能反映时间间隔为 nT的区间内的记忆退化，因为它量化了 $|\psi(0)\rangle$ 与 $|\psi(nT)\rangle$之间的相似性，以及 $|\psi(nT)\rangle$ 与 $|\psi(2nT)\rangle$之间的相似性，等等。图 2(d)-(i) 展示了在选定的频闪时刻 $\mathcal{F}(nT)$ 的演化。从这些图中，我们发现了一种支配系统中复苏出现的机制。首先可以看到，在红线标示的 FSN 区域，Floquet 带宽受到强烈压缩，因此动力学显著减慢。远离 FSN 区域时，复苏最初出现在较小的驱动振幅h 处，随后随着时间推移逐步穿过参数空间。这种传播在定性上类似于一列波在由 (h, ω_d) 定义的虚构空间中行进，而 FSN 区域则有效地充当了波在短时间尺度内无法穿越的势垒。在足够长的时间后，FSN 区域引起的减速效应会被克服，系统即使在这些参数范围内也会呈现非平庸动力学。

在图中，我们关注区域 $h/\omega_d < 2.4048$和 $2.4048 < h/\omega_d < 5.5201$。为了突出复苏的传播，我们用橙色和红色符号标出波峰，以追踪其随时间以及跨越这一虚构参数空间的演化。这种表示清楚地展示了复苏如何在参数空间的一个区域（ h较小）中出现，随后向外扩展，从而直观且定量地揭示了受驱动的 PXP 系统中频闪记忆和复苏行为背后的动力学。这种高度可控的机制令人着迷，因为它可以通过调节参数，按需确定复苏发生的具体时刻。这种行为可以通过调节驱动参数所引起的 Floquet 谱变形来理解，尤其是通过改变其与

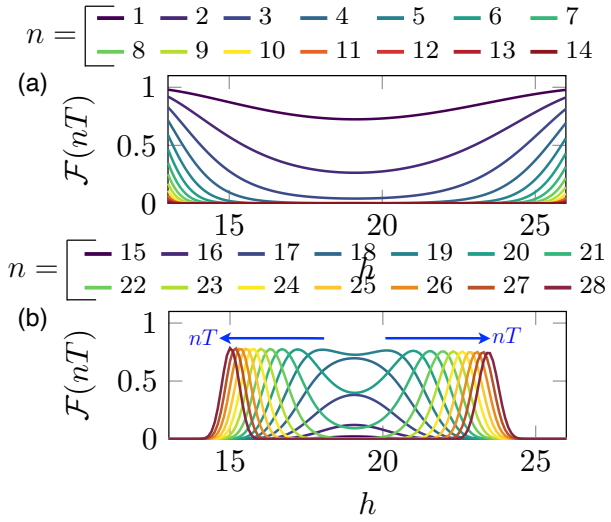

图4。 h/ω_d 在 $J_0(h/\omega_d)$的两个零点之间区域内的复现机制：$2.4048 < h/\omega_d < 5.5201$。我们考虑 $\omega_d = 5$ 和 $L = 12$。面板 (a) 展示衰减阶段，此时保真度单调下降。面板 (b) 展示复苏阶段，此时保真度随时间增长，并在 h中沿着蓝色箭头所示的轨迹演化。蓝色箭头引导视线，展示复苏阶段复苏过程的时间演化。

N`eel 态。

IV. 机制的谱起源

现在我们讨论 Floquet 谱的性质，重点关注其与 N`eel 态的重叠；这种重叠在上述动力学机制中起着核心作用。

在图3（a）–（d）中，我们展示了N`eel态与Floquet谱的重叠，覆盖固定 $\omega_d = 5$下驱动振幅的四个不同区域。所考虑的四个区间对应于以下驱动振幅范围：小（$h \in [2.45, 2.85]$）、中等（$h \in [5.05, 5.45]$）、高（$h \in [7.45, 7.85]$）以及非常高（$h \in [9.6, 10]$），接近FSN。尽管存在差异，这些区间呈现出共同结构：一条由主导态构成的弧，令人联想到无驱动模型中存在的QMBS，其余态则构成体区。随着 h 增大并趋近FSN，这种分离变得愈发显著。我们注意到，属于该弧的态具有依赖于驱动振幅的间距。一方面，增大驱动振幅会减小Floquet带宽，从而总体上减小Floquet本征态之间的间距。另一方面，我们观察到靠近Floquet谱中心的态对 h较不敏感，而靠近边缘的态则对其更为敏感。因此， h 也控制着Floquet谱特定区域内的间距。一般而言，随着 h增大并趋近FSN，这种敏感性变得更加显著。在所有情形中，我们将Floquet能量间隔 $\Delta\epsilon^F$ ——即零准能态与其在弧上的最近邻之间的间隔——确定为主导能量尺度，并在图3（a）–（d）中以图示表示。远离FSN时，该量近似于属于该弧的所有态的特征间距。更接近FSN时，弧边缘的态重叠减小，而 $\Delta\epsilon^F$ 仍是分隔主导态的相关能量尺度。

后一个能量尺度预计决定复苏发生的时间，我们将其定义为 $T_{\text{rev}} := 2\pi/\Delta\epsilon^F$。由于我们关注频闪动力学，因此引入

$$n_{\text{rev}} = \frac{T_{\text{rev}}}{T} := \frac{\omega_d}{\Delta\epsilon^F}, \tag{4}$$

该式确定了预期出现复苏的驱动周期倍数。在图3(e)和(f)中，我们报告了 n_{rev} 随 h/ω_d的变化：面板(e)针对不同系统尺寸 L且 $\omega_d = 5$ 的情况，面板(f)针对 ω_d的不同取值且 $L = 10$ 的情况。 n_{rev} 可以用$n_{\text{rev}} = {}^{\omega_d}_{\gamma J_0}(h/\omega_d) + \alpha$ 很好地拟合，其中拟合参数 γ 和 α 取决于 ω_d（见附录A）。当 h/ω_d 趋近于贝塞尔函数的第一个零点时，有$n_{\text{rev}} \approx {}^{\omega_d}_{\gamma J_0}(h/\omega_d)$，这表明 $\Delta\epsilon^F \propto J_0(h/\omega_d)$。这说明，主导能级间距的压缩遵循整个 Floquet 带宽的压缩规律，为理解复现机制提供了有用工具。

了解系统的 Floquet 谱结构后，我们现在讨论固定 $\mathcal{F}(nT)$ 时的演化ω_d，如图 3(h)、(i) 所示。我们考察 $h < 2.4048\omega_d$。我们区分出两个不同阶段：衰减阶段（图 (h)），此时保真度稳步下降；以及复苏阶段（图 (i)），此时保真度呈现出特征性的复现峰。在衰减阶段，$\mathcal{F}(nT)$ 逐渐降低，并在 FSN 附近形成钟形结构，此处的动力学尤为缓慢。在复苏阶段，保真度呈现尖锐峰值，对应于系统状态的复苏。复苏遵循图 2 中介绍的机制，通过考察连续的频闪时刻可以更清楚地观察到这一点。在所考察的 h 区间内，首次显著复苏出现在 $n = 8$ 处，对较小的 h而言，其 h分布具有相当大的宽度。随着时间推移，该分布的中心向右移向 FSN，同时宽度收窄，仿佛 FSN 是一道拖慢演化的屏障。这种表观运动的产生是因为 $\Delta\epsilon^F$ 会随着 h增大而减小，而分布变窄则是由于 Floquet 谱对不同区域中的 h 敏感程度不同：当谱的敏感性较弱（ h较小）时，复苏会在较宽的 h取值范围内的特定时刻发生；而当谱的敏感性较强（靠近 FSN）时，该范围则较窄。这一特性对于控制动力学很重要：较大的宽度意味着在校准 h 时有更大的容差，可获得期望的响应时间；较小的宽度则要求更高的精度。最后，我们注意到，在 $t = 15T$处，保真度分布在较小的 h 处出现了一条新生的尾部，

这表明第二次复苏会规律性地出现。

随后，我们分析区域 $2.4048\omega_d < h < 5.5201\omega_d$中 ω_d固定时的复现机制，如图4(a)、(b) 所示。在该区域，动力学呈现出截然不同的模式。首先，衰减阶段（图 (a)）持续时间更长：在大约达到前一区域所观察到的最短复现时间的两倍之前，不会出现显著复苏，这表明保真度的初始弛豫更慢。复苏阶段（图 (b)）呈现出一种尤为有趣的机制。起初， h区间中心形成一个“团块”，对应于系统首次显现复苏迹象时的 h 取值范围。随着时间推移，该团块的高度逐渐增加，并在复苏最强时达到最大值。达到最大值后，团块分裂成两部分，沿虚构的 h 空间向相反方向移动，分别靠近两个 FSN 区域。在此过程中，每一部分的宽度逐渐缩小。团块的分裂和移动反映出 Floquet 谱的不同区域相对于该区域中心呈对称响应，从而使复苏沿相反方向朝两个 FSN 区域传播。我们还注意到，在不超过 $t \leq 28T$的时间内，没有观察到第二次复苏，这证实该区域的动力学显著慢于前一种情况。这种减速是 Floquet 谱结构的直接结果：被 FSN 隔开的不同区域中，带宽的绝对值逐渐减小（见图2(a)）。

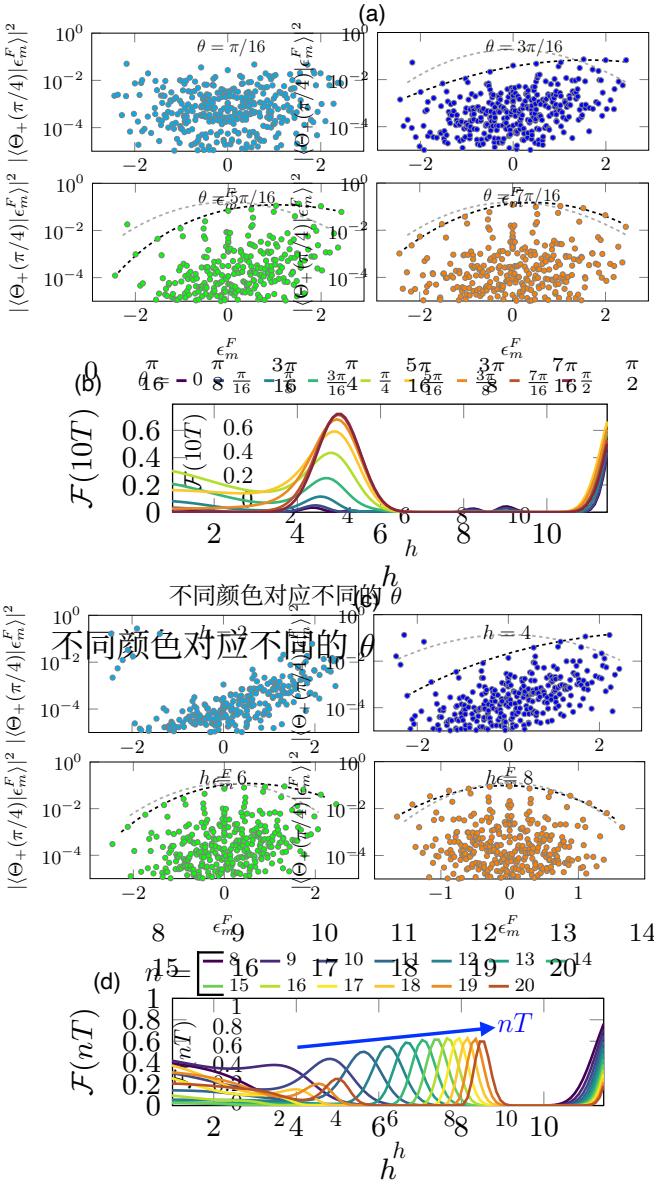

图 5. $|\Theta_+\rangle$态在 $\omega_d =$ 5 $L = 12$ 和 下的复现机制。面板 (a)：在固定 $h = 5$ 下， $|\Theta_+\rangle$ 态与不同 θ （不同颜色）对应的 Floquet本征态之间的重叠。面板 (b)：初始态 $|\Theta_+\rangle$与其在 $t = 10T$ 时刻的频闪时间演化态之间的保真度，展示为若干 θ 取值下随 h 变化的函数，范围为 0 到 $\pi/2$。面板 (c)：在固定 $\theta = \pi/4$ 下， $|\Theta_+\rangle$ 态与不同 h （不同颜色）对应的 Floquet本征态之间的重叠。面板 (d)：$\theta = \pi/4$ 在不同频闪时刻 nT 的保真度，图例中标出了 n。蓝色箭头指示复苏阶段中复苏随时间演化的方向。面板 (a) 和 (c) 中的黑色虚线用于引导视线，突出弧状结构的出现；灰色虚线则表示 N´eel 态情形下对应的弧结构。

V. 极化态与 N`eel 态之间的复现机制

在本节中，我们研究复现机制如何依赖于初始态的选择。具体而言，我们通过在极化态与 N`eel 态之间进行插值，追踪该机制的演化，所用状态为 $|\Theta_+\rangle$state：

$$|\Theta_+\rangle = |\theta_+\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\theta_+\rangle \otimes |0\rangle \otimes \ldots, \tag{5}$$

其中 $|\theta_+\rangle := \cos(\theta)\,|0\rangle + \sin(\theta)\,|1\rangle$。通过在区间 $[0, \pi/2]$ 内改变 θ，该状态可在极化态 $|\mathbf{0}\rangle = |0000\ldots\rangle$ 与 N`eel 态 $|\mathbb{Z}_2\rangle = |1010\ldots\rangle$ 之间平滑插值。我们通过固定 ω_d 进行分析。

我们首先分析初始态与 Floquet 谱的重叠。固定 h后，我们研究不同 $\theta \in [0, \pi/2]$取值下重叠结构的演化，见图5(a)。当 θ较小时，重叠主要反映了与之相符的类体相构型极化态的 θ 。随着 θ 增大，该结构逐渐演变，呈现出上述体区上方 N´eel 态中所见的、间距近乎相等的态所构成的特征弧线。对比这些图中涌现的弧线（以黑色虚线标出）与 N´eel 态的参考弧线（以灰色显示），可以直观地看出这种相似性；随着 θ 趋近于 $\pi/2$，黑色弧线逐渐与灰色弧线重合。

为了理解这种谱变形如何影响动力学，我们考察了固定时刻的频闪保真度

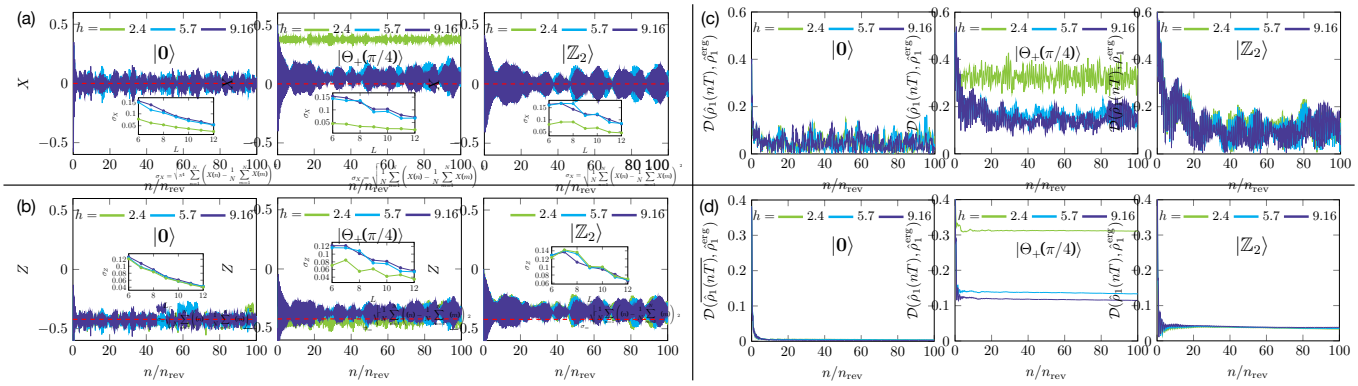

图 6. 不同初始态（$|\mathbf{0}\rangle$、$|\Theta_+(\pi/4)\rangle$、$|\mathbb{Z}_2\rangle$）和不同驱动振幅下 Floquet 热化的分析；后者分别为 $h = 2.4$、5.7、9.14，其复现时间约为周期的整数倍：$\omega_d/\Delta\epsilon^F \approx 8$ 11 25 $\omega_d = 5$ $L = 12$ 、、。驱动频率固定为 和 。面板 (a) 和 (b)：三种初始态和三种驱动振幅下， $X(t)$ (a) 与 $Z(t)$ (b) 在频闪时刻的动力学，并与其遍历预期值 $X^{\mathrm{erg}} = 0$ 和 Z^{erg}（红色虚线）进行比较。插图给出了标准差，其定义为 $\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{100n_{\mathrm{rev}}}\sum_{n=1}^{100n_{\mathrm{rev}}}\left(A(nT) - \frac{1}{100n_{\mathrm{反转}}}\sum_{m=1}^{100n_{\mathrm{rev}}}A(mT)\right)}$，其中 $A = X$， Z。面板 (c) 给出了频闪时刻的第一格点密度矩阵 $\hat{\rho}_1(nT)$ 与相应遍历密度矩阵 $\hat{\rho}_1^{\mathrm{erg}}$ 之间的迹距离，而面板 (d) 给出了后者与时间平均第一格点态 $\hat{\rho}_1(nT)$ 之间的距离。

$t = 10T$ $h < 2.4048\,\omega_d$，见图 5(b)。在小–θ 范围内，保真度保持较低，仅呈现出浅浅的隆起。这些特征源于残余的有限尺寸效应；这些效应也阻碍了完全遍历，但系统仍保持整体上类似遍历的动力学。系统的遍历性质将在第 VI 节中进一步分析。增大 θ 会在定性上改变这种行为：一个显著的中央峰随之出现，标志着复苏的开始，此时 Floquet谱形成弧结构，态之间的间隔近乎相等。该峰的高度随 θ 稳步增大，并在 $\theta = \pi/2$ (N`eel 态）处达到最大值，表明这种构型产生的复苏信号最清晰、最稳健。此外，在中间角度下，保真度分布在较小的 h处形成长尾，表明在很宽的驱动振幅范围内，初始态记忆仍以中等强度保留。相比之下，极限情形（ $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$）产生的保真度分布要么消失，要么高度局域，显示记忆迅速丧失，或仅禁闭于狭窄的参数区域。因此，中间的 θ 提供了一种可调手段，用于控制初始态信息的持久性。

接下来，我们聚焦于中间情形 $\theta = \pi/4$ ，考察改变 h 对 Floquet 谱和动力学的影响。图 $|\Theta_+(\pi/4)\rangle$展示了其与 Floquet本征态的重叠。5(c) 中。不同于 N`eel 态，其重叠结构对 $h$ 的变化基本不敏感（见图3(a)-(d)），中间情形下的$\theta$ 态则表现出强烈的 $h$ 依赖性，表明其能够进入定性不同的谱和动力学区域。当 $h$较小时，重叠呈现近似指数增长的图样，一组孤立的低准能量态占据了图的左上区域。值得注意的是，当 $h$ 趋近 FSN 时，重叠恢复为类似 N`eel 态的构型，这表明在中间 θ情形下，调节h 即可探索两种截然不同的谱结构。这一点可从图中弧线图样（黑色虚线）与 N`eel 态弧线图样（灰色虚线）之间新出现的对应关系看出，后者在此作为参考。需要指出的是，在图5(a) 所示情形中，这种对应关系源于 $\theta$ 在极化态与 N`eel 态之间插值，而这里的结果则不那么直观，且更加引人注目。这表明，即使初始态不同，也可以通过适当调节驱动参数，产生类似 N`eel 态的动力学。

为说明这一点，我们固定 $\theta = \pi/4$ ，并跟踪复现峰随 h变化的演化，如图5(c)所示。显然，整体机制与 N`eel 态的机制相似：峰首先在较小的 $h$ 处出现，并朝 FSN 传播；在逐渐变窄的同时，它们仿佛沿着 $h$ 轴被“拖动”。然而，两者存在一个关键区别。在较小的 $h$处，动力学不规则且不断波动，这是由于其重叠结构与 N`eel 态的重叠结构不同。随着峰接近 FSN，这种不规则性逐渐消退，动力学也变得越来越规则，越来越像 N`eel 态。因此，在中等 θ处，系统呈现出两种动力学“特征”并存的现象：较小的 h处表现为不规则、波动的行为，而较大的 h处则出现结构良好的复苏。这两种截然不同的状态即使在长时间后仍会造成显著差异，并对应系统避免热化的两种不同机制，详见第VI节。这一统一视角将改变 h 所引起的谱变形与观测到的动力学模式直接联系起来，凸显了初始态选择、

谱结构和动力学响应。

VI. 非热弗洛凯动力学与初始态依赖性

在前几节中，我们分析了以 N`eel 态为初始态的受驱动PXP模型的复苏动力学，以及在该态与完全极化态之间插值的初始态所对应的动力学。一个自然的问题是，这种动力学具有怎样的遍历性质。为此，我们考察系统的长时间动力学，并研究单个格点层面的热化：我们将该格点视为一个子系统，而链的其余部分则充当可能引发热化的有效热浴。人们预期，周期驱动的量子系统会发生热化，即局域可观测量的期望值与无限温态$\rho^{\mathrm{erg}} = \hat{\mathbb{1}}_D/D$中的相应期望值一致，其中 D 表示希尔伯特空间维数 [10, 49–51, 57, 58]。在我们的情形中，相关的遍历态则定义为$\rho^{\mathrm{erg}} = \hat{\mathbb{1}}_{F_{L+2}}/F_{L+2}$，因为动力学受限于维数为 F_{L+2}的阻塞子空间。

为刻画动力学的遍历特征，我们使用子系统的约化密度矩阵与相应遍历态之间的迹距离来量化热化。具体而言，我们考虑以下量：

$$\mathcal{D}(\hat{\rho}_S(t), \hat{\rho}_S^{\mathrm{erg}}) = \frac{1}{2}\|\hat{\rho}_S(t) - \hat{\rho}_S^{\mathrm{erg}}\|_1, \tag{6}$$

$$\mathcal{D}\left(\overline{\hat{\rho}_S(t)}, \hat{\rho}_S^{\mathrm{erg}}\right) = \frac{1}{2}\|\overline{\hat{\rho}_S(t)} - \hat{\rho}_S^{\mathrm{erg}}\|_1; \tag{7}$$

这里，$\hat{\rho}_S = \mathrm{Tr}_{\bar{S}}[\hat{\rho}]$，其中 S 表示S的补集，而$\overline{\hat{\rho}_S(t)} = \frac{1}{t}\int_0^t dt' \hat{\rho}_S(t')$。这两个量区分了强热化与弱热化 [59]。当两个距离在长时间极限下均趋于零时，系统发生强热化。如果只有时间平均距离趋于零，而瞬时距离仍持续振荡，则系统表现出弱热化。

由于我们关注 S 为单个格点的情形，迹距离可化简为相应单格点密度矩阵所对应的布洛赫矢量之间的距离：

$$\mathcal{D}(\hat{\rho}_j(t), \hat{\rho}_j^{\mathrm{erg}}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_j(t) - \boldsymbol{r}_j^{\mathrm{erg}}|; \tag{8}$$

$$\mathcal{D}(\overline{\hat{\rho}_j(t)}, \hat{\rho}_j^{\mathrm{erg}}) = \frac{1}{2}\left|\overline{\boldsymbol{r}_j(t)} - \boldsymbol{r}_j^{\mathrm{erg}}\right|; \tag{9}$$

布洛赫矢量为 $\boldsymbol{r}_j(t) = \left(\langle \hat{X}_j(t)\rangle, \langle \hat{Y}_j(t)\rangle, \langle \hat{Z}_j(t)\rangle\right)$，$\overline{\boldsymbol{r}_j(t)} = \left(\overline{\langle \hat{X}_j(t)\rangle}, \overline{\langle \hat{Y}_j(t)\rangle}, \overline{\langle \hat{Z}_j(t)\rangle}\right)$，以及 $\boldsymbol{r}_j^{\mathrm{erg}} = (0, 0, Z_j^{\mathrm{erg}})$。遍历布洛赫矢量的非零 z 分量反映了阻塞希尔伯特空间施加的约束，其值为 $Z_j^{\mathrm{erg}} = \frac{F_j F_{L-j+1} - F_{j+1}F_{L-j+2}}{F_{L+2}}$ (见附录 B)。因此，单格点热化经历局域可观测量 $\langle \hat{X}_j(t)\rangle, \langle \hat{Y}_j(t)\rangle, \langle \hat{Z}_j(t)\rangle$ 的收敛，以及它们的时间平均值分别趋于 $0, 0, Z_j^{\mathrm{erg}}$。

我们首先从整个链的层面考察系统的热行为。为此，我们定义空间平均可观测量 $X(t) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\langle \hat{X}_j(t)\rangle$，$Y(t) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\langle \hat{Y}_j(t)\rangle$，以及 $Z(t) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\langle \hat{Z}_j(t)\rangle$。图 6(a)、(b) 展示了 X 和 Z随时间的演化，而 Y的动力学见附录 C 的图 8。我们固定 $\omega_d = 5$，考虑 $h < 2.4048\omega_d$ 区域，并聚焦于h的三个代表性取值。这些取值经过选择，使得 $n_{\mathrm{rev}} = \omega_d/\Delta\epsilon^F$ 近似为整数；它们分别对应远离 FSN 的参数（$h = 2.4$）、位于中间位置的参数（$h = 5.7$），以及接近 FSN 的参数（$h = 9.14$）。

我们首先考察 X 的动力学（图 6(a)），并观察到三种初始态之间存在明显差异。对于极化态和N´eel态，动力学对 h基本不敏感：极化态在遍历值 $X^{\mathrm{erg}} = 0$附近呈现带噪声的涨落，而N´eel态则表现出更具相干性的振荡，体现为前文讨论过的复苏。相比之下，插值态 $|\Theta_+(\pi/4)\rangle$ 则表现出强烈的 h依赖性。对于最小的 h，$X(t)$仅发生微弱涨落，并始终远离遍历值；对于另外两个 h值，动力学趋近于但并未完全达到遍历预期。这一行为反映了初始态与Floquet谱之间随 h变化的重叠，并表明插值态平均而言无法热化。Y 动力学（图 8）呈现出相似趋势，不同之处在于，$h = 2.4$ 和 $h = 5.7$ 产生相似的动力学，而 $h = 9.14$ 则不同。对于极化态和N´eel态，$Y(t)$在所有 h下都围绕 $Y^{\mathrm{erg}} = 0$ 呈现带噪声或更具相干性的振荡。这些态究竟是遍历的还是非遍历的，可以通过 Z的动力学揭示。在图 6(b)中，我们展示了三种初始态下Z 的动力学。插值态对 h 的依赖性较弱，并且始终偏离遍历值。对于极化态和N´eel态，带噪声与相干行为之间的区别依然存在；此外，极化态围绕遍历预期$Z^{\mathrm{erg}} = \frac{1}{L}\sum_j Z_j^{\mathrm{erg}}$ 振荡，而N´eel态则明显偏离该值，即使从平均意义上看也是如此，这表明其呈现非遍历行为。

图 (a) 和 (b) 的插图给出了信号$X(nT)$ 和 $Z(nT)$ 在时间区间 $n \in [0, 100n_{\mathrm{rev}}]$内的波动（以标准差量化），对应不同的系统尺寸 L。随着 L 增大，极化态呈现出规律的衰减，这表明在热力学极限下强热化开始出现；而N´eel 态和插值$\Theta_+(\pi/4)\rangle$ 态的行为则随 L 呈现不规则变化。这表明系统中存在持续振荡，使得在有限时间窗口内无法识别出 L 的明确标度关系。我们还注意到，总体而言，远离 FSN 时波动会减小；特别是许多情况下，与 $h = 2.4$ 对应的曲线明显低于其他曲线。

最后，我们分析方程（8）和（9）中定义的瞬时距离和时间平均距离。对于瞬时距离，极化态最接近遍历值，其小幅波动源于有限系统尺寸。N´eel 态和插值态的瞬时距离则更大。特别是，插值态在整个动力学过程中始终远离零，从未在局部呈现出遍历态的特征。对于 h 远离 FSN 时，这一距离尤其大，反映出系统处于远离热化的状态，这是由于 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的贡献显著。时间平均距离证实了这些趋势。N´eel 态和插值态以不同方式避免遍历性，而极化态则在平均意义上趋近遍历预期。尽管有限系统尺寸使得弱热化与强热化难以截然区分，但我们可以断言，极化态至少表现出弱热化，而另外两种态则没有。

总之，出现了两种不同形式的非遍历性。对于 N´eel 态，长时间平均的局域态中，X 和 Y 的期望值平均为零，但 Z 期望值非零，使其偏离无穷温度预言。对于插值态，尤其是在远离 FSN 时，长时间平均态呈现出非零的 X 和 Y 分量，进一步增强了系统的非热性。这种行为与其和 Floquet 态之间复杂的重叠结构有关（图 5(c)）。随着系统趋近 FSN，插值态的重叠结构逐渐演变为弧状结构，其长时间平均态也变得类似于 N´eel 态，其中 X 和 Y 的期望值平均趋近于零，但仍然保持非遍历性。

VII. 结论与展望

我们研究了周期驱动PXP模型非遍历动力学中复苏产生的内在机制。我们的分析采用了Floquet理论，重点考察由Floquet算符生成的频闪演化。

Floquet准能谱的结构在参数空间中呈现出一些特殊区域，在这些区域内，谱显著变窄，我们将其称为Floquet谱变窄（FSN）区域。在这些区域中，频闪动力学会突然变慢。当系统初始化为N´eel态时，FSN区域在复苏的产生、演化和稳健性方面发挥着核心作用。

这种动力学可以解释为一个有效波包在驱动参数空间中传播，而 FSN 区域则充当势垒，延缓其运动。这将产生由 Floquet 谱结构及其与 N´eel 态的重叠所支配的谐和演化。值得注意的是，这种重叠呈弧形结构，让人联想到静态量子多体疤痕（QMBS），并且在周期驱动下得以保持。因此，主导性的准能量间距由此产生，并决定了观测到的复苏的时间尺度和规律性。

随后，我们将分析扩展到介于N´eel态与完全极化态之间的初始态，揭示了它们对周期驱动的不同响应模式。这些态表现出一种可通过驱动参数加以控制的混合行为。例如，我们表明，通过调节驱动振幅，可以在两种截然不同的复苏机制之间实现连续过渡。在这种情况下，初始态与Floquet谱之间的重叠结构对驱动高度敏感；相比之下，N´eel态的重叠结构则更加稳健。

最后，我们分析了长时间动力学，以探究系统是否以及如何遵循（或避开）Floquet热化；该理论预言系统将收敛至无限温度态。对于所考察的系统尺寸，我们发现完全极化态会发生弱热化，即其平均而言会收敛至遍历态。相比之下，N´eel 态避开了热化：在长时间后，它达到一个时间平均态，该态平均而言具有为零的 X 和 Y 期望值，但其 Z 期望值呈现非遍历特性，因此与无穷温度预言不符。有趣的是，插值态的混合特性也体现在其长时间动力学中，它们可以通过多种途径避开热化。尤其是，我们发现，在某些区域，长时间演化后的态会形成显著非零的 X 和 Y 期望值，进一步增强其非热特性，并构成系统避开热化的第二种机制。

本研究揭示了一种可控机制，该机制支配着受驱动PXP模型中复苏的出现，并阻止热化。调控动力学特征的能力，包括与不同初始态相关的时间尺度，为量子信息存储以及按需可控地操纵相干多体动力学等应用开辟了颇具前景的途径。本研究带来的潜在研究方向之一，是探索该机制在不同驱动类型下的表现，包括准周期协议 [41]。此外，还可在周期驱动下系统地研究并检验各种非遍历动力学态（例如局域遗留动力学 [30],）的稳健性及其可能发生的形变。

VIII. 致谢

本工作部分由编号为PE0000023-NQSTI的PNRR MUR项目通过次级项目QuCADD、ThAnQ和QuSOE资助。数值模拟使用Julia软件包QuantumOptics.jl [60]完成。

附录 A：预期复现时间的分析

在本节中，我们详细分析n_{rev}的行为，并特别关注其对h 的依赖，针对 ω_d的不同取值。我们关注驱动参数满足 $h/\omega_d < 2.4048$的区域。假设Floquet 带宽遵循 $J_0(h/\omega_d)$，且主导准能量间距 $\Delta\epsilon^F$ 与带宽成比例地形变，我们可以假定 $\Delta\epsilon^F = \delta\, J_0(h/\omega_d)$，其中 δ 为比例因子，这意味着 $\Delta\epsilon^F$ 与贝塞尔函数成正比。这进而自然会得到 $n_{\mathrm{rev}} = \omega_d/(\delta\, J_0(h/\omega_d))$。然而，正如我们将表明的，这一假设并不完全准确。事实上，固定 ω_d 并检视 Floquet谱，我们观察到，如图2(a)所示，对于较小的 h/ω_d，能谱并非由贝塞尔函数 $J_0(h/\omega_d)$所塑造，从而使简单的比例拟设不准确。因此，我们假设该行为需由一个偏移量加以修正，并写为

$$n_{\mathrm{rev}}(h) = \frac{\omega_d}{\gamma J_0(h/\omega_d)} + \alpha. \tag{A1}$$

对于 $h \ll \omega_d$，我们有 $J_0(h/\omega_d) \approx 1$，因此 $n_{\mathrm{rev}} \approx \frac{\omega_d}{\gamma} + \alpha$；而在接近 FSN 时，我们有$\frac{\omega_d}{\gamma J_0(h/\omega_d)} \gg \alpha$，从而得到 $n_{\mathrm{rev}} \approx \frac{\omega_d}{\gamma J_0(h/\omega_d)}$。在后一种情况下，拟合假设性地成立，这证实了 Floquet 谱的变形与主导准能量间距的变形之间存在对应关系。

ω_d	γ	α
3	0.46215 ± 0.0116	-2.42885 ± 0.4577
3.5	0.492468 ± 0.00334	-2.33842 ± 0.1314
4	0.528536 ± 0.00267	-1.94613 ± 0.1045
4.5	0.550855 ± 0.002316	-1.76802 ± 0.09638
5	0.57121 ± 0.001885	-1.53336 ± 0.08017
5.5	0.585289 ± 0.001609	-1.39035 ± 0.07179
6	0.599358 ± 0.00126	-1.18218 ± 0.05604
6.5	0.606491 ± 0.00115	-1.13246 ± 0.05498
7	0.611822 ± 0.001078	-1.10751 ± 0.05569

表 I. 不同驱动频率 ω_d 下的拟合参数 γ 和 α，以及各自的不确定度。

在图 7(a),(b) 中，我们比较了 $n_{\mathrm{rev}}(h)$ 在 ω_d 的两个固定取值下的行为，以及两种拟合方案的结果。两种情况下，我们都观察到，式 (A1) 给出的拟合效果相当不错，尤其是在 h较小时。因此，我们取 $\omega_d \in [3, 3.5, 4, \ldots, 7]$ 的固定值，并针对每个ω_d，在区间 $h \in [1, 2.2048\omega_d]$内拟合 $n_{\mathrm{rev}}(h)$ 数据，即贝塞尔函数第一个零点之前的数据。两个拟合参数随 ω_d 的变化绘于图 7(c),(d) 中，各自的误差也列于表I中。总体而言，ω_d越大，拟合效果越好，参数误差也相应减小。在
同时，两个拟合参数在较大的 ω_d下趋于稳定。最后，我们指出，该方法使我们能够近似确定在每个 ω_d处观察到复现所需的最短时间。事实上，由于 n_{rev} 是

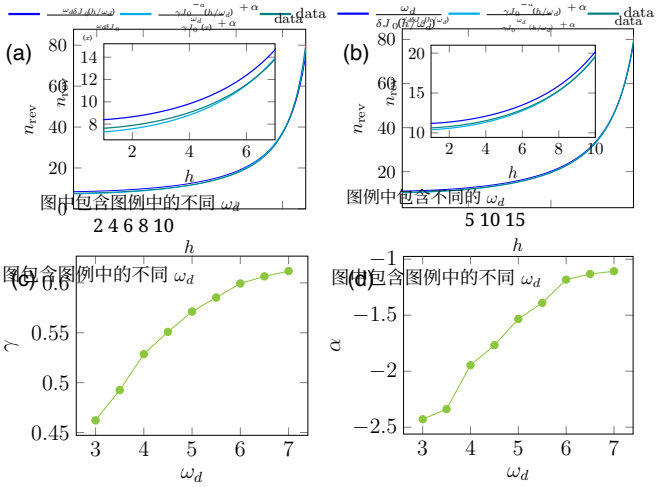

图 7. 面板 (a) 和 (b)：比较从 Floquet谱（数据）中提取的 n_{rev} 与两种不同拟合结果：$\frac{\omega_d}{\gamma J_0(h/\omega_d)} + \alpha$和$\delta \frac{\omega_d}{J_0(h/\omega_d)}$。面板 (a) 展示 $\omega_d = 5$的结果，面板 (b) 展示 $\omega_d = 7$的结果。两个面板中的系统尺寸均固定为 $L = 10$。面板 (c) 和 (d)：拟合参数 γ 和 α 随 ω_d的变化，这是通过拟合$n_{\mathrm{rev}} = \frac{\omega_d}{\gamma J_0(h/\omega_d)} + \alpha$得到的。系统尺寸为 $L = 10$。

所考虑参数区域内 h的正单调递增函数，最小复现时间在 $J_0(h/\omega_d) \approx 1$处取得，从而得到 $n_{\mathrm{rev}}^{\min} \approx \frac{\omega_d}{\gamma} + \alpha$。例如，对于 $\omega_d = 7$，我们有 $n_{\mathrm{rev}}^{\min} \approx 10.3325$。

附录 B： Z_j^{erg} 的评估

热化驱动的封闭量子系统的特征是，局域算符的长时间期望值与无限温混合态的相应期望值一致。在维数为 $D_L = F_{L+2}$的受限希尔伯特空间中，该态写作

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]} = \frac{\hat{\mathbb{1}}_{F_{L+2}}}{F_{L+2}} = \frac{1}{D_L} \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_L} |\boldsymbol{s}\rangle_{[1,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}|\,; \tag{B1}$$

其中，$\mathcal{B}_L$ 表示受限希尔伯特空间，下标 $[1,\ldots,L]$ 表示该态定义在整个链上。一般而言，下标 $[\ell_1,\ldots,\ell_2]$表示该态的支撑集位于链上格点 ℓ_1 和 ℓ_2 之间的区域。

这个遍历态可以递归地分解为

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]} = \frac{1}{D_L} \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_L} |\boldsymbol{s}\rangle_{[1,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}| = \tag{B2}$$

$$\frac{1}{D_L}\Bigg(|0\rangle_1 \langle 0| \otimes \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{L-1}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[2,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}| + \tag{B3}$$

$$|10\rangle_{[1,2]} \langle 10| \otimes \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{L-2}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[3,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}|\Bigg); \tag{B4}$$

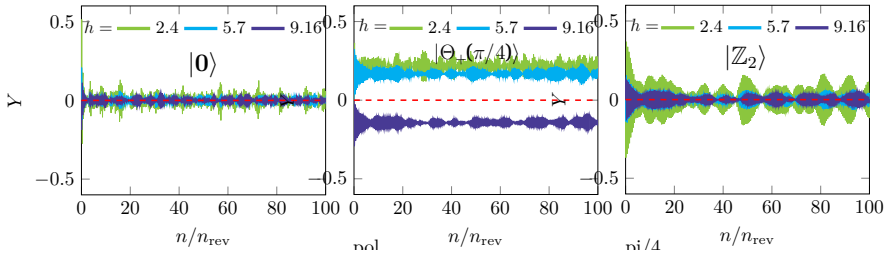

图 8. 对不同初始态（$|\mathbf{0}\rangle$，$|\Theta_+(\pi/4)\rangle$，$|\mathbb{Z}_2\rangle$）和不同驱动振幅下 $Y(t)$ 的长时间动力学分析；驱动振幅分别为 $h = 2.4$，5.7，9.14，其复现时间约为周期的整数倍：$n_{\mathrm{rev}} = \omega_d/\Delta\epsilon^F \approx 8$，11，25。驱动频率固定为 $\omega_d = 5$，且 $L = 12$。

利用 $D_L = F_{L+2}$，可以将其改写为

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]} = \frac{F_{L+1}}{F_{L+2}} |0\rangle_1 \langle 0| \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[2,\ldots,L]} + \tag{B5}$$

$$\frac{F_L}{F_{L+2}} |10\rangle_{[1,2]} \langle 10| \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[3,\ldots,L]}. \tag{B6}$$

对格点 $[2,\ldots,L]$ 进行偏迹后，我们得到

第一个格点的约化态：

$$\left(\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]}\right)_1 := \mathrm{Tr}_{[2,\ldots,L]}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]}\right] = \tag{B7}$$

$$\frac{F_{L+1}}{F_{L+2}} |0\rangle \langle 0| + \frac{F_L}{F_{L+2}} |1\rangle \langle 1|. \tag{B8}$$

为简单起见，我们将约化态 $\left(\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]}\right)_j$ 记作 $\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_j$ 。

同样的推理可递归地应用于第二个格点，得到

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]} = \frac{1}{D_L}\left[(|0\rangle_1 \langle 0| + |1\rangle_1 \langle 1|) \otimes |0\rangle_2 \langle 0| \otimes \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{L-2}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[3,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}| + |010\rangle_{[1,2,3]} \langle 010| \otimes \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{L-3}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[4,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}|\right] =$$

$$\frac{1}{F_{L+2}}\left[F_L(|10\rangle_{[1,2]} \langle 10| \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[3,\ldots,L]} + |00\rangle_{[1,2]} \langle 00| \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[3,\ldots,L]}) + F_{L-1}(|010\rangle_{[1,2,3]} \langle 010| \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[4,\ldots,L]}\right], \tag{B9}$$

因此

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_2 = \frac{2F_L}{F_{L+2}} |0\rangle \langle 0| + \frac{F_{L-1}}{F_{L+2}} |1\rangle \langle 1|. \tag{B10}$$

更一般地，对于体区中的格点 j，完整的遍历态可表示为

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_{[1,\ldots,L]} = \frac{1}{D_L}\left[\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{j-1}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[1,\ldots,j-1]} \langle \boldsymbol{s}|\right) \otimes |0\rangle_j \langle 0| \otimes \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{L-j}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[j+1,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}|\right) + \right.$$

$$\left.\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{j-2}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[1,\ldots,j-2]} \langle \boldsymbol{s}|\right) \otimes |010\rangle_{[j-1,j,j+1]} \langle 010| \otimes \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_{L-j-1}} |\boldsymbol{s}\rangle_{[j+2,\ldots,L]} \langle \boldsymbol{s}|\right)\right]. \tag{B11}$$

对除 j 之外的所有格点取偏迹，得到

一般格点约化遍历态：

$$\hat{\rho}^{\mathrm{erg}}_j = \frac{F_{j+1}F_{L-j+2}}{F_{L+2}} |0\rangle \langle 0| + \frac{F_jF_{L-j+1}}{F_{L+2}} |1\rangle \langle 1|; \tag{B12}$$

利用 $F_1 = F_2 = 1$ 和 $F_3 = 2$，可以验证该表达式对链中的任意格点 j 均成立。该结果ˆ表明， Z_j 的遍历期望值为

$$Z_j^{\mathrm{erg}} = \mathrm{Tr}\big[\hat{\rho}_j^{\mathrm{erg}} \hat{Z}_j\big] = \frac{F_j F_{L-j+1} - F_{j+1} F_{L-j+2}}{F_{L+2}}. \quad \text{(B13)}$$

由 $\hat{\rho}_j^{\mathrm{erg}}$ 的对角结构可立即得出 $X_j^{\mathrm{erg}} = Y_j^{\mathrm{erg}} = 0$。

附录 C： Y的长时间动力学

本节报告并简要讨论 Y算符的动力学。根据正文第VI节中的讨论，图 8 展示了三种不同初始态（不同面板）以及三个不同驱动场取值下的动力学 h（不同颜色），其中 ω_d 保持不变。

结果揭示了三种截然不同的长时间动力学区域。对于初态为极化态的系统，Y 会在遍历期望值附近微弱且带噪声地波动；而对于 N´eel 态，系统则表现出更为相干的振荡。相比之下，插值态$|\Theta_+(\pi/4)\rangle$ 的振荡显著偏离遍历值，并且强烈依赖于 h。

[1] I. M. Georgescu、S. Ashhab 和 F. Nori，《量子模拟》，Rev. Mod. Phys. 86, 153 (2014)。[2] A. J. Daley、I. Bloch、C. Kokail、S. Flannigan、N. Pearson、M. Troyer 和 P. Zoller，《量子模拟中的实用量子优势》，Nature 607, 667–676 (2022)。[3] A. Browaeys 和 T. Lahaye，《利用可独立操控的里德堡原子研究多体物理》，Nature Physics 16, 132 142 2020– ( )。[4] A. Aspuru-Guzik 和 P. Walther，《光子量子模拟器》，Nature Physics 8, 285–291 (2012)。[5] E. Altman、K. R. Brown、G. Carleo、L. D. Carr、E. Demler、C. Chin、B. DeMarco、S. E. Economou、M. A. Eriksson、K.-M. C. Fu、M. Greiner、K. R. Hazzard、R. G. Hulet、A. J. Koll´ar、B. L. Lev、M. D. Lukin、R. Ma、X. Mi、S. Misra、C. Monroe、K. Murch、Z. Nazario、K.-K. Ni、A. C. Potter、P. Roushan、M. Saffman、M. Schleier-Smith、I. Siddiqi、R. Simmonds、M. Singh、I. Spielman、K. Temme、D. S. Weiss、J. Vu˘ckovi´c、V. Vuleti´c、J. Ye 和 M. Zwierlein，《量子模拟器：架构与机遇》，PRX Quantum 2, 017003 (2021)。[6] L. Amico、M. Boshier、G. Birkl、A. Minguzzi、C. Miniatura、L.-C. Kwek、D. Aghamalyan、V. Ahufinger、D. Anderson、N. Andrei、A. S. Arnold、M. Baker、T. A. Bell、T. Bland、J. P. Brantut、D. Cassettari、W. J. Chetcuti、F. Chevy、R. Citro、S. De Palo、R. Dumke、M. Edwards、R. Folman、J. Fortagh、S. A. Gardiner、B. M. Garraway、G. Gauthier、A. Günther、T. Haug、C. Hufnagel、M. Keil、P. Ireland、M. Lebrat、W. Li、L. Longchambon、J. Mompart、O. Morsch、P. Naldesi、T. W. Neely、M. Olshanii、E. Orignac、S. Pandey、A. Pérez-Obiol、H. Perrin、L. Piroli、J. Polo、A. L. Pritchard、N. P. Proukakis、C. Rylands、H. Rubinsztein-Dunlop、F. Scazza、S. Stringari、F. Tosto、A. Trombettoni、N. Victorin、W. v. Klitzing、D. Wilkowski、K. Xhani 和 A. Yakimenko，《原子电子学路线图：研究现状与展望》，AVS Quantum Science 3, 10.1116/5.0026178 (2021)。[7] J. Polo、W. J. Chetcuti、E. C. Domanti、P. Kitson、A. Osterloh、F. Perciavalle、V. P. Singh 和 L. Amico，《原子电子学电路新型实现的展望》，Quantum Science and Technology 9, 030501 (2024)。[8] O. Morsch、G. M. Palma 和 D. Rossini，《复杂系统的量子模拟》，La Rivista del Nuovo Cimento 48, 275–313 (2025)。[9] J. Polo、W. Chetcuti、T. Haug、A. Minguzzi、K. Wright，以及 L. Amico，《超冷气体中的持续电流》，Physics Reports 1137, 1–70 (2025)。[10] L. D'Alessio 和 M. Rigol，《孤立的周期驱动相互作用晶格系统的长时间行为》，Phys. Rev. X 4, 041048 (2014)。[11] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii，《一般孤立量子系统的热化及其机制》，Nature 452, 854–858 (2008)。[12] M. Srednicki，《混沌与量子热化》，Phys. Rev. E 50, 888 (1994)。[13] H. Bernien、S. Sch wartz、A. Keesling、H. Levine、A. Om- ran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《在 51 原子量子模拟器中探测多体动力学》，Nature 551, 579–584 (2017)。[14] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papi´c，《里德堡原子链中的量子疤痕本征态：纠缠、热化的破缺及对微扰的稳定性》，Phys. Rev. B 98, 155134 (2018)。[15] A. Pal 和 D. A. Huse，《多体局域化相变》，Phys. Rev. B 82, 174411 (2010)。[16] L. Capizzi、J. Wang、X. Xu、L. Mazza 和 D. Poletti，《流体动力学与本征态热化假说》，Phys. Rev. X 15, 011059 (2025)。[17] A. M. Kaufman、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、P. M. Preiss 和 M. Greiner，《通过孤立多体系统中的纠缠实现量子热化》，Science 353, 794–800 (2016)。[18] J. Smith、A. Lee、P. Richerme、B. Neyenhuis、P. W. Hess、P. Hauke、M. Heyl、D. A. Huse 和 C. Monroe，《在具有可编程随机无序的量子模拟器中实现多体局域化》，Nature Physics 12, 907–911 (2016)。[19] I. Lesanovsky 和 H. Katsura，《里德堡气体中的相互作用斐波那契任意子》，Phys. Rev. A 86, 041601 (2012)。[20] W. W. Ho、S. Choi、H. Pichler 和 M. D. Lukin，《受限模型中的周期轨道、纠缠与量子多体疤痕：矩阵乘积态方法》，Phys. Rev. Lett. 122, 040603 (2019)。[21] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，《量子多体疤痕与弱遍历性破缺》，Nature Physics 17, 675–685 (2021)。[22] A. Hudomal、J.-Y. Desaules、B. Mukherjee、G.-X. Su,

J. C. Halimeh 和 Z. Papi´c, 《PXP模型中的量子多体疤痕驱动》, Phys. Rev. B 106, 104302 (2022)。[23] A. Chandran、T. Iadecola、V. Khemani 和 R. Moess- ner, 《量子多体疤痕：准粒子视角》, 《凝聚态物理年度评论》 14, 443 469 2023– ( )。[24] S. Choi、C. J. Turner、H. Pichler、W. W. Ho、A. A. Michailidis、Z. Papi´c、M. Serbyn、M. D. Lukin 和 D. A. Abanin, 《涌现的 SU(2) 动力学与完美量子多体疤痕》, Phys. Rev. Lett. 122, 220603 (2019)。[25] A. Lerose、T. Parolini、R. Fazio、D. A. Abanin 和 S. Pappalardi, 《长程相互作用系统中稳健量子多体疤痕理论》, Phys. Rev. X 15, 011020 2025( )。[26] J.-Y. Desaules、F. Pietracaprina、Z. Papi´c、J. Goold 和 S. Pappalardi, 《量子多体疤痕产生广延多体纠缠》, Phys. Rev. Lett. 129, 020601 2022( )。[27] A. Kerschbaumer、M. Ljubotina、M. Serbyn 和 J.-Y. Desaules, 《里德堡模拟器中超越PXP模型的量子多体疤痕》, Phys. Rev. Lett. 134, 160401 2025( )。[28] A. Daniel、A. Hallam、J.-Y. Desaules、A. Hudomal、G.- X. Su、J. C. Halimeh 和 Z. Papi´c, 《通过多体疤痕跨越量子临界性》, Phys. Rev. B 107, 235108 2023( )。[29] A. Pizzi、L.-H. Kwan、B. Evrard、C. B. Dag 和 J. Knolle, 《多体自旋系统中的真正量子疤痕》, 《自然 · 通讯》 16, 10.1038/s41467-025-61765-3 (2025)。[30] F. Perciavalle、G. M. Rizzo、F. Plastina 和 N. L. Gullo, 《PXP模型中的局域回忆》(2025), arXiv:2509.19944 [量子物理]。[31] A. Banerjee, 《量子疤痕增强子系统动力学的非马尔可夫性》 (2025), arXiv:2507.23757 [量子物理]。[32] F. M. Surace、M. Votto、E. G. Lazo、A. Silva、M. Dal- monte 和 G. Giudici, 《受限量子链中的精确多体疤痕及其稳定性》, Phys. Rev. B 103, 104302 (2021)。[33] A. Eckardt 和 E. Anisimovas, 《从 Floquet 空间视角对周期驱动量子系统进行高频近似》, 《新物理学杂志》17, 093039 2015( )。[34] G. E. Santoro, *Introduction to Floquet Theory*, 讲义（SISSA, 的里雅斯特, 2019）。[35] A. Russomanno, *Periodic driving of a coherent quantum many body system and relaxation to the Floquet diagonal ensemble*, 博士论文, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA), 的里雅斯特 (2014), uRN: NBN:IT:SISSA-167576。[36] E. C. Domanti、D. Zappal`a、A. Bermudez 和 L. Amico, 《用于$\mathbb{Z}_2$ 规范理论禁闭的 Floquet-里德堡量子模拟器》, Phys. Rev. Res. 6, L022059 (2024)。[37] S. Geier、N. Thaicharoen、C. Hainaut、T. Franz、A. Salzinger、A. Tebben、D. Grimshandl、G. Z¨urn 和 M. Weidem¨uller, 《孤立多体自旋系统的 Floquet 哈密顿量工程》, Science 374, 1149–1152 (2021)。[38] M. Sato 和 T. N. Ikeda, 《开放量子与经典系统中的弗洛凯理论及其应用》, 《日本物理学会杂志》94, 10.7566/jpsj.94.111007 (2025)。

[39]M. Holthaus, 《周期驱动光学晶格准能带的Floquet工程》, 《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》49，013001 2015年( )。[40] D. Bluvstein、A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、S. Ebadi、T. T. Wang、A. A. Michailidis、N. Maskara、W. W. Ho、S. Choi、M. Serbyn、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin, 《控制驱动里德伯原子阵列中的量子多体动力学》, 《科学》371，1355–1359（2021年）。[41] P. Dutta、S. Choudhury 和 V. Shukla, 《连续准周期驱动下PXP模型的预热化》, Phys. Rev. B 111，064303（2025年）。[42] H. K. Park 和 S. Lee, 《受驱动PXP模型中的次谐波保真度复现》, Phys. Rev. B 107，205142（2023年）。[43] P. Dutta、K. L. Panigrahi 和 V. Shukla, 《利用双频驱动控制量子疤痕并实现次谐波响应》（ 2025 2508 12809 ）, [ ] arXiv: . cond-mat.quant-gas .[44] L.-Z. Tang、X. Li、Z. D. Wang 和 D.-W. Zhang, 《Floquet强希尔伯特空间碎片化促成的离散时间晶体》（2025年）, arXiv:2512.14182 [quant-ph]。[45] N. Maskara、A. A. Michailidis、W. W. Ho、D. Bluvstein、S. Choi、M. D. Lukin 和 M. Serbyn, 《量子多体疤痕促成的离散时间晶序：周期驱动下的纠缠操控》, Phys. Rev. Lett. 127, 090602（2021年）。[46] W. Deng 和 Z.-C. Yang, 《利用具有静态量子多体疤痕的模型，在周期驱动下产生时间晶体行为》, Phys. Rev. B 108，205129（2023年）。[47] X. Luo、Y. Zhou、Z. Xu 和 W. Jiang, 《里德伯原子链中的离散时间准晶体》（2025年）, arXiv:2505.09117 [quant-ph]。[48] A. Haldar、R. Moessner 和 A. Das, 《Floquet热化的起始》, Phys. Rev. B 97，245122（2018年）。[49] L. Staszewski、A. Haldar、P. W. Claeys 和 A. Wietek, 《遍历与动力学冻结Floquet系统的Krylov空间动力学》（2025年）, arXiv:2510.19824 [cond-mat.str- el]。[50] K. Seetharam、P. Titum、M. Kolodrubetz 和 G. Refael, 《有限孤立相互作用Floquet系统中不存在热化》, Phys. Rev. B 97，014311（2018年）。[51] Y. Hou、A. Pizzi、H. Jin、J. Knolle、R. Moessner 和 H. Zhao, 《Floquet过热》（ 2025 2511 12877 ）, [ ] arXiv: . cond-mat.stat-mech .[52] G. Giudici、F. M. Surace 和 H. Pichler, 《通过Floquet动力学揭示PXP多体疤痕》, Phys. Rev. Lett. 133，190404（2024年）。[53] X. Liang、Z. Yue、Y.-X. Chao、Z.-X. Hua、Y. Lin、M. K. Tey 和 L. You, 《在里德伯原子阵列中观测到反常信息混沌》, Phys. Rev. Lett. 135, 050201（2025年）。[54] K. Omiya 和 M. M¨uller, 《分数化为量子多体疤痕的局域投影算符嵌入铺平道路》, Phys. Rev. B 108，054412（2023年）。[55] B. Mukherjee、S. Nandy、A. Sen、D. Sen 和 K. Sen- gupta, 《通过Floquet工程实现量子多体疤痕的坍缩与复现》, Phys. Rev. B 101，245107（2020年）。[56] A. Haldar、D. Sen、R. Moessner 和 A. Das, 《强驱动Floquet物质中的动力学冻结与疤痕点：共振还是涌现守恒律》, Phys. Rev. X 11，021008（2021年）。[57] A. Lazarides、A. Das 和 R. Moessner，平衡

受周期驱动的一般量子系统的状态，Phys. Rev.E **90**, 012110（2014）。[58] T. Mori、T. N. Ikeda、E. Kaminishi 和 M. Ueda，《孤立量子系统中的热化与预热化：理论综述》，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》**51**, 112001（2018）。

[59] M. C.Ba˜nuls、J. I. Cirac 和 M. B. Hastings，《无限非可积量子系统的强热化与弱热化》，Phys. Rev. Lett. **106**，050405（2011）。[60] S. Kr¨amer、D. Plankensteiner、L. Ostermann 和 H. Ritsch，《Quantumoptics.jl：用于模拟开放量子系统的 Julia 框架》，Computer Physics Communications **227**，109–116（2018）。