arXiv:2602.02683v1 [hep-th] 2 Feb 2026

弦理论中的面积项与纠缠熵

Ben Craps,[a] **Marius Gerbershagen,**[a] **Maxim Pavlov,**[a] **Alejandro Vilar L´opez**[b]

[a]理论物理学，布鲁塞尔自由大学（*VUB*）及国际索尔维研究所，*Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium*[b]不列颠哥伦比亚大学物理学与天文学系，*6224 Agricultural Road, Vancouver, B.C. V6T 1Z1, Canada*电子邮件：Ben.Craps@vub.be，marius.gerbershagen@vub.be，Maxim.Dmitrievich.Pavlov@vub.be，alejandro.vilarlopez@ubc.ca

Abstract: 我们研究二维弦理论低能有效场论中的纠缠熵，以及对偶 $c = 1$ 矩阵量子力学单态扇区中的纠缠熵。从靶空间的视角出发，我们认为，一般体区域应对应一种广义纠缠熵，它由依赖于膨胀子的引力项和来自快子的物质贡献构成。鉴于此前对 $c = 1$ 模型中纠缠熵的分析并未发现引力类面积项，我们探讨了该项可能涌现的几种机制。我们证明，由连接靶空间快子与矩阵模型集体激发的腿极因子所诱导的非局域变换，无法解释类面积项的出现；并简要讨论了该项可能源自理论的非单态扇区。

目录

1 引言 **1**

2 对 $c = 1$ 理论的综述 **4**2.1 靶空间 42.2 $c = 1$ 矩阵量子力学 6

3 面积项 项 **8**

3.1 广义熵的紫外有限性 83.2 引力热力学、代数与广义熵 103.3 对不同论证的评论 13

4 矩阵模型的单态扇区中没有面积项 **14**

4.1 纠缠与玻色化 154.2 靶空间纠缠熵 164.3 数值结果 184.4 深入考察非局域变换 204.5 特征值空间纠缠 21

5 关于非单态与一般子区域的评论 **22**

5.1 非单态 225.2 如果非单态不产生面积项，会怎样？ 24

A 靶空间理论的协变相空间分析 **25****B 广义熵中的发散抵消** **28****C 关于玻色化与非局域变换的细节** **31**C.1 WKB 极限下的关联函数 33**D 非不变代数的纠缠** **35**

1 引言

在许多量子引力模型中，时空本身可以被理解为从一种对偶量子力学表述中的纠缠涌现而来。这种现象最突出的例子或许见于 AdS/CFT 对应，其中 Ryu-Takayanagi（RT）公式 [1] 将边界共形场论中的纠缠熵

与反德西特空间中的时空几何联系起来。然而，RT 公式所考虑的空间纠缠本身无法解释反德西特几何的所有特征。一般认为，要描述体区深处的区域，需要内部自由度 [2–8]，亚反德西特长度尺度上的局域性 [2, 9–11] 或者自顶向下的 AdS/CFT 框架中紧致内部空间的几何 [12–15]。这些内部自由度往往会组织成矩阵形式。于是，在矩阵量子力学（MQM）中可以看到一种极端情形：时空并非先验存在，所有几何都应从内部矩阵自由度之间的纠缠中涌现 [16–20]（参见 [21]综述）。

本文聚焦于与 $c = 1$ 二维弦理论[1] 相关的矩阵量子力学。简而言之，该模型包含以下要素：其世界面表述由一个与刘维尔理论耦合的玻色世界面场构成，从而在由玻色子和刘维尔场张成的二维靶时空中形成一种临界弦理论。其低能有效场论由与标量场耦合的二维膨胀子引力构成。微扰弦理论可以改写为具有倒置谐振子势的双重标度矩阵量子力学。因此，用矩阵量子力学变量描述该模型中的二维靶时空背景，是涌现时空的一个有趣例子，它不属于通常的 AdS/CFT范式。

$c = 1$ 模型中的纠缠已在 [27, 28]中进行过研究。在本文中，我们聚焦于与这些结果相关的一个此前未受关注的特定难题。一般而言，在引力理论中，衡量子区域 $\mathcal{R}$ 纠缠的一个定义良好的量是广义熵，它由一项与子区域边界面积成正比的引力部分，以及子区域 $\mathcal{R}$ [29]中物质场的纠缠熵之和给出，

$$S_{\text{gen}}(\mathcal{R}) = \frac{A_{\partial\mathcal{R}}}{4G_N} + S_{\text{mat}}(\mathcal{R}). \tag{1.1}$$

在二维膨胀子引力模型中，例如构成 $c = 1$ 弦理论低能有效场论的模型，子区域边界的面积通常由子区域边界处的膨胀子取值代替（在二维中，子区域边界只是一组点），例如参见 [30]。[2] 然而，先前关于 $c = 1$ 矩阵模型中纠缠的研究完全没有这类面积项 [27, 28]。相反， [27, 28] 的结果可以解释为仅给出了物质场对广义熵的贡献，即 $c = 1$ 模型中的快子，这一点已在 [16]中指出。特别是，文献 [28] 发现

$$S = \frac{1}{3}\log\frac{\mu(x_2 - x_1)}{\sqrt{g_s(x_1)g_s(x_2)}} + \dots, \tag{1.2}$$

其中 x_1， x_2 是区间 $\mathcal{R}$ 的端点，点号表示额外项，其计算不完全可靠，但并不对应面积项。

[1]关于这一主题的综述包括 [22–26]。[2]为简化术语，以下有时会将这类类面积项简称为面积项。

方程 (1.2) 与二维自由标量场的纠缠熵 $S = \frac{1}{3}\log((x_2 - x_1)/\varepsilon)$ 相同，其紫外截断 $\varepsilon = \sqrt{g_s(x_1)g_s(x_2)}/\mu$ 由弦耦合设定，从而确立了二维弦理论中纠缠熵的有限性。

表面上的不匹配出现在（1.1）与（1.2）之间，这引出了我们研究的核心问题：

在 $c = 1$ *2*维弦理论中，广义熵是否存在类面积项？如果存在，应在对偶矩阵量子力学中何处找到它？

在简要回顾 $c = 1$ 模型及其对偶矩阵量子力学表述（见第2节）之后，我们讨论与上述问题相关的以下几点。

在第3节中，我们提出若干论证——这些论证虽不足以构成完全决定性的证明，但支持 $c = 1$ 模型中存在面积项。尽管 Susskind 和 Uglum [29]所给出的、表明广义熵的面积项与物质项之间紫外发散相消的论证，在二维中并不能以同样方式成立（紫外发散改由拓扑项抵消），但其他表明高维中存在面积项的论证可以推广到 $c = 1$ 设定。具体而言，我们研究低能有效场论中的引力热力学，以及基于引入额外观察者自由度的代数方法。这两项计算都表明应当存在面积项。

这就引出了一个问题：在与 $c = 1$ 模型对偶的矩阵量子力学中，面积项在哪里？换句话说，在矩阵量子力学的哪些自由度之间计算纠缠熵，才能重现与有效场论所定义的靶时空区间相关联的广义熵？

寻找面积项有两个自然的切入点。第一种是将有效场论中的快子场与一个标量场相联系的非局域变换；后者描述矩阵量子力学单态扇区中费米能级之上的激发所构成的集体场论（详见第2 节）。这种变换源自额外的“腿极点”因子；为了使世界面弦振幅与矩阵量子力学中的相应计算相匹配，需要引入这些因子 [22, 31, 32]。已有研究表明，这种非局域变换编码了快子场的引力散射效应 [32]。此前对 $c = 1$ 模型 [27, 28] 中纠缠熵的计算，仅限于研究矩阵量子力学单态扇区本征值空间中某个区间的纠缠。因此，这些计算无法显现非局域变换的影响。鉴于这种变换编码了快子散射中的引力效应，自然可以预期它也会编码纠缠熵中的引力效应。正如第4节所示，我们确实发现了这一点。然而，对于远离快子墙的区间，这些效应只是对物质熵的微扰修正，而非面积项所预期的大幅偏离。因此，我们得出结论：非局域变换不会在纠缠熵中产生面积项。

面积项可能出现的第二个自然来源，是非单态对纠缠熵的贡献。此前的讨论以及第4节的讨论，都只考虑了矩阵量子力学单态扇区自由度之间的纠缠。虽然这一扇区能够正确描述基态的小幅激发所对应的物理学[22]，，但有效场论中的黑洞几何等更大的效应并不能仅由单态描述 [33]。因此，既然面积项并非源自非局域变换，自然可以预期它会体现在非单态的贡献中。尽管验证这一预期不在本文讨论范围之内，我们仍在第5.1节对这一问题作了一些评论。乍看之下，由于偏迹的线性性，完全由单态自由度构成的基态中的纠缠熵似乎不应包含任何非单态贡献。然而，通过对矩阵自由度进行适当的二分划分，非单态也会对纠缠熵有所贡献；我们将在附录D中借助可区分粒子与不可区分粒子这一更简单的情形来说明这一点。因此，非单态贡献可能决定矩阵量子力学广义熵中的面积项，不过目前尚不清楚应如何对非单态自由度进行二分划分。

我们在第 5.2 节总结全文，并对上述分析提出一些谨慎的评论。讨论中隐含的假设是，低能有效场论中的一般空间子区域，在矩阵量子力学中对应一个定义良好的子系统。要使关于矩阵量子力学中是否存在面积项的问题本身具有明确意义，这一假设是必要的。然而，近期的论证提出，只有广义纠缠楔才与定义良好的子系统相关联，这使得这一假设受到质疑 [34, 35]。这类论证是否适用于 $c = 1$ 模型仍是一个开放问题；我们将讨论若答案为肯定，这会对关于面积项的讨论产生何种影响。

2 $c = 1$ 理论回顾

本节将简要回顾 $c = 1$ 模型的靶空间描述和矩阵量子力学描述，主要是为了确立我们的约定。第三种描述是世界面视角，我们在本文中不会采用；将在脚注 3中对此作简要评论。

2.1 靶空间

从靶空间的角度来看，玻色弦在二维背景中传播。该背景必须满足低能有效理论的运动方程；该理论是一个膨胀子引力模型，其中还包含一个额外的无质量场，传统上称为快子（因为它来自与高维中产生快子模的玻色弦激发相同类型的玻色弦激发）。我们将其拆分为

$$\mathcal{I} = a_1 \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_T \,, \tag{2.1}$$

其中 a_1 是一个待定常数， $\mathcal{I}_0$ 是膨胀子引力部分

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-G}e^{-2\Phi}\left(R + \frac{16}{\alpha'} + 4(\partial\Phi)^2\right), \tag{2.2}$$

以及 $\mathcal{I}_T$ 快子部分

$$\mathcal{I}_T = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-G}e^{-2\Phi}\left(-(\partial T)^2 + \frac{4}{\alpha'}T^2 - 2V(T)\right). \tag{2.3}$$

势 $V(T)$ 包含快子自相互作用，而这些相互作用与我们的讨论无关，因此我们不对其作具体说明。

我们聚焦于该理论的一个特定线性膨胀子解。对于度规和膨胀子，该解为

$$G^{(0)}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\phi^2\,, \qquad \Phi^{(0)} = \frac{2\phi}{\sqrt{\alpha'}} \equiv \frac{2\phi}{\ell_s}\,. \tag{2.4}$$

请注意，有效弦耦合的行为为 $e^{2\phi/\ell_s}$，当 $\phi \to -\infty$ 时会呈指数级减弱。在该弱耦合区域，我们可以从线性化运动方程求得领先阶快子剖面

$$T^{(0)} = \left(b_1\frac{\phi}{\ell_s} + b_2\right)e^{2\phi/\ell_s}\,, \tag{2.5}$$

常数 b_1 和 b_2 的取值如下。背景（$G^{(0)}$， $\Phi^{(0)}$， $T^{(0)}$）在 $T^{(0)}$ 的幂次展开中，满足每个运动方程至领先的非平凡阶——这些方程的具体形式见（A.3）。在更高阶，我们需要同时考虑场和有效作用量中的修正，包括快子自相互作用 [36]。我们的讨论将完全局限于弱耦合区域$\phi/\ell_s \to -\infty$，因此领先阶解已足够。[3]

在这一背景下，相关的物理过程是从 $\phi \to -\infty$进入的闭弦发生散射，在指数型快子墙附近相互作用，然后反射回渐近区域。下文讨论的矩阵量子力学模型精确地描述了这一背景下的二维弦理论。事实上，通过匹配靶空间与矩阵模型的散射振幅，可以确定上述常数为 $a_1 = 1/2$， $b_1 = \mu/\sqrt{4\pi}$ 以及 $b_2 = -b_1(1 + 4\Gamma'(1) - \log\mu)$ [32], 其中 μ 是一个矩阵模型参数，其定义见 (2.8)。[4]

[3]从世界面视角来看，这个背景源自一个已知的共形场论：一个提供类时维度的 $c = 1$ 自由标量场，加上 Liouville 共形场论 $c = 25$ （以及微分同胚鬼场）。关于经典综述，参见 [22–25] ； 关于最新方法，参见 [37] ； 关于背景的高阶修正的评论，参见 [23, 24] 。[4]类似的计算确定了快子势中的第一个相互作用项为 $V(T) = -2\sqrt{2}T^3/(3\alpha')$，但这与我们的讨论无关。

2.2 $c = 1$ 矩阵量子力学

为了引入 $c = 1$ 矩阵量子力学模型，考虑一个 $N \times N$厄米矩阵 M，其动力学由以下作用量控制

$$\mathcal{I} = \beta N \int \mathrm{d}t \ \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\dot{M}^2(t) - V(M(t))\right) \tag{2.6}$$

其势在原点处有一个最大值，例如，[5]

$$V(M) = \frac{1}{4}M^2(M^2 - 2)\,. \tag{2.7}$$

低能物理学涉及在 $SU(N)$对称性下不变的单态。这些单态由矩阵的 N本征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 来表征，它们表现为 N 在势$V(\lambda)$ [38]作用下运动的独立费米子。

在大N 极限下，众所周知，当 β （从上方）趋近某个临界值 β_c时，该系统会出现临界行为；该临界值取决于势的具体形式——对于前面的例子，为 $\beta_c = 3\pi/2$ [22, 25]。这可以如下理解。从费米子的角度来看，我们在 $\lambda = 0$处最大值左侧的谷中占据 N 个态，直至某个费米能级 $-E_F < 0$。[6] βN 扮演有效 $\hbar^{-1}$的角色，因此能级间距为$(\beta N)^{-1}$量级。由于有 N 个被占据能级，被占据能量范围的尺度为 β^{-1}，因此当我们减小 β 时，存在一点，使得费米能级（由 β决定）越过零能量处势垒的最大值。趋近这一点，即取 $\beta \to \beta_c$ 使得 $E_F \to 0^+$，我们便得到临界行为。

可以通过双重标度极限逼近临界点，而在这一范围内，矩阵系统为上一节讨论的背景中的二维弦理论提供了一个对偶描述。具体做法是取

$$N \to \infty\,, \qquad \beta \to \beta_c\,, \qquad \beta N E_F(\beta) \equiv \mu \ \text{ fixed}\,. \tag{2.8}$$

注意， E_F此处指的是按 $p^2/2 + V(\lambda)$归一化的能量，也就是说，我们按照上文所述，将βN 吸收到一个有效的 $\hbar^{-1}$ 中。因此， $N \to \infty$ 极限使理论成为经典理论，我们可以用费米海之上的激发来描述它。将特征值坐标重新标度为 $x = (\beta N)^{1/2}\lambda$后，费米海的表面为

$$\frac{p^2}{2\beta N} + \frac{x^2}{4\beta N}\left(\frac{x^2}{\beta N} - 2\right) = -E_F\,. \tag{2.9}$$

正如 $\beta N \to \infty$，原始势中的相互作用可以忽略：双标度极限以这样一种方式聚焦于势的极大值附近，使得高阶项

[5]除非另有说明，本文余下部分均采用 $\alpha' = \ell_s = 1$ 的单位制。[6]在有限的 N下，各态应会扩散到有限势垒的两侧。不过，我们关注的是大-N 极限，此时各态可以局域在其中一侧。

变得可以忽略。这是一条普遍的结论，无论我们最初所采用的$V(\lambda)$的具体形式如何都成立。于是，费米海便是相空间中的曲线

$$\frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2} = -\mu\,. \tag{2.10}$$

该方程可视为参数 μ 在双重标度极限下的定义：它给出平衡费米面的取值。事实上，分析双重标度矩阵量子力学的微扰展开，可以发现它再现了具有弦耦合 $g_s \sim \mu^{-1}$[22, 25]的弦理论的拓扑展开。从弦理论的视角来看， μ 因此设定了耦合强度。[7]

为了与靶空间图像建立联系，用刻画费米面之上激发的集体场来重新表述费米子理论是方便的 [39, 40]。在二次量子化中，费米子理论的哈密顿量由下式给出

$$H = \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\mu - \frac{x^2}{2}\right)\psi^\dagger\psi\right]. \tag{2.11}$$

将标准玻色化方案应用于费米子理论，得到哈密顿量 [22]

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \Bigg[&\bar{\Pi}^2 - (\partial_\tau \bar{S})^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu\sinh^2\tau}\left(\bar{\Pi}^2\partial_\tau\bar{S} + \frac{1}{3}(\partial_\tau\bar{S})^3\right) \\ &+ \frac{\partial_\tau\bar{S}}{8\mu\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{3\sinh^2\tau} + \frac{1}{\sinh^4\tau}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 S 是描述费米海之上激发的集体场， Π 为其正则共轭动量，而 τ 为所谓的“飞行时间”坐标，定义为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = v(x) = \sqrt{x^2 - 2\mu}\,. \tag{2.13}$$

这里， $v(x)$ 是沿着费米海上的经典轨迹运动的粒子的速度。请注意，虽然相对论背景下的玻色化将自由费米子与自由玻色子联系起来，但在我们所考虑的非相对论理论中，玻色哈密顿量包含三次相互作用项。

集体场描述与靶空间图像密切相关，在后者中，唯一的传播自由度是无质量快子。不过，这里有一个重要且非平凡的要素。将集体场展开为模

$$\bar{S}(t,\tau) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\omega}\left(\bar{\alpha}_+(\omega)e^{i\omega(t-\tau)}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{-i\omega/2} + \bar{\alpha}_-(\omega)e^{i\omega(t+\tau)}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{i\omega/2}\right), \tag{2.14}$$

其中 $\bar{\alpha}_\pm(\omega)$ 是动量空间的产生/湮灭算符。在靶空间理论中，我们定义一个重新缩放的快子场 $S(t,\phi) = e^{-2\phi}T(t,\phi)$，并将其展开为

[7] 一如既往，这一说法需要采用一种约定来固定膨胀子平移对称性。按照我们写出背景的方式（2.4）和（2.5），它实际上的意思是，当 $e^{2\Phi} \sim 1$ 时，快子墙的强度为 b_1， $b_2 \sim \mu$。

各模态的形式：

$$S(t,\phi)=\frac{1}{i\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\omega}\left(\alpha_{+}(\omega)e^{i\omega(t-\phi)}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{-i\omega/2}+\alpha_{-}(\omega)e^{i\omega(t+\phi)}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{i\omega/2}\right). \quad (2.15)$$

¯的动力学 S 由从矩阵量子力学推导出的费米子理论决定，而 S 的动力学则来自靶空间有效作用量。在两种理论中计算散射振幅，树级S矩阵是一致的，前提是动量空间中的产生湮灭算符通过“腿极”因子 [41–43]相关联

$$\alpha_{\pm}(\omega)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm i\omega/4}\frac{\Gamma(\pm i\omega)}{\Gamma(\mp i\omega)}\bar{\alpha}_{\pm}(\omega)\,. \quad (2.16)$$

腿极因子在动量空间中相当于一种局域变换，但它们会在实空间的场之间诱导出一种非局域变换 [32],

$$S(t,\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau K(\phi-\tau)\bar{S}(t,\tau)\,, \quad (2.17)$$

其中积分核为

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}e^{i\omega\tau}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-i\omega/4}\frac{\Gamma(-i\omega)}{\Gamma(i\omega)}=-\frac{z}{2}J_1(z)\,,\qquad z=2(2/\pi)^{1/8}e^{\tau/2}\,. \quad (2.18)$$

这一变换在靶空间有效理论中产生引力散射。在矩阵模型中，由于该理论具有非相互作用的性质，费米子激发将在谐振子势中不受干扰地传播，因此在这种描述下不会发生散射。然而，在靶空间图像中，快子激发会产生引力场，进而使其他入射快子发生散射。这种散射效应编码在非局域变换（2.17） [32]中。

3 靶空间有效场论中的面积项

本节将从靶空间有效理论（2.1）出发，论证靶空间子区域的熵中存在类面积项（即依赖于膨胀子取值的指数项）。为简单起见，我们主要关注单一区间。

3.1 广义熵的紫外有限性

Susskind 和 Uglum 的一个经典论证 [29]长期以来一直被视为一种迹象，表明在引力理论中，广义熵是一个比将其各组成部分分别考虑时具有更好紫外性质的量（即引力类面积贡献和物质纠缠熵）——参见 [44] 对该主张的详细综述。在二维以上，余维1空间区域 $\mathcal{R}$ 的广义熵由下式给出

$$S_{\mathrm{gen}}(\mathcal{R})=\frac{A_{\partial\mathcal{R}}}{4G_N}+S_{\mathrm{mat}}(\mathcal{R})\,, \quad (3.1)$$

其中 $A_{\partial\mathcal{R}}$ 是 $\mathcal{R}$边界的面积，且 $S_{\rm mat}(\mathcal{R})$是 $\mathcal{R}$的依赖域中场的约化态的冯·诺依曼熵。我们隐含地假定，该理论是与某些物质场最小耦合的广义相对论；更一般的理论（例如含高曲率项的理论）会在引力熵中获得额外贡献。在二维理论（2.1）中，广义熵的类似表达式为

$$S_{\rm gen}(\mathcal{R}) = 2\pi a_1 e^{-2\Phi}\big|_{\partial\mathcal{R}} + S_{\rm mat}(\mathcal{R})\,, \tag{3.2}$$

现在 $\partial\mathcal{R}$ 是界定一维区域 $\mathcal{R}$的点集，而快子是唯一对物质熵有贡献的场。引力项的形式，包括其特定系数和膨胀子依赖性，将在下一小节和附录 A 中通过协变相空间分析加以论证。目前，我们暂且将其视为既定事实，并指出，膨胀子引力中的这种引力贡献形式已在文献中得到广泛讨论 [45–47]。

Susskind-Uglum 论证的核心如下。在广义熵（3.1）中，进入面积项的裸引力耦合和体物质场的熵都是紫外发散量。如果分别计算这些发散，在大多数情况下它们会相互抵消，从而得到有限的广义熵；该广义熵以重整化引力耦合和减去了紫外发散的体物质熵表示。下面我们简要讨论这一论证有多少可以扩展到理论（2.1）。正如 [29], 已经指出的那样，这种情况具有一些不同于标准高维引力模型的特殊特征。

第一步是计算积分掉快子后产生的有效作用量，因为它决定了引力耦合的重整化。本节中我们采用欧几里得符号。详情见附录B，积分掉（2.3）中的快子后得到的有效作用量（忽略自相互作用）包含一项与二维共形反常积分成正比的紫外发散项[48, 49]。其中，曲率依赖项为

$$W \supset \frac{1}{48\pi}\int \mathrm{d}^2x\sqrt{G}\,\log\left(\epsilon^2\right) R\,, \tag{3.3}$$

采用 ϵ 长度截断。注意，这一项不含膨胀子因子 $e^{-2\Phi}$，因此不会对 a_1 （2.1）进行重整化。相反，我们可以设想在有效作用量中添加一个如下形式的额外项

$$-b_B\int \mathrm{d}^2x\sqrt{G}\,R\,, \tag{3.4}$$

其中 b_B 是裸耦合。请注意，这一项不会影响动力学，因为在二维中对 R 积分只会得到流形的欧拉示性数。前面的结果表明，单圈重整化值为

$$b = b_B - \frac{1}{48\pi}\log\left(\epsilon^2\right). \tag{3.5}$$

在作用量中加入这一项（3.4）会在引力熵中产生一个额外项。导出式（3.2）（或附录 A）中的计算所依据的逻辑基本相同，由此得到区间（ϕ_L，ϕ_R）的新候选广义熵

$$S_{\rm gen} = 8\pi b_B + 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_L)} + 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_R)} + S_{\rm mat}\,, \tag{3.6}$$

其中，$S_{\rm mat}$ 表示区间内快子场约化态的冯·诺依曼熵。注意，第一项合并了区间两端边界的贡献（每个边界的贡献为$4\pi b_B$ ）。快子是在平坦线性膨胀子背景中传播的无质量标量场，因此其在区间上的熵已知为 [50]

$$S_{\rm mat} = \frac{1}{3}\log\left(\frac{\phi_R - \phi_L}{\epsilon}\right)\,. \tag{3.7}$$

很容易验证，这个紫外发散提供了必要的项，可将b_B 转化为其重整化值。

正如 [29], 中已经发现的，在二维膨胀子引力模型中，物质场重整化的是作用量中的拓扑项，而非 $e^{-2\Phi}R$ 项。从这一角度看，Susskind-Uglum 论证的地位不同于高维情形：广义熵中存在与 $e^{-2\Phi}$ 成正比的项并未被排除，但要获得具有良好紫外行为的量，也并非必需。我们将在第3.3节对这一事实作出批判性评估，现在转而讨论其他表明存在类面积项的论证。

3.2 引力热力学、代数与广义熵

众所周知，靶空间有效理论（2.1）支持黑洞解[51–53]。存在视界时，推导黑洞熵的形式及其所满足的第一定律，一个简便的方法是采用协变相空间方法 [54, 55]。尽管我们关注的是不存在黑洞的线性膨胀子背景，但首先了解类面积项如何出现在二维理论（2.1）的黑洞熵中，将会有所助益。本节将频繁使用附录 A中汇集的技术结果；该附录回顾了应用于理论（2.1）的协变相空间形式的基本要素。

考虑理论（2.1）中具有分叉视界的黑洞解，并令$\mathcal{R}$ 为一条从分叉面 $\mathcal{B}$ 延伸至空间无穷远的类时切片，我们将其记为 $\mathcal{B}_\infty$。令 ξ 为生成该分叉视界的 Killing 矢量，它在分叉面上满足 [54, 56]

$$\xi^\mu|_{\mathcal{B}} = 0\,, \qquad \nabla_\mu \xi_\nu|_{\mathcal{B}} = \kappa\,\epsilon_{\mu\nu}\,, \tag{3.8}$$

其中 κ 是表面引力，$\epsilon_{\mu\nu}$ 是时空的体积形式。[8] 鉴于ξ 是一个 Killing 矢量，附录 A中的分析得出恒等算子（A.13），

$$0 = (\delta Q_\xi - \xi\cdot\Theta)|_{\mathcal{B}_\infty} - (\delta Q_\xi - \xi\cdot\Theta)|_{\mathcal{B}}\,, \tag{3.9}$$

[8]在高维中，$\epsilon_{\mu\nu}$ 的作用由分叉面的双法向形式承担。在二维中，双法向形式与时空体积形式重合。

其中 Q_ξ 由（A.10）给出，

$$Q_\xi = -\frac{e^{-2\Phi}}{2} a_1 \epsilon^{\mu\nu} \left(\nabla_\mu \xi_\nu - 4\xi_\mu \nabla_\nu \Phi\right) , \tag{3.10}$$

并且 $\xi \cdot \Theta$ 由（A.5）得到，

$$\xi \cdot \Theta = a_1 e^{-2\Phi} \left[4\delta\Phi \nabla^\rho \Phi + g^{\mu[\rho}\nabla^{\nu]}\delta g_{\mu\nu} + 2\left(g^{\mu[\rho}\nabla^{\nu]}\Phi\right)\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{a_1}\delta T \nabla^\rho T\right] \xi^\sigma \epsilon_{\rho\sigma} . \tag{3.11}$$

在前面的表达式中， δ 应解释为从一个解到其邻近解的一阶变分（例如，定义黑洞的参数发生微小变化）。

我们可以利用 $\mathcal{B}$ 处 Killing 场的性质（汇总于3.8）将其改写为 (3.9)

$$\delta Q_\xi|_{\mathcal{B}} = a_1 \kappa \, \delta e^{-2\Phi}\big|_{\mathcal{B}} = (\delta Q_\xi - \xi \cdot \Theta)|_{\mathcal{B}_\infty} . \tag{3.12}$$

这就是黑洞视界的经典第一定律。在渐近边界处计算右侧，将得到来自荷的贡献，而视界部分则给出熵变分。根据表面引力将霍金温度识别为 $T_H = \kappa/(2\pi)$ 后，熵的类面积形式为

$$S_{\rm BH} = 2\pi a_1 e^{-2\Phi}\big|_{\mathcal{B}} . \tag{3.13}$$

值得注意的是，这一结果与基于黑洞热力学的欧几里得方法进行的计算一致 [45, 46]。

既然黑洞视界存在这一面积项，那么有理由预期，在任意空间子区域的边界处，熵中也会出现这样的引力贡献。然而，若不存在黑洞，仅凭一个在黑洞视界存在时才有效的结果，来论证一般子区域中存在类面积项，仍然令人不满意。下面考虑我们所关注的情形，即平直的二维闵可夫斯基时空中，一个区间（ϕ_L， ϕ_R）的依赖域所形成的因果菱形（我们将该区间置于 $t = 0$）。在线性膨胀子背景（2.4）中，我们设想该区间取在 ϕ_L 和 ϕ_R取较大负值的位置，从而它完全处于存在半经典时空的区域之内。

引入一个新坐标 y ，其原点位于区间的中点，此时区间变为 $y \in (-L/2, L/2)$。该因果菱形对应的共形 Killing 矢量明确写为 [57]

$$\zeta = \frac{(L/2)^2 - t^2 - y^2}{L}\partial_t - \frac{2ty}{L}\partial_y . \tag{3.14}$$

该矢量的流将菱形映射到自身， ζ 在区间的边界处消失，并且

$$\nabla_\mu \zeta_\nu|_{t=0,y=L/2} = -\epsilon_{\mu\nu} , \quad \nabla_\mu \zeta_\nu|_{t=0,y=-L/2} = \epsilon_{\mu\nu} . \tag{3.15}$$

鉴于 ζ 在区间的边界处消失 $\mathcal{R} = (-L/2, \ L/2)$，我们可以得到关系式（A.14），

$$H_\zeta^{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} F_\zeta + \int_{\partial\mathcal{R}} Q_\zeta = \int_{\mathcal{R}} F_\zeta - a_1 e^{-2\Phi(\phi_R)} - a_1 e^{-2\Phi(\phi_L)} . \tag{3.16}$$

这里， $H_\zeta^{\mathcal{R}}$是一个哈密顿函数，它生成沿 ζ 对 $\mathcal{R}$ 内的场进行微分同胚变换， Q_ζ 已根据（3.10）求得，而 F_ζ 是由（A.9）给出的一形式：

$$F_\zeta = -a_1 e^{-2\Phi}\zeta_\lambda \mathcal{E}^{\lambda\mu}\epsilon_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu\,, \tag{3.17}$$

以及 $\mathcal{E}^{\lambda\mu}$ 由（A.3）得到的度规运动方程

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\mu\nu} =& -R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - 2\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi + \frac{1}{a_1}\nabla^\mu T\nabla^\nu T \\ &+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(4\nabla^2\Phi - 4\left(\partial\Phi\right)^2 + 16 - a_1^{-1}\left(\left(\partial T\right)^2 - 4T^2 + 2V(T)\right)\right)\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

注意，在（3.16）中，这是对 $\mathcal{R}$进行积分的，因此相关运动方程有一个平行于 $\mathcal{R}$的分量。这因而是 $\mathcal{R}$中的一个约束方程。现在我们可以将（3.16）的核心内容概括如下：沿 ζ 在 $\mathcal{R}$ 中生成微分同胚的哈密顿量，是对 $\mathcal{R}$ 上的约束方程进行积分，再加上一个与 $e^{-2\Phi}$成正比的边界项。

这可以通过两种方式加以利用，而这两种方式都表明存在一个由该膨胀子指数给出的类面积项。第一种方式是考察相邻解之间的变分。在这种情况下，我们得到局部子区域的经典第一定律，

$$\delta H_\zeta^{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2\pi}\delta S\,, \tag{3.19}$$

其中

$$S = S_L + S_R = 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_L)} + 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_R)} \tag{3.20}$$

并且我们利用了 $F_\zeta = 0$ 在壳这一点。在高维情况下也得到了类似结果，并对此进行了广泛讨论 [57, 58]。有人提出，该方程具有热力学解释 [58], ；在这种情况下，我们需要将区间边界点的贡献归入熵项。此外，在半经典近似下向左端加入量子修正，可以证明物质场的模哈密顿量贡献会将右端变为广义熵 [58]。我们得出结论：如果 S 确实可以解释为微观熵（我们将在本节末尾对此作进一步评论），那么这种熵包含一个关于膨胀子的指数型贡献。

另一个表明我们应当在广义熵中纳入此类面积项的线索在于：若将我们的讨论与近期关于引力理论中一般子区域的算子代数的进展联系起来 [59]——参见 [60, 61]以了解相关的先前工作。在这一设定中，我们停留在弱引力区域（在我们的情形中，远离快子墙），并按引力耦合进行微扰处理。在对所得理论进行量子化时，我们必须要求物理算子是微分同胚不变的，这相当于它们与引力约束的对易子为零。为使这一条件不至于使所得的局部代数完全平凡化，一种常见做法是将一个辅助观察者自由度引入至

该区域 $\mathcal{R}$ [60]，通过其应力-能量张量与度规普遍耦合。如果我们现在考虑与由矢量场生成的微分同胚相关联的约束，该矢量场匹配（3.14）在以如下量为参考的邻域内： $\mathcal{R}$，由（3.16）可得

$$\int_{\mathcal{R}} F_\zeta = H_\zeta^{\mathcal{R}} + H^{\rm obs} + a_1 \left(e^{-2\Phi(\phi_L)} + e^{-2\Phi(\phi_R)} \right) . \tag{3.21}$$

其中 F_ζ 给出了准局域约束。请注意， F_ζ 中运动方程里的应力张量现在包含一项来自辅助观察者的贡献，因此右边出现了额外项。

在一些技术性假设下（有关这些假设的详情以及为何预期它们成立，请参阅原文 [59] ），要求上述约束与子区域 $\mathcal{R}$中的所有算子对易，会得到一个 II 型代数，并且该代数具有定义良好的熵概念（其定义仅差一个加性且与状态无关的常数）。对于一般的态，这个熵的形式为

$$S(\rho_{\hat{\Phi}}) = \langle S_L + S_R \rangle_{\hat{\Phi}} + S_\Phi^{\rm mat} + S^{\rm obs} + {\rm const} \, , \tag{3.22}$$

ˆ其中 Φ 是完整系统（包括观察者）的一个态， Φ是相应的原始量子场的态（不包括观察者）， $S_\Phi^{\rm mat}$是它的纠缠熵，且$S^{\rm obs}$ 是观察者的熵。这具有广义熵的形式，其中 $S_L + S_R$如（3.20）所示，起到类面积项的作用。[9] 熵中出现这一项，是因为准局域约束（3.21）中也直接包含了这一项 [59]。

3.3 对不同论证的评论

在前几节中，我们讨论了不同的论证，这些论证表明，该理论的线性膨胀子背景下子区域的熵中存在一个类面积项（2.1）。这里我们将简要评估这些论证究竟能得出什么结论。

Susskind-Uglum 论证在二维膨胀子引力理论中的地位，与其在高维引力中的地位不同。这是因为它重整化的是作用量中拓扑项的耦合，而非实际动力学项 $e^{-2\Phi} R$ 的耦合。因此，我们无法从这一构造得出结论：为了获得具有良好紫外性质的广义熵，就需要一个随膨胀子的指数函数缩放的类面积项。

不过，这一论证当然并未排除加入此类项的可能性。此外，在近期关于岛以及它们如何解决二维体系中的信息问题的讨论中，同时考虑这两项（依赖膨胀子的项和拓扑项）至关重要 [30]。在这些模型中，我们讨论过的同一特征也得到了体现：

[9]值得注意的是，鉴于我们此前对 Susskind-Uglum 论证的分析，这个广义熵似乎存在紫外发散。考虑到它是通过严格的代数构造得到的，这或许令人费解。这个谜题的答案在于那个未确定的常数：在二维中，物质熵的发散只是一个常数，可以吸收到该常数中。或者，也可以认为拓扑项已包含在那个未确定的常数中。

重整化只会影响拓扑耦合。因此，尽管依赖膨胀子的项与广义熵的紫外性质并无直接关联，但预计它仍会出现。

对这一结论的进一步支持，来自对靶空间理论中引力热力学的研究。我们发现，依赖膨胀子的熵贡献不仅出现在黑洞视界的第一定律中，也出现在平直时空中因果菱形的等价关系中。但我们不能立即据此断定，存在某种微观熵量，能够再现因果菱形的引力第一定律中得到的类熵项（这与黑洞视界的情形不同；对于后者，我们确实期待能将其解释为微观态数目）。[10]不过，这无疑是一个有力的迹象：如果一般子区域的熵存在某种微观定义，那么其中就包含一项由 $e^{-2\Phi}$ 加权的类面积项。

对于导出广义熵的代数论证（3.22），也有类似的评论。在这种情况下，我们可以在靶空间理论中进行严谨的构造，将所提出的熵与实际的代数熵联系起来，但所需的额外要素——纳入一个观察者自由度——在一定程度上削弱了这一结果。事实上，我们并不清楚对偶矩阵量子力学将如何描述这个观察者，而且在单态扇区真空中肯定不存在这样的观察者。尽管如此，能够在靶空间中构造出一种子区域熵，且其中出现了依赖膨胀子的项，仍令人欣慰。

总而言之，在高维中指向有限子区域熵中存在面积项的大多数论据，在靶空间理论中似乎都有对应的版本（2.1）。相应的二维项取决于子区域边界处膨胀子的取值。在线性膨胀子背景（2.4）中，这会产生一个随区间端点位置呈指数变化的项。鉴于矩阵量子力学的双重标度极限（2.6）有望为该理论提供微观定义，因此自然会预期这一贡献能由它捕捉到。在接下来的章节中，我们将讨论这种项可能（以及不可能）隐藏在哪里。

4 矩阵模型单态扇区中没有面积项

本节将说明如何从 $c = 1$ 2d 弦理论的矩阵模型描述中计算纠缠熵。我们将完全在矩阵模型的单态扇区中进行讨论。与 [27, 28]，不同，我们将计算靶空间中一个区间的纠缠熵，而非本征值空间中的纠缠熵。

计算目标空间纠缠需要两个步骤。首先，采用一种玻色化方案，将本征值空间上的费米子改写为玻色集体场变量。相关内容将在第 4.1 节讨论。随后，通过以下方式将目标空间快子的关联函数与本征值空间上集体场的关联函数联系起来：

[10]我们将在第 5.2 节对此作进一步阐述。

一种非局域积分变换，它编码了在目标空间中散射的快子之间的引力相互作用 [32]。在第 4.2 节中，我们说明如何在纠缠熵的数值计算中考虑这种非局域变换。从第 4.3 节所绘制的数值数据可以看出，非局域变换会对 [28] 中计算得到的纠缠熵产生修正。不过，当牛顿常数较小时，这些修正也很小。对于关联函数，修正随 G_N [32] 的正幂次变化；对于纠缠熵，我们在数值计算中同样只发现了很小的修正。因此，纠缠熵中不存在类面积项，因为该项会随 $1/G_N$ 变化。我们将在第 4.4 节直观地解释其中的原因。最后，在第4.5 节中，我们检验了将计算方法应用于本征值空间纠缠熵时，其结果与 [28] 的方法一致。

4.1 纠缠与玻色化

在转向第 4.2 节讨论目标空间纠缠之前，我们先简要说明一下与玻色化映射相关的、本征值空间中纠缠定义的一些微妙之处。

矩阵量子力学本征值空间中的纠缠熵为 $S_A = -\mathrm{Tr}(\rho_A \log \rho_A)$，其中 ρ_A 是与（双重标度）本征值空间中的子区域 A 相关联的约化密度矩阵，该空间由 $x \in \mathbb{R}$ 参数化。一个重要的概念性问题是，由于联系式（2.11）和式（2.12）的玻色化映射具有非局域性，人们可能会认为，约化密度矩阵以及纠缠熵也会取决于所采用的描述：是玻色集体场描述，还是无自旋费米子描述。根据纠缠熵的代数定义，这一点最容易论证。该定义将约化密度矩阵与代数 M_A 中唯一的元素 $\rho_A \in M_A$ 联系起来；这个代数由局域在 A 内的算符构成，并且该元素能复现总密度矩阵 ρ 的相同期望值，即 $\mathrm{Tr}(\rho_A \mathcal{O}) = \mathrm{Tr}(\rho \mathcal{O})$ $\forall \mathcal{O} \in M_A$ [62, 63]。由于 Jordan-Wigner 变换（按本文约定，见方程（C.2））将位置 $x = x_1$ 处的费米场与从任意但固定的起点 $x = x_0$ 到 $x = x_1$ 的玻色场积分联系起来，因此，局域在 A 内的玻色算符所构成的代数 M_A^{bosonic} 通常不同于局域在同一子区域 A 内的费米算符 $M_A^{\text{fermionic}}$ 所构成的代数。

不过，对于我们将要讨论的单一区间，两种描述下的纠缠熵实际上相同。根据纠缠熵的代数定义，只需将 Jordan-Wigner 变换中的任意区间端点 $x = x_0$ 移至区间 A的下端点，即可看出这一点。采用这种规范选择后，局限于子区域 A 内的费米算符只涉及同样局限于 A 内的玻色算符，因此局域算符的代数相同，$M_A^{\text{bosonic}} = M_A^{\text{fermionic}}$。这立即表明，纠缠熵也相等。

对于由多个区间组成的子区域 A ，

玻色子描述和费米子描述确实会导致不同的纠缠熵。[11]不过，我们不会关注这类情形，因为仅凭单一区间的纠缠，就已能判断靶空间纠缠熵中是否存在面积项。此外，我们关注的是靶空间中的局域性，而这种局域性在玻色化描述中有自然的定义。

4.2 靶空间纠缠熵

我们对靶空间中一个区间的纠缠熵的计算，基于 [65–67]中提出的自由理论数值方法。只要所考察态中的关联函数能够分解为 Wick 收缩，这些方法便适用。正如我们将在下文论证的那样，对于远离快子墙、位于弱耦合区域的纠缠区间，情况确实如此。由于类面积项在该区域占主导地位，且对区间位置呈指数依赖，因此它会产生强烈信号，即使通过数值计算也能清晰辨别。因此，要判断是否存在面积项，只需考察远离快子墙的区间。为深入考察弱耦合区域，我们取 WKB 极限 $\mu \to \infty$，同时保持飞行时间坐标 τ 固定。等价地说，这是弦耦合g_s 较小的极限。快子场的关联函数与本征值空间上集体场的关联函数之间，通过一个非局域但线性的变换（2.17）相关联。这意味着，如果集体场的关联函数能够分解为 Wick 收缩，那么快子场的关联函数也能如此分解。集体场关联函数能够分解为 Wick 收缩，这是有保证的，因为在 WKB 极限 $\mu \to \infty$ 下，集体场哈密顿量（2.12）中的三次相互作用项会消失，因此在此极限下哈密顿量是二次的（详细验证见附录 C ）。

更具体地说，数值方法如下。我们先说明非局域变换如何作用于快子，然后再讨论离散化。首先注意，矩阵模型标量的左行与右行产生/湮灭算符 $\bar{\alpha}_{\pm}(\omega)$ 在 WKB 极限下满足关系 [32],

$$\bar{\alpha}_{-}(\omega) = -\left(\frac{2}{\mu}\right)^{-i\omega} \bar{\alpha}_{+}(\omega). \tag{4.1}$$

这种左行模式与右行模式之间的相互作用，即使在 $\mu \to \infty$集体场哈密顿量中的三次相互作用项可以忽略的极限下仍然存在，并且

[11]通过对自旋结构求和（即在单一区间内插入费米子数算符），仍然可以在玻色变量中为费米子局域性概念计算纠缠熵，反之亦然；近期讨论可参见 [64] 。人们也可能会想知道，其他可观测量是否也需要对自旋结构求和。对于玻色场或费米子场的标准关联函数，这一点无关紧要，因为总费米子数由矩阵的大小固定，因此插入自旋结构（即投影到偶数或奇数费米子数的投影算符）是平凡的。这个论证不适用于纠缠熵，因为即使总费米子数固定，子区域内的费米子数仍不受约束。

这使该理论有别于简单的自由相对论标量场。再加上非局域变换，它对产生/湮灭算符的作用为

$$\alpha_{\pm}(\omega) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm i\omega/4} \frac{\Gamma(\pm i\omega)}{\Gamma(\mp i\omega)} \bar{\alpha}_{\pm}(\omega), \tag{4.2}$$

方程 (4.1) 蕴含靶空间标量的产生/湮灭算符满足

$$\alpha_{-}(\omega) = -\left(\frac{2\pi}{\mu^2}\right)^{-i\omega/2} \left(\frac{\Gamma(-i\omega)}{\Gamma(i\omega)}\right)^2 \alpha_{+}(\omega). \tag{4.3}$$

对于靶空间标量本身的左行与右行部分，我们得到

$$S(t,\phi) = S_{+}(t-\phi) + S_{-}(t+\phi), \quad \text{with} \quad S_{-}(\phi) = -\int \mathrm{d}\phi'\, \tilde{K}(\phi-\phi') S_{+}(\phi') \tag{4.4}$$

其中

$$\tilde{K}(\phi) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{i\omega\phi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-i\omega/2} \left(\frac{\Gamma(-i\omega)}{\Gamma(i\omega)}\right)^2 \tag{4.5}$$

是一个积分核，与非局域变换 (2.18) 密切相关，但又有所不同。它源自这样一种描述：通过变换到矩阵模型变量，在矩阵模型中进行时间演化，再变换回靶空间变量 [32]，来描述入射快子脉冲散射为出射快子脉冲的过程。因此，在动量空间中会出现腿极因子的平方。

离散化步骤如下。我们将靶空间方向划分为一个等间距网格，晶格间距为 a。考虑定义在这样一个格点上的普通自由标量场 S （不要与矩阵模型标量 S混淆）。该场的哈密顿量离散化如下，

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\phi \left(\tilde{\Pi}^2 + (\partial_\phi \tilde{S})^2\right) \to \frac{1}{2}\sum_i \left(\tilde{\Pi}_i^2 + \frac{1}{a^2}(\tilde{S}_{i+1} - \tilde{S}_i)^2\right) = \frac{1}{2}\sum_i \tilde{\Pi}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \tilde{S}_i Q_{ij} \tilde{S}_j \tag{4.6}$$

其中我们引入了一个简写记号 Q_{ij} 来表示二次 S 项。普通自由标量的关联函数为 [66]

$$\left\langle \tilde{\Pi}_i \tilde{\Pi}_j \right\rangle = \frac{1}{2}\left(Q^{1/2}\right)_{ij}, \quad \left\langle \tilde{S}_i \tilde{S}_j \right\rangle = \frac{1}{2}\left(Q^{-1/2}\right)_{ij}, \quad \left\langle \tilde{\Pi}_i \tilde{S}_j \right\rangle = \frac{i}{2}\delta_{ij}. \tag{4.7}$$

鉴于普通自由标量 S 与快子 S 在 WKB 极限下唯一的区别在于左行模与右行模之间的关系（4.4），离散化方法中的快子场算符定义为

$$S_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{S}_i - \tilde{K}_{ij}\tilde{S}_{-j}\right), \quad \Pi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\Pi}_i - \tilde{K}_{ij}\tilde{\Pi}_{-j}\right), \tag{4.8}$$

其中

$$\tilde{K}_{ij} = a\tilde{K}(a(i-j)). \tag{4.9}$$

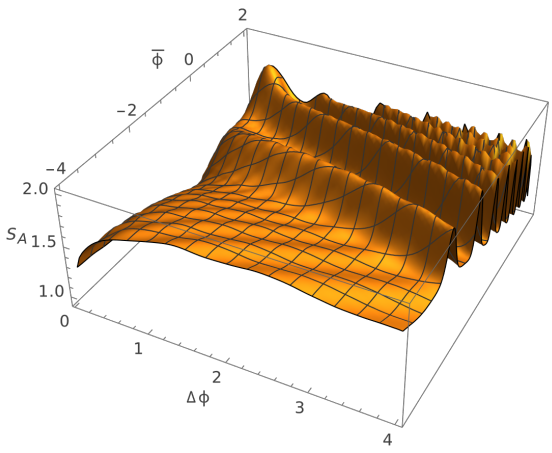


图 1。靶空间中区间 $[\phi - \Delta\phi, \phi + \Delta\phi]$ 的纠缠熵。远离位于 $\phi = 0$ 的快子墙时，纠缠熵随 $\Delta\phi$ 和 ϕ均呈对数标度。对于端点 $\phi+\Delta\phi$接近快子墙的区间，纠缠熵开始振荡。该计算使用了围绕$\phi = 0$ 对称分布的 801 个格点，晶格间距为 $a = 0.025$。

注意，下标中的负号 S_{-j}，Π_{-j}在（4.8）中，是由于 $S\,(t,\ \phi)\ = S_+\,(t-\phi)$ $+S_-\,(t+\phi)$，也就是说，左行模/右行模自变量中的空间方向符号发生了反转。这些场算符的关联函数 S_i，Π_i 可以直接由（4.7）和（4.8）计算得到。

由于高点关联函数可由两点关联函数通过 Wick 收缩得到，我们可以使用导出于 [65–67]的自由理论纠缠熵计算方法。特别地，我们使用的算子基并非正则共轭，$[S_i, \Pi_j] \neq i\delta_{ij}$，这可以从（4.8）和 $[S_i, \Pi_j] = i\delta_{ij}$看出。在此设定下，纠缠熵由 [67]

$$S = \mathrm{Tr}(V \log |V|)\,, \tag{4.10}$$

其中，位于纠缠区间内的算子被合并为一个向量 f_a，矩阵 V 定义为

$$V = -iC^{-1}F\,, \quad \text{where} \quad F_{ab} = \langle f_a f_b \rangle \quad \text{and} \quad [f_a, f_b] = iC_{ab}. \tag{4.11}$$

这是快子墙最左侧靶空间区间的纠缠熵结果。

4.3 数值结果

靶空间纠缠熵的数值结果如下。纠缠熵随晶格间距 a，$S_A\ = -\frac{1}{3}\log(a)$ + 正则部分呈对数发散。对于自由（相对论性）标量场，这种发散是预期的

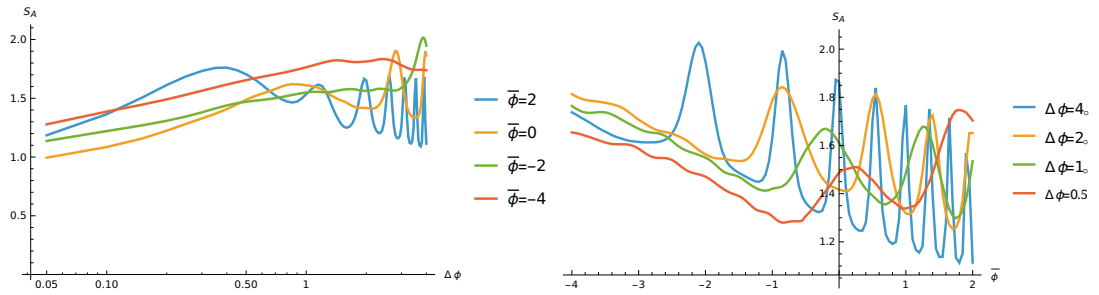


图2。在固定 ϕ 并改变 $\Delta\phi$ （左图），以及固定 $\Delta\phi$ 并改变 ϕ （右图）的情况下，纠缠熵的变化。左图清晰地显示了远离快子墙的小区间的纠缠熵呈对数标度（请注意 $\Delta\phi$ 轴采用对数尺度）。计算使用了由801个点构成的格点，这些点以 $\phi = 0$ 为中心对称分布，晶格间距为 $a = 0.025$。

1+1 维度。由于我们是在忽略玻色子图景中的三次相互作用项的极限下进行计算，因此在我们的计算中看不到纠缠熵的有限性；不过，如果将完整理论考虑在内，这种有限性就会显现出来。[12] 但由于紫外发散是对数型的，它只会带来一个额外的常数项。我们感兴趣的内容，即纠缠熵对区间大小和位置的依赖关系，尽管存在紫外发散，仍然具有意义。

区间大小 $\Delta\phi$和区间中点 ϕ 的依赖关系如下（见图1 和2）。对于远离快子墙的小区间，也就是在 ϕ取较大负值时，纠缠熵呈对数标度， $S_A \sim c_1 \log(\Delta\phi) + c_2 \log(|\bar{\phi}|)$。在 [28]中也发现了本征值空间纠缠的类似对数标度；然而，对于目标空间纠缠，系数 c_1、 c_2 均为正，而 [28] 则为 $c_1 = -c_2 = 1/3$。[13] 当区间的某个端点接近快子墙时，我们开始观察到关于 $\Delta\phi$ 和 ϕ 的振荡；区间越深入强耦合区域，振荡就越快。不过，此时数值结果已不再可靠，因为只有远离快子墙时，忽略玻色子描述中的相互作用才是有效的。

我们没有发现类面积项的迹象，而该项本应随 $\Delta\phi$ 和 ϕ呈指数增长。尤其是，远离快子墙时，类面积项应当在纠缠熵中占主导，而非物质贡献。然而，我们的数值结果

[12]更准确地说，我们认为这是一个极限次序问题。玻色化是同一希尔伯特空间的费米子描述与玻色子描述之间的完全等价。玻色子描述中的基态对应于费米子描述中填充至费米能级的态。因此，对于任意有限的 μ ，在截断 a 趋于零的极限下，这个态的纠缠熵在两种理论中都必须一致。我们预期，先取$a \to 0$ ，再取 $\mu \to \infty$ 极限时，纠缠熵会得到有限值。我们采用了相反的极限次序，因此结果中包含紫外发散。面积项的存在不应受此问题影响。[13]根据现有数值数据，很难确定精确系数。最佳拟合结果以及与截断标度关系 $\sim -1/3\log(a)$ 的一致性表明 $c_1 = 1/3 - c_2 \approx 1/6$。

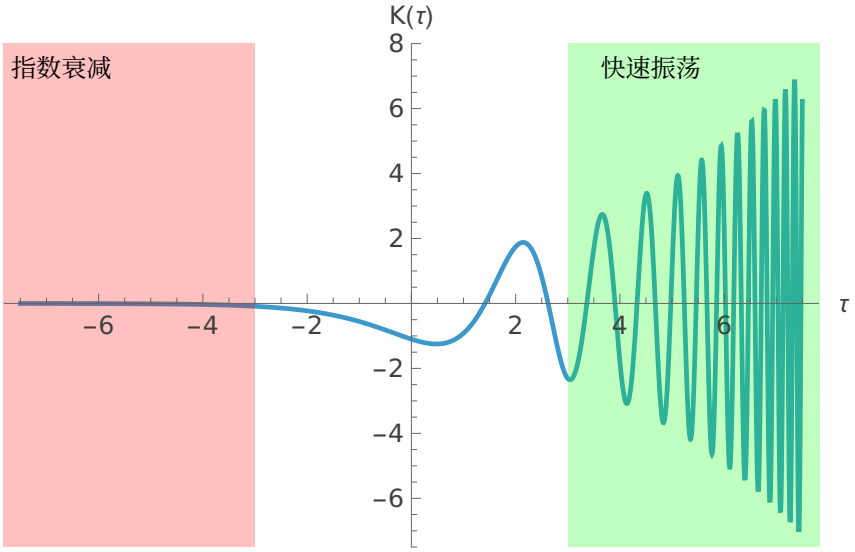


图3。非局域变换 $K(\tau)$ 的图示。该函数在左侧的红色阴影区域内呈指数衰减，而在右侧的绿色阴影区域内以不断增加的频率振荡。只有靠近 $\tau = 0$ 的区域有显著贡献，因为其他贡献要么呈指数级微小，要么相互平均抵消。因此，变换 $K(\tau)$ 只引入了少量非局域性，最大贡献来自特征值与靶空间坐标相等的点附近。

显示，我们离快子墙越远，结果就越符合物质贡献。因此，我们得出结论：如果仅限于单态扇区， $c = 1$ 矩阵模型的纠缠熵不包含类面积项。计入 [28]中被忽略的非局域相互作用的影响，会在 G_N 中产生次领先效应， $1/G_N$ 但不会产生领先阶的类面积项。

4.4 更仔细地考察非局域变换

为了更直观地理解为什么非局域变换对纠缠熵的修正很小，绘制联系 K（τ）的函数是很有帮助的，该函数联系了¯靶空间与矩阵模型标量场 S 和 S （见图3）。该函数的渐近行为为 [32]

$$\begin{aligned} K(\tau) &\sim -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/4} e^{\tau}, \quad \tau \to -\infty \\ &\sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/16} \frac{e^{\tau/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(2(2/\pi)^{1/8} e^{\tau/2} + \pi/4\right), \quad \tau \to +\infty. \end{aligned} \tag{4.12}$$

来自 $\phi - \tau \to -\infty$的积分变换 $S(\phi) = \int \mathrm{d}\tau K(\phi - \tau)\, \bar{S}(\tau)$ 的贡献受到指数抑制，而来自 $\phi - \tau \to +\infty$ 的贡献在积分中大多相互抵消，因为当 τ 变大时， $K(\tau)$ 会以指数增长的频率振荡。因此，非局域变换的主要贡献来自区域

$\phi \approx \tau$。换言之，积分变换引入的非局域性很弱。为了在纠缠熵中找到类面积项，应用非局域变换后必须发生巨大变化：随着区间向左移动，越过快子墙进入小耦合区域，类面积项变得越来越占主导地位。显然，由 $K(\tau)$ 引入的变换并未实现这一点，这也直观地解释了为什么非局域变换不会产生类面积项。

4.5 本征值空间纠缠

检验我们方法的一种有效方式，是将本征值空间中一个区间的纠缠熵与 [28] 在单态扇区的费米子描述中得到的相应结果进行比较。在我们的玻色子描述中，本征值空间纠缠的计算采用与靶空间相同的公式（4.10）和（4.8），不过此时非局域变换变得平凡，也就是说，我们用以下公式代替（4.9）：

$$\tilde{K}_{ij} = \delta_{ij}. \tag{4.13}$$

在可进行比较的范围内，我们的结果与 [28]的结果一致。

无法进行一一对应的比较，因为这两种计算都是近似的。在 [28], 中，纠缠熵表示为粒子数分布各阶累积量的无穷级数，随后再用首项进行近似。此外，计算第一累积量时采用了 WKB 极限。在我们的方法中，集体场哈密顿量（2.12）中的相互作用项被忽略，纠缠熵则通过数值近似计算。通过减小晶格间距 a，可以使后一种近似达到任意精度，因此不会妨碍我们与费米子描述所得结果进行比较。在 WKB 极限下，忽略相互作用项是合理的，而 [28]中也采用了这一极限。

我们的研究方法与[28] 的方法之间可比较的一个结果特征，是区间大小较小时 $\tau_2 - \tau_1 \to 0$ 呈现对数标度；文献 [28] 指出，即使纳入更高阶累积量的贡献，这一特征仍然稳健。我们确实在本征值纠缠熵中发现了对数标度 $S \sim c_1 \log(\tau_2 - \tau_1)$。[14] 此外，文献 [28] 的结果和我们的数值计算都表明，在$\tau_{1,\ 2} \to 0$ 存在 $S \sim c_2 \log(\tau_1 \tau_2)$标度；此时本征值空间中的区间端点几乎接近倒置谐振子势的顶部。[15]

[14]缩放系数 c_1 很难通过数值方法提取。最佳拟合结果表明 $c_1 \approx 1/4$，这与 [28]中的 $c_1 = 1/3$ 不一致。这可能是因为两种计算采用了不同的近似方案。唯一能够可靠提取的特征是对数项的存在，而非其精确系数。

[15]对我们的数值结果进行拟合，得到 $c_2 \approx 1/6$，与 [28], 一致；不过，需要更高的数值精度才能确切确认或排除两者一致的可能性，而且这一缩放关系可能会受到 [28]结果中更高阶累积量贡献的修正。

总之，这些结果表明，我们计算本征值空间纠缠熵的方法与 [28]的方法相容。

5 关于非单态与一般子区域的评论

既然我们已经表明，非局域腿极点变换不会在靶空间子区域的纠缠熵中产生类面积项，那么看来唯一可能找到它的地方，就是矩阵量子力学非单态扇区的某种贡献。如果确实如此，这将与先前的结果相当吻合：那些结果表明，只有纳入非单态 [33, 68]，才能在矩阵模型中描述该理论的典型引力特征——黑洞解 [51–53] 。本节将对非单态在计算子区域熵时所起的作用提出一些初步且推测性的评论，更详细的分析留待今后进行。最后，我们将讨论一些必须牢记的事项，以防非单态甚至也无法解释靶空间子区域熵的引力面积定律。

5.1 非单态

靶空间的线性膨胀子背景（带有快子墙），可能还包括一些低能激发，可以用单态扇区态在矩阵模型中得到很好的描述。人们或许会天真地得出结论，认为该理论的非单态扇区在计算靶空间子区域的纠缠熵时毫无作用：如果该态在这类非单态上没有支撑，那么在对部分自由度取迹后得到的密度矩阵中，它们就不应有所贡献。

这并不完全正确，因为我们可以在对子区域的定义中纳入非单态自由度。换一种说法，为了定义矩阵量子力学的一个子系统，我们必须选取一个算子子代数。这正是以往工作中所做的事情（或许是隐含地） [27, 28], ，也是第4节计算的基础：我们选择局域于本征值空间某个区间的算子子代数，并计算给定单态中的这一子代数的纠缠熵。这个子代数不会将单态扇区与非单态扇区混合（它只作用于本征值），因此非单态确实完全无关。

原则上，即使所考察的态是单态，定义一个涉及非单态自由度的代数也可能得到不同的熵结果。我们在附录 D 中给出了这一现象的一个玩具模型。为简单起见，我们考察一个由 N 个可区分粒子组成的系统。该系统的希尔伯特空间包含一个在粒子置换下保持不变的（单态）扇区：这就是对称波函数的子空间，与全同玻色子的描述相关。与一个子区域 R 相关的子代数有两种不同的定义方式：一种适用于我们只关注单态扇区的情形，即考虑 R 中算符的对称化组合；另一种适用于可区分粒子的完整理论，即

允许使用 R 中的任意算符。即使我们考察一个固定的单态，熵的结果也被证明取决于所选择的代数；两种熵之间存在一个相对简单的关系，该关系由该态的对称性决定（D.14）：

$$S(R) = S_{\text{symm.}}(R) + \sum_{k=0}^{N} p_{0,k} \log \binom{N}{k} . \tag{5.1}$$

这里，左边是 R中所有算子的代数的熵，而右边是 R 中对称化算符的代数的熵加上一个额外求和项，其中$p_{0,k}$ 是在给定对称态中于区域 R 内找到 k 个粒子的概率。

如果我们将此转换到 $c = 1$ 矩阵量子力学，我们一直在计算单态扇区算符代数的熵，这一量类似于$S_{\text{symm.}}(R)$。我们可以期望，选择一个涉及非单态的更一般代数（但在投影到单态扇区时会约化为通常的代数），会存在一个额外项，从而再现引力面积定律。

充分阐明这是否可能留待未来工作，但我们希望在此就沿此方向会遇到的困难给出一些初步评论。矩阵 M 可以用其 N 个本征值（统记为 Λ）以及 $N^2 - N$ 个“角”变量来参数化，这些角变量指定了对角化 M 所需的幺正变换（我们将它们记为Ω）。 $SU(N)$ 对称性仅通过角度的旋转起作用。一般波函数为 $\psi(\Lambda,\Omega)$，而单态不依赖于Ω。[16]

为了选取能够刻画靶空间中子区域的子代数，最自然的做法是沿用忽略非单态时对本征值空间所作的划分。因此，我们选取只在本征值空间的某个区间上产生非平凡作用的算符。不过，我们仍可自由选择这些算符如何作用于角变量 Ω（但所有算符必须构成一个代数）。如果我们选取完全不作用于 Ω 的算符，它们会使单态扇区保持不变，于是便回到了先前的结果。我们还可以设想其他方案，例如允许算符逐点作用于角度

$$(\hat{O}\psi)(\Lambda, \Omega) = \int_R \mathrm{d}\Lambda' \, O(\Omega; \Lambda, \Lambda')\psi(\Lambda', \Omega) \, , \tag{5.2}$$

其中，对 R 的积分应理解为限制在本征值空间中所考虑的那族算符上。当然，这只是众多可能性中的一种。

[16]一个具体的例子或许会有所帮助，因此我们取 $N = 2$。厄米矩阵可以参数化为

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\cos\theta & (\lambda_1 - \lambda_2)\sin\theta e^{-i\phi} \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\sin\theta e^{i\phi} & \lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\cos\theta \end{pmatrix} ,$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 是本征值，而 $\theta \in (0, \pi)$、 $\phi \in (0, 2\pi)$是参数化一个 $\mathbb{S}^2$的角度。一个$SU(2)$变换（我们实际上必须把中心商掉，因此它属于 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$）以通常方式旋转这些角度。波函数是函数 $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \theta, \phi)$，这些角度可按球谐函数展开，而单态扇区对应于 $l = 0$ 分量。

诸如（5.2）这样的简单提议所存在的问题在于，它们并未将对角度的作用与本征值空间中所选取的区域联系起来。因此，在单态中计算该代数的熵时，我们可能会得到如（5.1）中那样的额外项，但它们并不依赖于区间边界点的位置。鉴于我们所寻求的面积项确实依赖于边界点的位置（通过膨胀子$e^{-2\Phi(x)}$），我们将需要通过引入对角度的作用与本征值空间中区域之间的非平凡关系来选取我们的代数。我们留待未来的工作来澄清，这样一种构造能否对熵给出与目标空间面积项相匹配的贡献。

5.2 如果非单态不产生面积项呢?

原则上，即使考虑更一般的代数，我们也可能无法在矩阵量子力学中找到与靶空间理论的面积项相匹配的熵贡献。如果确实如此，我们应该得出什么结论？这是否意味着矩阵量子力学无法捕捉靶空间子区域的熵，从而使我们对这种 $c = 1$ 对偶性的这一方面产生怀疑?

我们想在这里就另一种可能性作简短评论。这种可能性建立在一个隐含假设之上，而在目前及此前关于 $c = 1$ 模型中纠缠的研究 [27, 28]里，我们都曾作出这一假设。我们一直想当然地认为，靶空间的任意子区域（或至少任意区间）都应当对应于微观量子力学描述中的一个定义良好的子系统。尽管这与近期在存在观察者的情况下为一般子区域引入算子代数的研究精神一致 [59], ，但这一点远未得到保证。事实上，其他作者最近引入了任意区域的广义纠缠楔概念 W_R R [34, 35]: W_R 是包含 R 且广义熵最小的区域。正如在 AdS/CFT 中，只有纠缠楔对应于边界（空间）子系统一样，这一提议认为，定义良好的微观子系统仅与广义纠缠楔相关联。近期结果也支持这一点：这些结果表明，如果广义纠缠楔的广义熵对应于量子系统中算子子代数的熵，那么广义纠缠楔的某些性质便会自然产生 [69]。

如果这一设想成立，我们就应将分析范围限制在线性膨胀子背景靶空间中的广义纠缠楔。这些楔是什么？考虑一个靶空间区间 $(\phi_L,\ \phi_R)$，并寻找一个包含该区间且使广义熵最小的区域。面积项的指数依赖关系会推动右边界向更大的取值移动，因为在那里面积项会变小。这往往会使广义纠缠楔延伸至强耦合区域。虽然还需要更仔细的分析，而且我们始终应牢记，在这一设定中，广义纠缠楔设想尚未得到证明，但我们希望在此强调，并非每个靶空间区域都对应一个有效的微观子系统。

[17]存在一个技术拓扑假设：R 和 W_R 均被要求为开集，且等于各自闭包的内部。

致谢

我们谨向 Sumit Das 和 Alex Frenkel 致谢，感谢他们就 $c = 1$ 模型中的纠缠问题进行了许多富有启发性的讨论。我们也感谢 Sean Hartnoll、Jeremy van der Heijden 和 Mark Van Raamsdonk 提供的宝贵讨论，并感谢 Vijay Balasubramanian 就相关主题与我们合作。VUB 的研究工作得到 FWO-Vlaanderen 项目 G012222N 和 G0A2226N 的资助，以及 VUB 研究委员会通过高能物理战略研究计划提供的资助。MG 获得 FWO-Vlaanderen 提供的初级博士后奖学金 1238224N。MP 获得 FWO-Vlaanderen 提供的博士奖学金 1178725N。AVL 获得加拿大国家科学与工程研究委员会（NSERC）以及西蒙斯基金会通过西蒙斯研究员奖提供的资助。

靶空间理论的协变相空间分析

引力中的协变相空间方法由来已久 [55, 70–72],参见 [73, 74]以了解近期综述。在本附录中，我们将得到一些适用于二维靶空间有效理论（2.1）的结果。我们将沿用 [73],中的记号和约定，并只引入我们所需的一般结果，再将其应用于我们的理论。简而言之，我们的目标是找到一个能在相空间中生成微分同胚变换的哈密顿函数。恰当地运用该函数，便可在多种情形下得到第一定律恒等式，尤其是在存在黑洞视界时。

这一构造始于对作用量所定义的变分问题进行仔细分析。将该理论的拉格朗日形式写为

$$L = \mathcal{L}\,\epsilon\,, \qquad \mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}e^{-2\Phi}\left[a_1\left(R + \frac{16}{\alpha'} + 4\,(\partial\Phi)^2\right) - (\partial T)^2 + \frac{4}{\alpha'}T^2 - 2V(T)\right]\,, \tag{A.1}$$

其中 ϵ 为体积形式。对拉格朗日量作变分可得

$$\delta L = \frac{1}{2}e^{-2\Phi}\left[a_1\mathcal{E}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + 2a_1\mathcal{E}^{\Phi}\delta\Phi + 2\mathcal{E}^{T}\delta T\right]\epsilon + \mathrm{d}\Theta\,, \tag{A.2}$$

其运动方程如下

$$\mathcal{E}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{E}^{\Phi} = -R^{\mu\nu} - 2\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}\Phi + \frac{1}{a_1}\nabla^{\mu}T\nabla^{\nu}T\,, \tag{A.3a}$$

$$\mathcal{E}^{\Phi} = -R - 4\nabla^2\Phi + 4\,(\partial\Phi)^2 - \frac{16}{\alpha'} + \frac{1}{a_1}\left((\partial T)^2 - \frac{4}{\alpha'}T^2 + 2V(T)\right)\,, \tag{A.3b}$$

$$\mathcal{E}^{T} = \nabla^2 T - 2\nabla_{\mu}\Phi\nabla^{\mu}T + \frac{4}{\alpha'}T - V'(T)\,. \tag{A.3c}$$

对后续分析真正相关的部分实际上是边界项

$$\Theta = \theta\cdot\epsilon\,, \tag{A.4}$$

其中

$$\theta^\alpha = \frac{a_1 e^{-2\Phi}}{2}\left[8\delta\Phi\nabla^\alpha\Phi + 2g^{\mu[\alpha}\nabla^{\nu]}\delta g_{\mu\nu} + 4\left(g^{\mu[\alpha}\nabla^{\nu]}\Phi\right)\delta g_{\mu\nu} - \frac{2}{a_1}\delta T\nabla^\alpha T\right] . \tag{A.5}$$

鉴于我们从一个协变理论出发，协变相空间分析的一个直接结果是，由下式给出的流 j^μ_ξ

$$j^\mu_\xi = \theta^\mu[\delta_\xi\psi] - \xi^\mu\mathcal{L} \tag{A.6}$$

在壳时守恒，$\nabla_\mu j^\mu_\xi = 0$。这里，ξ 是一个我们视为微分同胚生成元的矢量场，$\delta_\xi\psi = \mathcal{L}_\xi\psi$ 表示所有变分都通过李导数 $\mathcal{L}_\xi$所生成的微分同胚变分来表示，并且 $\mathcal{L}$ 是（A.1）中的拉格朗日标量。在我们的理论中，得到

$$j^\mu_\xi = -a_1 e^{-2\Phi}\xi_\lambda\mathcal{E}^{\lambda\mu} + \nabla_\lambda\left[\frac{a_1 e^{-2\Phi}}{2}\left(2\nabla^{[\lambda}\xi^{\mu]} - 8\xi^{[\lambda}\nabla^{\mu]}\Phi\right)\right] . \tag{A.7}$$

将其视为一个 1-形式 $J_\xi = j_\xi\cdot\epsilon$ 较为方便，其中 ϵ 是体积二形式。第一部分与度规运动方程成正比，而由于我们处理的是一个完全协变的理论，第二部分是一个全导数。我们将其写作

$$J_\xi = F_\xi + \mathrm{d}Q_\xi\,, \tag{A.8}$$

with

$$F_\xi = f_\xi\cdot\epsilon\,, \qquad f^\mu_\xi = -a_1 e^{-2\Phi}\xi_\lambda\mathcal{E}^{\lambda\mu}\,, \tag{A.9}$$

与度规运动方程成正比，并且

$$Q_\xi = -\frac{e^{-2\Phi}}{2}a_1\left(\star\mathrm{d}\xi - 4\star(\xi\wedge\mathrm{d}\Phi)\right) = -\frac{e^{-2\Phi}}{2}a_1\epsilon^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\xi_\nu - 4\xi_\mu\nabla_\nu\Phi\right) . \tag{A.10}$$

现在考虑一个空间区域 $\mathcal{R}$，它可视为其依赖域的一张柯西切片。从 Θ 出发，它是相空间中的一个一形式（即关于场变分是线性的），我们可以定义相空间中的辛形式如下

$$\Omega = \int_{\mathcal{R}}\omega\,, \qquad \omega = \delta\Theta\,, \tag{A.11}$$

其中 δ 应理解为相空间中的外微分。[18] 将 Ω（或 ω）视为在两个特定场变分上取值往往很有用，于是写成 $\Omega[\delta\psi,\delta'\psi]$，并用 ψ 统称动力学场。从技术上讲，这是相空间上的二形式 Ω 与两个切向量的缩并，这两个切向量对应于场变分$\delta\psi$ 和 $\delta'\psi$。给定矢量场 ξ，考虑如下量

$$\hat{\delta}H_\xi \equiv \Omega[\delta\psi,\delta_\xi\psi] = \int_{\mathcal{R}}\delta F_\xi + \int_{\partial\mathcal{R}}\left(\delta Q_\xi - \xi\cdot\Theta\right) , \tag{A.12}$$

[18]这一构造存在边界歧义，也有多种处理方法[73, 74]。由于最终结果不受这些歧义影响，我们在此不予讨论。

其中，辛形式在一个微分同胚变分上取值与对 $\mathcal{R}$ 和 $\partial\mathcal{R}$的积分之间的最终恒等式，源于协变相空间分析——需注意，由于我们处于二维情形，对 $\partial\mathcal{R}$ 的积分只是对具有适当定向的边界点求和。帽子符号强调这先验地并非全变分（即相空间中的恰当形式）。上述恒等式的一个特别重要情形构成引力第一定律的基础：当我们取 ξ为背景的 Killing 场，并取 δ 为解之间的变分时即出现该情形。于是有 $\delta_\xi\psi = 0$，故左边为零，且 $\delta F_\xi = 0$。因此，

$$0 = \int_{\partial\mathcal{R}} (\delta Q_\xi - \xi \cdot \Theta) \,. \tag{A.13}$$

更一般地，对于任意矢量场 ξ（不一定是 Killing 矢量场），在许多重要的ˆ情形下，δH_ξ 在（A.12）中结果证明是恰当形式，因此我们可以将其视为某个函数 H_ξ的变分。对我们而言，一个特别相关的例子是当 ξ 在 $\partial\mathcal{R}$处消失时，此时我们可以定义

$$H_\xi = \int_{\mathcal{R}} F_\xi + \int_{\partial\mathcal{R}} Q_\xi \,. \tag{A.14}$$

在许多其他情形下， $\partial\mathcal{R}$ 处的边界条件允许将 $\xi \cdot \Theta$ 写成一个变分，从而得到一个与 H_ξ 类似的相应对象。 H_ξ 与辛形式（A.12）之间的关系确保了， H_ξ 通过泊松括号生成任意动力学场上的微分同胚变换，

$$\delta_\xi\psi = \mathcal{L}_\xi\psi = \{\psi, H_\xi\} \,. \tag{A.15}$$

因此， H_ξ 是与由 ξ生成的无穷小微分同胚相对应的哈密顿量。注意， H_ξ中的第一部分包含 F_ξ 并在 $\mathcal{R}$上积分，与 $\mathcal{R}$上的引力约束方程成正比。这是意料之中的：在引力中，微分同胚变换由约束方程生成，但要差一个边界项。当这些微分同胚是理论的实际规范变换时，例如 ξ 具有紧支集且不会延伸到 $\partial\mathcal{R}$，约束方程就是适当的生成元。

¯如果 $\mathcal{R}$ 是更大的柯西切片 Σ的一部分，从而 $\Sigma = \mathcal{R} \cup \bar{\mathcal{R}}$，则上述步骤可以对整个 Σ重复进行。在这种情况下，将哈密顿量视为由两项构成通常很有用，每一项分别来自 Σ的每一部分：

$$H_\xi^{(\Sigma)} = H_\xi^{(\mathcal{R})} + H_\xi^{(\bar{\mathcal{R}})} \,, \tag{A.16}$$

右侧的每一项都具有（A.14）的形式，并在适当的区域上积分。¯请注意，我们将 $\partial\mathcal{R}$ 与 $\partial\bar{\mathcal{R}}$ 之间的公共边界视为方向相反（法向量始终假定指向外侧），因此边界项中的相应部分会相互抵消，只留下 $\partial\Sigma$ 在完整哈密顿量中的贡献。

最后需要指出的是，对于略有不同的拉格朗日量，即加入一个拓扑项的拉格朗日量，前面的讨论同样适用

$$L \to L + b_B R\,\epsilon\,. \tag{A.17}$$

这不会改变运动方程，但会对边界项产生贡献，并传递到 Q_ξ

$$Q_\xi \to Q_\xi - b_B \epsilon^{\mu\nu}\nabla_\mu \xi_\nu\,. \tag{A.18}$$

这会在熵计算中增加一个常数项。

B 广义熵中的发散抵消

本附录给出了一项详细计算，展示了理论（2.1）（加入拓扑项后）的广义熵中发散的抵消，正如第 3.1 节所讨论的那样。其论证与 [75] 中针对四维理论所采用的方法类似。与正文相比，主要的新意在于我们将谨慎定义紫外调节器，确保在计算引力耦合的重整化和子区域的冯·诺依曼熵时使用同一个调节器。归根结底，在二维中这并不十分重要：发散是对数型的，因此不会受到调节器重标度的影响。

我们首先计算通过积掉快子得到的单圈有效作用量。只需考虑其作用量的二次部分

$$\mathcal{I}_T = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\sqrt{-G}e^{-2\Phi}T\left(\nabla^2 - 2\nabla^\mu\Phi\nabla_\mu + \frac{4}{\alpha'}\right)T\,, \tag{B.1}$$

这里我们进行了分部积分，以显式写出二阶微分算子。我们通过热核技术计算有效作用量的紫外发散部分 W，相关综述以及下文所需的所有技术结果见 [76]。对快子场进行重标度[19]

$$\tilde{T} = e^{-\Phi}T\,, \tag{B.2}$$

作用量可以用标准形式的二阶微分算子来表示

$$\mathcal{I}_T = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\sqrt{-G}\,\tilde{T}\mathcal{D}\tilde{T}\,, \tag{B.3}$$

其中

$$\mathcal{D} = -G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - E\,, \qquad E \equiv -(\partial\Phi)^2 + \nabla^2\Phi + \frac{4}{\alpha'}\,. \tag{B.4}$$

[19]以下推导假设我们使用测度 $\int DT\exp\left(-\int \mathrm{d}^2x\sqrt{G}e^{-2\Phi}T^2\right) = 1$ 积分掉快子场。这在此背景下是自然的：$\tilde{T}$是在线性膨胀子背景中传播的无质量标量场。无论如何，更一般的归一化不会影响作用量中引力项的重整化——参见 [76]第 7.1 节。

有效作用量为 $W = (1/2)\log\det\mathcal{D}$。这可以写成热核迹的积分形式（相差一个加法常数）

$$W = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} K(t;\mathcal{D})\,, \qquad K(t;\mathcal{D}) = \mathrm{Tr}\; e^{-t\mathcal{D}}\,, \tag{B.5}$$

这个表达式非常适合用于分离紫外发散，它们来自极限$t \to 0^+$。在该极限下，可以得到热核迹的级数展开 [76],

$$K(t;\mathcal{D}) = \frac{1}{t}\left(a_0(\mathcal{D}) + t\, a_2(\mathcal{D}) + \dots\right)\,, \tag{B.6}$$

wher我们只保留了会导致紫外发散的项，其系数为

$$a_0(\mathcal{D}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2x\,\sqrt{G}\,, \qquad a_2(\mathcal{D}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2x\,\sqrt{G}\left(\frac{R}{6} + E\right)\,. \tag{B.7}$$

第一个系数导致宇宙学常数的单圈重整化。结果 (3.3) 可直接由 $a_2(\mathcal{D})$ 得出：对热核迹进行积分，并在 t 处采用下截断 ϵ^2 （注意， t 的单位是长度平方）。

这足以得到第 3 节中给出的结果。本质上，由于乘在里奇标量前的紫外发散是对数型的，我们无需过分谨慎地精确定义调节器：无论如何，拓扑耦合重整化产生的发散都会抵消快子纠缠熵中的发散。尽管如此，在整个计算过程中采用一致的正则化方法仍然很有启发性，无论是对于耦合重整化，还是对于物质纠缠熵。本附录余下部分将采用这种方法。

那么，让我们使用泡利–维拉斯正则化方法。在二维中，具体做法是引入三个额外的场，其中两个为反对易场（因此它们在 W 中以相反的符号出现），质量为 Λ ；另一个为对易场，质量为$\sqrt{2}\Lambda$ [77]。这里所说的质量，是指我们对 $E \to E - m_\Lambda^2$进行修改，并为每个场取 m_Λ^2 的适当值。这会在热核迹中产生一个因子 $e^{-m_\Lambda^2 t}$ 。只关注乘在 R上的有效作用量部分，我们得到

$$W \supset -\frac{1}{48\pi}\int \mathrm{d}^2x\sqrt{G}R\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\left(1 - 2e^{-\Lambda^2 t} + e^{-2\Lambda^2 t}\right)\,. \tag{B.8}$$

该积分存在红外发散，可以通过赋予快子一个无穷小质量来进行正则化。无论如何，就我们的目的而言，我们只关心紫外发散部分；该部分可以无歧义地提取得到

$$W \supset -\frac{1}{48\pi}\log(\Lambda^2)\int \mathrm{d}^2x\sqrt{G}R\,. \tag{B.9}$$

如（3.4）中所述，为了吸收这一发散，我们需要在靶空间作用量中添加一个拓扑项

$$-b_B\int \mathrm{d}^2x\sqrt{G}\,R\,, \tag{B.10}$$

这样，先前的计算就会得到重整化耦合

$$b = b_B + \frac{1}{48\pi}\log\bigl(\Lambda^2\bigr)\,. \tag{B.11}$$

现在我们继续计算线性膨胀子背景中靶空间子区域 $\mathcal{R}$ 的广义熵。为了能够计算物质熵，本附录将考察弱耦合区域中的一个半空间，即 $\phi \in (-\infty,\ \phi_R)$。广义熵为

$$S_{\rm gen} = 4\pi b_B + 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_R)} + S_{\rm mat}\,. \tag{B.12}$$

注意，现在只有一个边界点。为了在加入额外泡利–维拉斯场的理论中求得 $S_{\rm mat}$，我们将区域 $\mathcal{R}$ 视为具有如下度规的里indler楔形区

$$\mathrm{d}s^2 = -\rho^2\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}\rho^2\,, \qquad \rho > 0\,, \tag{B.13}$$

因此，限制在 $\mathcal{R}$ 中的场处于逆温度为 $\beta = 2\pi$ 的热态。于是我们可以将 $S_{\rm mat}$ 认作温度为 $\beta = 2\pi$ 的里indler楔形区的热熵：现在我们将在含有泡利–维拉斯调节子的理论中计算这一量。

在线性膨胀子背景中，每个场都满足一个有质量标量波动方程~。对于 $i \in \{1,2,3,4\}$，我们将这些场统称为 f_i，其质量分别为 $m_1 = 0$、$m_2 = m_3 = \Lambda$ 和 $m_4 = \sqrt{2}\Lambda$。我们还引入参数 $\Delta_1 = \Delta_4 = +1$、$\Delta_2 = \Delta_3 = -1$，以标记这些场的对易／反对易性质。波动方程（$\nabla^2 - m_i^2$）$\tilde{f}_i = 0$ 可以按里indler模展开，$\tilde{f}_i = e^{-iET}u_{i,\ E}$，其中 $u_{i,\ E}$ 满足

$$(-\partial_z^2 + V_i(z))u_{i,E} = E^2 u_{i,E}\,, \qquad V_i(z) = m_i^2\rho^2 = m_i^2\rho_0^2 e^{2z}\,, \tag{B.14}$$

用新的坐标 $z = \log(\rho/\rho_0)$ 和某个任意尺度 ρ_0 表示。这个势会为 $E > 0$ 产生连续态谱。在 WKB近似下，能量不超过 E 的态数为

$$g_i(E) = \int_0^{E/m_i} \frac{\mathrm{d}\rho}{\pi\rho}\sqrt{E^2 - m_i^2\rho^2}\,. \tag{B.15}$$

当然，由于 $\rho \to 0$ 紫外发散，这个数是无穷大的。我们可以手动加入一个调节器，但我们将看到，对于相关的热力学量，原始场与泡利–维拉斯调节子的组合已经能得到有限结果。

确实，根据态密度 $\mathrm{d}g_i/\mathrm{d}E$，我们可以将自由能写成

$$\begin{aligned}\beta F &= \sum_i \Delta_i \int_0^\infty \mathrm{d}E \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}E}\log\Bigl(1 - e^{-\beta E}\Bigr) \\ &= -\frac{\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E}{e^{\beta E} - 1}\left(\sum_i \Delta_i \int_0^{E/m_i}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\sqrt{E^2 - m_i^2\rho^2}\right)\,,\end{aligned} \tag{B.16}$$

其中每个场都以适当的符号 Δ_i 对 F 作出贡献。我们希望将紫外发散单独提取为 $\Lambda \to \infty$。现在可以通过将积分下限设为 δ，并在合并所有项后取 $\delta = 0$ 来计算积分之和，因为 $\sum_i \Delta_i = 0$ 保证不会剩下发散项。由于快子无质量，第一个积分存在红外对数发散，$m_1 = 0$。在计算有效作用量时，我们也发现了这个红外问题。我们可以对其进行调节，但这与我们要考察的紫外发散消除无关。因此，只保留发散项 $\Lambda \to \infty$,

$$F = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E\, E/2}{e^{\beta E}-1}\log\left(\frac{m_2^2 m_3^2}{m_4^2}\right) + \ldots = -\frac{\pi}{12\beta^2}\log\left(\Lambda^2\right) + \ldots . \tag{B.17}$$

里indler楔形区中的标量场处于温度为 $\beta = 2\pi$的热态，因此其冯·诺依曼熵与热熵一致。我们可以从 $S = \beta^2\partial_\beta F$中提取其紫外发散部分,

$$S_{\mathrm{mat}} = \frac{\pi}{6\beta}\log\left(\Lambda^2\right) + \ldots = \frac{1}{12}\log\left(\Lambda^2\right) + \ldots . \tag{B.18}$$

这正是重整化拓扑耦合所需的广义熵中的紫外发散贡献,

$$S_{\mathrm{gen}} = 4\pi b_B + 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_R)} + \frac{1}{12}\log\left(\Lambda^2\right) + \ldots = 4\pi b + 2\pi a_1 e^{-2\Phi(\phi_R)} + \ldots , \tag{B.19}$$

从而得到紫外有限的结果。

C 玻色化与非局域变换的细节

第 4 节中使用的玻色化、非局域变换和 WKB 极限的组合存在一些重要的微妙之处。首先涉及玻色化，因为不同作者采用的玻色化过程略有不同。本文采用 [22] 中的玻色化约定，而非局域变换的约定则取自 [32]。本附录简要概述这些不同的约定，并说明为何 [22] 中的约定更便于计算纠缠熵：在 WKB 极限下，关联函数可由 Wick 收缩得到。

在 [22], 的约定中，采用非相对论情形的标准玻色化规则。首先引入左行和右行费米子 $\psi_\pm$, [20]

$$\psi(x,t) = \frac{e^{i\mu t}}{\sqrt{2v(x)}}\left[e^{-i\int v(x)\mathrm{d}x + i\pi/4}\psi_+(x,t) + e^{i\int v(x)\mathrm{d}x - i\pi/4}\psi_-(x,t)\right] \tag{C.1}$$

[20]原则上，ψ_+ 与 ψ_- 通过边界条件相关联，因此从 ψ 过渡到 $\psi_\pm$时，自由度的数目保持不变。然而，在双重标度极限下，边界条件是无关的 [22]。

其中 $v(x)$在(2.13)中定义。现在定义玻色场 S 及其正则共轭动量 Π为

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : \exp\left[i\sqrt{\pi} \int \mathrm{d}\tau (\bar{\Pi} \mp \partial_\tau \bar{S}) \right] : \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\tau \bar{S} = \sqrt{\pi} : \psi^\dagger \psi : . \tag{C.2}$$

这给出了以 τ表示的哈密顿量（2.12），其动能项具有标准形式。另一种玻色化方法是遵循 [32, 40], ，这样便可得到以另一个变量 q 表示的哈密顿量，其动能项具有标准形式。该变量定义为 $x = -e^{-q}$ （添加下标 P 以区分正文中使用的玻色场与此处引入的新场），

$$H = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}q \left[\bar{\Pi}_P^2 - (\partial_q \bar{S}_P)^2 + \sqrt{\pi} e^{2q} \left(\bar{\Pi}_P^2 (\partial_q \bar{S}_P) + \frac{1}{3} (\partial_q \bar{S}_P)^3 \right) \right]. \tag{C.3}$$

这两种玻色化过程通过场重定义 $\partial_q S = \partial_q S_P + \frac{1-\sqrt{1-2\mu e^{2q}}}{\sqrt{\pi} e^{2q}}$ 相关联。

两种玻色化过程都有效，彼此并无优劣之分。然而，采用 $\mu \to \infty$并保持 τ 固定时，对 WKB 极限的描述，用的约定 [22] 比用 [32]的约定简单得多。对于 S，WKB 极限就是非相互作用极限，即将哈密顿量限制为二次项所得的极限。如下文将要展示的，在 $\mu \to \infty$ 极限下计算的 S 的两点关联函数，与费米子描述的 WKB 极限下所得结果完全一致，只需代入玻色化关系（C.2）

$$\langle \bar{S}(\tau_1) \bar{S}(\tau_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right). \tag{C.4}$$

在 S 取极限 $\mu \to \infty$ 时，的高点关联函数只由 Wick 收缩决定，这对所有 τ的取值均成立，下文也将对此进行验证。另一方面，对于 S_P，WKB 极限下存在相互作用。通过在（C.3）中略去三次相互作用项计算得到的两点关联函数，与费米子 WKB 极限并不完全一致，[21]

$$\langle \bar{S}_P(q_1) \bar{S}_P(q_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2 + \log(\mu/2)} \right) \neq -\frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right). \tag{C.5}$$

S_P 的关联函数仅在 $q \to -\infty$ 极限下由 Wick 收缩决定。 $\bar{S}_P$的真实关联函数与由 Wick 收缩所确定的近似 $\langle \bar{S}_P(q_1)\, \bar{S}_P(q_2) \rangle_W$之间的差异，会导致对靶空间两点关联函数的修正。与由 Wick 收缩所确定的靶空间关联函数近似 $\langle S_P(\phi_1) S_P(\phi_2) \rangle_W$相比，这些修正在参数上并未被压低。因此，靶空间中的真实关联函数并不能很好地由在玻色化程序中从 [32]丢掉相互作用项而得到的结果来近似，从而来自 [65, 66]的自由理论中计算纠缠熵的方法在该情形下并不适用。

[21] 当然，对于 $q \to -\infty$，令 $q \approx \tau - 1/2\log(\mu/2)$，二者确实一致；但并非在 τ 的整个范围内都一致，而 WKB 关联函数在该范围内有效。

总之，应选择的正确非相互作用极限是 WKB 极限 $\mu \to \infty$极限，并保持 τ 固定，如正文所述。这在 [22] 中所选取的约定下最为自然地实现。

C.1 WKB 极限下的关联函数

为了使上文的论述有据可依，我们现在给出 WKB 极限下矩阵模型标量场二点函数和四点函数的计算。这些计算说明了两点。首先，它们表明，在使用 [22] 中的约定时，通过对 WKB 极限下的费米子关联函数进行玻色化得到的二点函数，与直接计算基态中的玻色二点函数完全一致。其次，通过显式计算，它们确定了 WKB 极限下的四点函数可以分解为 Wick 收缩，从而证明相互作用可以忽略。

对于二点函数，我们从玻色化关系（C.2）的右边开始。积分并利用薛¨定谔方程可得

$$\bar{S}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu_1 \mathrm{d}\nu_2 e^{i(\nu_2-\nu_1)t} a^\dagger_{\nu_1} a_{\nu_2} f(\nu_1,\nu_2,\tau), \tag{C.6}$$

其中 a_ν， $a^\dagger_\nu$是费米子产生湮灭算符 $\{a_{\nu_1}, a^\dagger_{\nu_2}\} = \delta(\nu_1-\nu_2)$，并且

$$f(\nu_1,\nu_2,\tau) = \frac{1}{2(\nu_1-\nu_2)}(\psi'_{\nu_1}(\tau)\psi_{\nu_2}(\tau) - \psi_{\nu_1}(\tau)\psi'_{\nu_2}(\tau)). \tag{C.7}$$

这里 $\psi_\nu(\tau)$ 是满足定态薛定谔方程的波函数

$$\left(-\frac{1}{2}\partial_\tau^2 + V(\tau)\right)\psi_\nu(\tau) = -\nu\,\psi_\nu(\tau). \tag{C.8}$$

WKB 极限下的二点函数为

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{S}(t,\tau_1)\bar{S}(t,\tau_2)\right\rangle &= \pi\int_\mu^\infty \mathrm{d}\nu_1 \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}\nu_2 f(\nu_1,\nu_2,\tau_1) f(\nu_2,\nu_1,\tau_2). \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\delta \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{d}\nu \frac{1}{\delta^2}\sin(2\delta\tau(\tau_1))\sin(2\delta\tau(\tau_2)) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right),\end{aligned} \tag{C.9}$$

其中 $\nu_{1,\ 2} = \mu+\nu\pm\delta$。对同一物理量进行玻色子计算时，使用¯(2.14) 将 S 展开为产生/湮灭算符。玻色子基态定义为

$$\bar{\alpha}_\pm(\omega<0)\,|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\,\bar{\alpha}_\pm(\omega>0) = 0. \tag{C.10}$$

而对易关系为

$$[\bar{\alpha}_\pm(\omega_1), \bar{\alpha}_\pm(\omega_2)] = 2\pi\omega_2\delta(\omega_1+\omega_2). \tag{C.11}$$

将其展开为产生/湮灭算符后，二点函数中得到四项$\langle \bar{S}(t,\ \tau_1)\ \bar{S}(t,\ \tau_2)\rangle$。含有两个左动算符或两个右动算符的项给出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2}{(2\pi)^2\omega_1\omega_2}e^{i\omega_1(t\mp\tau_1)+i\omega_2(t\mp\tau_2)}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\mp i(\omega_1+\omega_2)/2}\langle\bar{\alpha}_{\pm}(\omega_1)\bar{\alpha}_{\pm}(\omega_2)\rangle=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\omega}e^{\mp i\omega(\tau_1-\tau_2)}. \tag{C.12}$$

对于包含 $\bar{\alpha}_+(\omega_1)\bar{\alpha}_-(\omega_2)$ 期望值的混合项，我们使用左右动算符之间的树级算符关系 [32],[22]

$$\bar{\alpha}_-(\omega)=-\left(\frac{2}{\mu}\right)^{-i\omega}\bar{\alpha}_+(\omega)+O(\bar{\alpha}_+^2), \tag{C.13}$$

其中 $O(\bar{\alpha}_+^2)$ 表示存在一个包含 $\bar{\alpha}_+$ 乘积的高阶项无穷级数。于是我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2}{(2\pi)^2\omega_1\omega_2}e^{i\omega_1(t\mp\tau_1)+i\omega_2(t\pm\tau_2)}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\mp i(\omega_1-\omega_2)/2}\langle\bar{\alpha}_{\pm}(\omega_1)\bar{\alpha}_{\mp}(\omega_2)\rangle=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\omega}e^{\mp i\omega(\tau_1+\tau_2)}. \tag{C.14}$$

因此，我们得到的基本上是相同的积分，积分变量为 ω，正如我们在 δ 的费米子贡献中对 δ 进行积分时所得到的那样，见式（C.9），其中将正弦函数展开为指数函数。因此，玻色子计算给出相同的二点函数，

$$\left\langle\bar{S}(t,\tau_1)\bar{S}(t,\tau_2)\right\rangle=-\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right). \tag{C.15}$$

对于四点函数 $\left\langle\bar{S}(\tau_1)...\bar{S}(\tau_4)\right\rangle$，我们希望证明它在 WKB 极限下可因子化，

$$\begin{aligned}\left\langle\bar{S}(\tau_1)...\bar{S}(\tau_4)\right\rangle=&\left\langle\bar{S}(\tau_1)\bar{S}(\tau_2)\right\rangle\left\langle\bar{S}(\tau_3)\bar{S}(\tau_4)\right\rangle\\&+\left\langle\bar{S}(\tau_1)\bar{S}(\tau_3)\right\rangle\left\langle\bar{S}(\tau_2)\bar{S}(\tau_4)\right\rangle\\&+\left\langle\bar{S}(\tau_1)\bar{S}(\tau_4)\right\rangle\left\langle\bar{S}(\tau_2)\bar{S}(\tau_3)\right\rangle,\end{aligned} \tag{C.16}$$

或者等价地，证明连通四点函数消失。证明该量的导数为零会稍微简单一些，

$$\partial_{\tau_1}...\partial_{\tau_4}\left\langle\bar{S}(\tau_1)...\bar{S}(\tau_4)\right\rangle_{\text{conn.}}=0. \tag{C.17}$$

计算时，首先代入玻色化关系（C.2），以及费米子场按产生/湮灭算符展开的分解。然后经过直接但繁琐的计算（不断对易湮灭算符，直到它们

[22]请注意，尽管我们的玻色化约定遵循 [22] 而非 [32],，左行与右行产生/湮灭算符之间的算符关系在两种约定中是相同的。

作用于基态），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\tau_1}...\partial_{\tau_4}\left\langle \bar{S}(\tau_1)...\bar{S}(\tau_4)\right\rangle_{\text{conn.}} \\
&= \pi^2\int_{\mu}^{\infty}\mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_4\int_{-\infty}^{\mu}\mathrm{d}\nu_2\mathrm{d}\nu_3\big[\psi_{\nu_1}(\tau_1)\psi_{\nu_1}(\tau_3)\psi_{\nu_2}(\tau_1)\psi_{\nu_2}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_4)\psi_{\nu_4}(\tau_3)\psi_{\nu_4}(\tau_4) \\
&\quad+\psi_{\nu_1}(\tau_1)\psi_{\nu_1}(\tau_2)\psi_{\nu_2}(\tau_1)\psi_{\nu_2}(\tau_3)\psi_{\nu_3}(\tau_3)\psi_{\nu_3}(\tau_4)\psi_{\nu_4}(\tau_2)\psi_{\nu_4}(\tau_4) \\
&\quad+\psi_{\nu_1}(\tau_1)\psi_{\nu_1}(\tau_4)\psi_{\nu_2}(\tau_1)\psi_{\nu_2}(\tau_3)\psi_{\nu_3}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_4)\psi_{\nu_4}(\tau_2)\psi_{\nu_4}(\tau_3) \\
&\quad+\psi_{\nu_1}(\tau_1)\psi_{\nu_1}(\tau_3)\psi_{\nu_2}(\tau_1)\psi_{\nu_2}(\tau_4)\psi_{\nu_3}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_3)\psi_{\nu_4}(\tau_2)\psi_{\nu_4}(\tau_4)\big] \\
&+\pi^2\int_{\mu}^{\infty}\mathrm{d}\nu_1\int_{-\infty}^{\mu}\mathrm{d}\nu_2\mathrm{d}\nu_3\mathrm{d}\nu_4\psi_{\nu_1}(\tau_1)\psi_{\nu_1}(\tau_4)\psi_{\nu_2}(\tau_1)\psi_{\nu_2}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_3)\psi_{\nu_4}(\tau_3)\psi_{\nu_4}(\tau_4) \\
&+\pi^2\int_{\mu}^{\infty}\mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_3\mathrm{d}\nu_4\int_{-\infty}^{\mu}\mathrm{d}\nu_2\psi_{\nu_1}(\tau_1)\psi_{\nu_1}(\tau_2)\psi_{\nu_2}(\tau_1)\psi_{\nu_2}(\tau_4)\psi_{\nu_3}(\tau_2)\psi_{\nu_3}(\tau_3)\psi_{\nu_4}(\tau_3)\psi_{\nu_4}(\tau_4).
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

为了计算 WKB 极限下的能量积分，我们采用与 [28]中相同的论证。首先，代入 WKB 波函数

$$
\psi_{\nu_1}(\tau)\psi_{\nu_2}(\tau)=\frac{\cos(P_{\nu_1}(\tau)-P_{\nu_2}(\tau))-\sin(P_{\nu_1}(\tau)+P_{\nu_2}(\tau))}{\pi(x(\tau)^2-\nu_1)^{1/4}(x(\tau)^2-\nu_2)^{1/4}},
\tag{C.19}
$$

其中 $P_\nu(\tau)=\int^{x(\tau)}\sqrt{2\nu}\mathrm{d}x'\sqrt{x'^2-2\nu}$。当 $\nu<\mu$ 时，波函数迅速衰减；而在 $\nu>\mu\gg 1$ 处的 WKB 极限下，波函数快速振荡，因此在 ν 积分中大多相互抵消。缓慢振荡的贡献仅来自 $\cos(P_{\nu_1}(\tau)-P_{\nu_2}(\tau))$ 项的 $\nu\approx\mu$ 区域；当 ν_1，ν_2 较大时，这些项可近似为 $\cos\big(\tau(\nu_1-\nu_2)+O((\nu_1-\nu_2)^2)\big)$。因此，在 WKB 极限下，我们令两个波函数的乘积等于

$$
\psi_{\nu_1}(\tau)\psi_{\nu_2}(\tau)\to\frac{1}{\pi\sqrt{x(\tau)^2-\mu}}\cos(\tau(\nu_1-\nu_2)).
\tag{C.20}
$$

然后，可以显式计算关于 ν_1，.....，ν_4 的积分，并舍去无穷远处的端点，因为它们代表高度振荡、平均后相互抵消的贡献。按照这一做法，结果正如所述，$\partial_{\tau_1}...\partial_{\tau_4}\left\langle \bar{S}(\tau_1)...\bar{S}(\tau_4)\right\rangle_{\text{连通项。}}=0$。在 WKB 极限下，玻色理论中的相互作用可以忽略不计。

D 非不变代数的纠缠

在本附录中，我们将讨论一个例子，说明在存在对称性的情况下，选取何种算子代数来定义纠缠熵至关重要。我们考虑一个希尔伯特空间为 $\mathcal{H}$ 、其上有对称群G 作用的量子力学系统。存在一个在 G 作用下不变的子空间（单态扇区） $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$，我们将考察一个不变态 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}_0$。我们将定义两个与子系统选择相关的算子代数$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ ，它们满足这样的性质： $\mathcal{A}$ 将 $\mathcal{H}_0$ 映射到自身，而 $\mathcal{B}$ 将 $\mathcal{H}_0$ 映射到 $\mathcal{H}$ （即其像包含不变扇区之外的扇区）。如果我们将G 视为规范对称性，那么只有 $\mathcal{A}$ 才是有效的规范不变代数；但在这里我们

将 G 视为全局对称性。我们的目标是求出与代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 相关的冯·诺依曼熵，并对二者进行比较。

我们不采用完全抽象的语言来讨论这个问题，而是聚焦于一个模型。该模型的灵感来自 [16] 中用于引入目标空间纠缠的全同粒子设定。令$\mathcal{H}$ 为 N 个（原则上彼此不同的）粒子在 d 维空间中运动时的希尔伯特空间。置换群 $G = S_N$ 在该空间上作用，而在此作用下不变的扇区就是完全对称波函数 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ 所构成的子空间。该空间是 N 个全同玻色子的波函数空间。[23] 按照目标空间纠缠¯方案 [16], ，设想将空间划分为两个互补区域 R 和 R。我们希望为区域 R 关联一个算子代数，并计算该代数在态 $|\psi\rangle$上的冯·诺依曼熵。我们将用两种方式来实现这一点。

如果我们在 $\mathcal{H}_0$ 上进行讨论（也就是说，将粒子视为不可区分），就可以从局限于 $\mathcal{R}$ 内的单粒子算子出发，定义代数 $\mathcal{A}$

$$\mathcal{O}_R = \int_R \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\, O_R(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|\mathbf{x}\rangle\,\langle\mathbf{y}|\ , \tag{D.1}$$

并考虑对称化组合

$$\mathcal{O}_R^{(\mathrm{sym})} = \frac{1}{N}\left(\mathcal{O}_R\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathcal{O}_R\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{O}_R\right)\ . \tag{D.2}$$

代数 $\mathcal{A}$ 由算子 $\mathcal{O}_R^{(\mathrm{sym})}$ 的线性组合及其乘积生成，同时包含恒等算子——请注意，同时作用于多个粒子的算子可由上述算子的乘积得到。这些算子显然保持 $\mathcal{H}_0$不变，因为它们以平等的方式作用于所有 N 粒子。

计算该代数的冯·诺依曼熵需要谨慎处理，因为$\mathcal{H}_0$ 具有超选择扇区——即在 $\mathcal{A}$的作用下保持不变的子空间。一般性讨论可参见 [16], ，但实质上我们可以写成

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{k=0}^{N} \mathcal{H}_{0,k}\ , \tag{D.3}$$

其中，$\mathcal{H}_{0,k}$ 是由（不变）态构成的子空间，其中 k 个粒子位于区域 R ，而$N-k$ 个粒子位于区域 R。代数 $\mathcal{A}$ 不会混合 k取值不同的扇区；对于特定的 k ，它只作用于区域 $\mathcal{R}$中的粒子。在代数 $\mathcal{A}$的层面上，我们因此可以将$\mathcal{H}_{0,k}$ 视为张量积 $\mathcal{H}_k^{(R)}\otimes\mathcal{H}_{N-k}^{(\bar{R})}$，其中 $\mathcal{A}$ 仅作用于第一个因子，该因子对应于区域 R 中的 k 个全同粒子（第二个因子¯对应于区域 R 中的 $N-k$ 个粒子）。因此，在每个扇区$\mathcal{H}_{0,k}$内，我们定义一个

[23]以下所有讨论都可以推广到全同费米子，只需将 $\mathcal{H}_0$ 替换为 $\mathcal{H}$ 中承载置换群符号表示的子空间。

密度矩阵，方法是对 $\mathcal{H}_{N-k}^{(\bar{R})}$ 因子取迹

$$\tilde{\rho}_{0,k}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k;\mathbf{y}_1,\ldots\mathbf{y}_k)=\binom{N}{k}\int_{\bar{R}}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\ldots\mathrm{d}\mathbf{z}_{N-k}\,\psi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{N-k})\\ \times\psi^{\star}(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{N-k})\,. \tag{D.4}$$

二项式系数源于从N中选取 k 个粒子的方式数。请注意，这是一个未归一化的密度矩阵，也就是说

$$p_{0,k}\equiv\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_k^{(R)}}\left(\tilde{\rho}_{0,k}\right)\neq 1\,, \tag{D.5}$$

其中，迹是对 R中 k 个全同粒子的空间取的。$p_{0,\ k}$ 实际上就是在区域 R中发现 k 个粒子的概率：作为对所有归一化的一致性检验，可以证明$\sum_k p_{0,\ k}=1$。代数 $\mathcal{A}$ 的冯·诺依曼熵定义为各个扇区 [16]的熵之和

$$S(\mathcal{A})=-\sum_k\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_k^{(R)}}\left(\tilde{\rho}_{0,k}\log\tilde{\rho}_{0,k}\right)=-\sum_k p_{0,k}\log p_{0,k}+\sum_k p_{0,k}\,S(\rho_{0,k})\,, \tag{D.6}$$

其中，在最后一步中，我们定义了归一化密度矩阵$\rho_{0,\ k}=\tilde{\rho}_{0,\ k}/p_{0,\ k}$，而最终的 $S(\rho_{0,\ k})$ 是该态的标准冯·诺依曼熵。

如果我们将粒子视为可区分的，也就是说，如果我们考虑同一个不变态 $|\psi\rangle$ ，但将其视为完整的 N 粒子希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的一部分，那么我们可以采用另一种观点。在这种情况下，定义与区域 R 对应的算子代数 $\mathcal{B}$的自然方式，是使用恒等算子及如下形式的算符的线性组合与乘积

$$\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\mathcal{O}_R\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\,, \tag{D.7}$$

其中 $\mathcal{O}_R$ 可以处于任意 N 个位置。现在，空间 $\mathcal{H}$ 分裂成更多的¯超选择扇区，这些扇区根据哪些粒子位于区域 R 、哪些粒子位于区域 R 来标记（此时，我们可以区分波函数中标签位于不同位置的粒子）。为方便记号，定义 σ 为由 2^N 个 N¯字符 R 和 R 组成的字符串之一，其中位于 k 位置的字符表示第 k 个粒子所在的区域。于是，希尔伯特空间分解为

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\sigma}\mathcal{H}_{\sigma}\,, \tag{D.8}$$

并且每一项都可以看作一个张量积

$$\mathcal{H}_{\sigma}\cong\mathcal{H}_{\sigma}^{(R)}\otimes\mathcal{H}_{\sigma}^{(\bar{R})}\,. \tag{D.9}$$

第一个因子汇集区域 R 中的 k 粒子（其中 k 等于 σ 中¯字符的数量 R），而第二个因子汇集 R 中的 $N-k$ 粒子。代数 $\mathcal{B}$ 仅在第一个因子上产生非平凡作用。

与代数 $\mathcal{A}$的情况非常相似，我们可以为 $\mathcal{B}$定义每个扇区内的非归一化密度矩阵

$$\tilde{\rho}_\sigma(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k;\mathbf{y}_1,\ldots\mathbf{y}_k) = \int_{\bar{R}} \mathrm{d}\mathbf{z}_1\ldots\mathrm{d}\mathbf{z}_{N-k}\,\psi(\sigma[\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k;\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{N-k}]) \times \psi^\star(\sigma[\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k;\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{N-k}])\,, \quad \text{(D.10)}$$

其中 $\sigma[\mathbf{x}_1,\ldots\ldots,\mathbf{x}_k;\mathbf{z}_1,\ldots\ldots,\mathbf{z}_{N-k}]$ 将$\mathbf{x}_i$ 标签放在包含 R 的位置（在 σ 中），并将 $\mathbf{z}_i$ 标签放在包含 R 的位置。代数 $\mathcal{B}$ 的熵因此为

$$S(\mathcal{B}) = -\sum_\sigma \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_\sigma^{(R)}}(\tilde{\rho}_\sigma\log\tilde{\rho}_\sigma) = -\sum_\sigma p_\sigma\log p_\sigma + \sum_\sigma p_\sigma\, S(\rho_\sigma)\,, \quad \text{(D.11)}$$

其中

$$p_\sigma = \mathrm{tr}\,(\tilde{\rho}_\sigma)\,, \qquad \rho_\sigma = \frac{\tilde{\rho}_\sigma}{p_\sigma}\,, \quad \text{(D.12)}$$

分别表示粒子按 σ 中的方式分布的概率，以及 $\mathcal{H}_\sigma^{(R)}$ 中相应的归一化态。

对于一般的态， $S(\mathcal{B})$ 和 $S(\mathcal{A})$ 原则上互不相关。不过，由于我们考察的是不变态，因此可以找出它们之间的关系。波函数的整体对称性意味着[24]

$$\tilde{\rho}_{0,k} = \binom{N}{k}\tilde{\rho}_\sigma\,, \qquad p_{0,k} = \binom{N}{k}p_\sigma\,, \qquad \rho_{0,k} = \rho_\sigma\,. \quad \text{(D.13)}$$

将此代入两种熵的定义中，可得关系式

$$S(\mathcal{B}) = S(\mathcal{A}) + \sum_{k=0}^{N} p_{0,k}\log\binom{N}{k}\,, \quad \text{(D.14)}$$

这就是正文中给出的结果。由此可见，不同的代数会产生不同的熵，但与此同时，由于所考察的态具有对称性，它们之间也存在简单的关系。

参考文献

[1] S. Ryu 和 T. Takayanagi，从 *AdS/CFT* 推导纠缠熵的全息方法，《物理评论快报》**96** (2006年) 181602 [hep-th/0603001]。[2] V. Balasubramanian、B.D. Chowdhury、B. Czech 和 J. de Boer，缠绕纠缠与时空的涌现，《高能物理学杂志》**01** (2015年) 048 [1406。5859]。[3] V. Balasubramanian、A. Bernamonti、B. Craps、T. De Jonckheere 和 F.Galli，离散规范化理论中的缠绕纠缠，《高能物理学杂志》**12**(2016年) 094 [1609。03991]。

[24] $\tilde{\rho}_{0,\,k}$ 和 $\tilde{\rho}_\sigma$ 先验地存在于不同的空间中：R 中的 k 全同粒子空间，以及 R中的 k 可区分粒子空间。前者是后者的子空间，而且由于该态完全不变，$\tilde{\rho}_\sigma$ 实际上可以视为存在于 R中的 k 全同粒子空间。

[4] *V. Balasubramanian*、*B. Craps*、*T. De Jonckheere* 和 *G. S´arosi*，《对称积轨形中的纠缠与缠绕纠缠》，《高能物理学杂志》*01*（*2019*年） 190 [1806.02871].[5] *J. Erdmenger* 和 *M. Gerbershagen*，《作为复杂度潜在替代方案的缠绕纠缠》，《高能物理学杂志》*03*（*2020*年） 082 [1910.05352].[6] *M. Gerbershagen*，《以广义纠缠度量揭示 *BTZ*黑洞的纠缠阴影》，《高能物理学杂志》*10*（*2021*年） 187 [2105.01097].[7] *B. Craps*、*M. De Clerck* 和 *A. Vilar L´opez*，《缠绕纠缠的定义》，《高能物理学杂志》*03*（*2023*年）079 [2211.17253].[8] *M. Gerbershagen* 和 *D. He*，《缠绕纠缠的体区量子修正》，《高能物理学杂志》*06*（*2025*年） 103 [2410.21458].[9] *V. Balasubramanian*、*P. Kraus* 和 *M. Shigemori*，《作为 *D1-D5*系统有效几何的无质量黑洞与黑环》，*Class. Quant. Grav. 22*（*2005*）*4803*[*hep-th*/0508110].[10] *I. Heemskerk*、*J. Penedones*、*J. Polchinski* 和 *J. Sully*，《共形场论中的全息》，《高能物理学杂志》*10*（*2009*年） 079 [0907.0151].[11] *A. Ghosh*、*C. Krishnan* 和 *A. Mahalingam*，《亚反德西特全息的中心荷》，《高能物理学杂志》*05*（*2025*年） 049 [2412.15201].[12] *A. Mollabashi*、*N. Shiba* 和 *T. Takayanagi*，《两个相互作用共形场论之间的纠缠与广义全息纠缠熵》，《高能物理学杂志》*04*（*2014*年） 185 [1403.1393].[13] *A. Karch* 和 *C.F. Uhlemann*，《全息纠缠熵与内部空间》，《物理评论*D*》*91*（*2015*年） 086005 [1501.00003].[14] *S.R. Das*、*A. Kaushal*、*G. Mandal*、*K.K. Nanda*、*M.H. Radwan* 和 *S.P. Trivedi*，《内部空间中的纠缠熵与 *Ryu-Takayanagi*曲面》，《高能物理学杂志》*04*（*2023*年）141 [2212.11640].[15] *H. Bohra*、*S.R. Das*、*G. Mandal*、*K.K. Nanda*、*M.H. Radwan* 和 *S.P. Trivedi*，《内部空间中的算符与局域性》，《高能物理学杂志》*08*（*2024*年） 014 [2404.04339].[16] *E.A. Mazenc* 和 *D. Ranard*，《靶空间纠缠熵》，《高能物理学杂志》*03*（*2023*年）*111*[1910.07449].[17] *S.R. Das*、*A. Kaushal*、*G. Mandal* 和 *S.P. Trivedi*，《体区纠缠熵与矩阵》，*J. Phys. A 53*（*2020*年） 444002 [2004.00613].[18] *S.R. Das*、*A. Kaushal*、*S. Liu*、*G. Mandal* 和 *S.P. Trivedi*，《*D*膜全息中的规范不变靶空间纠缠》，《高能物理学杂志》*04*（*2021*年） 225 [2011.13857].[19] *H.R. Hampapura*、*J. Harper* 和 *A. Lawrence*，《矩阵模型中的靶空间纠缠》，《高能物理学杂志》*10*（*2021*年） 231 [2012.15683].[20] *V. Gautam*、*M. Hanada*、*A. Jevicki* 和 *C. Peng*，《矩阵纠缠》，《高能物理学杂志》*01*（*2023*年）*003*[2204.06472].[21] *J.R. Fliss* 和 *A. Frenkel*，《矩阵量子力学与纠缠熵：综述》，*2512.03163*。

[22] *I.R. Klebanov*，《二维弦理论》，载于《弦理论与量子引力春季学校》（随后举行研讨会），7, 1991 [*hep-th*/9108019].[23] *E.J. Martinec*，《二维引力与可解弦模型导论》，载于《弦理论与量子引力春季学校》（随后举行研讨会），*9*，*1991*年[*hep-th*/9112019].[24] *P.H. Ginsparg* 和 *G.W. Moore*，《二维引力与二维弦理论讲义》，载于《理论高级研究所》（*TASI 92*）：从黑洞和弦到粒子，第*277*–469, 10, 1993 [*hep-th*/9304011].[25] *J. Polchinski*，《什么是弦理论？》，载于北约高级研究所：莱乌什暑期学校，第*62*届：统计力学与场论中的涨落几何，11, 1994 [*hep-th*/9411028].[26] *E.J. Martinec*，《矩阵模型与二维弦理论》，载于北约高级研究所：玛丽·居里培训课程：随机矩阵在物理学中的应用，第*403–457*页，10, 2004 [*hep-th*/0410136].[27] *S.R. Das*，《非相对论费米子的几何熵与二维弦》，《物理评论*D*》*51*（*1995*年）6901 [*hep-th*/9501090].[28] *S.A. Hartnoll* 和 *E. Mazenc*，《二维弦理论中的纠缠熵》，《物理评论快报》*115*（*2015*年）121602 [1504.07985].[29] *L. Susskind* 和 *J. Uglum*，《正则量子引力与超弦理论中的黑洞熵》，《物理评论*D*》*50*（*1994*年）2700 [*hep-th*/9401070].[30] *A. Almheiri*、*N. Engelhardt*、*D. Marolf* 和 *H. Maxfield*，《蒸发黑洞的体区量子场熵与纠缠楔》，《高能物理学杂志》*12*（*2019*年）*063*[1905.08762].[31] *I.R. Klebanov* 和 *D.A. Lowe*，《与紧致标量场耦合的二维量子引力中的关联函数》，《核物理*B*》*363*（*1991*年）*543*。[32] *M. Natsuume* 和 *J. Polchinski*，《$c = 1$ 矩阵模型中的引力散射》，《核物理*B*》*424*（*1994*年）137 [*hep-th*/9402156].[33] *J.L. Karczmarek*、*J.M. Maldacena* 和 *A. Strominger*，《矩阵模型中的黑洞不形成》，《高能物理学杂志》*01*（*2006*年）039 [*hep-th*/0411174].[34] *R. Bousso* 和 *G. Penington*，《引力区域的纠缠楔》，《物理评论*D*》*107*（*2023*年）086002 [2208.04993].[35] *R. Bousso* 和 *G. Penington*，《我们世界中的全息像》，《物理评论*D*》*108*（*2023*年）*046007*[2302.07892].[36] *J. Polchinski*，《一维随机曲面的临界行为》，《核物理*B*》*346*（*1990*年）*253*。[37] *B. Balthazar*，《二维弦理论与非微扰 $c = 1$ 矩阵模型》，博士论文，哈佛大学，*2020*年。[38] *E. Brezin*、*C. Itzykson*、*G. Parisi* 和 *J.B. Zuber*，《平面图》，《数学物理通讯》*59*（*1978*年）*35*。

[39] *S.R. Das* 和 *A. Jevicki*，《弦场论与 $D = 1$ 弦的物理诠释》，现代物理快报 *A 5*（*1990*年）*1639*。[40] *J. Polchinski*，《（*1+1*）维弦理论的经典极限》，《核物理*B*》*362*（*1991*年）*125*。[41] *P. Di Francesco* 和 *D. Kutasov*，《二维（超）弦理论中的世界面与时空物理》，《核物理*B*》*375*（*1992*年） 119 [*hep-th*/9109005].[42] *P. Di Francesco* 和 *D. Kutasov*，《二维弦理论中的关联函数》，物理快报 *B 261*（*1991*年）*385*。[43] *A.M. Polyakov*，《二维引力中的自调节场与共振关联》，现代物理快报 *A 6*（*1991*年）*635*。[44] *R. Bousso*、*Z. Fisher*、*S. Leichenauer* 和 *A.C. Wall*，《量子聚焦猜想》，《物理评论*D*》*93*（*2016*年） 064044 [1506.02669].[45] *G.W. Gibbons* 和 *M.J. Perry*，《二维弦论时空的物理学》，国际现代物理杂志 *D 1*（*1992*年） 335 [*hep-th*/9204090].[46] *C.R. Nappi* 和 *A. Pasquinucci*，《二维黑洞的热力学》，现代物理快报 *A 7*（*1992*年） 3337 [*gr-qc*/9208002].[47] *D. Grumiller* 和 *R. McNees*，《二维及更高维黑洞的热力学》，《高能物理学杂志》*04*（*2007*年） 074 [*hep-th*/0703230].[48] *V.F. Mukhanov*、*A. Wipf* 和 *A. Zelnikov*，《有效作用量中的四维霍金辐射》，物理快报 *B 332*（*1994*年） 283 [*hep-th*/9403018].[49] *W. Kummer*、*H. Liebl* 和 *D.V. Vassilevich*，《广义二维黑洞模型中非最小耦合物质的霍金辐射》，现代物理快报 *A 12*（*1997*年）*2683*[*hep-th*/9707041].[50] *P. Calabrese* 和 *J.L. Cardy*，《纠缠熵与量子场论》，统计力学杂志 *0406*（*2004*年）*P* 06002 [*hep-th*/0405152].[51] *G. Mandal*、*A.M. Sengupta* 和 *S.R. Wadia*，《二维弦理论的经典解》，现代物理快报 *A 6*（*1991*年）*1685*。[52] *E. Witten*，《论弦理论与黑洞》，《物理评论*D*》*44*（*1991*年）*314*。[53] *R. Dijkgraaf*、*H.L. Verlinde* 和 *E.P. Verlinde*，《黑洞几何中的弦传播》，《核物理*B*》*371*（*1992*年）*269*。[54] *R.M. Wald*，《黑洞熵即诺特荷》，《物理评论*D*》*48*（*1993*年）*R3427*[*gr-qc*/9307038].[55] *V. Iyer* 和 *R.M. Wald*，《诺特荷的若干性质及动力学黑洞熵的一个提案》，《物理评论*D*》*50*（*1994*年） 846 [*gr-qc*/9403028].[56] *R.M. Wald*，《广义相对论》，芝加哥大学出版社，美国芝加哥（*1984*年），*10.7208/chicago/9780226870373.001.0001*。[57] *T. Jacobson*，《纠缠平衡与爱因斯坦方程》，《物理评论快报》*116*（*2016*年） 201101 [1505.04753]。

[58] *T. Jacobson* 和 *M. Visser*，《（反）德西特空间中因果菱形的引力热力学》，*SciPost Phys. 7*（*2019*年） 079 [1812.01596].[59] *K. Jensen*、*J. Sorce* 和 *A.J. Speranza*，《量子引力中一般子区域的广义熵》，《高能物理学杂志》*12*（*2023*年） 020 [2306.01837].[60] *V. Chandrasekaran*、*R. Longo*、*G. Penington* 和 *E. Witten*，《德西特空间的观测量代数》，《高能物理学杂志》*02*（*2023*年） 082 [2206.10780].[61] *V. Chandrasekaran*、*G. Penington* 和 *E. Witten*，《大*N*代数与广义熵》，《高能物理学杂志》*04*（*2023*年） 009 [2209.10454].[62] *D. Harlow*，《量子纠错中的 *Ryu–Takayanagi*公式》，《数学物理通讯》*354*（*2017*年） 865 [1607.03901].[63] *M. Ohya* 和 *D. Petz*，《量子熵及其应用》，物理学文本与专著丛书，*Springer*，柏林等（*1993*年）。[64] *V. Mari´c*、*S. Bocini* 和 *M. Fagotti*，《相互作用链在平衡态与非平衡态下两个不相交区间的纠缠熵及自旋结构》，《高能物理学杂志》*24*（*2020*年） *044*[2312.10028].[65] *I. Peschel*，《由关联函数计算约化密度矩阵》，*Journal of Physics A: Mathematical and General 36*（*2003*年）*L*205 [*cond-mat*/0212631].[66] *H. Casini* 和 *M. Huerta*，《自由量子场论中的纠缠熵》，*J. Phys. A 42*（*2009*年） 504007 [0905.2562].[67] *R.E. Arias*、*H. Casini*、*M. Huerta* 和 *D. Pontello*，《两个区间中自由手征标量场的熵与模哈密顿量》，《物理评论*D*》*98*（*2018*年） 125008 [1809.00026].[68] *V. Kazakov*、*I.K. Kostov* 和 *D. Kutasov*，《二维黑洞的矩阵模型》，《核物理*B*》*622*（*2002*年） 141 [*hep-th*/0101011].[69] *A. Sahu*、*J. van der Heijden*、*M. Van Raamsdonk* 和 *R. Zibakhsh*，《广义纠缠楔的代数》，*2511.21852*。[70] *C. Crnkovic* 和 *E. Witten*，《几何理论中正则形式体系的协变描述》，.[71] *J. Lee* 和 *R.M. Wald*，《局域对称性与约束》，*J. Math. Phys. 31*（*1990*年）*725*。[72] *G. Barnich* 和 *F. Brandt*，《渐近对称性、守恒定律与中心荷的协变理论》，《核物理*B*》*633*（*2002*年） 3 [*hep-th*/0111246].[73] *D. Harlow* 和 *J.-Q. Wu*，《具有边界的协变相空间》，《高能物理学杂志》*10*（*2020*年）*146*[1906.08616].[74] *V. Chandrasekaran*、*E.E. Flanagan*、*I. Shehzad* 和 *A.J. Speranza*，《引力荷与全息重整化的一般框架》，*Int. J. Mod. Phys. A 37*（*2022*年）2250105 [2111.11974].[75] *J.-G. Demers*、*R. Lafrance* 和 *R.C. Myers*，《没有砖墙的黑洞熵》，《物理评论*D*》*52*（*1995*年） 2245 [*gr-qc*/9503003].[76] *D.V. Vassilevich*，《热核展开：使用手册》，*Phys. Rept. 388*（*2003*年）*279*[*hep-th*/0306138].

[77] N.D. Birrell 和 P.C.W. Davies，弯曲时空中的量子场，剑桥数学物理专著，剑桥大学出版社，英国剑桥（1982年），10.1017/CBO9780511622632。