arXiv:2602.02700v1 [hep-th] 2 Feb 2026

Verlinde 线、任意子置换与 $E_{8,1}$ 共形场论中的交换子对

Naveen Balaji Umasankar[a] **和 Arpit Das**[bc]

[a]耶鲁大学物理系，*217 Prospect St*，纽黑文，*CT 06511*[b]爱丁堡大学数学学院，*EH9 3FD*，英国[c]爱丁堡大学希格斯理论物理中心，爱丁堡，*EH8 9YL*，英国

电子邮箱：naveen.umasankar@yale.edu，arpit.das@ed.ac.uk

Abstract: 我们提出了亚纯二维共形场论的一种缺陷理论细化。在这种框架中，通常仅为真空特征标的普通环面配分函数，并不能揭示态在对称线作用下如何组织。我们的核心提议是一种赤道投影 框架：从分解为彼此对易的有理手征代数（其范畴分别为 $\widetilde{\mathcal{C}}$和 $\mathcal{C}$ ）的交换子分解出发，我们用一个配对特征标的非负整数矩阵 M 来编码亏格一耦合，并要求其满足模交织子关系。可逆拓扑缺陷线直接作用于这些粘合数据（Verlinde 线通过 S矩阵本征值对角作用，而置换任意子的线则通过编织自等价置换作用），从而使缺陷振幅的模协变性自动成立，并清楚地区分出能够产生真正模不变量的插入算符，以及定义一致非全纯界面的插入算符。我们进一步证明， [1, 2] 的替换规则 源自缺陷作用的赤道投影，并将这些构造从双特征标例子推广出去，系统地处理 $E_{8,1}$ 理论中的三特征标交换子对。唯一的亚纯共形场论 $E_{8,1}$ 是一个通用试验平台，可由此得到新的缺陷配分函数，并阐明 Pic($\mathcal{C}$) 和 Aut^{br}($\mathcal{C}$) 的作用。最后，我们概述了向更高中心荷（例如 $c = 32,40$）的推广，由此得到超越 Schellekens图景 [3]的模不变非亚纯理论，它们是亚纯母理论的缺陷／界面后裔。

Keywords: 拓扑缺陷线、缺陷配分函数、共形场论

目录

1 引言 **1**

2 背景 **6**

3 赤道　　投影框架 10

3.1 拓扑缺陷线 153.2 半规范化 203.3 赤道投影原理 223.4 双侧赤道投影 273.4.1 示例 I: $(B_{r,1},B_{7-r,1})$ 303.4.2 示例 II: $(D_{r,1},D_{r,1})$ 323.4.3 迈向分类 36

4 轨形构造 **40**

4.1 $B_{r,\ 1}$轨形 424.2 $A_{r,\ 1}$轨形 484.3 $D_{r,\ 1}$轨形 494.4 $G_{r,\ 1}$轨形 52

5 三特征配对 into$E_{8,\ 1}$ 及缺陷插入 55

5.1 (B_1,1,B_6,1) 56 5.2 (D_2,1,D_6,1) 59 5.3 $\left(\text{III}2,G_2^{\otimes 2},\right.$
$\left._1\right)$ 60 5.3.1 简单流扩张 $\mathcal{E}_3[A_{1,8}]$及 III_2 特征标的出现 60 5.3.2 交换子对的模张量范畴 64 5.3.3 缺陷分区函数 65 5.4 $\left(A_{2,1}^{\otimes 2}\right.$
$\left.A_{2\ 1,}^{\otimes 2}\right)$ 68

6 结论与讨论 **70**

A 交换子对的分支规则$E_{8,\ 1}$ 72

A.1 ($D_{2,\ 1}$, $D_{6,\ 1}$) 74
A.2 ($B_{1,\ 1}$, $B_{6,\ 1}$) 77
A.3 (**III**$_2$, $G_{2\ 1,}^{\otimes 2}$) 78
A.4 ($A_{4,\ 1}$, $A_{4,\ 1}$) 79

A.5 $(A_{2\,1,}^{\otimes 2}, A_{2\,1,}^{\otimes 2})$ 79**B** $G_{2,\ 1}$ **轨形拓扑系数 83C 关于分支规则的更多计算 85D 计算 S-矩阵 88**

---

1 引言

二维共形场论（CFT）长期以来一直是检验弦理论、代数几何、表示论以及有理共形场论分类等思想的重要试验场 [4–7]。其中尤其引人关注的是在电荷共轭下自对偶的亚纯理论，它们通常称为全纯 共形场论，其特征是手征代数只有一个不可约模，因此亏格一振幅完全由真空特征标决定（等价地说，反全纯手征代数是平凡的）。这种极端的手征性使其模性质格外刚性，并对允许的对称代数和谱施加强约束。一个典型的基准是 Schellekens 对中心荷不超过 $c = 24$的亚纯理论所作的分类 [3], ：他确定了 71 种不同的理论，每一种都对应于满足模不变性及其他物理要求的 Kac-Moody 代数的唯一组合和／或扩张。

尽管取得了这一全面的结果，亚纯共形场论的许多结构性方面仍然缺乏充分理解。在物理学文献中，Schellekens 的 $c = 24$ 基准通常被视为亚纯理论版图中少数能够受到严格约束的罕见案例之一；然而，它也凸显出，一旦超出一小组特殊构造，我们对一般结构的掌控仍十分有限。在 [8], 中，作者强调，模考量可以在 $c = 24$以上产生无穷多个可接受的特征候选，而相应亚纯共形场论的存在性及其系统组织远非自动成立，因此，模允许数据的空间远大于已知一致理论的空间。类似主题也出现在 AdS_3/CFT_2 关于全纯因子化候选的讨论中，其中 $c = 24k$ 的极值亚纯理论被视为自然目标[9], ，但要确定实际的对偶共形场论却极其困难。即便是最直接的引力方法，试图计算配分函数时也会遇到基本的一致性问题，这再次表明，模协变性与半经典推理并不能直接

确定一个一致的亚纯共形场论 [10]。在共形场论一侧，通过模微分方程推导出了对假定的极端自对偶理论的约束，这表明，超出某个范围后，整个无穷族都可能不存在；因此，存在性本身成为一个结构性问题，而不再是模不变性的推论 [11]。特别是，尽管普通的环面配分函数是一种强大的不变量，但它可能过于粗略。在全纯理论中，它退化为真空特征标，因而无法揭示态在非局域对称性下如何组织。通过插入拓扑缺陷线（TDLs）可以得到一种自然的细化。沿时间周期贯穿一条可逆拓扑缺陷线，会产生孪生属一振幅；它通过依据本征值对态进行加权，细化了真空特征标。模变换交换时间周期与空间周期，因此，缺陷振幅的族通过对所插入线进行共轭，在模群作用下闭合；此时的核心问题是确定这些模协变数据何时能够补全为具有非负重数的真正模不变量（如轨形类构造中那样），以及何时应将其解释为一致的非全纯界面振幅，而不是新完整共形场论的配分函数。这些缺陷插入算符不仅仅是对配分函数的装饰，也研究了理论的内部组织，揭示了手征扇区如何在由 Verlinde 线编码的对称线，以及由编织自等价编码的任意子置换缺陷作用下重新组织。因此，通过分析理论对这些插入算符的响应，我们可以深入了解其隐藏结构与对称性。在全纯理论中，这一点尤其强大，因为尽管无缺陷配分函数会坍缩为单一的真空特征标，缺陷插入算符仍能揭示非平凡的分解与子扇区动力学，而这些内容原本将一直不可见。

本文的核心思想是，亚纯理论的缺陷配分函数可以通过采用赤道投影 视角来高效地计算与组织。我们从亚纯理论内部的交换子分解出发，识别出一对~相互对易的有理手征代数，其表示范畴分别为 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}$。相应的亏格一振幅通过倍半线性配对由非负整数矩阵 M 编码

$$Z_M(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{i\in I_{\mathcal{C}}} \sum_{j\in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}} M_{ij}\chi_i(\tau)\overline{\widetilde{\chi}_j(\tau)}, \tag{1.1}$$

其中，一致性要求 M 交织模群作用，示意地写作 $S_{\mathcal{C}}M = MS_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ 和 $T_{\mathcal{C}}M = MT_{\widetilde{\mathcal{C}}}$，具体的共轭方式由约定确定。赤道投影原理指出，沿时间周期穿入可逆拓扑缺陷线，会通过显式运算作用于耦合数据：Verlinde 线通过模S矩阵的特征值对角作用，而任意子置换缺陷则通过与编织自等价相关的置换矩阵作用

。在这一表述下，缺陷振幅的模协变性便自然成立，因为模变换只是共轭插入的线算符，使振幅保持在一个封闭的族中。因此，核心问题在于：何时插入会产生真正的模不变量，即一个条目为非负整数且满足模交织方程的矩阵 M'；何时则会产生非全纯界面振幅。后者是一个一致的亏格一可观测量，但并非新完整共形场论的配分函数。

这一框架特别适合研究和拓展 [1]的“替换规则”理念。粗略地说，替换规则允许人们在保持模约束的同时，系统地修改交换子配对的一侧，从而生成新的模数据和新的耦合。我们表明，这类替换操作可以实现为作用于交换子数据的缺陷插入的赤道投影，由此在单一代数机制中统一缺陷作用与替换规则。我们通过处理三特征标交换子对，将这一方法拓展到 [1, 12] 所研究的双特征标情形之外，其中包括早期研究中未涉及的张量积情形和 IVOA 型情形。这填补了唯一的 $c = 8$ 亚纯理论的缺陷图景中的空白，并在更高中心荷下系统地产生新的缺陷配分函数。具体而言，本文聚焦于三个相互关联的主题：

1. **作为精细探针的缺陷配分函数**
   我们计算了存在可逆拓扑缺陷线时的环面振幅，并利用它们分离出在无缺陷环面配分函数中不会出现的子扇区。这些子扇区一般可以是模协变的；在有利情况下，它们还可以重组为模不变量的非全纯耦合，因而值得将其解释为涌现的有理共形场论数据，或一致的界面可观测量。

2. **交换子对与赤道投影**
   我们在亚纯理论中构造并分析有理手征代数的交换子对，并用模交织算子 M 编码它们的赤道粘合。这为可容许的亏格一耦合提供了一种具体的记账工具，也为缺陷插入通过对 M 的显式变换发挥作用提供了一个自然的研究框架。

3. **通过赤道投影实现替换规则**
   我们将替换规则重新诠释为由可逆缺陷诱导的 M 受控变形，从而更清晰地理解其代数机制与模结构。这清楚地揭示了哪些操作是“安全的”，能够产生真正的模不变量；而哪些操作通常会产生缺陷界面。

这些思想在多个方面建立于早期研究之上并对其加以推广。Schellekens 对亚纯理论的分类 $c = 24$ Schellekens [3], 对有理共形场论中全纯因子化的研究 [13], 以及近期关于模微分线性方程和基于特征标的分类的工作 [14–16], 都为本研究提供了背景。特别是，对于模不变量但非全纯的配分函数这一视角，与近期在[17], 取得的发现相呼应；与此同时，对缺陷和拓扑线的强调，则与关于高形式对称性和代数共形场论的更广泛文献相联系 [18–21]。

本工作的一个核心贡献，是建立一个概念清晰且计算高效的框架，通过对拓扑缺陷线进行赤道投影，计算亚纯共形场论的缺陷配分函数。这一视角阐明了 Verlinde 线和自同构缺陷如何作用于交换子对，并区分了哪些插入算符会产生真正的模不变配分函数，哪些则定义了非全纯缺陷界面。 $c = 8$ 在这一论述中起着关键作用。首先，$E_{8,\ 1}$ 是中心荷为八的唯一亚纯共形场论，因此是理想的研究对象，可用于剖析核心机制，而不受更高中心荷情形中额外歧义的影响。其次，在 [22] 的分类中，每个三特征标交换子对都可以与一个双线性配对相对应，其赤道投影会给出$E_{8,\ 1}$ 真空特征标；因此， $c = 8$ 是一个通用试验平台，可用于将替换规则推广到双特征标理论之外。第三，与 $c = 8$ 相关的若干交换子对涉及张量积有理共形场论或 IVOA 型构造，而此前的研究尚未探索这些情形；解决这些问题既能得到新的缺陷配分函数，也能阐明编织自等价群 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 和皮卡群 $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 在支配亚纯理论中可逆拓扑缺陷线方面所起的作用。基于这些原因， $c = 8$ 不仅为阐述赤道投影原理提供了最清晰的研究背景，也构成了一个基础示例，可据此自然推广到中心荷更高的情形。

近期， [23], 提出了一种互补方案，可从手征数据构造二维共形场论：作者给出了一种具有物理动机的典范粘合方案，该方案源自置于包含雪茄或半球几何的曲背景上的四维 $\mathcal{N} = 2$ 超对称场论（另见 [24, 25]）。在单个雪茄上进行约化，会产生一个手征代数扇区，由局域在雪茄尖端的顶点算子代数描述。随后，将两个这样的雪茄粘合成一个球面，便可得到完整的非手征二维共形场论；粘合相当于对共形块的模平方求和，因此由底层四维路径积分确定，该路径积分在共形块空间上引入半双线性配对。相比之下，赤道投影

本文发展的框架本质上是二维的、范畴论的。我们从两个（不一定相同的）顶点算子代数（VOA）~出发，其表示范畴分别为 V Rep(V) 和 $\mathcal{C}$ = Rep(V) V~ ~ $\mathcal{C}$ =，并将它们视为分别位于球面的两个半球上。沿赤道粘合由一个重数矩阵 $M \in \mathrm{Mat}^{I_{\mathcal{C}} \times I_{\bar{\mathcal{C}}}}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$~编码，其中 $I_{\mathcal{C}}$ 和 $I_{\bar{\mathcal{C}}}$ 标记 $\mathcal{C}$ 与 $\bar{\mathcal{C}}$的简单对象（初级场）。该矩阵规定了完整希尔伯特空间中左行与右行初级场的配对，并给出一个亏格一振幅 $Z_M(\tau, \tau)$。粘合的模一致性通过 $\mathcal{C}$ 与 $\bar{\mathcal{C}}$的模数据之间的交织算子~关系来施加；特别是，我们的框架对容许的粘合空间进行参数化，而不是选定唯一一种粘合。从这一视角看，[23]的半球粘合可视为在更大的赤道粘合空间中指定一种优选的半双线性配对。我们的形式体系有意采用更宽泛的范围，因为它允许对角型、简单流型和例外模不变量，也允许不同手征理论~（$\mathcal{C}$、$\bar{\mathcal{C}}$）之间的配对。

另一个重要区别涉及缺陷的作用。在我们的形式体系中，可逆与不可逆拓扑缺陷线都能自然地作用于粘合数据。具体而言，由矩阵 R_L 和 R_R 分别表示在左、右手征半边上的缺陷插入，其作用为

$$M \mapsto M^{(R_L, R_R)} = R_L^T M \overline{R_R}, \tag{1.2}$$

并按照左右约定进行转置或共轭。这提供了一种系统的方法，用于生成模协变缺陷振幅、将亏格一可观测量按照缺陷作用组织成轨道，以及确定这类变形何时对应真正的模不变量，何时对应非全纯缺陷。此类对粘合的缺陷论变形在 [23], 中并非核心内容；该文着重讨论的是由理论的四维起源所决定的典范粘合。

提纲

本文结构如下。第 2 节汇集必要的背景知识，以确保内容自成一体，涵盖顶点算子代数（VOA）、酉模张量范畴（模张量范畴）、模数据与拓扑缺陷线、环面振幅与轨形扇区，以及向量值模形式基础。第 3 节介绍赤道投影框架，并通过若干具有代表性的例子加以说明。第 4 节专门讨论轨形构造：我们描述相关步骤，并在多个具体情形中计算相应的轨形配分函数。第 5 节将我们的方法应用于亚纯理论 $E_{8,\,1}$，计算由实现 E_8

的对易子/余商对的缺陷数据生成的缺陷配分函数。我们在第 6 节以讨论与展望作结，更多技术细节汇集于附录中。

2 背景

二维有理共形场论具有一类特别刚性的非局域可观测量，称为拓扑缺陷线（TDL） [26–28]。这些缺陷之所以称为“拓扑”的，是因为它们没有张力，并且可以在世界面上平滑变形而不改变关联函数，只要变形过程中不穿过局域场或其他缺陷 [29]。从这个意义上说，TDL 是可自由变形的一维算符，具有同痕不变性（更多详情见 [30]）。将 TDL 放置在恒定时间切片上时，它定义了共形场论的希尔伯特空间 $\mathcal{L}$ 上的线性算子 $\mathcal{H}$ ，即 $\mathcal{L}:\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$。由于 TDL 具有拓扑性质，它与左、右手征代数的作用相交换，特别是与 Virasoro 模相交换，如下所示

$$[\mathcal{L}, L_n] = \left[\mathcal{L}, \overline{L}_n\right] = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

缺陷线的融合通过算子复合实现。若两条 TDL $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 放置在同一恒定时间切片上，它们的融合对应于将相应的算子相乘，

$$\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \longleftrightarrow \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

这一算子代数反映在有理共形场论中拓扑缺陷线的融合范畴结构中，即

$$\mathcal{L}_i\mathcal{L}_j = \sum_k N_{ij}^k \mathcal{L}_k, \tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{N}_{ij}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是融合系数。现代文献强调将拓扑缺陷线视为类对称算符，它们推广了普通的全局对称性，并同时编码可逆与不可逆的“广义对称性”；相关应用包括缺陷重整化群流、费米子共形场论以及副费米子/玻色化模型 [30, 31]。

顶点算子代数与酉模张量范畴

VOA [32–34] 是二维共形场论中手征算子乘积展开的代数化表述。具体而言，它由一个手征态向量空间 V、一个真空$|\Omega\rangle \in V$、一个平移算子 $T \in \mathrm{End}(V)$，以及一个态场对应组成

$$a \longmapsto Y(a,z) \in \mathrm{End}(V), \qquad Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}, \tag{2.4}$$

它将每个态映射为一个按洛朗模展开的全纯场。截断条件 $a_{(n)}b = 0$ 对所有充分大的 n 成立，意味着算符乘积展开只有有限个奇异项。这里， $b \in V$ 是任意的，而$a_{(n)} \in$ End(V)表示场 $Y(a,z)$的 n^{th} 模，因此

$$Y(a,z)b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(a_{(n)}b\right) z^{-n-1}. \tag{2.5}$$

真空公理表明，真空场就是真空场算符，并且插入真空会恢复原始状态，因此

$$Y(|\Omega\rangle, z) = \mathbb{1}_V, \tag{2.6}$$

以及 $Y(a,\ z)|\Omega\rangle$ 在 $z = 0$ 处是正则的，其首项为 a。平移协变性由下式编码:

$$[T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z), \tag{2.7}$$

这就是动量生成的无穷小平移的手征版本。最后一个公理是共形场论意义下的局域性，即对于任意 $a,\ b \in V$，乘积 $Y(a,\ z)Y(b,\ w)$ 和 $Y(b,\ w)Y(a,\ z)$ 是同一个底层有理函数的边界展开，其可能的奇点仅位于 $z = 0$、 $w = 0$ 和 $z = w$。这正是互局域性与 OPE 结合律的精确代数版本。在本文中，我们限制在有理情形（并且在示例中限制在酉情形），因此 V 具有有限个单模和半单模范畴。特别地，我们可以将 $\mathcal{C} =$ Rep(V) 视为一个酉模张量范畴，用以刻画该理论的手征拓扑线（Verlinde 线）。

RCFT 的表示论预计会构成一个半单张量范畴，其中的简单对象（即初级场）标记超选择扇区，或者等价地，标记不可约拓扑线，而它们的融合则编码了这些线的算符乘积。酉模张量范畴正是精确捕捉这些数据的抽象结构。它是一个有限半单刚性辫张量范畴，带有相容的扭曲，以及一种酉结构，使得结合律和编织同构可以选为酉的；此外，它还具有非退化性这一额外性质，即编织“最大限度地非平凡”，等价地，模 S-矩阵可逆。本文中的酉模张量范畴并非以抽象方式引入，而是作为有理手征代数的表示范畴出现。具体而言，给定一个满足 RCFT 中采用的标准有限性和半单性条件的顶点算子代数 V，我们考虑范畴 Rep(V)，其对象为 V-模，态射为 V-交织算子。Rep(V) 中的融合积由顶点算子代数张量积理论定义，也就是说，它由相应的.....刻画。

交织算子的泛性质；在物理上，它编码了初级场的手征算符乘积展开。这个张量积理论旨在为 V-模构造顶点张量范畴结构，进而得到编织张量范畴结构。因此，编织是通过手征共形块的解析延拓与交换而得到的，而刚性则体现了共轭扇区的存在 [35, 36]。

模数据与 Verlinde 公式

设 $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(V)$ 为有理顶点算子代数 V 的模张量范畴（MTC）。将初级场或单对象记为 $I_{\mathcal{C}}$，其对应特征标为 $\chi_i(\tau)$。由于 V 是有理的，由特征标张成的空间 $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} \equiv \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\chi_i(\tau) | i \in I_{\mathcal{C}}\}$ 是一个有限维复向量空间，其维数为 $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} \leq |I_{\mathcal{C}}|$，并且是 SL(2,Z)- 稳定的 [37]。假设不可约特征标线性无关，则有 $\dim \mathcal{H}_{\mathcal{C}} = |I_{\mathcal{C}}|$。选取由单模给出的基，模群通过线性变换作用于此空间。矩阵$S_{\mathcal{C}}$ 与 $T_{\mathcal{C}}$ 关于来自模张量范畴的自然厄米形式可取为酉的。因此，模表示的像落在酉群中

$$U(|I_{\mathcal{C}}|) = \{U \in \mathrm{GL}(|I_{\mathcal{C}}|, \mathbb{C}) | U^{\dagger} U = \mathbb{1}\}, \tag{2.8}$$

即一个 $|I_{\mathcal{C}}|$ 维复向量空间上酉变换所成的群。环面单点函数的模协变性意味着特征标向量 $\chi(\tau) = (\chi_i(\tau))_{i \in I_{\mathcal{C}}}$给出一个射影表示

$$\rho_{\mathcal{C}} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to U(|I_{\mathcal{C}}|), \qquad \rho_{\mathcal{C}}(S) = S_{\mathcal{C}}, \quad \rho_{\mathcal{C}}(T) = T_{\mathcal{C}}, \tag{2.9}$$

其中 $T_{\mathcal{C}}$ 为对角矩阵，其元素为 $T_{ii} = e^{2\pi i (h_i - \frac{c}{24})}$。这一对（$S_{\mathcal{C}}$， $T_{\mathcal{C}}$）基本上编码了手征理论的全部一阶亏格数据。一类特殊的纯手征拓扑缺陷线是与对象 $a \in \mathcal{C}$ 相关联的 Verlinde 线。它们在特征标向量上的作用为对角作用，具体为

$$D_a = \mathrm{Diag}\left(\frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}} \right)_{i \in I_{\mathcal{C}}}. \tag{2.10}$$

当且仅当 a 是一个简单流，即 $a \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 时，这些线才是可逆的。随后，Verlinde 公式可从 S-矩阵中恢复融合系数，具体如下 [26]

$$N_{ab}^{c} = \sum_{i \in I_{\mathcal{C}}} \frac{S_{ai} S_{bi} S_{ci}^{*}}{S_{0i}}. \tag{2.11}$$

这正是亏格一模信息与算子代数融合信息之间的桥梁，也是我们一旦知道数据 $(S_{\mathcal{C}}, T_{\mathcal{C}})$，缺陷插入算符便受到严格控制的基本原因。

可逆拓扑缺陷线

在所有缺陷中，可逆缺陷在融合下构成一个群，通常组织为

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C}), \tag{2.12}$$

其中，Pic($\mathcal{C}$)由作为可逆对象的简单流生成，而Aut^{br} 是编织自等价构成的群，它们以置换初级场的方式作用。这些也称为任意子置换可逆拓扑缺陷线；在特征标上，它们通过置换矩阵 P_g作用，且 $g \in$Aut^{br} 与模表示对易

$$P_g \rho(\gamma) = \rho(\gamma) P_g, \qquad \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \tag{2.13}$$

当 g 作为模数据的实际对称性实现时。由标记为(a, g)的可逆缺陷所产生的联合作用可打包为自同态

$$\rho(a, g) = D_a P_g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}). \tag{2.14}$$

对角韦林德算子与置换算子的这一实现，正是使缺陷计算在亏格一时变得可处理的关键，因为只要知道数据$(S_{\mathcal{C}}, T_{\mathcal{C}})$，可逆缺陷在特征标上的作用便是显式的。

缺陷配分函数、扭曲迹与轨形扇区

沿环面的时间周期放置一条拓扑缺陷线，会产生一个缺陷配分函数，或称扭曲环面振幅，其定义如下

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{L}}(\tau, \overline{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(\mathcal{L} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \overline{q}^{\overline{L}_0 - \frac{\overline{c}}{24}} \right). \tag{2.15}$$

更一般地，对于由可逆线构成的有限对称群 G ，我们可以定义标准族 $Z_{h,\ g}$，其中空间周期上有 h 扭曲，时间周期上有 g 扭曲。这些偏迹在 SL(2，Z) 作用下通过 S 和 T 重排而彼此变换；只有在轨形配分函数中对所有扇区求和后，才能恢复模不变性

$$Z_{\mathrm{orb}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g,h \in G} Z_{h,g}. \tag{2.16}$$

在环面上，这体现了一个熟知的原则：对称性的规范化必然要纳入扭曲扇区。在后续章节中，我们将反复对比真正的模不变共形场论配分函数与模协变缺陷环面振幅。

向量值模形式

整理角色数据的一种有力方法，是将其视为表示 $\rho_{\mathcal{C}}$ [7, 38, 39]的向量值模形式（vvmf）。在许多分类计划中，尤其是在 Mathur-Mukhi-Sen（MMS）计划 [6, 40, 41]及其现代扩张 [7, 15, 16, 38,42–49], 中，特征标被刻画为模线性微分方程（MLDE）的解，其单值化给出 $\rho_{\mathcal{C}}$。这种方法解释了为何对于特征标数量较少的低阶理论，我们能够根据少量谱输入重构模表示，进而得到融合与缺陷数据。MMS 最初的观点及其后续发展构成了基于特征标的有理共形场论分类的标准工具，并将在本文的具体示例中始终作为隐含的方法使用。

计算 S 和 T

在本文的应用中，我们将频繁遇到主要通过中心荷 c、共形权重 $\{h_i\}$ 和 q 级数展开来呈现的交换子对成分。为了将这些理论纳入赤道框架，我们需要模数据。对角 T矩阵可直接由（c, h_i）得到，而非平凡的输入是 S矩阵。采用 MMS 风格提取 S有两个互补的动机：

1. 亏格一一致性：
   这对（S, T）必须满足 SL(2，Z) 关系 $S^2 = (ST)^3 = C$，并允许相位差，且满足幺正性。随后，这还必须与融合的正性或整数性通过 Verlinde 公式相容。一旦 T 和少量谱数据确定， S 便会受到严格约束。

2. 单值化 MLDE 构造：
   当特征标满足模线性微分方程时，模群作用可表示为微分方程的单值化，由此可直接得到 $\rho_{\mathcal{C}}(S)$ 和 $\rho_{\mathcal{C}}(T)$。我们在 [41] 中概述了这一路径，并将在附录 D中采用。它恰好提供了构造 Verlinde 线本征值、确定缺陷对特征标向量的作用，以及实施赤道投影计算所需的模输入。

3 赤道投影框架

一个亏格一振幅的（不一定是亚纯的）有理共形场论，可以看作是由沿赤道粘合一个左行和一个右行手征块而产生的。将这一过程形式化的一种便捷方法是在二球面上进行研究

$$S^2 = H_N \cup H_S, \qquad H_N \cap H_S = S^1_{\text{eq}}, \tag{3.1}$$

其中 H_N 和 H_S 分别是北半球和南闭半球，S^1_{eq} 是它们共同的边界圆（赤道）。我们在北半球 H_N上放置一个手征顶点算子代数 V，其表示范畴为$\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(V)$；在南半球 H_S上放置一个（可能不同的）手征顶点算子代数 $\widetilde{V}$，其 $\widetilde{\mathcal{C}} =$ 表示范畴为 $\widetilde{\mathrm{Rep}}(\widetilde{V})$。这一对（$V$，$\widetilde{V}$）是我们有理共形场论所依据的手征代数，其中心荷分别为 c 和 $\widetilde{c}$，而它们的表示范畴 $\mathcal{C}$、$\widetilde{\mathcal{C}}$ 是相应的酉模张量范畴（UMTC）[5, 50–52]。虽然完整公理化的完整有理共形场论分类仍在发展中，但人们普遍猜想，一致的亏格一耦合由这些手征范畴的模数据所决定（例如，通过拓扑场论/有理共形场论对应）[53–55]。我们用 $I_{\mathcal{C}}$ 和 $I_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ 表示不可约 V模和 $\widetilde{V}$模（左行和右行初级场）的同构类有限指标集。对于每个 $i \in I_{\mathcal{C}}$和 $j \in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}$，令 $\chi_i(\tau)$和 $\widetilde{\chi}_j(\tau)$为相应的特征标，并将它们组装成矢量

$$\begin{aligned} \chi(\tau) &= \big(\chi_i(\tau)\big)_{i\in I_{\mathcal{C}}}, \\ \widetilde{\chi}(\overline{\tau}) &= \big(\widetilde{\chi}_j(\overline{\tau})\big)_{j\in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此，完整的亏格一振幅关于这些矢量呈厄米双线性，而反全纯依赖则通过复共轭 $\widetilde{\chi}_i(\tau) = \widetilde{\chi}_i(\tau)$ 实现。$\widetilde{\mathcal{C}}$和 $\mathcal{C}$的模数据分别是作用于这些特征标的 S和 T矩阵，分别记为 $S_{\mathcal{C}}$，$T_{\mathcal{C}}$和 $S_{\widetilde{\mathcal{C}}}$，$T_{\widetilde{\mathcal{C}}}$。沿赤道 S^1_{eq} 粘合两个半球，相当于指定左行和右行手征边界态如何配对。这个配对由一个非负整数矩阵编码

$$M \in \mathrm{Mat}_{I_{\mathcal{C}}\times I_{\widetilde{\mathcal{C}}}}\big(\mathbb{Z}_{\geq 0}\big). \tag{3.3}$$

这种粘合如图1所示。

M 的行由左侧初级场 $i \in I_{\mathcal{C}}$标记，列由右侧初级场$j \in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}$标记。元素 M_{ij} 记录了左侧扇区 i 与右侧扇区 j 沿赤道配对的重数。取 S^1_{eq} 为周空间方向并沿欧几里得时间演化，从而转到环面上时，由 M 编码的双线性配对给出环面配分函数

$$Z_M(\tau,\overline{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{\widetilde{c}}{24}}\right) = \sum_{i\in I_{\mathcal{C}}}\sum_{j\in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}} M_{ij}\,\chi_i(\tau)\,\widetilde{\chi}_j(\overline{\tau}) = \chi(\tau)^T M\,\widetilde{\chi}(\overline{\tau}). \tag{3.4}$$

这种“赤道配对”观点是 RCFT [53] 的三维拓扑场论诠释中的标准观点。在拓扑场论构造关联函数时，将一个态空间赋予圆 S^1_{eq}，该态空间由模张量范畴的简单对象张成，而完整的配分函数则通过

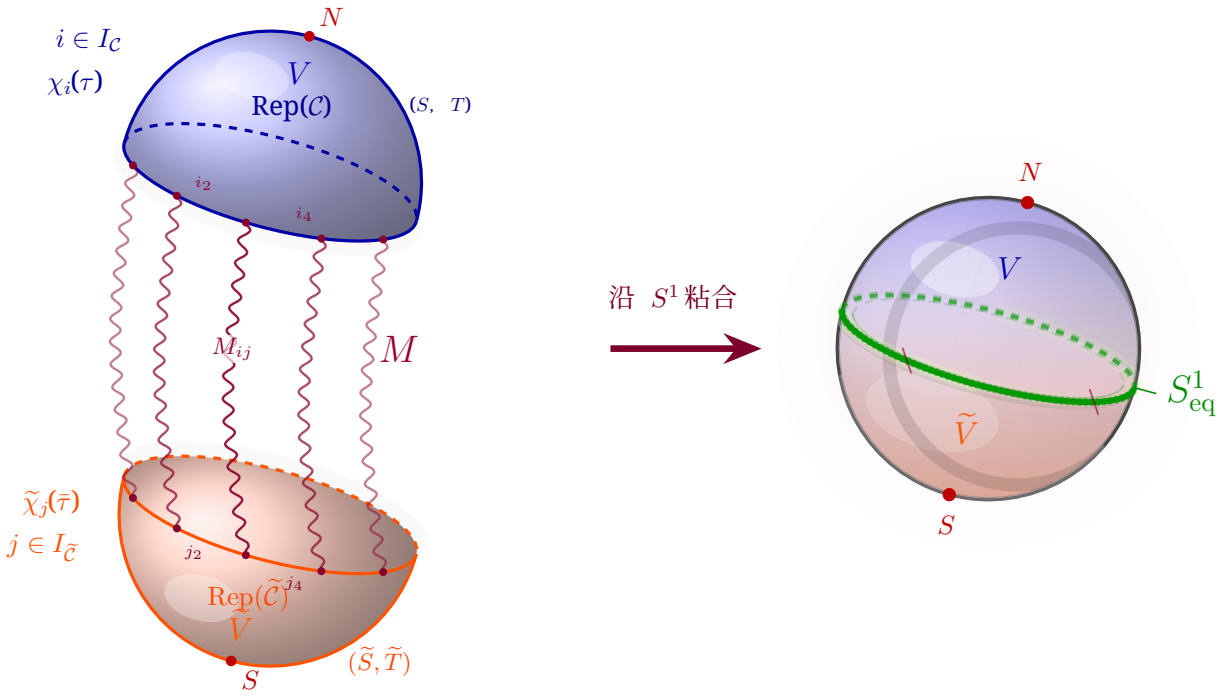

图1：手性半球的粘合：带有 Rep($\mathcal{C}$) 的 VOA V 位于北半球~，而带有 Rep($\mathcal{C}$) 的 V 在点 $i \in I_{\mathcal{C}}$ 和 $j \in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ 处沿边界通过粘合矩阵 M 缝合，形成带有赤道 S^1_{eq} 的粘合球面。

借助适当的 Frobenius 代数对象，沿公共圆粘合两个这样的手征边界条件。在我们的表述中，赤道上的粘合数据由重数矩阵 M 编码，它规定了左、右主场如何配对。在物理学的 RCFT 语言中，M_{ij} 统计左右扇区

$$\mathcal{H}_i \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_j \tag{3.5}$$

在完整希尔伯特空间中，因此

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{i \in I_{\mathcal{C}},\, j \in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}} M_{ij}\, \mathcal{H}_i \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_j . \tag{3.6}$$

配分函数 3.4 被视为对这个空间取迹。由于简并度不能为负，因此我们确实有 $M_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。因此，矩阵 M 是实现手征块赤道粘合的算符。它不必是对角的[1]，，并且允许任意的左右配对，但物理一致性会施加模约束。

[1]左右手征代数不必逐个标签对应。即使 $\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}}$，诸如电荷共轭、简单流或例外 ADE 不变量等模不变量，也会在

特征标通过通常的 S 和 T变换，在环面的映射类群作用下进行变换，其形式如下

$$\begin{aligned}\chi_i\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{k\in I_{\mathcal{C}}} (S_{\mathcal{C}})_{ik}\,\chi_k(\tau),\\ \chi_i(\tau+1) &= \sum_{k\in I_{\mathcal{C}}} (T_{\mathcal{C}})_{ik}\,\chi_k(\tau),\end{aligned} \tag{3.7}$$

~右手征理论 $\mathcal{C}$也类似，其在 $S_{\widetilde{\mathcal{C}}}$和 $T_{\widetilde{\mathcal{C}}}$作用下变换。粘合后的配分函数满足模不变性，要求它在模数据下保持不变

$$\begin{aligned}Z_M\left(-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{\overline{\tau}}\right) &= Z_M(\tau,\overline{\tau}),\\ Z_M(\tau+1,\overline{\tau}+1) &= Z_M(\tau,\overline{\tau}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

为使其在 S变换下保持不变，我们有

$$\begin{aligned}Z_M\left(-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{\overline{\tau}}\right) &= \sum_{i,j} M_{ij}\,\chi_i\left(-\frac{1}{\tau}\right)\,\widetilde{\chi}_j\left(-\frac{1}{\overline{\tau}}\right)\\ &= \sum_{k,\ell}\left(\sum_{i,j}(S_{\mathcal{C}})_{ik}\,M_{ij}\,\overline{(S_{\widetilde{\mathcal{C}}})_{j\ell}}\right)\chi_k(\tau)\,\widetilde{\chi}_\ell(\overline{\tau})\\ &= \sum_{k,\ell} M_{k\ell}\,\chi_k(\tau)\,\widetilde{\chi}_\ell(\overline{\tau}),\end{aligned} \tag{3.9}$$

为使其在 T变换下保持不变，我们有

$$\begin{aligned}Z_M(\tau+1,\overline{\tau}+1) &= \sum_{i,j} M_{ij}\,\chi_i(\tau+1)\,\widetilde{\chi}_j(\overline{\tau}+1)\\ &= \sum_{k,\ell}\left(\sum_{i,j}(T_{\mathcal{C}})_{ik}\,M_{ij}\,\overline{(T_{\widetilde{\mathcal{C}}})_{j\ell}}\right)\chi_k(\tau)\,\widetilde{\chi}_\ell(\overline{\tau})\\ &= \sum_{k,\ell} M_{k\ell}\,\chi_k(\tau)\,\widetilde{\chi}_\ell(\overline{\tau}).\end{aligned} \tag{3.10}$$

由此，通过比较 $\chi_k(\tau)$ 和 $\widetilde{\chi}_\ell(\tau)$ 的系数，我们得到交织算子方程

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{C}}^T M &= M\,\overline{S_{\widetilde{\mathcal{C}}}},\\ T_{\mathcal{C}}^T M &= M\,\overline{T_{\widetilde{\mathcal{C}}}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

两侧。在拓扑场论的语言中，这对应于选择一个非平凡的 Frobenius 代数对象，而非平凡的对角对象。因此，任意的左右耦合 $M_{ij}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 原则上都允许，而对 M 的唯一约束来自模不变性和正性，而非对角性。

换言之，重数矩阵 M 必须交织左、右顶点算子代数所承载的两个模表示~。回顾一下，对于具有 $\mathcal{C} = \mathcal{C}$ 的酉有理共形场论，作用于特征标上的模表示 ρ：SL(2，Z) $\to$ U(N) 是酉的，即 $S^\dagger = S^{-1}$ 且 $T^\dagger = T^{-1}$，因此我们可以选择一个特征标基（等价地，一个不可约表示的标准正交基），使得 T 为对角矩阵，其对角元为

$$T_{ii} = e^{2\pi i\left(h_i - \frac{c}{24}\right)}, \tag{3.12}$$

因此 $T = T^T$，且 S–矩阵是对称的， $S_{ij} = S_{ji}$。特别是，对于对角酉理论，通常有 $S_{\mathcal{C}}^T = S_{\mathcal{C}}$ 且 $T_{\mathcal{C}}^T = T_{\mathcal{C}}$，因此 3.11 变为

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{C}} M &= M\,\overline{S_{\widetilde{\mathcal{C}}}}, \\ T_{\mathcal{C}} M &= M\,\overline{T_{\widetilde{\mathcal{C}}}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

~此外，当 $\mathcal{C} = \mathcal{C}$ 且所选的 S-矩阵为实数时（许多 WZW 和极小模型均如此）， S-约束可化简为

$$[S_{\mathcal{C}}, M] = S_{\mathcal{C}} M - M S_{\mathcal{C}} = 0. \tag{3.14}$$

T-约束仍是一个非平凡的相位匹配条件，应保持为[2]

$$T_{\mathcal{C}} M = M\,\overline{T_{\mathcal{C}}} = M T_{\mathcal{C}}^{-1}. \tag{3.15}$$

这会施加以下自旋匹配条件

$$e^{2\pi i\left(h_i - \frac{c}{24}\right)} = e^{-2\pi i\left(\widetilde{h}_j - \frac{\widetilde{c}}{24}\right)}. \tag{3.16}$$

等价地，

$$h_i + \widetilde{h}_j - \frac{c + \widetilde{c}}{24} \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

在两侧采用相同手征理论这一常见情形下，我们有 $c = \widetilde{c}$ 和~$h_i = h_j$，因此可化简为

$$h_i + h_j - \frac{c}{12} \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

尤其是，对于对角不变量 $i = j$，它意味着 $2h_i - \frac{c}{12} \in$ Z。反之，若采用通常的非手征有理共形场论归一化 $Z = \sum_{i,\ j} M_{ij} \chi_i(\tau) \chi_j(\tau)$，那么

[2]如果 T 矩阵是实矩阵，且 $h_i - \frac{c}{24} \in \frac{1}{2}$Z 如 E_8 的情形，那么我们就得到 $[T_{\mathcal{C}}, M] = 0$ 的特殊情形。

标准条件是 $h_i - h_j \in \mathbb{Z}$。综上所述，3.14 和3.15 恰好是标准有理共形场论（RCFT）归一化下的 Cap- pelli–Itzykson–Zuber 模不变量条件 [56]，这些条件曾在其对 $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$的模不变量 ADE 分类研究中得到探讨。在现代酉模张量范畴（UMTC）的语言中，参见 [56]例如，模不变量恰好是满足这些交织算子方程的非负整数矩阵 M。换言之，带赤道的球面图像将左侧 $\widetilde{}$块与右侧 V块通过重数矩阵 V粘合起来 M。于是赤道振幅可简洁地写作

$$Z^{\mathrm{eq}}(\tau,\overline{\tau}) = \sum_{i,j} M_{ij}\, \chi_i(\tau)\, \widetilde{\chi}_j(\overline{\tau}). \tag{3.19}$$

$\widetilde{}$因此，交换子对（$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$）恰好是这样一对酉模张量范畴：其表示范畴能够沿赤道进行一致的粘合。

3.1 拓扑缺陷线

在进行赤道粘合之前，我们可以通过插入一条支撑在平行于赤道圆周的环上的拓扑缺陷线 $\mathcal{L}$ S^1_{eq} 来修改左半球；等价地，经过映射到环面后，该环平行于空间周期。在三维拓扑场论/有理共形场论对应中，这样的线对应于手征范畴 $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(V)$ 中的一个可逆对象或一个自同构。由于半球只承载左行手征块，该插入仅作用于每个主场 $i \in I_{\mathcal{C}}$ 的 $\mathcal{C}$ 标签，因此会通过一个作用于特征标向量 $\chi(\tau)$ 的线性算子来修改赤道粘合。保持手征代数不变的可逆拓扑线分为两种自然情形：

Verlinde（群状）线

这些对应于 $\mathcal{C}$ 的可逆简单对象，即皮卡群 [57]

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) = \{a \in I_{\mathcal{C}} | a \otimes a^{\vee} \cong 1\}. \tag{3.20}$$

对象 a 属于皮卡群，当且仅当它存在张量逆元（即其对偶） $a\otimes a^{\vee} \cong 1$ 和 $a^{\vee}\otimes a \cong 1$，或者等价地说，其量子维数为 $d_a = 1$。这与群中的元素 g 存在逆元 g^{-1} 完全类似。在物理上，它们是类群（简单流）拓扑线。 $a \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 对特征标的作用是对角的，且完全由模 S-矩阵决定，如下所示 [26]

$$(D_a)_{ii'} = \delta_{ii'} \frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}}, \quad i, i' \in I_{\mathcal{C}}. \tag{3.21}$$

这就是人们熟悉的 Verlinde 线本征值公式，它编码了该缺陷如何与每个主场编织。

自同构（置换任意子的）线

除了来自皮卡群 Pic($\mathcal{C}$) 的 Verlinde 线之外，酉模张量范畴 $\mathcal{C}$ 还允许第二类可逆拓扑线缺陷，称为任意子置换线，它们来自 $\mathcal{C}$的编织自等价， $g \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$。我们简要回顾有理共形场论应用所需的结构，并参阅 [17, 58] 以了解详情。编织自等价是幺半群自等价 $g:\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ，且保持编织。在物理上，这样的函子以保持融合规则的方式重新标记任意子。特别地，它诱导简单对象的置换 $g:\ I_{\mathcal{C}} \to I_{\mathcal{C}}$。编织的保持可以表示为与编织同构的相容性。在酉模张量范畴 $\mathcal{C}$中，每一对简单对象或任意子类型 X， Y 都有一个相关联的编织态射

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X, \tag{3.22}$$

也就是说， g 若在编织（除指定的幺半群结构外）下保持交织关系，则称其为编织的；用有理共形场论的术语来说，这意味着模数据在重新标记下保持不变。从物理上看，这相当于将任意子 X 绕着任意子 Y交换。各种$c_{X,\,Y}$复合操作的本征值编码了所有拓扑数据，例如编织相位、融合重数，以及构成模 S矩阵和 T矩阵的张量范畴数据。现在，若要使 g 成为真正的拓扑对称性，它必须保留所有拓扑数据。尽管融合保持性已包含在幺半群自等价的定义中，编织保持性则要求：先将两个任意子 X 和 Y 编织，再施加 g，所得态射必须与先将 g 作用于任意子、再进行编织所得的态射相同。这一物理要求恰好由以下范畴定义刻画：

$$g(c_{X,Y}) = c_{g(X),g(Y)}. \tag{3.23}$$

这一条件确保所有拓扑数据都得以保留。交换 X 绕着 Y 所得的相位$\theta_{X,\,Y}$ ，必须与交换 g（X）绕着 g（Y）所得的相位相同；所有拓扑相互作用数据也都得以保留，即：

$$S_{XY} = S_{g(X),g(Y)}, \qquad \theta_X = \theta_{g(X)}, \qquad N_{XY}^{Z} = N_{g(X),g(Y)}^{g(Z)}. \tag{3.24}$$

因此，编织自等价正是酉模张量范畴中保持编织统计的任意子置换对称性。 $\mathcal{C}$ 的编织自等价与幺半群自然同构的商记为$\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$，即此类对称性的群。该商反映了如下物理原理：拓扑线缺陷仅在其端点附加可逆点状算符的意义下被定义。每个元素 $g \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$定义一条可逆拓扑缺陷线，并通过置换标记 $i \mapsto g(i)$作用于特征标向量 $\chi(\tau)$。

具体而言，将特征标空间等同于

$$\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}} = \mathrm{Span}\{e_i : i \in I_{\mathcal{C}}\}, \tag{3.25}$$

其基元素 e_i 对应于由初级场 i标记的环面区块。我们用置换矩阵表示 g 在此空间上的作用

$$(P_g)_{ij} = \delta_{i,g(j)}, \tag{3.26}$$

因此 $P_g e_i = e_{g(i)}$，进而 P_g 通过映射 $\chi_j \mapsto \chi_{g(j)}$来重新标记特征标。从几何上看，这就是缺陷在线手征块上的作用；将插入理解为沿赤道／空间周期还是时间周期运行，取决于所选择的迹／通道，但无论哪种情况，对手征标签的诱导作用都是同一个置换。我们选择一个与模变换相容的置换矩阵 P_g

$$\begin{aligned} P_g S_{\mathcal{C}} &= S_{\mathcal{C}} P_g, \\ P_g T_{\mathcal{C}} &= T_{\mathcal{C}} P_g. \end{aligned} \tag{3.27}$$

编织自等价仅在幺半群自然同构意义下定义 [59]。在特征标层面，这种自然同构可通过对角重相位 $U = \mathrm{Diag}(u_i)$ 起作用，从而将 P_g共轭为 $U P_g U^{-1}$。固定模数据的标准归一化，例如在有理共形场论约定下令 $S_{\mathcal{C}}$ 对称且 $T_{\mathcal{C}}$ 为对角矩阵，便可消除典型酉有理共形场论实例中的这一剩余歧义；我们将选择一个代表 P_g 与3.27相容。关于大型 WZW 酉模张量范畴族中 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 的显式计算，参见 [59]。

线的组合 作用

上述两类可逆拓扑线 $\mathcal{C}$ 自然结合成一个代数结构。将它们对特征标的作用打包的一种便捷方式，是将 $\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}$ 视为由环面特征标 $\{\chi_i\}_{i \in I_{\mathcal{C}}}$张成的复向量空间。因此，对特征标向量的任何线性作用都是 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}) \cong \mathrm{Mat}^{I_{\mathcal{C}} \times I_{\bar{\mathcal{C}}}}(\mathbb{C})$ 中的一个元素，即由 $\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}} \times \mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}$ 复矩阵构成的代数。 D_a 和 P_g 都是这类特殊矩阵。Verlinde算子 D_a 是对角矩阵，而自同构算子 P_g 是置换矩阵。由于二者都可逆，它们的乘积描述了作用于手征块的广义可逆缺陷插入。简单流与任意子置换对称性并非彼此独立。事实上，$\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 中的元素 $g \in$会置换单对象 $i \mapsto g(i)$，并通过限制作用于可逆对象 $a \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$，将 $a \mapsto g(a)$ 映至 $\in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$。从物理上说，将单流缺陷拖过任意子置换缺陷会重新标记它。因此，由这两类缺陷生成的可逆缺陷子群具有半直积结构

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C}). \tag{3.28}$$

亏格一特征标上的相应算子实现是映射

$$\rho : \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}\left(\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}\right), \tag{3.29}$$

其中 $\rho(a,\ g) = D_a P_g \in \mathrm{End}\left(\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}\right)$。为说明这是半直积的一个表示，注意到 P_g 按如下方式置换基向量 e_i （等价地，特征标标签）：

$$P_g e_i = e_{g(i)}, \qquad P_g^{-1} e_i = e_{g^{-1}(i)}. \tag{3.30}$$

通过 P_g 共轭，实现了 g 在简单流线上的诱导作用，具体如下:

$$P_g D_a P_g^{-1} = D_{g(a)}. \tag{3.31}$$

这一点很容易看出。考虑 Verlinde算子在如下基元素上的作用:

$$D_a e_i = \lambda_a(i) e_i, \qquad \lambda_a(i) \equiv \frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}}. \tag{3.32}$$

现在我们可以用 P_g 对 D_a 进行共轭，得到:

$$\begin{aligned} P_g D_a P_g^{-1} e_i =& P_g D_a e_{g^{-1}(i)} \\ =& P_g \left(\lambda_a(g^{-1}(i)) e_{g^{-1}(i)}\right) \\ =& \lambda_a(g^{-1}(i)) e_i, \end{aligned} \tag{3.33}$$

这里我们用到了 $gg^{-1} = \mathrm{id}$ 这一事实。因此，我们发现 $P_g D_a P_g^{-1}$在同一基底下也是对角的，其对角元为:

$$\left(P_g D_a P_g^{-1}\right)_{ii'} = \lambda_a(g^{-1}(i)). \tag{3.34}$$

现在我们只需利用模数据对称性来关联这些特征值。由于 g 是编织自等价，它保持模数据不变，特别是下方所示的 S-矩阵:

$$(S_{\mathcal{C}})_{g(x),g(y)} = (S_{\mathcal{C}})_{x,y}\,. \tag{3.35}$$

因此，我们得到本征值 λ为

$$\lambda_{g(a)}(i) = \frac{(S_{\mathcal{C}})_{g(a),i}}{(S_{\mathcal{C}})_{0,i}} = \frac{(S_{\mathcal{C}})_{a,g^{-1}(i)}}{(S_{\mathcal{C}})_{0,g^{-1}(i)}} = \lambda_a(g^{-1}(i)), \tag{3.36}$$

这里我们用到了 $g(0) = 0$ 这一事实。综合以上结果，可得

$$P_g D_a P_g^{-1} e_i = \lambda_{g(a)}(i) e_i = D_{g(a)} e_i. \tag{3.37}$$

例如，若简单标签为 $\{0,x,y\}$，且 g 将 $x \leftrightarrow y$ 互换，同时固定 0，则置换矩阵的形式为 $P_g = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$。令 $D_a = \mathrm{Diag}\,(1,\lambda_x,\lambda_y)$，直接相乘可得 $P_g D_a P_g^{-1} = \mathrm{Diag}(1,\lambda_y,\lambda_x$。利用 3.31，我们可以计算两个缺陷算符的乘积：

$$\begin{aligned}\rho(a_1,g_1)\rho(a_2,g_2) =& D_{a_1}P_{g_1}D_{a_2}P_{g_2}\\ =& D_{a_1}\left(P_{g_1}D_{a_2}P_{g_1}^{-1}\right)P_{g_1}P_{g_2}\\ =& D_{a_1}D_{g_1(a_2)}P_{g_1g_2}\\ =& D_{a_1\cdot g_1(a_2)}P_{g_1g_2}\\ =& \rho(a_1\cdot g_1(a_2),g_1g_2),\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中 $g_1(a_2)$ 是 g_1 对可逆对象的自然作用，而 P_{g_1} 将对角线 D_{a_2} 共轭表示为 $D_{g_1(a_2)}$，因为它会置换对角线中的标签，因此 ρ 是由半直积的乘法规则所定义的半直积表示

$$(a_1,g_1)(a_2,g_2) = (a_1g_1(a_2),g_1g_2). \tag{3.39}$$

从代数角度看，这只是 $\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \ltimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 的表示；从物理角度看，它对应于类群线与任意子置换对称线的融合。根据 Verlinde 公式，D_a 与模数据 $S_{\mathcal{C}}$ 和 $T_{\mathcal{C}}$ 对易；根据 P_g 的构造，$\rho(a,g)$ 也与模数据对易。我们将赤道希尔伯特空间定义如下

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I_{\mathcal{C}},j\in I_{\widetilde{\mathcal{C}}}} M_{ij}\mathcal{H}_i\otimes\widetilde{\mathcal{H}}_j, \tag{3.40}$$

其中 M_{ij} 是重数。令 D_a 为 Verlinde缺陷算子，它仅通过标量 $(S_{\mathcal{C}})_{ai}(S_{\mathcal{C}})_{0i}$ 作用于直和项 $\mathcal{H}_i\otimes\widetilde{\mathcal{H}}_j$ 的左因子；令 $\widehat{P}_g$ 通过自等价 g 置换标签 $\widetilde{\ }$，将 $\mathcal{H}_i\otimes\mathcal{H}_j$ 映至 $\mathcal{H}_{g(i)}\otimes\mathcal{H}_j$。相应的缺陷孪生亏格一振幅为

$$Z^{(a,g)}(\tau,\overline{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\widehat{D_aP_g}q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{c}{24}}\right] = \chi(\tau)^T\rho(a,g)M\widetilde{\chi}(\overline{\tau}), \tag{3.41}$$

其中 $\rho(a,\ g)\ = D_aP_g$。在分量形式下[3]，

$$\rho(a,g) = (D_aP_g)_{ij} = \sum_k (D_a)_{ik}(P_g)_{kj} = \frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}}\delta_{j,g(i)}. \tag{3.42}$$

[3]这里我们采用约定 $(P_g)_{ij} = \delta_{j,\ g(i)}$；若改用 $\delta_{i,\ g(j)}$，则后续公式也应作相应调整。

根据3.13 以及 $\rho(a,\ g)$ 与 $S_{\mathcal{C}}$ 和 $T_{\mathcal{C}}$ 对易这一事实，我们看到 $Z^{(a,g)}$ 是模协变的，即它是一个环面振幅。在 M 为对角的情况下，$M_{ij} = \delta_{j,\ \phi(i)}$，其中$\phi$： $I_{\mathcal{C}} \to I_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ 定义了一个双射，我们有

$$(D_a P_g M)_{ij} = \sum_{i'} (D_a P_g)_{ii'} M_{i'j} = \frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}} \delta_{j,\phi(g(i))}. \tag{3.43}$$

将其代回赤道振幅的表达式，得到

$$Z^{(a,g)}(\tau,\overline{\tau}) = \sum_{i\in I_{\mathcal{C}}} \frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}} \chi_i(\tau) \widetilde{\chi}_{\phi(g(i))}(\overline{\tau}). \tag{3.44}$$

因此，纯 Verlinde 选择 $g = 1$ 会产生对角扭缠，而纯自同构选择 $a = 1$ 会置换右标签。 ϕ(g(i))的作用很简单：自同构首先置换左标签 $i \mapsto g(i)$，然后配对 ϕ 将其映射为右标签 $\phi(g(i))$。

3.2 半规范化

赤道粘合框架的一个显著优点是，它能自然地处理对手征数据的单侧操作。具体而言，给定一组作用于左行手征块的可逆拓扑缺陷线，我们可以仅在上半球（或左半球）上对一个有限子群取平均，同时保持下半球（或右半球）不变。由此可对赤道配对进行可控形变，我们将其称为半规范化。具体地，令

$$G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C}) \equiv \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C}), \tag{3.45}$$

并令 ρ: $G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C})$ $\to$End(C^{I_C})为其在特征标向量 $\chi(\tau)$上诱导的作用。每个$\rho(h)$都是一个可逆矩阵，表示拓扑线 $I_{\mathcal{C}} \times I_{\mathcal{C}}$ h 对左行环面区块的作用（等价地说，即该线绕时间周期时的扭缠作用，或经过 S-变换后的重新标记作用）。令 $H \subset G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C})$为由简单流和/或任意子置换线生成的有限子群。现在，为了在左行一侧对 H 进行规范化，我们引入平均算子

$$\Pi_H \equiv \frac{1}{|H|} \sum_{h\in H} \rho(h), \qquad \Pi_H^2 = \Pi_H. \tag{3.46}$$

由于 ρ 是一个表示，且 H 是有限群，因此 Pi_H 是幂等元，

$$\Pi_H^2 = \Pi_H, \tag{3.47}$$

从而投影到左行块空间 C^{I_C}中 H-不变的子空间。在酉情形下，选取一个 H-不变的厄米形式后，可将 Π_H 取为正交投影算子。在物理上， Π_H 通过对 H 中缺陷在赤道粘合数据的左手性半部上的插入算符取平均来实现这一操作，同时保持右行手性理论和配对矩阵 M 不变。等价地，在亏格一的情形下，它对左行块上相应的缺陷缠绕迹取平均，而不引入额外的扭曲希尔伯特空间。特别要指出的是，这并非完整的轨形化：我们既没有沿环面的两个圈对扭结求和，也没有在两个手征半边上纳入相应的扭曲扇区。因此，半规范化振幅具有以下形式

$$Z^{[H]} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\widehat{\Pi}_H q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{\tilde{c}}{24}}\right]. \tag{3.48}$$

这种构造正是有限对称性规范化的单边类比；它只会改变左行扇区，因此称为半规范化。从路径积分的角度看，Π_H 实现了在球面的左侧边界圆（即赤道）上对所有 H-扭曲求和，而右侧边界圆保持不扭曲。这并非完整的轨形化，因为我们既不对两个周期上的插入算符取平均，也不在两个手征半边上对扭曲扇区求和。相反，半规范化选出左行希尔伯特空间中 H-不变的子扇区，同时保留原有的右行谱。

这种构造的模性质应像缺陷缠绕迹那样谨慎表述。由于我们只对左行环面块上的时间周期插入算符取平均（并未同时对空间扭曲求和，也未纳入扭曲扇区），一般不应期待得到单个模不变函数。相反，半规范化自然会产生一个在 SL(2，Z) 作用下封闭的模协变振幅族，该族通过共轭变换插入算符而得。具体而言，在 $\gamma \in$ SL(2，Z) 下，算符 $\rho(h)$ 会变为

$$\rho(h) \longmapsto \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)\rho(h)\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1}, \tag{3.49}$$

因此，平均插入 Π_H 被传输到共轭投影算符

$$(\Pi_H)_\gamma \equiv \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)\Pi_H\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1} = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)\rho(h)\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1}, \tag{3.50}$$

而模变换的作用为

$$Z^{[H]}(\gamma\tau,\overline{\gamma\tau}) = Z^{[H]}_\gamma(\tau,\overline{\tau}), \tag{3.51}$$

其中 $Z^{[H]}_\gamma$ 的定义是将插入中的 Π_H 替换为 $(\Pi_H)_\gamma$ 。

若还希望半规范化振幅本身保持不变，即 $Z^{[H]}(\gamma\tau,\ \gamma\tau) = Z^{[H]}(\tau,\ \tau)$，则需要额外的结构：投影算符在相关表示的模作用下保持不变。等价地，对于生成元 $\gamma = S,\ T$，需要满足 $(\Pi_H)_\gamma = \Pi_H$，这比一般的协变性陈述更强，意味着 H 与选定基底中的模数据相容地作用。若没有这一假设，一般最多只能断言半规范化构造在模变换下封闭，而不能断言单个迹保持不变。因此，通常不应断言

$$[S, \Pi_H] = 0, \qquad [T, \Pi_H] = 0, \tag{3.52}$$

除非每个 $\rho(h)$ 与 $S,\ T$ 在选定基底中严格对易，或者更不变地说，除非 Π_H 在 $\rho_{\mathcal{C}}(S)$ 与 $\rho_{\mathcal{C}}(T)$ 的共轭作用下保持不变。这一构造是对有限对称性进行规范化的单侧类比：它对一个手征半部上的缺陷插入取平均，同时使另一半保持不变。它在精神上也与针对非可逆缺陷的“广义规范化”操作密切相关，后者讨论于 [60], ，意即二者都实现由缺陷数据构建的平均/类投影算符运算。在本文中，我们限制于可逆线的子群，因此 Π_H 是真正的群平均。将赤道投影算子推广到可逆线之外，使之成为例如实现 Haagerup 型规范化的完整融合范畴幂等元，将需要额外的范畴论输入（正如 [60] 的非可逆设定中那样），而这超出了我们目前的范围。

3.3 赤道投影原理

我们现在将赤道粘合图景形式化为一个精确陈述，说明可逆缺陷线如何作用于交换子配对。关键在于，在（例如）左半球上插入一条线，先验地产生一个界面振幅：一个模协变的亏格一可观测量，其模变换通过对左侧所插入线的共轭而仍留在同一族内。仅当该插入产生一个新的、具有非负整数条目且仍满足模交织方程的重数矩阵时，这样的对象才成为真正的亏格一有理共形场论配分函数；特别地，这既要求与模表示具有适当的对易/交织性质，也要求所得耦合的整数性/正性。

赤道投影原理

设 $(\mathcal{C},\mathcal{C},M)$ 为一个带有模交织子 M 的交换子对。对任意可逆缺陷线 $(a,g)\in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})\rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$，令 $R\equiv D_aP_g$。相应的环面界面振幅

$$Z^{(a,g)}(\tau,\overline{\tau})=\chi(\tau)^TR^TM\overline{\widetilde{\chi}(\tau)} \tag{3.53}$$

是模协变的：对于每个 $\gamma\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$,

$$Z^{(a,g)}(\gamma\cdot\tau,\overline{\gamma\cdot\tau})=\chi(\tau)^TR_\gamma^TM\overline{\widetilde{\chi}(\tau)}, \tag{3.54}$$

其中 $R_\gamma\equiv\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)R\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1}$。此外，$Z^{(a,g)}$ 定义了一个真正的模不变有理共形场论配分函数，当且仅当变形耦合 $M'\equiv R^TM$的条目均为非负整数，且满足模交织子方程

$$\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^TM'=M'\overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)},\qquad \gamma=S,T, \tag{3.55}$$

等价地，对于 $\gamma=S,T$，有 $\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^TR^TM=R^T\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^TM$。

设 V 和 $\widetilde{V}$ 是有理酉顶点算子代数，其酉模张量范畴分别为 $\mathcal{C}=\mathrm{Rep}(V)$ 和 $\widetilde{\mathcal{C}}=\mathrm{Rep}(\widetilde{V})$，特征标分别为 $\chi(\tau)$ 和 $\widetilde{\chi}(\tau)$，并设

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{C}}&:\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\to U(|I_{\mathcal{C}}|),\\ \rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}&:\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\to U(|I_{\widetilde{\mathcal{C}}}|),\end{aligned} \tag{3.56}$$

为由模数据 $(S_{\mathcal{C}},T_{\mathcal{C}})$ 和 $(S_{\widetilde{\mathcal{C}}},T_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ 生成的模表示。这里，$U(|I_{\mathcal{C}}|)$ 和 $U(|I_{\widetilde{\mathcal{C}}}|)$ 表示次数分别为 $|I_{\mathcal{C}}|$ 和 $|I_{\widetilde{\mathcal{C}}}|$的酉群，即由$|I_{\mathcal{C}}|\times|I_{\mathcal{C}}|$阶和$|I_{\widetilde{\mathcal{C}}}|\times|I_{\widetilde{\mathcal{C}}}|$阶酉矩阵构成的群。这里，$|I_{\mathcal{C}}|$（分别为$|I_{\widetilde{\mathcal{C}}}|$）表示顶点算子代数 V（分别为 $\widetilde{V}$）的初级场同构类的数量。若矩阵 $M\in\mathrm{Mat}^{I_{\mathcal{C}}\times I_{\widetilde{\mathcal{C}}}}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 满足以下条件，则称其为模交织子

$$\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^TM=M\overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)},\qquad \forall\gamma\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}). \tag{3.57}$$

这等价于通常的 S- 与 T-交织算子关系，并保证无缺陷赤道振幅 $Z^{\mathrm{eq}}(\tau,\tau)=\chi(\tau)^TM\widetilde{\chi}(\tau)$ 的模不变性。现在在左手手征理论上选取一条可逆缺陷线，由对 $(a,g)\in\mathrm{Pic}(\mathcal{C})\rtimes\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 指定。这里，a 是给出一条 Verlinde 线的可逆单流对象，而 g 是通过对初级场作置换而作用的辫化自等价。我们用算符 $R\equiv D_aP_g$ 在特征标空间上表示它们，其中 D_a 是对角 Verlinde 特征值矩阵，而 P_g 是

如下定义的置换矩阵

$$\begin{aligned} D_a \equiv & \text{Diag}\left(\frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}}\right)_{i\in I_{\mathcal{C}}}, \\ P_g = & \delta_{i,g(j)}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

我们选取一个与模数据相容的代表元 P_g，即通过共轭保持 $(S_{\mathcal{C}},\ T_{\mathcal{C}})$

$$P_g \rho_{\mathcal{C}}(\gamma) P_g^{-1} = \rho_{\mathcal{C}}(\gamma), \qquad \forall \gamma \in \{S, T\}. \tag{3.59}$$

模协变性

现在，对于每个 $\gamma \in$ SL(2，Z)，模协变性要求我们有

$$Z^{a,g}(\gamma\cdot\tau, \overline{\gamma\cdot\tau}) = \chi(\tau)^T \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T R^T M \overline{\rho_{\tilde{\mathcal{C}}}(\gamma)\widetilde{\chi}(\tau)}. \tag{3.60}$$

这里必须注意，不应假设 R （或其组成部分）与模数据之间具有任何交换性。相反，插入项通过共轭进行传递。利用恒等元

$$\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T R^T = \left(\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T R^T \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1}\right)^T \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T, \tag{3.61}$$

然后应用交织算子关系3.57，我们得到

$$Z^{a,g}(\gamma\cdot\tau, \overline{\gamma\cdot\tau}) = \chi(\tau)^T R_\gamma^T M \overline{\widetilde{\chi}(\tau)} = Z_\gamma^{(a,g)}(\tau, \overline{\tau}), \tag{3.62}$$

这里我们用到了

$$R_\gamma \equiv \rho_{\mathcal{C}}(\gamma) R \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1}, \tag{3.63}$$

这一陈述体现了稳健的模协变性，即模变换通过共轭插入的算符 R来作用。特别是，只要允许传输后的插入算符 R_γ，单侧投影族就在 SL(2，Z) 下封闭，无需额外的交换假设。

值得强调的是，这修正了常见简略论证中的一个问题。在许多地方，人们会非正式地援引 Verlinde 公式，声称对角 Verlinde 线算子D_a 与模数据对易。一般而言，真正成立的是共轭恒等式

$$S_{\mathcal{C}} D_a S_{\mathcal{C}}^{-1} = N_a, \tag{3.64}$$

因此， $[D_a, S_{\mathcal{C}}] \neq 0$ 通常成立。故模协变性的证明必须如上所述，明确追踪 R的共轭，而不能将 $\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T R^T$ 改写成仿佛 R 与 $\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)$对易一样。基于这一点，我们简要说明标准道解释。对于 $\gamma = T$，由于 $T_{\mathcal{C}}$ 是对角的，任意对角 D_a 都会自动与 $T_{\mathcal{C}}$ 对易，而缠绕矩阵 P_g 经过选择，能够保持模数据不变。因此，我们得到了缠绕迹预期的相位重加权。对于 $\gamma = S$，插入通过下式被传递到交叉道

$$R \mapsto S_{\mathcal{C}} R S_{\mathcal{C}}^{-1}. \tag{3.65}$$

特别地，当 R 包含一个在 a-Verlinde 线插入 D_a 且在特征标基下为对角的插入时， S-变换在交叉道中产生如下融合行动

$$S_{\mathcal{C}} D_a S_{\mathcal{C}}^{-1} = N_a, \qquad (N_a)_{ij} = N_{ai}^{j}. \tag{3.66}$$

因此，正确的表述是，在 S下，对角的 Verlinde 线插入不会保持对角形式，而是会变为一个融合矩阵。这正是实现赤道投影原理时必须加以追踪的机制，因为模协变性通过共轭 $R \mapsto R_\gamma$ 得以保持；然而，在受限的缺陷子类中实现额外的闭合性——例如在不扩展算子族的情况下保留相同的简单（a， g）标签——则需要缺陷满足超出一般协变性论证的进一步结构条件。

一个真正的有理共形场论

现在我们要问， $Z^{(a,g)}$ 何时定义一个真正的环面配分函数，即具有手征对（V， V）的完整共形场论的亏格一配分~函数。具体而言，这要求满足模不变性，并且其系数能够解释为希尔伯特空间分解中的非负整数重数。用我们的语言来说，这等价于变形耦合矩阵 $M' \equiv R^T M$ 满足以下两个条件：

1. 交织算子条件（模不变性）： M' 必须满足模交织方程3.55。

2. 正性/整性： $M' \in \mathrm{Mat}^{I_{\mathcal{C}} \times I_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$。

当这些条件成立时， $Z(\tau, \tau)$ 定义了一个候选模不变配分函数，并在亏格一时具有显而易见的希尔伯特空间解释。然而，按照惯例，仅有亏格一的一致性并不能保证存在完整且一致的有理共形场论，因为构造一个实际的完整理论通常还需要满足高亏格[5, 61, 62]的缝合条件，以及环面 [63, 64]之外的局域性或交叉对称约束。下文中我们

将“真正的”宽泛地理解为提供一个重数为非负整数的环面配分函数候选，同时也承认，要使其成为完整的共形场论，还需要满足其他一致性条件。

一个方便的充分判据是3.55 满足以下条件： R 与左侧模表示对易（等价地， R^T 与 $\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T$ 在 $\gamma = S$的选定基底中对易）。不过，对易并非最具不变性的表述；不变性要求仅仅是 $M' = R^T M$仍为一个交织算子。下面仔细证明这个充分的对易判据。假设对于 $\gamma = S$， T有[4]

$$\rho_{\mathcal{C}}(\gamma) R^T = R^T \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T. \tag{3.67}$$

然后，利用3.57和 $M' = R^T M$，可得

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T M' &= \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T R^T M \\ &= R^T \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T M \\ &= R^T M \overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)} \\ &= M' \overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

这正是3.55。此外，如果 M'的条目均为非负整数，那么 $Z(\tau,\tau) = \chi(\tau)^T M' \widetilde{\chi}(\tau)$是一个具有希尔伯特空间解释的模不变配分函数。

反过来，如果 M' 不满足交织算子方程或非负整数性，那么$Z^{(a,g)}$ 就不可能是具有手征对$(V, \widetilde{V})$的完整有理共形场论的配分函数：前一种失败会破坏模不变性，后一种则会破坏重数解释。请注意，不满足对易条件 $[R, S_{\mathcal{C}}] = [R, T_{\mathcal{C}}] = 0$ 本身并不能排除模不变性，因为对于 M的某些特殊取值，仍可能有 $R^T M$满足交织关系；但在实际应用中，对易通常是简洁而充分的条件。这说明，通过单侧插入产生新的模不变量受到严格限制，因为我们要求 M' 仍为交织算子，且其条目为非负整数。对于纯自同构线 $R = P_g$，若 P_g 选取为保持模数据（参见共轭形式下的 3.59），则只要 M是交织算子， $M' = P_g^T M$也仍是交织算子；由于 P_g^T仅仅置换行，整数性和正性也会得到保留。对于纯 Verlinde 线 $R = D_a$，通常有 $[D_a, S_{\mathcal{C}}] \neq 0$；等价地说， $S_{\mathcal{C}} D_a S_{\mathcal{C}}^{-1} = N_a$通常是非对角的。因此， $M' = D_a^T M$通常不满足交织算子方程，故所得的 $Z^{(a,1)}$ 通常是界面振幅，而非新的模不变量——除非 D_a 在 M 中实际出现的那些行上作用平凡（或发生其他特殊情况）。

[4]对于 $S_{\mathcal{C}}^T = S_{\mathcal{C}}$和 $T_{\mathcal{C}}^T = T_{\mathcal{C}}$ 的酉有理共形场论约定，这等价于 $[R, S_{\mathcal{C}}] = [R, T_{\mathcal{C}}] = 0$。

推论 1

作为第一个推论，自同构插入在以下意义下是“安全的”：如果 $g \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 通过保持模数据的置换矩阵 P_g 作用在特征标上，那么

$$Z^{(1,g)}(\tau,\overline{\tau}) = \chi(\tau)^T P_g^T M \overline{\widetilde{\chi}(\tau)} \tag{3.69}$$

只要 $Z^{\mathrm{eq}} = \chi^T M \widetilde{\chi}$ 是模不变环面配分函数，它就是模不变环面配分函数。它只是在重数矩阵中对左标签进行置换后的同一个模不变量。

推论 2

第二个推论是简单流（Verlinde 线）相位障碍。对于重数为一的对角配对 $M = \delta_{j,\ \phi(i)}$，插入非平凡的 $a \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 会得到

$$\left(M'\right)_{ij} = \left(D_a^T M\right)_{ij} = \frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}} \delta_{j,\phi(i)}. \tag{3.70}$$

除非特征值 $\frac{(S_{\mathcal{C}})_{ai}}{(S_{\mathcal{C}})_{0i}}$ 在 M 的支撑集上等于 1，否则 M' 的元素通常是相位，而非非负整数。在这种情况下，$Z^{(a,1)}$ 不是模不变配分函数，而是缺陷或界面环面振幅。

3.4 双侧赤道投影

我们如下选取属于可逆拓扑线群的左、右可逆线

$$\begin{aligned} (a_L, g_L) &\in \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C}) \equiv G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C}), \\ (a_R, g_R) &\in \mathrm{Pic}(\widetilde{\mathcal{C}}) \rtimes \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\widetilde{\mathcal{C}}) \equiv G_{\mathrm{inv}}(\widetilde{\mathcal{C}}), \end{aligned} \tag{3.71}$$

每条线在特征标上诱导的作用

$$\begin{aligned} \rho :& G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}\left(\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}\right), \qquad \rho(a,g) = D_a P_g, \\ \widetilde{\rho} :& G_{\mathrm{inv}}(\widetilde{\mathcal{C}}) \to \mathrm{End}\left(\mathbb{C}^{I_{\widetilde{\mathcal{C}}}}\right), \qquad \widetilde{\rho}(a,g) = \widetilde{D}_{\widetilde{a}} \widetilde{P}_{\widetilde{g}}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

根据构造，这些是环面时间方向周期上缠绕的拓扑可逆缺陷的表示，并且它们与模作用相容，具体而言，对于所有 $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，我们有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)\rho(h) &= \rho(h)\rho_{\mathcal{C}}(\gamma), \\ \widetilde{\rho}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)\widetilde{\rho}(\widetilde{h}) &= \widetilde{\rho}(\widetilde{h})\widetilde{\rho}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma), \end{aligned} \tag{3.73}$$

~ ~对于任意一对可逆缺陷标记 $h=(a,g)\in G_{\text{inv}}(\mathcal{C})$ 和 $h\in(\widetilde{a},\widetilde{g})\in G_{\text{inv}}(\mathcal{C})$。将相应的特征标算子分别记为左作用和右作用，如下所示

$$\begin{aligned} R_L &\equiv D_{a_L}P_{g_L}, \\ R_R &\equiv \widetilde{D}_{a_R}\widetilde{P}_{g_R}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

~对于自同构线，可以选择代表元 P_g，$P_{\widetilde{g}}$ 使其通过共轭保持模数据（等价地，在置换基中彼此对易），通常这一点是针对 $\gamma\in\{S,T\}$而非所有 $\gamma\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 陈述的。现在，带有双侧插入的配分函数定义如下

$$\begin{aligned} Z^{(R_L;R_R)}(\tau,\overline{\tau}) =& \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\widehat{R}_L\otimes\widehat{R}_R\, q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{\widetilde{c}}{24}}\right] \\ =& \chi(\tau)^T R_L^T M\overline{R_R\widetilde{\chi}(\tau)}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

对于任意 $\gamma\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，模协变性要求我们有

$$Z^{(R_L;R_R)}(\gamma\cdot\tau,\overline{\gamma\cdot\tau}) = \chi(\tau)^T R_{L,\gamma}^T M\overline{R_{R,\gamma}\widetilde{\chi}(\tau)}, \tag{3.76}$$

其中，输运线算子按如下方式进行共轭

$$\begin{aligned} R_{L,\gamma} \equiv& \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)R_L\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^{-1}, \\ R_{R,\gamma} \equiv& \rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)R_R\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

因此，族 $\{Z^{(R_L;\,R_R)}\}$ 在模变换下是封闭的，即这些线通过手征作用进行共轭。通过插入 $\chi(\gamma\cdot\tau)=\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)\chi(\tau)$ 以及$\widetilde{\chi}(\gamma\cdot\tau)=\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)\widetilde{\chi}(\tau)$ 到 3.75 中，并利用配对 M满足 3.57这一事实，很容易看出这一点。这表明，双侧插入总会产生 模协变 亏格一振幅。为了得到真正的模不变量配分函数，我们必须要求变形耦合

$$M^{(R_L,R_R)} \equiv R_L^T M\overline{R_R} \tag{3.78}$$

满足与 $(\rho_{\mathcal{C}},\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ 对应的交织算子方程，且条目为非负整数。现在我们可以写出

$$Z^{(R_L;R_R)}(\tau,\overline{\tau}) = \chi(\tau)^T M^{(R_L,R_R)}\overline{\widetilde{\chi}(\tau)} \tag{3.79}$$

是一个模不变量。一个简洁的充分条件是，R_L 与左模数据对易，且 R_R 与右模数据对易（在同一基底下），即：

$$\begin{aligned} [\rho_{\mathcal{C}}(S),R_L]=[\rho_{\mathcal{C}}(T),R_L]=0, \\ [\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(S),R_R]=[\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(T),R_R]=0. \end{aligned} \tag{3.80}$$

那么，对于 $\gamma \in \{S, T\}$，我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T M^{(R_L,R_R)} =& \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T R_L^T M \overline{R_R} \\ =& R_L^T \rho_{\mathcal{C}}(\gamma)^T M \overline{R_R} \\ =& R_L^T M, \overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)} \overline{R_R} \\ =& R_L^T M \overline{R_R} \overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)} \\ =& M^{(R_L,R_R)} \overline{\rho_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\gamma)},\end{aligned} \tag{3.81}$$

因此 $M^{(R_L,\ R_R)}$再次是一个交织算子。如果进一步有 $M^{(R_L,R_R)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，那么3.79便是一个真正的模不变配分函数。这启发我们采用以下实用算法，在缺陷轨道中搜寻模不变量：

1. 计算中心化子

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_L \equiv& R_L \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{I_{\mathcal{C}}}) : [R_L, S_{\mathcal{C}}] = [R_L, T_{\mathcal{C}}] = 0, \\ \mathcal{Z}_R \equiv& R_R \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{I_{\widetilde{\mathcal{C}}}}) : [R_R, S_{\widetilde{\mathcal{C}}}] = [R_R, T_{\widetilde{\mathcal{C}}}] = 0.\end{aligned} \tag{3.82}$$

2. 对于任意 $R_L \in \mathcal{Z}_L$和 $R_R \in \mathcal{Z}_R$，构造 $M^{(R_L,R_R)} = R_L^T M R_R \overline{\circ}$若 $M^{(R_L,\ R_R)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则可通过3.79得到一个模不变量。

这里我们注意到，由模数据对称产生的置换矩阵通常属于中心化子（在固定约定后），而 Verlinde 对角算子通常不属于中心化子，除非处于恒等元或偶然简并等特殊情形。缺陷变换矩阵的集合

$$\mathcal{O}(M) \equiv \{\rho(h)^T M \overline{\widetilde{\rho}(\widetilde{h})} | h \in G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C}), \widetilde{h} \in G_{\mathrm{inv}}(\widetilde{\mathcal{C}})\} \tag{3.83}$$

$\widetilde{\ }$是 M 在粘合矩阵空间上受 $G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C}) \times G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C})$左右作用所形成的轨道。 $\mathcal{O}(M)$中的每个元素都定义了一个可能带有缺陷装饰的赤道振幅，其模协变性与原振幅相同。当 $\mathcal{C} = \mathcal{C}$时，特别是在半球相同的亚纯情形下，我们通常将缺陷插入限制在单侧$\widetilde{\ }$，令 $h =$为恒等元，此时得到粘合矩阵

$$M \longmapsto M^{(h,\mathrm{id})} = \rho(h)^T M, \tag{3.84}$$

相应的族是 M 在 $G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C})$ 作用下的左轨道。在许多有趣的例子中，我们可以明确枚举 $G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C})$，显式写出 $\rho(h)$，并计算轨道 $\mathcal{O}(M)$，从而得到一组有限的模协变振幅，其中包括原始模不变量 Z_M、其缺陷类似物，以及偶尔出现的真正新模不变量，即新的完整共形场论粘合；当轨道与取值于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的交织算子相交时，便会出现这种情况。

3.4.1 示例 I: $(B_{r,\,1},\ B_{7-r,\,1})$

现在，我们在一个具体且解析上易于处理的情形中阐释这一形式体系。考虑交换子对 $(B_{r,\,1},\ B_{7-r,\,1})$，其中 $B_{r,\,1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(2r+1)_1$。共形嵌入 $B_{r,\,1} \otimes B_{7-r,\,1} \subset E_{8,\,1}$ 意味着 $E_{8,\,1}$ 真空特征标可双线性分解为三项，涉及 $B_{r,\,1}$ 和 $B_{7-r,\,1}$ 的特征标。因此，在本小节中，我们将采用全纯赤道振幅

$$Z^{\mathrm{eq}}(\tau) \equiv \chi(\tau)^T M \widetilde{\chi}(\tau), \tag{3.85}$$

从而输出是关于 τ 的全纯函数。局部亚纯共形场论的完整环面配分函数最终可恢复为 $Z_{E_8}(\tau,\ \tau) = |\chi_{E_8}(\tau)|^2$。这些 WZW 模型 $B_{r,\,1}$ 和 $B_{7-r,\,1}$ 各有三个初级场。我们固定以下有序基

$$I_{\mathcal{C}} = \{\mathbb{1}, \psi, \sigma\}, \qquad I_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \{\widetilde{\mathbb{1}}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}\}, \tag{3.86}$$

其共形权重为

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{1}} &= 0, \qquad h_{\psi} = \frac{1}{2}, \qquad h_{\sigma} = \frac{2r+1}{16}, \\ \widetilde{h}_{\widetilde{\mathbb{1}}} &= 0, \qquad \widetilde{h}_{\widetilde{\psi}} = \frac{1}{2}, \qquad \widetilde{h}_{\widetilde{\sigma}} = \frac{15-2r}{16}. \end{aligned} \tag{3.87}$$

将它们沿赤道粘合，便得到一个简单但极具启发性的例子，展示了重数矩阵、Verlinde 线和半规范化如何融入赤道视角。这里，ψ 是马约拉纳费米子初级场（阶为 2），而 σ 是自旋场。注意

$$h_{\sigma} + \widetilde{h}_{\widetilde{\sigma}} = 1, \tag{3.88}$$

因此，乘积 $\chi^{B_{r,\,\sigma}}{}^{1}(\tau)\chi^{B_{7-r,\,\widetilde{\sigma}}}{}^{1}(\tau)$、$(\sigma,\ \widetilde{\sigma})$ 这一对所贡献的总共形权重为整数，这与在 $E_{8,\,1}$ 内进行全纯粘合相一致。更一般地，在（非-$\widetilde{\ }$手征）赤道配对中，可容许耦合须满足通常的自旋匹配条件 $h_i - h_j \in \mathbb{Z}$；在当前的共形嵌入情形中，双线性配对由已知的 $E_{8,\,1}$ 分解确定。在此例中，赤道配对是无重数的，即每个左标签都与唯一一个右标签配对。我们取双射 $\phi : I_{\mathcal{C}} \to I_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ 为

$$\phi(\mathbb{1}) = \widetilde{\mathbb{1}}, \qquad \phi(\psi) = \widetilde{\psi}, \qquad \phi(\sigma) = \widetilde{\sigma}, \tag{3.89}$$

因此，粘合矩阵为

$$M_{ij} = \delta_{j,\phi(i)}. \tag{3.90}$$

等价地，赤道希尔伯特空间中左右扇区各出现一次

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I_{\mathcal{C}}} \mathcal{H}_i \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_{\phi(i)}, \tag{3.91}$$

有了这个重数矩阵，我们便可立即写出无缺陷的赤道环面振幅：

$$\begin{aligned} Z^{\text{eq}} =& \chi_{\mathbb{1}}^{B_{r,1}}(\tau)\chi_{\widetilde{\mathbb{1}}}^{B_{7-r,1}}(\tau) + \chi_{\psi}^{B_{r,1}}(\tau)\chi_{\widetilde{\psi}}^{B_{7-r,1}}(\tau) + \chi_{\sigma}^{B_{r,1}}(\tau)\chi_{\widetilde{\sigma}}^{B_{7-r,1}}(\tau) \\ =& \chi^{E_8}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

因此，赤道粘合重现了真空特征标的标准共形嵌入分解$E_{8,\ 1}$。局域亚纯理论的完整非手征环面配分函数于是为

$$Z_{E_8}(\tau, \overline{\tau}) = |\chi_{E_8}(\tau)|^2. \tag{3.93}$$

现在，我们通过耦合矩阵的变形来实现缺陷插入3.78。在本小节中，我们只使用左插入，$(R_L, R_R) = (D_\psi, \mathbf{1})$，使得 $M' \equiv R^T M$并且

$$Z^{(R)}(\tau) = \chi(\tau)^T M' \widetilde{\chi}(\tau). \tag{3.94}$$

首先，考虑与简单流 ψ 相关联的左 Verlinde 线，$(R_L,\ R_R) = (D\psi,\ \mathbf{1})$。其作用为对角形式

$$(D_\psi)ii' = \delta_{ii'}, \frac{(S_{\mathcal{C}})_{\psi i}}{(S\mathcal{C})_{\mathbb{1},i}}, \qquad i, i' \in I_{\mathcal{C}}. \tag{3.95}$$

对于 $B_{r,\ 1}$ 级，ψ 的特征值在 $\mathbf{1}$ 和 ψ 上为 $+1$，在 σ 上为 -1。在有序基 $\{\mathbb{1}, \psi, \sigma\}$ 中，

$$\begin{aligned} D_\psi =& \text{Diag}\left(\frac{S_{\psi,\mathbb{1}}}{S_{\mathbb{1},\mathbb{1}}}, \frac{S_{\psi,\psi}}{S_{\mathbb{1},\psi}}, \frac{S_{\psi,\sigma}}{S_{\mathbb{1},\sigma}}\right) \\ =& \text{Diag}\left(+1, +1, -1\right). \end{aligned} \tag{3.96}$$

因此，缺陷缠绕的（仅左侧）赤道振幅为

$$Z^{\psi}(\tau) = \chi_{\mathbb{1}}\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{1}}} + \chi_{\psi}\widetilde{\chi}_{\widetilde{\psi}} - \chi_{\sigma}\widetilde{\chi}_{\widetilde{\sigma}}. \tag{3.97}$$

这是一个标准的缺陷振幅。它是原理论中一个定义良好的亏格一可观测量，其中一条 ψ线沿时间周期穿入，但它不是新的完整共形场论的配分函数，因为有效耦合矩阵含有一个负项。

接下来，考虑任意子置换线。在这个族中不存在非平凡的编织自等价。尽管仅凭融合便允许交换 $\mathbb{1} \leftrightarrow \psi$，编织自等价必须保持拓扑自旋 $\theta_{\mathbb{1}} = 1 \neq -1 = \theta_{\psi}$。因此，

$$\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C}) = 1, \tag{3.98}$$

因此，唯一的任意子置换缺陷是恒等元 $g = \mathrm{id}$ 与 $P_g = 1$，所以 g 对粘合双射的作用是平凡的，从而得到

$$\phi(g(i)) = \phi(i). \tag{3.99}$$

接下来，我们通过对由 ψ-线生成的子群取平均来进行半规范化，

$$H = \{\mathbb{1}, \psi\} \cong \mathbb{Z}_2. \tag{3.100}$$

左侧特征标空间上对应的幂等投影算符为

$$\Pi_H = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + D_{\psi}\right) = \mathrm{Diag}\left(1, 1, 0\right). \tag{3.101}$$

从物理角度看，插入 Π_H 会将左行手征数据投影到 ψ-线作用下的 Z_2-不变子空间。应用 Π_H 得到半规范化赤道振幅

$$\begin{aligned} Z^{[\mathbb{Z}_2]} =& \chi(\tau)^T \Pi_H^T M \widetilde{\chi}(\tau) \\ =& \frac{1}{2}\left(Z^{\mathrm{eq}}(\tau) + Z^{\psi}(\tau)\right) \\ =& \chi_{\mathbb{1}}\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{1}}} + \chi_{\psi}\widetilde{\chi}_{\widetilde{\psi}}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

如前所述，这个对象是模协变的（它仅通过对左侧的缺陷插入取平均得到），并且恰好选出 Z_2-偶的左行扇区。需要注意的是，这并非完整的轨形化，因为右手征半部未受影响，也没有在两个周上加入扭曲扇区；相反，这是一种由我们的赤道形式体系精确定义的单侧投影。

3.4.2 示例 II：$(D_{r,\ 1},\ D_{r,\ 1})$

考虑交换子对 $(D_{r,\ 1},\ D_{r,\ 1})$，其中 $D_{r,\ 1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(2r)_1$。每个手征半部都有四个初级场，我们将其排列如下：

$$I_{\mathcal{C}} = \{\mathbb{1}, \nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}, \tag{3.103}$$

分别对应真空、矢量、旋量和共轭旋量表示。根据杉川公式，它们的共形权重固定为

$$h_{\mathbb{1}} = 0, \qquad h_{\nu} = \frac{1}{2}, \qquad h_{\sigma} = h_{\widetilde{\sigma}} = \frac{r}{8}. \tag{3.104}$$

在 1 级时，所有四个初级场都是简单流，因此可逆线群与全部初级场重合

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) = I_{\mathcal{C}}, \tag{3.105}$$

其融合群同构于 Spin($2r$) 的中心，具体来说， r 为偶数时是 $\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$ ，而 r 为奇数时是 Z_4 。

随着 r 变化，一个重要的定性区别在于编织自等价群 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(\mathcal{C})$ 的大小，它决定了任意子置换可逆缺陷是否存在。对于一般的 r，唯一非平凡的编织置换是交换 $\sigma \leftrightarrow \widetilde{\sigma}$；而在 $r = 4$ 时，该理论则很特殊，因为它是唯一一个允许三个非平凡初级场 ν、σ、$\widetilde{\sigma}$ 在保持模数据不变的同时发生非平凡置换的1级正交理论。这是三重性在有理共形场论中的体现，它使 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}$ 扩展为一个作用于 $\{\nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}$的非平凡置换群。因此， $r = 4$ 是一个有趣的例子，其中 Verlinde 缺陷和任意子置换缺陷同时非平凡。三重性源自例外外自同构群 $\mathfrak{so}(8)$ [65]。D_4, 1 的 Dynkin图具有一种 S_3 对称性，可置换其外侧节点，从而置换矢量、旋量和共轭旋量表示 [66]。在仿射 D_4,1 理论中，它们恰好就是非平凡初级场 $\{\nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}$。从模数据的角度看，当且仅当置换标记对应的置换矩阵 P_g 与模表示 3.27 对易时，它才定义一个编织自等价。这个条件限制颇多，因为 T 通过共形权重编码了扭结。 $r = 4$ 理论之所以特殊，是因为

$$h_\nu = h_\sigma = h_{\widetilde{\sigma}} = \frac{1}{2}. \tag{3.106}$$

因此，这三个初级场具有相同的 T 本征值，消除了扭结障碍，并允许非平凡置换。事实上，在 1 级， S 矩阵在 $\{\nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}$ 的置换下也保持对称，从而得到一个真正的

$$S_3 \subset \mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}(D_{4,1}). \tag{3.107}$$

对于与 $c = 8$ 亚纯理论相关的交换子配对，以下我们专门讨论 $r = 4$，即交换子对 ($D_{4,1}$,$D_{4,1}$)，因为 $c(D_{r,1}) = r$ ，而全纯 $E_{8,1}$嵌入涉及 $D_{4,1} \times D_{4,1}$ ，因此 $4 + 4 = 8$。赤道配对无重数，且对应恒等双射

$$\phi(\mathbb{1}) = \widetilde{\mathbb{1}}, \qquad \phi(\nu) = \widetilde{\nu}, \qquad \phi(\sigma) = \widetilde{\sigma}, \qquad \phi(\widetilde{\sigma}) = \widetilde{\widetilde{\sigma}}. \tag{3.108}$$

粘合矩阵就是 $M_{ij}=\delta_{ij}$。采用全纯约定，无缺陷的赤道环面振幅为

$$Z^{\mathrm{eq}}==\chi_{\mathbb{1}}(\tau)\widetilde{\chi}_{\mathbb{1}}(\tau)+\chi_{\nu}(\tau)\widetilde{\chi}_{\nu}(\tau)+\chi_{\sigma}(\tau)\widetilde{\chi}_{\sigma}(\tau)+\chi_{\tilde{\sigma}}(\tau)\widetilde{\chi}_{\tilde{\sigma}}(\tau). \tag{3.109}$$

在全纯 $E_{8,1}$ 理论中，共形嵌入 $E_{8,1}\supset D_{4,1}\times D_{4,1}$下也有纯手征分支。这个双线性式恰好是 $E_{8,1}$ 真空特征标的全纯分解，而局部亚纯理论的完整环面配分函数为 $|\chi_{E_8}(\tau)|^2$。

现在我们可以考虑沿时间周期插入拓扑缺陷线。$D_{4,1}$的 S-矩阵为

$$S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}. \tag{3.110}$$

Verlinde 线的作用在特征标基下是对角的，其 $(D_a)_{ii}=\frac{S_{ai}}{S_{0i}}$，并且由于真空行对所有 i 都满足 $S_{0i}=\frac{1}{2}$，本征值便是对应的 S-行中的符号。因此，我们有

$$\begin{aligned}D_{\nu}=&\mathrm{Diag}(+1,+1,-1,-1),\\D_{\sigma}=&\mathrm{Diag}(+1,-1,+1,-1),\\D_{\tilde{\sigma}}=&\mathrm{Diag}(+1,-1,-1,+1).\end{aligned} \tag{3.111}$$

接下来，选取一个具体的三重性元素，例如换位 $g=(\nu\ \sigma)$，它交换 ν和 σ，同时固定 $\mathbb{1}$ 和 $\tilde{\sigma}$。它在特征标上的置换作用由一个矩阵P_g 实现，该矩阵交换 $\chi(\tau)$的 ν 和 σ 分量。由于这个 g 在 $r=4$处同时保持 S 和 T不变， P_g 与模表示对易，相应的单侧自同构插入在亏格一上产生一个真正的置换模不变量，其形式为

$$Z^{(1,g)}=\chi_{\mathbb{1}}\widetilde{\chi}_{\mathbb{1}}+\chi_{\sigma}\widetilde{\chi}_{\nu}+\chi_{\nu}\widetilde{\chi}_{\sigma}+\chi_{\tilde{\sigma}}\widetilde{\chi}_{\tilde{\sigma}} \tag{3.112}$$

这已经与（$B_{r,1}$,$B_{7-r,1}$）这一例子形成鲜明对比：其中 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{br}}$ 是平凡的，且不会出现非平凡的置换不变量。

我们现在给出一个两个分量都非平凡的插入。取 $a = \nu$ 与同一个三重性元素 $g =(\nu\ \sigma)$，并定义组合的时间循环算符

$$R \equiv D_\nu P_g. \tag{3.113}$$

仅作用于左侧，$(R_L,\ R_R) = (R,\ 1)$，并使用 $M = 1$，我们得到如下模协变环面振幅

$$Z^{(\nu,(\nu\ \sigma))} = \chi_{\mathbb{1}}\widetilde{\chi}_{\mathbb{1}} + \chi_\sigma\widetilde{\chi}_\nu - \chi_\nu\widetilde{\chi}_\sigma - \chi_{\tilde{\sigma}}\widetilde{\chi}_{\tilde{\sigma}}. \tag{3.114}$$

这显然不是一个真正的有理共形场论，因为系数不满足非负整数性。这里的三重性产生了一个合法的任意子置换缺陷，Verlinde 线产生了一个合法的简单流缺陷，但将二者单侧结合通常会使我们离开非负整数耦合构成的空间。

最后，考虑双侧插入 $(R_L,\ R_R) = (R,\ R)$。在全纯赤道约定下，耦合变形为 $M^{(R,\ R)} = R^T M R$。由 $M = 1$和 $R = D_\nu P_g$可知，注意到 D_ν 是一个对角 ±1 矩阵，而 P_g 是一个置换矩阵，因此 R 是正交的，且$R^T R = 1$。因此，$M^{(R,R)} = M$，粘合后便回到原来的无缺陷耦合，

$$Z^{(R;R)}(\tau,\overline{\tau}) = Z^{\mathrm{eq}}(\tau,\overline{\tau}). \tag{3.115}$$

从物理上看，在两个半球上插入相同的可逆线，可将其滑过赤道并使其湮灭，从而保持亏格一振幅不变。相比之下，单侧插入本质上具有手征不对称性，并自然产生界面振幅。

对于半规范化构造，选择非平凡的二阶子群 $H \subset \mathrm{Pic}(D_{4,\ 1})$，其生成元为 ν，

$$H = \{\mathbb{1}, \nu\} \cong \mathbb{Z}_2, \tag{3.116}$$

对应的幂等元为

$$\Pi_H = \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} + D_\nu\right) = \mathrm{Diag}(1,1,0,0). \tag{3.117}$$

应用此投影算符得到

$$Z^{[H]} = \frac{1}{2}\left(Z^{\mathrm{eq}} + Z^\nu\right), \tag{3.118}$$

其中，ν-孪生振幅为

$$Z^\nu = \chi_{\mathbb{1}}\widetilde{\chi}_{\mathbb{1}} + \chi_\nu\widetilde{\chi}_\nu - \chi_\sigma\widetilde{\chi}_\sigma - \chi_{\tilde{\sigma}}\widetilde{\chi}_{\tilde{\sigma}}. \tag{3.119}$$

3.4.3 迈向分类

我们可以根据变形粘合矩阵 $M^{(R_L,R_R)}$ 的性质，对 $Z^{(R_L;R_R)}$ 的对象类型进行分类。

族 A：新的 RCFT 模不变量

这一族由真正的有理共形场论构成，即满足以下条件的拓扑缺陷线 $(R_L,\ R_R)$：$M^{(R_L,R_R)}\in$ Mat($\mathbb{Z}_{\geq 0}$)，并满足通常的正性/对称性要求。这些是真正全新的完整共形场论，它们具有相同的手征半边，但左右粘合方式不同。

族 B：缺陷振幅

这些是满足以下条件的 $(R_L,\ R_R)$：$M^{(R_L,R_R)}$ 仍与模表示相交织，但不具有非负整数条目。相应的 $Z^{(R_L R_R)}$ 于是是原有有理共形场论中一致的亏格一界面/缺陷振幅，而不是新体理论的配分函数。特别是，Verlinde 线的单侧插入通常属于这一类，因为它们不与模表示对易，并且可能导致扇区的符号或相位重加权。

现在我们转向拓扑缺陷线平凡作用这一有趣情形。何时缺陷在亏格一上不可见，即 $M^{(R_L,R_R)}=M$？这与没有拓扑缺陷线的情形完全等价。我们有

$$M^{(R_L,R_R)}=R_L^T M\overline{R_R}, \tag{3.120}$$

或者等价地

$$R_L^T M=M^{(R_L,R_R)}\overline{R_R}^{-1}. \tag{3.121}$$

在平凡作用的情况下，我们有 $M^{(R_L,R_R)}=M$，因此

$$R_L^T M=M\overline{R_R}^{-1}. \tag{3.122}$$

除了平凡选择（$R_L,\ R_R$）=（1，1）之外，任何满足 3.122 的非平凡配对，都会定义由 M 指定的完整有理共形场论中的一条真正的对称线。这条线对手征数据产生非平凡作用，但会保留体算符谱，即环面配分函数保持不变。在亏格一情形下，最清晰的表达方式是直接在粘合矩阵层面进行描述。对于一条特征空间作用为 R 的可逆线，双侧插入会使耦合变形为

$$M\longmapsto M^{(R,R)}=R^T M\overline{R}, \tag{3.123}$$

完整有理共形场论在该对称线作用下保持不变的条件是

$$R^T M \overline{R} = M. \tag{3.124}$$

特别地，对于 Verlinde 线 D_a，其形式为 $D_a^T M D_a = \overline{M}$，这是在我们的约定下表示左右作用的正确形式3.124。

受 3.122启发，我们定义粘合 M 在可逆缺陷作用下的稳定子子群为

$$\mathrm{Stab}(M) \equiv \left\{ (R_L, R_R) \in G_{\mathrm{inv}(\mathcal{C})} \times G_{\mathrm{inv}}(\widetilde{\mathcal{C}}) | R_L^T M \overline{R_R} = M \right\}. \tag{3.125}$$

Stab(M) 的每个元素都是可逆拓扑缺陷线，其作用是完整共形场论的自同构，而不只是手征代数的自同构。因此，该子群自然成为完整理论中可见于亏格一数据的可逆 0-形式全局对称群候选。这一观点与 [60] 中的观察密切相关：某些缺陷作用可以吸收到粘合中；用我们的语言来说，这种可吸收性恰好就是稳定子条件 3.125。考虑一个张量积手征代数 $V^{\otimes n}$，其采用对角粘合 $M = 1$，即每个左主场都与相同的右主场配对。置换张量因子的对称群 S_n在手征理论上作为任意子置换对称性作用，包括特征标空间 P_σ 上的置换矩阵。对于对角不变量，我们有

$$P_\sigma^T M \overline{P_\sigma} = M, \tag{3.126}$$

因此 $(P_\sigma, P_\sigma) \in$ Stab(M)。所以，置换张量因子是非平凡双侧作用的一个典型例子，尽管如此，它仍保持亏格一耦合不变；等价地说，它是完整有理共形场论的一个对称性，且仅凭稳定子条件便可识别。

最后，对于每个手征半部的可逆缺陷群都较小的具体族（例如，该群由一个简单流和一个二阶任意子置换生成），我们可以明确枚举左侧和右侧的基本生成元，并将由此产生的变形归纳为少数几种结构类：单侧 Verlinde 插入、单侧自同构插入、它们的混合乘积，以及双侧插入（包括稳定子）。在接下来的例子中，我们将明确展示这种分类方式。

族 I：仅左侧缺陷变换

在这一族中，我们只在左侧插入一个可逆缺陷（R_L，R_R）=（R_L，1），由此得到粘合矩阵

$$M^{(R_L,1)} = R_L^T M. \tag{3.127}$$

注意，模协变性是自动满足的，因为粘合矩阵满足交织算子方程3.13，所得的亏格一振幅为

$$Z^{(R_L;1)}(\tau,\bar{\tau}) = \chi(\tau)^T R_L^T M \widetilde{\chi}(\bar{\tau}). \tag{3.128}$$

这自动满足模协变性。然而，只有在一种特殊情况下，它才是真正的有理共形场论配分函数：变形耦合矩阵的条目为非负整数，即 $M^{(R_L,1)} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$。满足这一条件时，左缺陷会重新排列左标签，同时仍定义出一致的体希尔伯特空间，从而得到一个新的模不变量。例如，熟悉的简单流模不变量正是由适当理论中的此类整数变形产生的。当矩阵条目不再是非负整数时，所得结果并非新的体共形场论，而是原有有理共形场论的缺陷修饰环面振幅，其中 $M^{(R_L,1)}$ 应解释为界面耦合，而非重数矩阵。特别是，单侧 Verlinde 插入通常会产生符号／相位重加权，因此属于这种“界面”情形，而非第 A类。

一个清晰的例子是交换子对 $(B_{1,1},B_{6,1})$，它是 §3.4.1 中所讨论的一族的特例，其中心荷为 $(c,\widetilde{c}) = \left(\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$。如 §5.1 中所详述，经过粘合后，其赤道粘合会在赤道圆上重构出 $c = 8$ 全纯的 $E_{8,1}$ 理论。我们将 $B_{1,1}$ 置于上半球，将 $B_{6,1}$ 置于下半球，并从无重数全纯粘合 $M_{ij} = \delta_{j,\phi(i)}$开始。仅在上半球插入费米简单流$\psi \in \mathrm{Pic}(B_{1,1})$作为左 Verlinde 线，我们得到

$$(R_L, R_R) = (D_\psi, 1). \tag{3.129}$$

由此得到的缺陷修饰振幅 $Z^{(\psi;1)}$，其变换后的粘合矩阵 $M^{(D_\psi,1)} = D_\psi^T M$在不同的 σ扇区之间产生相对符号。因此， $M^{(D_\psi,1)} \notin \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$，所以单侧插入并未定义一种新的有理共形场论。相反，它定义了原有 $E_{8,1}$ 理论的一个非平凡 Verlinde 线配分函数。它是模协变的，但应将其解释为缺陷可观测量，而非新的模不变量体配分函数。

II族：仅右侧缺陷变换

在这一族中，我们仅在右侧插入一个可逆缺陷 $(R_L, R_R) = (\mathbf{1}, R_R)$，由此得到粘合矩阵

$$M^{(1,R_R)} = M\overline{R_R}. \tag{3.130}$$

与族 I中一样，所得的亏格一振幅为

$$Z^{(1;R_R)}(\tau,\bar{\tau}) = \chi(\tau)^T M \overline{R_R} \widetilde{\chi}(\bar{\tau}) \tag{3.131}$$

且自动满足模协变性。现在，若要得到一个新的有理共形场论（RCFT），我们要求 $M^{(1,R_R)} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$。与族 I 相比，这里两个手征半边的作用互换了。具体而言，$\widetilde{\ }$可以是 R_R 右侧 Verlinde 线插入 $D_{\widetilde{a}}$、右侧任意子置换 $P_{\widetilde{g}}$或其$\widetilde{\ }$乘积 $D_{\widetilde{a}}P_{\widetilde{g}} \in G_{\mathrm{inv}(\widetilde{\mathcal{C}})}$。从物理上说，这对应于仅在南（右）半球上穿过一条拓扑线缺陷。一般而言，仅作用于右侧的变换会产生带有缺陷修饰的振幅，而非新的模不变量，因为 R_R 通常会以不保留3.130中非负整数重数的方式重新加权或置换右标签。例外情况是满足整性条件的情形，此时右侧插入可以重新解释为对同一对手征半边的一种新的可接受粘合。

族 III：对称双侧变换

$\widetilde{\ }$对于自对偶情形 $\mathcal{C} = \mathcal{C}$，尤其是两个半球相同时，我们有 $(R_L, R_R) = (R, R)$，由此得到粘合矩阵

$$M^{(R,R)} = R^T M \overline{R}. \tag{3.132}$$

一个特殊的子情形是插入环面不可见，即它不会改变耦合

$$M^{(R,R)} = M \qquad \Longleftrightarrow \qquad R^T M = M\overline{R}^{-1}. \tag{3.133}$$

这引出了给定模不变量 M 的稳定子群，

$$\mathrm{Stab}(M) = \left\{ R \in G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C}) | R^T M = M\overline{R} \right\}. \tag{3.134}$$

Stab(M) 的元素恰好是那些可逆缺陷线，它们作为整个有理共形场论的真正全局对称性 发挥作用，该理论由 M 定义，而不仅仅是单个手征半部的对称性。当 $R \in$ Stab(M) 时，双侧插入在亏格一配分函数层面上物理不可见，却编码了一个由整个理论中的拓扑线实现的非平凡全局对称性。

这一族的一个自然研究场景是自对偶交换子对，例如 §,1,$D_{4,1}$ 中的 ($D_4$3.4.2)。在这个例子中，两个半球承载相同的 WZW模型，赤道理论由对角型粘合矩阵 M 构造而成。令 $R \in G_{\mathrm{inv}(\mathcal{C}}$) 为一条可逆线。考虑一条可逆线 $R \in G_{\mathrm{inv}}(\mathcal{C})$，它对应于置换自等价或整数自旋简单流。在两侧插入 R，得到 $(R_L, R_R) = (R, R)$ 和粘合矩阵 $M^{(R,R)} = R^T M R$。对于对角型或扩张型不变量，通常有 $M_{(R,R)} = M$，换言之，(R, R) 属于稳定子 Stab(M)。这实现了这一族，因为该缺陷在手征层面是非平凡的，却作为完整有理共形场论的真正全局对称性发挥作用，使环面配分函数保持不变。

第四类：一般双侧变换

在这种情况下，(R_L, R_R) 是任意的，我们有一般的粘合矩阵 3.120。一般而言，矩阵 R_L 和 R_R 包含来自简单流的相位，以及来自编织自等价的置换。当它们作用于 M 的条目时，未必保持非负性或整数性。因此，粘合矩阵 $M^{(R_L,R_R)}$ 往往会有复数或负数条目。对于这类 (R_L, R_R) 的选择，所得对象是缺陷环面振幅，它是模协变函数，但不是完整共形场论的配分函数，因为它不能~被解释为对 $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j$ 中扇区重数的计数。尽管这一族会产生模协变配分函数，但除非 (R_L, R_R) 属于由同一批简单流和置换线构成的某个特定有限子群，否则这些配分函数通常不会取整数值。只有当 (R_L, R_R) 属于由整数作用生成的有限子群时，整数性才得以保持；也就是说，这些元素满足 R_L 和 R_R 本身是整数值矩阵，或其作用产生的相位在左右两侧相互抵消。具体而言，当 R_L、R_R 均来自具有整数共形自旋的简单流，因而 D_a 具有实本征值 ± 1；当二者都属于某个置换自等价子群，且其中 P_g 恰为置换矩阵；或当 R_L^T 与 R_R 产生的相位在 M_{ij} 的每个非零条目上相互抵消时，便会出现这种情况。只有在这些情况下，3.120 才仍是一个非负整数条目矩阵，从而定义一个新的模不变量，即真正完整共形场论的配分函数。在其他所有情况下，该矩阵仍是模群的有效交织算子，但不能被解释为完整共形场论的粘合矩阵。要得到真正的有理共形场论，还必须满足额外的正性约束。不过，这是对可逆线最一般的形变。这些变换以不对称的方式混合左右标签：整数性成立时会产生新的模不变量，整数性不成立时会产生非平凡的缺陷环面振幅，并在同一缺陷轨道内的不同模不变量之间建立映射，即

$$M \mapsto \mathcal{O}(M) \equiv \{\rho(h_L)^T \widetilde{\rho(h_R)}\}. \tag{3.135}$$

这一类至关重要，因为它描述了模不变量在左右~作用下的完整轨道，即 $G_{\text{inv}}(\mathcal{C}) \times G_{\text{inv}}(\mathcal{C})$，并将所有与模性相容的缺陷修饰振幅组织起来。在这个轨道中，有些点对应真正的新模不变量（A类），而大多数点对应缺陷振幅（B类）。因此，轨道视角将所有与模性相容的缺陷修饰振幅组织起来，并明确指出两个模不变量何时通过可逆缺陷作用相关联。

4 轨形构造

当一个有理共形场论存在由可逆拓扑缺陷线构成的有限群时，这些线实现了普通的 0-形式全局对称性 [58, 67]。规范化这种对称性会产生一个轨形理论。在

环面上，规范化最方便的表述方式是使用扭曲配分函数$Z_{h,\ g}(\tau)$，它们由一对 $(h,\ g)$ 标记，$\in G \times G$ 用于指定背景 G-丛沿空间周期和时间周期的 holonomy [68]。轨形配分函数通过两种操作构造。首先，在每个扇区中，我们投影到 G-不变态上，因为我们希望理论包含母理论中所有在我们用来对母理论取商的群作用下保持不变的扇区G 。其次，对所有扭曲扇区求和。我们简要回顾这一标准构造，并将其改写为适用于本文通篇采用的缺陷线观点的形式。更多细节另见 [69] 。

设 $\mathcal{H}_P$ 为母理论的希尔伯特空间，$\rho\colon\ G \to U(\mathcal{H}_P)$ 表示由可逆缺陷线实现的对称群的酉表示。轨形理论中未扭曲扇区的贡献，可通过将母理论的希尔伯特空间投影到 G-不变子空间上得到。投影算符为群平均，其形式为

$$P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g). \tag{4.1}$$

相应的　　轨形配分函数中的未扭曲扇区贡献因此为

$$Z_1 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_P}\left(P_G q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{c}{24}}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Z_{1,g}(\tau,\overline{\tau}), \tag{4.2}$$

这里我们引入如下定义的“缀饰”迹

$$Z_{1,g} \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_P}\left(\rho(g) q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{c}{24}}\right). \tag{4.3}$$

在缺陷语言中，$Z_{1,\ g}$ 只是母理论的环面振幅，其中一条 g-缺陷沿时间周期穿过。现在，为了得到模不变规范理论，我们还必须纳入空间周期周围具有非平凡全纯环的扇区。对于每个 $h \in G$，令 $\mathcal{H}_h$ 表示圆上具有 h-扭曲边界条件的态的希尔伯特空间。对称群元素 $g \in G$ 通过算符 $\rho_h(g)$ 作用于 $\mathcal{H}_h$ ，我们将一般的扭曲配分函数定义如下

$$Z_{h,g}(\tau,\overline{\tau}) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_h}\left(\rho_h(g) q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{c}{24}}\right). \tag{4.4}$$

对于固定的 h，轨形方案再次要求将 h 扇区中投影到 G 不变态上。这给出

$$Z_h(\tau,\overline{\tau}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Z_{h,g}(\tau,\overline{\tau}). \tag{4.5}$$

最后，对所有扭曲扇区求和即可得到完整的轨形配分函数，如下所示

$$Z_{\rm orb}(\tau,\overline{\tau})=\sum_{h\in G}Z_h(\tau,\overline{\tau})=\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{h,g\in G\\ hg=gh}}Z_{h,g}(\tau,\overline{\tau}). \tag{4.6}$$

集合 $\{Z_{h,g}\}$ 在模变换下封闭，因为 SL(2,$\mathbb{Z}$) 作用于环面的同调圈，因而也作用于 holonomy 对 (h,g) [68]。具体而言，对于模变换 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$，空间圈和时间圈会映射为原始圈的线性组合，相应的 holonomy 也会随之重新排列。在最简单的无反常情形下，若不存在离散扭曲和 't Hooft 反常，则模变换会将扭曲迹彼此置换

$$Z_{h,g}(\gamma\cdot\tau,\overline{\gamma\cdot\tau})=Z_{h^ag^c,h^bg^d}(\tau,\overline{\tau}), \tag{4.7}$$

尤其是，S-变换会交换两个圈，得到 $Z_{h,\ g}\mapsto Z_{g,\ h^{-1}}$；而 T-变换会将时间 holonomy 平移为空间 holonomy 与其自身之和，得到 $Z_{h,\ g}\mapsto Z_{h,\ hg}$。由于轨形配分函数是对所有 (h,g) 取均匀平均，因此这种封闭性立即保证 $Z_{\rm orb}$ 是模不变量。对于对称群 $G=\mathbb{Z}_2=\{1,u\}$，我们有 $|G|=2$，总共有以下四个扇区

$$(h,g)\in\{(1,1),(1,u),(u,1),(u,u)\}, \tag{4.8}$$

且轨形配分函数取如下形式

$$Z_{\rm orb}(\tau,\overline{\tau})=\frac{1}{2}\left(Z_{1,1}+Z_{1,u}+Z_{u,1}+Z_{u,u}\right). \tag{4.9}$$

4.1 $B_{r,1}$轨形

我们现在用与后文交换子对构造相关的最简单一类例子来说明一般的轨形形式，即一级 B系列WZW 模型$B_{r,1}\cong\widehat{\mathfrak{so}}(2r+1)_1$。这些理论有三个初级场 $\{\mathbb{1},\psi,\sigma\}$，分别表示真空、可逆简单流和不可逆主场，并且它们具有由 ψ 线生成的自然$\mathbb{Z}_2$ 整体对称性。对该对称性进行规范化会产生一个$\mathbb{Z}_2$ 轨形。在本小节中，我们构造扭曲迹$Z_{h,g}$，说明模协变性如何将它们组装成一致的轨形配分函数，并阐明这些扇区迹中仅编码可逆拓扑缺陷线，这与不可逆缺陷 σ形成对照。

我们从中心荷最低的对易子理论$B_{1,1}$开始。该理论的环面配分函数为

$$Z_{B_{1,1}}(\tau,\overline{\tau})=Z^{\mathbb{1}}(\tau,\overline{\tau})=|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{1}{2}}|^2+|\chi_{\frac{3}{16}}|^2, \tag{4.10}$$

其中 $(h_{\mathbb{1}}, h_\psi, h_\sigma) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{16})$。$\mathbb{Z}_2$ 全局对称性对 $\mathbb{1}$ 和 σ 的作用是平凡的，但会使 ψ 变号。用特征标语言来说，这意味着对称算符在 $\mathbb{1}$ 和 σ 扇区上的本征值为 $+1$，在 ψ 扇区上的本征值为 -1。$\rho(\psi)$ 在扇区 i 上的作用本征值为 $\lambda_\psi(i) = \frac{S_{\psi i}}{S_{0i}}$，而对于 $B_{1,1}$，可得 $(\lambda_\psi(\mathbb{1})\ \lambda_\psi((\psi)\ \lambda_\psi((\sigma)) = (+1, +1, -1)$。无空间扭曲时的两个非扭曲扇区偏迹，无论是否插入时间插入，分别为

$$\begin{aligned} Z_{0,0} =& |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{2}}|^2 + |\chi_{\frac{3}{16}}|^2, \\ Z_{0,1} =& |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{2}}|^2 - |\chi_{\frac{3}{16}}|^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

一旦指定特征标的模变换性质，模协变性便决定了剩余的扇区迹。在 $S: \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ 下，$B_{1,1}$ 理论的特征标变换如下

$$\begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_{\frac{1}{2}} \\ \chi_{\frac{3}{16}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_{\frac{1}{2}} \\ \chi_{\frac{3}{16}} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

它们遵循以下变换规则

$$\chi_i\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_j S_{ij}\chi_j(\tau). \tag{4.13}$$

另一方面，扭曲迹在模变换下遵循标准的重排规则

$$\begin{aligned} S: & Z_{h,g} \mapsto Z_{g,h^{-1}}, \\ T: & Z_{h,g} \mapsto Z_{h,hg}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

对于 $G = \mathbb{Z}_2,$，我们有 $h^{-1} = h$，因此 S 只是交换两个标签。这里的关键思想是，完整的轨形理论包含所有扭曲扇区，只有将它们全部纳入其中，才能恢复模不变性。$\widehat{\mathfrak{so}}(2r+1)_1$ 特征标的模形式表达式如下 [70]

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{\omega}_0}(\tau) =& \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3^{r+\frac{1}{2}} + \theta_4^{r+\frac{1}{2}}}{\eta^{r+\frac{1}{2}}}\right)(\tau), \\ \chi_{\hat{\omega}_1}(\tau) =& \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3^{r+\frac{1}{2}} - \theta_4^{r+\frac{1}{2}}}{\eta^{r+\frac{1}{2}}}\right)(\tau), \\ \chi_{\hat{\omega}_2}(\tau) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\theta_2}{\eta}\right)^{r+\frac{1}{2}}(\tau) \end{aligned} \tag{4.15}$$

这里我们使用 $r=1$ 特征标。在 T变换 下，特征标的变化如下

$$\begin{aligned}\chi_0(\tau+1) =& e^{-\frac{\pi i}{8}}\chi_0(\tau),\\ \chi_{\frac{1}{2}}(\tau+1) =& e^{\frac{7\pi i}{8}}\chi_{\frac{1}{2}}(\tau),\\ \chi_{\frac{3}{16}}(\tau+1) =& e^{\frac{\pi i}{4}}\chi_{\frac{3}{16}}(\tau).\end{aligned} \tag{4.16}$$

扭曲扇区偏迹为

$$\begin{aligned}Z_{1,0}(\tau,\overline{\tau}) =& Z_{0,1}\left(-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{\overline{\tau}}\right)\\ =& \chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}+\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0+|\chi_{\frac{13}{16}}|^2,\\ Z_{1,1}(\tau,\overline{\tau}) =& Z_{1,0}(\tau-1,\overline{\tau}-1)\\ =& -\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}-\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0+|\chi_{\frac{3}{16}}|^2.\end{aligned} \tag{4.17}$$

从偏迹扇区表达式可得，非扭曲配分函数和扭曲配分函数为

$$\begin{aligned}Z_0 =& \frac{1}{2}\left(Z_{0,0}+Z_{0,1}\right)=|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{1}{2}}|^2,\\ Z_1 =& \frac{1}{2}\left(Z_{1,1}+Z_{1,0}\right)=|\chi_{\frac{3}{16}}|^2.\end{aligned} \tag{4.18}$$

因此，轨形配分函数是非扭曲配分函数与扭曲配分函数之和，其表达式为

$$Z_{\rm orb}(\tau,\overline{\tau}) = Z_0(\tau,\overline{\tau})+Z_1(\tau,\overline{\tau}) \tag{4.19}$$

$$=|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{3}{16}}|^2+|\chi_{\frac{1}{2}}|^2 \tag{4.20}$$

$$=Z_{B_{1,1}}(\tau,\overline{\tau}). \tag{4.21}$$

因此，$\mathbb{Z}_2$ 的轨形$B_{1,\ 1}$重现了原理论。这是广为人知的“自轨形”现象，在密切相关的情形中也会出现，例如临界伊辛模型 [69]，；它清晰地展示了$Z_{h,\ g}$扇区之间的模协变性如何确保一致性。

值得强调的是，轨形扇区迹如何编码与可逆拓扑缺陷线相关的缺陷配分函数。在我们的归一化约定下，不含插入的非扭曲偏迹正比于无缺陷振幅，其形式为

$$Z^{\mathbb{1}}(\tau,\overline{\tau}) = 2Z_{0,0}(\tau,\overline{\tau}), \tag{4.22}$$

而沿时间方向插入非平凡群元素的非扭曲迹正比于 ψ-缺陷振幅，其形式为

$$Z^{\psi}(\tau,\overline{\tau}) = 2Z_{0,1}(\tau,\overline{\tau}). \tag{4.23}$$

我们还注意到， Z^{ψ} 可以通过取未扭曲配分函数与扭曲配分函数之差得到

$$Z^{\psi}(\tau,\overline{\tau}) = Z_0(\tau,\overline{\tau}) - Z_1(\tau,\overline{\tau}). \tag{4.24}$$

因此，插入恒等线以及与全局 Z_2 对称性相对应的可逆 ψ 线所产生的缺陷配分函数，编码在完整轨形理论的未扭曲扇区偏迹中；这里的完整轨形理论本身就是 $B_{1,1}$ 理论。我们将反复利用这一事实：轨形扇区迹天然适用于可逆对称线，因为轨形构造本身就是通过对这些可逆缺陷求和并进行投影来定义的。相比之下，与非可逆线 σ 相关的缺陷配分函数，无法由 Z_2 轨形扇区数据捕获。这并非偶然。轨形扇区由可逆线群 G构成，因此，它们只能“看到”实现真正对称性作用的缺陷。线 σ 并不定义类群对称缺陷，因为其融合在 $\{\mathbb{1},\sigma\}$内并不封闭，而这类缺陷也未纳入群轨形求和。由$B_{1,1}$的融合规则可见：

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} &= \mathbb{1}, \qquad \mathbb{1}\otimes\sigma = \sigma, \qquad \mathbb{1}\otimes\psi = \psi,\\
\sigma\otimes\sigma &= \mathbb{1}\oplus\psi, \qquad \sigma\otimes\psi = \psi\otimes\sigma = \sigma,\\
\psi\otimes\psi &= \mathbb{1}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

请注意，$\mathsf{1}$ 和 ψ 融合规则会分别得到 $\mathsf{1}$ 和 ψ，但 σ 规则并非如此。这类似于临界伊辛模型，其中初级场 $\mathcal{P} = \{\mathbb{1},\sigma,\epsilon\}$ 与 $\sigma\otimes\epsilon = \epsilon\otimes\sigma = \sigma$具有类似的融合规则。临界伊辛模型不过是 $B_{0,1}$ 有理共形场论，因此，这种 σ-线是我们可以在所有 $B_{r,1}$ 有理共形场论中预期看到的现象。由于这一行为，缺陷配分函数 Z^{σ} 无法用 Z_2 轨形扇区表示，即

$$Z^{\sigma} \neq a_1 Z_{0,0} + a_2 Z_{0,1} + a_3 Z_{1,0} + a_4 Z_{1,1}, \quad \forall a_i. \tag{4.26}$$

轨形形式本身并非为编码此类非可逆缺陷而设计。根据融合规则 4.25，我们可以将拓扑线 L_1 和 L_2 的各种插入算符所产生的所有可能偏迹集合 $Z^{L_3}_{L_1,L_2}$ 写为

$$Z^{L_3}_{L_1,L_2} = \left\{ Z^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}, Z^{\psi}_{\mathbb{1},\psi}, Z^{\psi}_{\psi,\mathbb{1}}, Z^{\mathbb{1}}_{\psi,\psi}, Z^{\sigma}_{\mathbb{1},\sigma}, Z^{\sigma}_{\sigma,\mathbb{1}}, Z^{\sigma}_{\psi,\sigma}, Z^{\sigma}_{\sigma,\psi}, Z^{\mathbb{1}}_{\sigma,\sigma}, Z^{\psi}_{\sigma,\sigma} \right\}. \tag{4.27}$$

符号 $Z^{L_3}_{L_1,L_2}$ 应按如下方式理解。我们考虑一个带有两个缺陷插入的环面：一条线 L_1 沿着（比如说）时间周期穿过，另一条线 L_2 沿着空间周期穿过。由于两条线相交一次，交点处便有一个局部交汇数据。在融合范畴语言中，这个交叉可以分解为对中间通道求和；标签 L_3 记录了分解后的通道中流经的拓扑线，或者等价地说，记录了在交点处 L_1 与 L_3 融合时出现的主场。从这个意义上说，$Z^{L_3}_{L_1,L_2}$ 是对通常的扭曲迹 $Z_{h,g}$ 的细化，因为它不仅保留了 holonomy（L_1, L_2），还保留了交汇通道 L_3。根据融合规则 4.25，我们可以立即枚举每个有序对 (L_1, L_2)所对应的可能分解通道$L_3 \in L_1 \otimes L_2$，这些通道列于表 4.1.1。这解释了 4.27，也准确说明了这个列表为何包含

$(L_1,\ L_2)$	$(\mathbb{1},\mathbb{1})$	$(\mathbb{1},\psi)$ 或 $(\psi,\mathbb{1})$	$(\psi,\ \psi)$	$(\mathbb{1},\ \sigma)$ 或 $(\sigma,\ \mathbb{1})$	(ψ,σ) 或 (σ,ψ)	$(\sigma,\ \sigma)$
L_3	$\mathbb{1}$	ψ	$\mathbb{1}$	σ	σ	$\{\mathbb{1},\psi\}$

表 4.1.1：有序对 (L_1, L_2) 或拓扑线的可能分解通道 L_3。

只有十个元素，因为除了 (σ,σ) 扇区会分裂成两个精细化迹（取决于传播的是 1 通道还是 ψ 通道）之外，其余情况都已确定。我们也可以将其写成

$$Z_{L_1,L_2}(\tau,\overline{\tau}) = \sum_{L_3 \subset L_1 \otimes L_2} Z^{L_3}_{L_1,L_2}(\tau,\overline{\tau}), \tag{4.28}$$

其中，Z_{L_1,L_2} 是未精细化的扭曲配分函数，它只记录两个循环插入，而 $Z^{L_3}_{L_1,L_2}$ 是与融合相容的精细化配分函数。特别是，我们注意到

$$Z_{\sigma,\sigma} = Z^{\mathbb{1}}_{\sigma,\sigma} + Z^{\psi}_{\sigma,\sigma}, \tag{4.29}$$

而另一个 (L_1, L_2) 只有一个允许的通道，因此无法进行非平凡的精细化。这些扭曲配分函数的模变换已在 [71] 中求得：

$$\begin{aligned} Z^{L_3}_{L_1,L_2}(\tau+1,\overline{\tau}+1) &= \sum_{L_4} \widetilde{K}^{\overline{L}_1,L_2}_{\overline{L}_2,L_1}\left(\overline{L}_3,\overline{L}_4\right) Z^{L_2}_{L_1,L_4}(\tau,\overline{\tau}), \\ Z^{L_3}_{L_1,L_2}\left(-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{\overline{\tau}}\right) &= \sum_{L_4} \widetilde{K}^{\overline{L}_1,\mathbb{1}}_{\overline{L}_4,L_2}\left(\overline{L}_2,L_1\right) \widetilde{K}^{\overline{L}_1,L_2}_{\overline{L}_2,L_1}\left(\overline{L}_3,\overline{L}_4\right) Z^{L_4}_{L_2,\overline{L}_1}(\tau,\overline{\tau}). \end{aligned} \tag{4.30}$$

这里，我们有 L 表示融合范畴中的对偶，而 $L = L^{-1}$ 表示群类情形中的对偶。请注意，模变换不仅仅是重新标记（$L_1,\ L_2$），还会改变缺陷网络在环面上的嵌入方式，因此可能迫使我们重新解析

~不同通道基中的交叉。符号正是对此进行编码，因为它们是环面缺陷网络不同粘合方式之间的基变换矩阵。 K -move 交换两个周，即交换（ S，L_1）并取对偶，然后在标准通道基中重新展开所得的交叉。 L_2-move 改变德恩扭转框架，并有效地对结点基施加受控的编织操作。这解释了为什么这些变换是对标签 T的求和，因为模变换通常会混合精细通道。一个具体例子见 L_4 ，其中详细讨论了相对于伊辛模型的完整范畴对称性而言不可规范化的问题。 [71],

现在，我们对 $B_{6,1} = \widehat{\mathfrak{so}}(13)_1$ 重复这一轨形化过程。关键观察是，该理论与 $B_{1,1}$ 理论具有相同的 S-矩阵，但其 T-矩阵不同，$T = e^{-2\pi i \frac{c}{24}}\text{Diag}\left(\mathbb{1}, e^{2\pi i h_\sigma}, e^{2\pi i h_\psi}\right)$，其形式如下

$$T = \text{diag}\left(e^{-\frac{13\pi i}{24}}, e^{\frac{13\pi i}{12}}, e^{\frac{11\pi i}{24}}\right). \tag{4.31}$$

未扭曲扇区偏迹为

$$\begin{aligned} Z_{0,0}(\tau,\overline{\tau}) =& |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{2}}|^2 + |\chi_{\frac{13}{16}}|^2, \\ Z_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) =& |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{2}}|^2 - |\chi_{\frac{13}{16}}|^2, \end{aligned} \tag{4.32}$$

而扭曲扇区偏迹为

$$\begin{aligned} Z_{1,0}(\tau,\overline{\tau}) =& +\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}} + \chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0 + |\chi_{\frac{13}{16}}|^2, \\ Z_{1,1}(\tau,\overline{\tau}) =& -\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}} - \chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0 + |\chi_{\frac{13}{16}}|^2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

由此，我们得到未扭曲和扭曲扇区的配分函数为 e

$$\begin{aligned} Z_0(\tau,\overline{\tau}) =& |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{2}}|^2, \\ Z_1(\tau,\overline{\tau}) =& |\chi_{\frac{13}{16}}|^2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

因此，我们发现 $B_{6,1}$ 有理共形场论在 $\mathbb{Z}_2$ 轨形下也是自对偶的！事实上，这一结论对整个 $B_{r,1}$ 有理共形场论族都成立

$$\frac{B_{r,1}}{\mathbb{Z}_2} = B_{r,1}. \tag{4.35}$$

这是因为轨形由可逆简单流 ψ及相应的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性作用所控制，而相关扇区迹的模闭合迫使轨形求和重新组织为同一个对角不变量。稍后我们将从缺陷/界面视角重新诠释这一“自轨形”性质；在该视角下，它具体体现为 ψ-线如何作用于涉及 $B_{r,1}$ 的交换子对的赤道粘合数据。

4.2 $A_{r,1}$轨形

现在我们转向 A 系列 WZW 模型 $A_{r,k} \cong \widehat{\mathfrak{su}}(r+1)_k$，并聚焦于最简单的 1 级情形$A_{r,1}$。$A_{r,1}$ WZW 模型是 1 级的仿射理论 $\mathfrak{sl}_{r+1}$，其对应的模张量范畴为 [72]

$$\mathcal{C}(A_r, 1) \equiv \mathcal{C}(\mathfrak{sl}_{r+1}, 1), \tag{4.36}$$

即能级为 1[5] 的可积最高权 $\widehat{\mathfrak{sl}}_{r+1}$-模的范畴。能级 $k = 1$ 处一个有用的结构特征是，该理论是尖锐的 [73]（见例 6.2），即所有初级场都是简单流，或等价地，所有拓扑线都是可逆的。让我们专门讨论 $A_{1,1} \cong \widehat{\mathfrak{su}}(2)_1$ 情形。其模张量范畴是具有任意子类型 $\{\mathbb{1}, s\}$ [74] 的半子范畴（见 §5.3.1），二者的量子维数均为 1，融合

$$s \otimes s = \mathbb{1}. \tag{4.37}$$

相应的有理共形场论有两个初级场，中心荷为 $c = 1$，共形权重为[6]$\{0, \frac{1}{4}\}$。$\widehat{\mathfrak{su}}(2)_1$ 特征标具有如下模形式表达式 [70]

$$\begin{aligned} \chi_0(\tau) &= \left(\frac{\theta_3 + \theta_4}{2\eta}\right)(\tau), \\ \chi_{\frac{1}{4}}(\tau) &= \left(\frac{\theta_3 - \theta_4}{2\eta}\right)(\tau) \end{aligned} \tag{4.38}$$

该理论的对角环面配分函数为

$$Z_{A_{1,1}}(\tau, \overline{\tau}) = Z^{\mathbb{1}}(\tau, \overline{\tau}) = |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{4}}|^2. \tag{4.39}$$

利用该理论的 S-矩阵，特征标变换如下

$$\begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

在 T 变换下，特征标的行为如下

$$\begin{aligned} \chi_0(\tau + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{12}} \chi_0(\tau), \\ \chi_{\frac{1}{4}}(\tau + 1) &= e^{\frac{5\pi i}{12}} \chi_{\frac{1}{4}}(\tau). \end{aligned} \tag{4.41}$$

[5] 在模数据层面（相同的仿射类型 A_r），我们交替使用 $\widehat{\mathfrak{sl}}_{r+1,\ 1}$ 和 $\widehat{\mathfrak{su}}(r+1)_1$。[6] $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$ 主场的共形权重可由自旋 j 表示在等级 k下的一般公式 $h_j = {}^{j}{}_{(j+1)\ k+2}$ 得出。因此，对于 $k = 1$，真空主场为 $j = 0$，而非平凡主场为$j = \frac{1}{2}$。

未扭曲扇区偏迹可计算为

$$\begin{aligned} Z_{0,0}(\tau,\overline{\tau}) =&|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{1}{4}}|^2, \\ Z_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) =&|\chi_0|^2-|\chi_{\frac{1}{4}}|^2. \end{aligned} \tag{4.42}$$

利用变换性质 4.40和 4.41，我们可以计算得到扭曲扇区的偏迹：

$$\begin{aligned} Z_{1,0}(\tau,\overline{\tau}) =&\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{4}}+\chi_{\frac{1}{4}}\overline{\chi}_0, \\ Z_{1,1}(\tau,\overline{\tau}) =&-i\left(\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{4}}-\chi_{\frac{1}{4}}\overline{\chi}_0\right). \end{aligned} \tag{4.43}$$

从 偏迹，我们计算得到未扭曲和扭曲配分函数为 e

$$Z_0=|\chi_0|^2, \qquad Z_1=\frac{1}{2}\left[(1-i)\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{4}}+(1+i)\chi_{\frac{1}{4}}\overline{\chi}_0\right]. \tag{4.44}$$

注意，扭曲配分函数不是由带有非负整数系数的绝对值平方之和构成的。事实上，它甚至带有内禀复相位。这正是半子的分数自旋 $\theta_s=i$的具体体现，即玻色 $\mathbb{Z}_2$轨形的阻碍。由于 $\{\mathbb{1},s\}\cong\mathbb{Z}_2,$，我们可以尝试通过对四个（$h,\ g$）扇区取平均来构造轨形配分函数。然而，请注意，此处生成元 s 具有分数自旋 [70]

$$\theta_s=e^{2\pi i h_s}=e^{\frac{i\pi}{2}}=i\neq 1. \tag{4.45}$$

这一条件正是熟知的简单流积分自旋阻碍。在没有额外自旋结构或离散扭曲选择的玻色轨形中，生成对称性 [75, 76]的流必须具有整数自旋。将模 T-本征值理解为对应于拓扑缺陷线 [5], 的自旋后，分数自旋表明该对称性带有离散 't Hooft 反常，因此无法进行规范化 [18]。

4.3 $D_{r,1}$轨形

对于 D-系列 WZW 模型，我们有 $D_{r,k}\cong\widehat{\mathfrak{so}}(2r)_k$。下面转向 1 级情形$D_{4,1}\cong\widehat{\mathfrak{so}}(8)_1$，其中有初级场 $\{\mathbb{1},\nu,\sigma,\widetilde{\sigma}\}$，其共形权重 $\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$ 由3.104得到。环面配分函数为

$$Z(\tau,\overline{\tau})=|\chi_0|^2+3|\chi_{\frac{1}{2}}|^2. \tag{4.46}$$

这三个非平凡的初级场 $\{\nu,\sigma,\widetilde{\sigma}\}$ 的量子维数均为 1，融合规则为

$$\begin{aligned} \nu\otimes\sigma=&\widetilde{\sigma}, \qquad \sigma\otimes\widetilde{\sigma}=\nu, \qquad \widetilde{\sigma}\otimes\nu=\sigma, \\ \nu\otimes\nu=&\sigma\otimes\sigma=\widetilde{\sigma}\otimes\widetilde{\sigma}=1, \end{aligned} \tag{4.47}$$

这恰好就是群 $\mathbf{Z}_2^2$。因此，我们有皮卡群 $\mathrm{Pic}(D_{4,1}) = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$，，而 g 对初级场集合的作用由融合 g 给出： $x \mapsto g \otimes x$，具体而言就是

$$\begin{aligned} \nu &: \mathbb{1} \leftrightarrow \nu,\ \sigma \leftrightarrow \widetilde{\sigma}, \\ \sigma &: \mathbb{1} \leftrightarrow \sigma,\ \nu \leftrightarrow \widetilde{\sigma}, \\ \widetilde{\sigma} &: \mathbb{1} \leftrightarrow \widetilde{\sigma},\ \nu \leftrightarrow \sigma. \end{aligned} \tag{4.48}$$

现在我们通过克莱因群进行轨形化， $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, 其中 $|G| = 4$，并且我们有部分迹元素 $Z_{(m,m'),\ (r,\ r')}$ [69]。 S-变换和 T-变换对这些部分迹元素的作用如下

$$\begin{aligned} S &: \big((m,m'),(r,r')\big) \mapsto \big((r,r'),(-m,-m')\big), \\ T &: \big((m,m'),(r,r')\big) \mapsto \big((m,m'),(r-m,r'-m')\big). \end{aligned} \tag{4.49}$$

现在，无空间扭曲时的迹由原始希尔伯特空间中的扭曲配分函数给出，即

$$Z_{(0,0),(r,r')} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(\widehat{g\,(r,r')} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \overline{q}^{\overline{L}_0 - \frac{c}{24}} \right). \tag{4.50}$$

在有理共形场论中，沿其中一个周插入标记为 g 的可逆线缺陷，会在扇区 x 上对角作用，其本征值为

$$\lambda_g(x) = \frac{S_{g,x}}{S_{0,x}} \in \{\pm 1\}, \tag{4.51}$$

并且对于$D_{4,\ 1}$，模 S-矩阵不过是 $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 特征标表，其表示为

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

而 T-矩阵为

$$T = \mathrm{Diag}\left(e^{-\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}} \right). \tag{4.53}$$

我们如下选取 G 的生成元

$$a \equiv \nu, \qquad b \equiv \sigma, \qquad ab \equiv \widetilde{\sigma}, \tag{4.54}$$

以及作为有序对的群元素 $(m,m') \in \{0,1\}^2$，因此我们有

$$g(m,m') \equiv a^m b^{m'} \in \{\mathbb{1}, \nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}. \tag{4.55}$$

类似地，我们还定义 $h(r,r')\equiv a^r b^{r'}$。由 [69], 我们发现，有一个偏迹轨道与未扭曲扇区不连通，其中包含六个满足 $h\neq 1$,$g\neq 1$ 和 $g\neq h$ 的迹，其打包形式如下

$$Z_{\text{disconnected}}=Z_{(0,1),(1,0)}+Z_{(1,0),(0,1)}+Z_{(0,1),(1,1)}+Z_{(1,0),(1,1)}+Z_{(1,1),(0,1)}+Z_{(1,1),(1,0)}, \tag{4.56}$$

并施加高亏格一致性条件后，这个非连通部分只能以如下形式出现

$$Z_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}=\frac{1}{|\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2|}\left(Z_{\text{connected}}\pm Z_{\text{disconnected}}\right), \tag{4.57}$$

其中 $\pm$ 是一种离散扭曲选择。这里，我们有如下对应关系

$$(0,0)\leftrightarrow\mathbb{1},\qquad (1,0)\leftrightarrow\nu,\qquad (0,1)\leftrightarrow\sigma,\qquad (1,1)\leftrightarrow\widetilde{\sigma}. \tag{4.58}$$

现在明确写出这些贡献。对于 $D_{4,\ 1}$，根据三重性，我们有 $\chi_\nu=\chi_\sigma=\chi_{\widetilde{\sigma}}\equiv\chi_{\ 1}$；对于未扭曲扇区，取 $h=1$，则有[2]

$$\begin{aligned}
Z_{(0,0),(0,0)}=&|\chi_{\mathbb{1}}|^2+|\chi_\nu|^2+|\chi_\sigma|^2+|\chi_{\widetilde{\sigma}}|^2=|\chi_0|^2+3|\chi_{\frac{1}{2}}|^2,\\
Z_{(0,0),(1,0)}=&|\chi_{\mathbb{1}}|^2+|\chi_\nu|^2-|\chi_\sigma|^2-|\chi_{\widetilde{\sigma}}|^2=|\chi_0|^2-|\chi_{\frac{1}{2}}|^2,\\
Z_{(0,0),(0,1)}=&|\chi_{\mathbb{1}}|^2-|\chi_\nu|^2+|\chi_\sigma|^2-|\chi_{\widetilde{\sigma}}|^2=|\chi_0|^2-|\chi_{\frac{1}{2}}|^2,\\
Z_{(0,0),(1,1)}=&|\chi_{\mathbb{1}}|^2-|\chi_\nu|^2-|\chi_\sigma|^2+|\chi_{\widetilde{\sigma}}|^2=|\chi_0|^2-|\chi_{\frac{1}{2}}|^2.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

与 $g=1$ 对应的不含插入算符的纯扭曲偏迹是非对角配对，其形式为

$$Z_{(1,0),(0,0)}=Z_{(0,1),(0,0)}=Z_{(1,1),(0,0)}=\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}+\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0+2|\chi_{\frac{1}{2}}|^2. \tag{4.60}$$

仍属于连通轨道、且 $h=g\neq$为 1 的对角扭曲-扭结偏迹为

$$Z_{(1,0),(1,0)}=Z_{(0,1),(0,1)}=Z_{(1,1),(1,1)}=-\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}-\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0+2|\chi_{\frac{1}{2}}|^2. \tag{4.61}$$

最后，六个混合偏迹 $h\neq g\neq 1$ 恰好是 4.56中的非连通轨道贡献，其形式为

$$Z_{(1,0),(0,1)}=-Z_{(1,0),(1,1)}=\varepsilon\left(\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}-\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0\right), \tag{4.62}$$

$$Z_{(0,1),(1,0)}=-Z_{(0,1),(1,1)}=\varepsilon\left(\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0-\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}\right), \tag{4.63}$$

$$Z_{(1,1),(1,0)}=-Z_{(1,1),(0,1)}=\varepsilon\left(\chi_0\overline{\chi}_{\frac{1}{2}}-\chi_{\frac{1}{2}}\overline{\chi}_0\right), \tag{4.64}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$ 是整体离散扭转符号。现在，连通部分是模轨道中与未扭曲扇区相连的 10 个偏迹 4.594.60和4.61 之和，其形式为

$$Z_{\text{connected}} = 4|\chi_0|^2 + 12|\chi_{\frac{1}{2}}|^2. \tag{4.65}$$

接下来， 非连通部分通过对4.62中的所有贡献求和得到

$$Z_{\text{disconnected}} = 0. \tag{4.66}$$

由此可得以下轨形配分函数

$$Z_{\text{orb}} = \frac{1}{|G|}\left(Z_{\text{connected}} + Z_{\text{disconnected}}\right) = |\chi_0|^2 + 3|\chi_{\frac{1}{2}}|^2, \tag{4.67}$$

它等于环面配分函数4.46，因此是一个自轨形 !

对于 D 系列 WZW 模型，皮卡群与单连通群 Spin($2r$) 的中心数据相吻合，而 Spin($2r$) 取决于奇偶性 [77, 78]。对于偶数 r，我们有 Spin($4k$)，其中心为 $\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$, ；而对于奇数 r，我们有 Spin($4k+2$)，其中心为 Z_2。因此，我们有

$$\mathrm{Pic}(D_{r,1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, & r \text{ even}, \\ \mathbb{Z}_4, & r \text{ odd}. \end{cases} \tag{4.68}$$

这种奇偶二分性也直接体现在矢量和旋量的 1 级融合规则中。对于 $N = 2r \equiv 0 \pmod 4$，我们有克莱因群 $\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$, ；而对于 $N = 2r \equiv 2 \pmod 4$，旋量生成一个 Z_4 [79]。利用标准的简单流轨形公式以及针对多个生成元的高亏格一致性约束 [75], ，很容易验证，对于偶数 r , $D_{r,1}$ 的 ($\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$) 轨形只有在三重性情形 $r = 4$ 下才与母理论一致；这些验证留给读者。

4.4 $G_{r,\ 1}$轨形

对于 G 系列 WZW 模型，我们有 $G_{r,\ k} \cong \widehat{\mathfrak{g}}_{2k}$，因为嘉当分类中不存在无限 G_r 系列。考虑 $G_{2,\ 1}$，它由斐波那契模张量范畴 [74]，构成，其单对象为 $\{\mathbb{1}, \tau\}$，融合规则为

$$\tau \otimes \tau = \mathbb{1} \oplus \tau. \tag{4.69}$$

量子维数为（$d_{\mathbb{1}}$， d_τ） = （1， φ），其中 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金比例。 S-矩阵和 F-矩阵为

$$S = \frac{1}{\sqrt{2+\varphi}}\begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}, \qquad F^{\tau}_{\tau\tau\tau} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi^{-\frac{1}{2}} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.70}$$

对于无重数融合4.69，偏迹的自然基为

$$Z^{L_3}_{L_1,L_2}(\tau,\overline{\tau}), \qquad L_1,L_2\in\{\mathbb{1},\tau\}, \qquad L_3\in L_1\otimes L_2. \tag{4.71}$$

这里，我们得到五个偏迹，$\{Z^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}, Z^{\tau}_{\mathbb{1},\tau}, Z^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}}, Z^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau}, Z^{\tau}_{\tau,\tau}\}$，其中 S和 T变换通过 4.30作用。这里唯一发生的非平凡混合是在（τ,τ）扇区中，而相关的$\sim K$ 恰好是 F矩阵 4.70 ，其余部分则都是平凡的，因为涉及 $\mathbb{1}$ 的线不会产生非平凡的重新耦合。由于只有两个融合通道，我们有

$$\widetilde{K}^{\tau,\tau}_{\tau,\tau}(L_3,L_4)=(F^{\tau}_{\tau\tau\tau})^{L_4}_{L_3}, \qquad L_3,L_4\in\{\mathbb{1},\tau\}. \tag{4.72}$$

对于$G_{2,\ 1}$，手征数据为

$$c=\frac{14}{5}, \qquad h_{\mathbb{1}}=h_0=0, \qquad h_{\tau}=\frac{2}{5}, \tag{4.73}$$

其对应的 T 矩阵为

$$T_{\mathbb{1}}=e^{2\pi i\left(h_0-\frac{c}{24}\right)}=e^{-\frac{7\pi i}{30}}, \qquad T_{\tau}=e^{2\pi i\left(h_{\tau}-\frac{c}{24}\right)}=e^{\frac{17\pi i}{30}}, \tag{4.74}$$

并且我们得到特征标的如下 q 级数展开

$$\begin{aligned}\chi_0(\tau)=&q^{-\frac{7}{60}}\left(1+14q+42q^2+140q^3+350q^4+\ldots\right),\\ \chi_{\frac{2}{5}}(\tau)=&q^{\frac{17}{60}}\left(7+34q+119q^2+322q^3+819q^4+\ldots\right).\end{aligned} \tag{4.75}$$

非扭曲环面配分函数的形式为

$$Z(\tau,\overline{\tau})=Z^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}(\tau,\overline{\tau})=|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{2}{5}}|^2. \tag{4.76}$$

沿空间周期插入拓扑线 τ 会以本征值 $\lambda_i(\tau)=\frac{S_{\tau i}}{S_{0i}}$在初级场上对角作用，并且利用 S矩阵 4.70，我们得到 —

$$\lambda_0(\tau)=\varphi, \qquad \lambda_{\tau}(\tau)=-\varphi^{-1}, \tag{4.77}$$

因此，我们发现缠绕配分函数的形式为

$$Z^{\tau}_{\mathbb{1},\tau}=\varphi|\chi_0|^2-\frac{1}{\varphi}|\chi_{\frac{2}{5}}|^2. \tag{4.78}$$

应用 a S 变换，我们得到

$$Z^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}}=S\cdot Z^{\tau}_{\mathbb{1},\tau}=\sum_{i,j\in\{\mathbb{1},\tau\}}M^{(\tau,\mathbb{1})}_{ij}\chi_i\overline{\chi_j}, \tag{4.79}$$

其矩阵为

$$M^{(\tau,\mathbb{1})} = S \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.80}$$

由此得到

$$Z^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}} = \chi_0 \overline{\chi_{\frac{2}{5}}} + \chi_{\frac{2}{5}} \overline{\chi_0} + |\chi_{\frac{2}{5}}|^2. \tag{4.81}$$

接下来，我们进行 T 变换，从而得到

$$Z^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau}(\tau) = Z^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}}(\tau+1). \tag{4.82}$$

固定此式后得到

$$Z^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau} = e^{-\frac{4\pi i}{5}} \chi_0 \overline{\chi_{\frac{2}{5}}} + e^{\frac{4\pi i}{5}} \chi_{\frac{2}{5}} \overline{\chi_0} + |\chi_{\frac{2}{5}}|^2, \tag{4.83}$$

最后，我们有

$$Z^{\tau}_{\tau,\tau} = \varphi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3\pi i}{5}} \chi_0 \overline{\chi_{\frac{2}{5}}} + \varphi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3\pi i}{5}} \chi_{\frac{2}{5}} \overline{\chi_0} + \varphi^{-\frac{3}{2}} |\chi_{\frac{2}{5}}|^2. \tag{4.84}$$

现在让我们将规范化代数取为

$$\mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \oplus \tau, \tag{4.85}$$

并且关键地

$$|\mathfrak{A}| \equiv \sum_{x \subset \mathfrak{A}} d_x = d_{\mathbb{1}} + d_\tau = 1 + \varphi = \varphi^2, \tag{4.86}$$

不是整数。用 [71], 的语言来说，我们将强规范化与弱规范化区分如下：

- 强规范化要求满足与真正的酉轨形共形场论相一致的整数性／正性条件；在实践中，它会施加诸如量子维数为整数等算术约束。

- 弱规范化放宽了这些条件，允许模协变完备化在某些扇区中不满足正性／整数性，但仍作为一致的模对象存在。

现在，根据 4.86，我们立刻可以看出，这会阻碍强可规范化性，但不会阻碍弱可规范化性，因为在拓扑数据层面允许存在无理结构常数。这正是斐波那契模张量范畴成为弱可规范化、但不可强可规范化的典型例子的原因。在对称性作用平凡的情形下，每个偏迹都简化为母配分函数乘以一个纯拓扑

系数 $\Lambda^{L_3}_{L_1,\ L_2}$，而规范化后的或轨形配分函数则是对所有此类扇区求和并进行归一化，其形式为 [71]

$$Z_{\text{gauged}} = Z_{\text{orb}} = \sum_{L_1,L_2,L_3} \Lambda^{L_3}_{L_1,L_2} Z^{L_3}_{L_1,L_2}, \tag{4.87}$$

我们计算得到这些系数为（见附录）

$$\left\{\Lambda^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}, \Lambda^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau}, \Lambda^{\tau}_{\mathbb{1},\tau}, \Lambda^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}}, \Lambda^{\tau}_{\tau,\tau}\right\} = \left\{\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}. \tag{4.88}$$

利用这一结果，我们得到轨形配分函数

$$Z_{\text{orb}} = \frac{\varphi+4}{3\varphi}|\chi_0|^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3\varphi} + \frac{1}{3\varphi^{\frac{3}{2}}}\right)|\chi_{\frac{2}{5}}|^2 + \left(\frac{e^{-\frac{4\pi i}{5}}}{\varphi^2} + \frac{1+\varphi^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3\pi i}{5}}}{3}\right)\chi_0\overline{\chi_{\frac{2}{5}}} + \left(\frac{e^{\frac{4\pi i}{5}}}{\varphi^2} + \frac{1+\varphi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{3\pi i}{5}}}{3}\right)\chi_{\frac{2}{5}}\overline{\chi_0} \tag{4.89}$$

由此表达式可见，a q-级数展开将涉及系数

5 与$E_{8,1}$ 相关的三特征配对与缺陷插入

本节将给出明确的三特征标示例，以一种适用于拓扑缺陷计算和系统化扩展替换规则方法的形式，实现交换子对理念。先例是 [2], 中介绍的怪兽共形场论缺陷配分函数构造：通过转向合适的交换子对，可以间接获取 $c = 24$亚纯理论的非平凡缺陷数据，随后在特征标层面实现相应的缺陷插入。在双特征标情形中，这一逻辑被提炼为有效的“替换规则”，并用于构造具有 Kac-Moody代数$E_{8,1}$ [1]的 $c = 8$ 亚纯理论的缺陷配分函数。我们的目标是将这一计算流程扩展到三特征标交换子对，其双线性配对可以重现余集框架 [43]中出现的$E_{8,1}$ 。

对于$E_{8,\ 1}$，还可以直接利用格点顶点算子代数和自同构技术，获得多种缺陷（缠绕/扭曲）配分函数，即将其视为与有限阶自同构相关的模迹函数，从而绕过双特征交换子对方法 [80, 81]。然而，这些技术无法立即对亚纯余集分类中重点强调的完整余集实现列表进行统一处理。特别是，亚纯余集分类中突出的张量积型和IVOA型交换子对，促使我们从替换规则的角度进行专门分析 [12, 43]。~我们的策略是具体的。对于每个交换子对（$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$），我们从双线性

配对关系着手，该关系由§A中的分支规则所确立，直接揭示了缺陷插入算符如何作用于赤道投影。随后，我们通过计算相关简单对象在MMS框架中得到的模 S矩阵所给出的缺陷作用本征值，从较低中心荷理论中提取相关缺陷数据 [41], ；该矩阵决定了模表示，进而决定 Verlinde 算子，并通过有理共形场论中拓扑线插入算符的标准构造确定相应的缺陷配分函数 [1]。最后，我们将所得缺陷配分函数作为模函数进行分析，并确定其模不变群。

5.1 $(B_{1,1},B_{6,1})$

我们考虑一个中心荷为 $(c,\tilde{c}) = \left(\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$ 的交换子对，因此，我们由此对构造

$$\chi^{E_8} = \chi_0^{B_1}\chi_0^{B_6} + \chi_{\frac{1}{2}}^{B_1}\chi_{\frac{1}{2}}^{B_6} + \chi_{\frac{3}{16}}^{B_1}\chi_{\frac{13}{16}}^{B_6}. \tag{5.1}$$

我们所考虑的缺陷针对中心荷较低的理论，即 $B_{1,1}$。$B_{1,1}$正是 [74] 中的 $(A_1,2)$ 模张量范畴（见 §5.3.5），具有非平凡初级场 $(\phi_0,\phi_1,\phi_2) = (\mathbf{1},\sigma,\psi)$，且 $(h_1,h_\sigma,h_\psi) = \left(0,\frac{3}{16},\frac{1}{2}\right)$。相应的 S-矩阵为

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

现在，我们构造 Verlinde 线，并考察它们对初级场的作用。我们有

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_0|\phi_i\rangle &= |\phi_i\rangle, \\ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_0\rangle &= \sqrt{2}|\phi_0\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_1\rangle = 0, \qquad \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_2\rangle = -\sqrt{2}|\phi_2\rangle, \\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_0\rangle &= |\phi_0\rangle, \qquad \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_1\rangle = -\sqrt{2}|\phi_1\rangle,\ \ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_2\rangle = |\phi_2\rangle. \end{aligned} \tag{5.3}$$

由此我们观察到，$\widehat{\mathcal{L}}_0$ 是平凡线或恒等线，$\widehat{\mathcal{L}}_2$ 是可逆的 ψ-线，对应于二维有理共形场论的 $\mathbb{Z}_2$ 整体对称性，而 $\widehat{\mathcal{L}}_1$ 是湮灭 $|\phi_1\rangle$ 的不可逆 N-线。现在，给定一条 Verlinde 线，我们可以如下得到带有缺陷插入（空间周期）的配分函数

$$\mathcal{Z}^{\widehat{\mathcal{L}}_k} = \sum_i \frac{S_{ki}}{S_{0i}}\chi_i(\tau)\widetilde{\chi}_i(\bar{\tau}). \tag{5.4}$$

据此，空间圈缺陷配分函数写为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\mathbb{1}} &= |\chi_0|^2 + |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2, \\ \mathcal{Z}^{\sigma} &= \sqrt{2}\left(|\chi_0|^2 - |\chi_2|^2\right), \\ \mathcal{Z}^{\psi} &= |\chi_0|^2 - |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

我们关注的是 $\mathcal{Z}^{\psi}$ 缺陷配分函数。进行替换后，有

$$\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)} = \chi_0^{B_1}\chi_0^{B_6} + \chi_{\frac{1}{2}}^{B_1}\chi_{\frac{1}{2}}^{B_6} - \chi_{\frac{3}{16}}^{B_1}\chi_{\frac{13}{16}}^{B_6}. \tag{5.6}$$

将4.15中的特征标模形式表达式代入5.6后，缺陷配分函数可写为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau) = \left(\frac{\theta_3^8 + \theta_4^8 - \theta_2^8}{2\eta^8}\right)(\tau) = \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^8 \\ = q^{-\frac{1}{3}}\left(1 - 8q + 28q^2 - 64q^3 + \ldots\right).\end{aligned} \tag{5.7}$$

这是一个 2 级 η 商，因此是 $\Gamma_0(2)$ 上的权0模函数，但仅具有协变性，即相差一个单位根或乘子系统。利用戴德金η函数的 T 变换，其表达式为

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau), \tag{5.8}$$

由此可得缺陷配分函数的以下变换性质

$$\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau+1) = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau). \tag{5.9}$$

这立即表明，缺陷配分函数在 T 变换下并不保持不变，且 T 乘子的阶为 3。因此，由 T 本征值可得导子为

$$N_T = \mathrm{ord}(\rho(T)) = 3, \tag{5.10}$$

[1]这也反映在 $q^{-\frac{1}{3}}$ 在5.7中的首项指数上。我们可以用韦伯函数重写缺陷配分函数5.7 ，这样做不仅使 T 下的 3 阶乘子一目了然，还揭示出一个出人意料的简洁弗里克作用 $\tau \mapsto -\frac{1}{2\tau}$，即将缺陷可观测量取倒数。采用标准归一化，我们将韦伯函数定义如下 [82]

$$\mathfrak{f}_2(\tau) \equiv \sqrt{2}\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.11}$$

在此归一化下， $\mathfrak{f}_2$ 在阶为 24 的 T 作用下具有一个简单乘子，即

$$\mathfrak{f}_2(\tau+1) = \zeta_{24}\mathfrak{f}_2(\tau), \tag{5.12}$$

[2]其中 $\zeta_{24} = e^{\frac{2\pi i}{24}}$ ，因此我们有

$$\mathfrak{f}_2(\tau+1)^8 = e^{\frac{2\pi i}{3}}\mathfrak{f}_2(\tau)^8. \tag{5.13}$$

我们立即得到以下关系

$$\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau) = \frac{16}{\mathfrak{f}_2(\tau)^8}. \tag{5.14}$$

这个恒等式重现了在 T中指出的行为5.9。因此，从韦伯函数的角度看， T 下的 3 阶乘子不过是在说明缺陷配分函数与 $\mathfrak{f}_2^{-8}$成正比，而 $\mathfrak{f}_2$ 本身在 24th 下具有一个根乘子T。另一个有趣之处在于， $\mathfrak{f}_2$ 是 $\Gamma(24)$ 的模函数。现在考虑 2 级的弗里克 involution，它写作

$$W_2 : \tau \mapsto -\frac{1}{2\tau}. \tag{5.15}$$

利用 $\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\eta(\tau)$，可得

$$\mathfrak{f}_2(W_2\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{f}_2(\tau)}, \tag{5.16}$$

因此，缺陷配分函数经过变换后仅发生简单的求逆

$$\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(W_2\tau) = \frac{16}{\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau)}. \tag{5.17}$$

因此，弗里克 involution W_2 通过 $\mathcal{Z} \mapsto \frac{16}{\mathcal{Z}}$ 交换两个尖点。虽然 5.7 本身并非弗里克不变，但这一观察立即给出了以下规范的、经过弗里克补全的缺陷可观测量

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\text{Fr}}(\tau) \equiv& \mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau) + \frac{16}{\mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau)} = \frac{16}{\mathfrak{f}_2(\tau)^8} + \mathfrak{f}_2(\tau)^8 \\ =& q^{-\frac{1}{3}}\left(1 + 16q^{\frac{2}{3}} - 8q + 128q^{\frac{5}{3}} + 28q^2 + 576q^{\frac{8}{3}} - 64q^3 + 2048q^{\frac{11}{3}} + \dots\right),\end{aligned} \tag{5.18}$$

其性质为

$$\mathcal{Z}_{\text{Fr}}(W_2\tau) = \mathcal{Z}_{\text{Fr}}(\tau). \tag{5.19}$$

从缺陷的角度来看，这是一个精确的模对偶陈述。弗里克 involution 虽然不会使缺陷配分函数保持不变，但它会通过一种受控的求逆作用，交换作为尖点的渐近区域。因此，弗里克补全缺陷配分函数 $\mathcal{Z}_{\text{Fr}}$ 是一个自然的对象，可与弗里克扩张同余群 $\Gamma_0^+(N) \equiv \Gamma_0(N) \cup \Gamma_0(N)W_N$以及近期有理共形场论文献中的弗里克型模线性微分方程特征标构造 [15, 16]进行比较。具体而言，弗里克补全会生成一个 $\Gamma_0^+(2)$不变对象，它由一个 η 商与其弗里克像配对而成。例如， $\Gamma_0(2)$的主模定义如下

$$j_2(\tau) \equiv \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^{24} = \mathcal{Z}^{E_8,(B_{1,1};\psi)}(\tau)^3. \tag{5.20}$$

现在请注意， $j_2(\tau)$具有平凡的 T乘子，因为我们通过立方消去了三阶相位。弗里克 involution 的作用为 $j_2(\tau) \leftrightarrow \frac{2^{12}}{j_2\ \tau}$ 因此，弗里克不变组合就是两者之和

$$j_2(\tau) + \frac{2^{12}}{j_2(\tau)}. \tag{5.21}$$

最后，我们还注意到存在如下关系

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{Fr}}(\tau)^3 - \frac{48}{\mathcal{Z}_{\mathrm{Fr}}(\tau)^3} = j_{2^+}(\tau) - 128, \tag{5.22}$$

其中 $j_{2^+}(\tau)$ 是 $\Gamma_0^+(2)$ [15]的主模。

5.2 $(D_{2,\ 1},\ D_{6,\ 1})$

我们考虑一个中心荷为 $(c, \widetilde{c}) = (2, 6)$ 的交换子对，因此，我们由此对构造

$$\chi^{E_8} = \chi_0^{D_2}\chi_0^{D_6} + \chi_{\frac{1}{2}}^{D_2}\chi_{\frac{1}{2}}^{D_6} + 2\chi_{\frac{1}{4}}^{D_2}\chi_{\frac{3}{4}}^{D_6}. \tag{5.23}$$

我们考虑的缺陷对应于中心荷较低的理论，即 $D_{2,1}$。$D_{2,1}$不过是两个半子范畴的副本，其任意子类型为 $\{1, s\}$ in [74] （见 5.3.1），具有非平凡初级场 $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\mathbf{1}, \nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}$，其中 $\mathbb{1} = (\mathbf{1},\mathbf{1})$ $\nu = (s, s)$ $\sigma = (s, 1)$ $\widetilde{\sigma} = (\mathbf{1}, s)$，共形权重为 $h = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$。相应的 S-矩阵为

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

现在，我们构造 Verlinde 线，并考察它们对初级场的作用。我们有

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{L}}_0|\phi_i\rangle = |\phi_i\rangle, \\ &\widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_1\rangle = -|\phi_1\rangle,\ \ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_2\rangle = |\phi_2\rangle, \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_3\rangle = -|\phi_3\rangle, \\ &\widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_2\rangle = -|\phi_2\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_3\rangle = -|\phi_3\rangle, \\ &\widehat{\mathcal{L}}_3|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle, \widehat{\mathcal{L}}_3|\phi_1\rangle = -|\phi_1\rangle, \widehat{\mathcal{L}}_3|\phi_2\rangle = -|\phi_2\rangle, \widehat{\mathcal{L}}_3|\phi_3\rangle = |\phi_3\rangle. \end{aligned} \tag{5.25}$$

$\widehat{\ }$由此我们观察到 $\mathcal{L}_0$ 是平凡线，即恒等线。在这里，我们注意到所有 $\widehat{\ }$ 线都是可逆的，因为不存在能湮灭态 $\mathcal{L}_i$ 的算符 $|\phi_j\rangle$。两个主 σ和 $\widetilde{\sigma}$具有相同的亏格一特征标；我们将这个共同的特征标记为 χ_1，因此 $|\chi_1|^{@_{4\,4}}$

在下文中出现的重数为 2。空间圈缺陷配分函数可求得为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{\mathbb{1}} =&|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{1}{2}}|^2+2|\chi_{\frac{1}{4}}|^2,\\ \mathcal{Z}^{\nu} =&|\chi_0|^2-|\chi_{\frac{1}{2}}|^2,\\ \mathcal{Z}^{\sigma} =&|\chi_0|^2-|\chi_{\frac{1}{2}}|^2,\\ \mathcal{Z}^{\widetilde{\sigma}} =&|\chi_0|^2+|\chi_{\frac{1}{2}}|^2-2|\chi_{\frac{1}{4}}|^2.\end{aligned} \tag{5.26}$$

从Verlinde算子可以看出,

$$\widehat{\mathcal{L}}_i^2=\widehat{\mathcal{L}}_0,\quad \widehat{\mathcal{L}}_1\widehat{\mathcal{L}}_2=\widehat{\mathcal{L}}_3. \tag{5.27}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$所有三行 ν, σ, $\widetilde{\sigma}$ 分别对应算符 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ 且均可逆。进行替换后，我们得到

$$\mathcal{Z}^{E_8,(D_{2,1};\nu)}=\chi_0^{D_2}\chi_0^{D_6}+\chi_{\frac{1}{2}}^{D_2}\chi_{\frac{1}{2}}^{D_6}-2\chi_{\frac{1}{4}}^{D_2}\chi_{\frac{3}{4}}^{D_6}. \tag{5.28}$$

将特征标的模形式表达式代入后，我们得到

$$\mathcal{Z}^{E_8,(D_{2,1};\nu)}=\left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^8, \tag{5.29}$$

这与我们在 5.7 中得到的缺陷配分函数完全相同。

5.3 $\left(\mathbf{III}_2,\ G_2^{\otimes 2},\ _1\right)$

5.3.1 单流扩张 $\mathcal{E}_3[A_{1,8}]$ 与 $\mathbf{III}_2$ 特征标的出现

理论 $\mathbf{III}_2$ 通过扩张 $\mathcal{E}_3[A_{1,8}]$ 构造而成，其中该记号表示我们对 $A_{1,8}$ 理论进行手征代数扩张，使所得有理共形场论恰好具有三个不可约特征标。这不同于未扩张的 $A_{1,8}$ 理论；后者具有由 $\ell=0,1,\ldots,8$ 标记的九个可积最高权模，因而有九个独立的 Kac-Weyl 特征标 $\chi_\ell^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}$。该扩张由 $A_{1,8}$ 中的一个整数自旋简单流实现。对于 $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$，标记为 ℓ 的可积表示的共形权重为

$$h_\ell=\frac{\ell(\ell+2)}{4(k+2)},\qquad \ell=0,1,\ldots,k. \tag{5.30}$$

将 $k=8$特化后，我们发现表示 $\ell=8$, $h_8=2\in\mathbb{Z}$具有整数共形自旋。因此，它是一个简单流，与之融合会置换这些可积表示。扩张手征代数的真空扇区同时包含原始真空和$\ell=8$ 模

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}_{\text{ext}}}\cong\mathcal{H}_{\ell=0}\oplus\mathcal{H}_{\ell=8}. \tag{5.31}$$

在特征标层面，迹对直和的可加性立即表明，扩张理论的真空特征标是以下真空轨道 $I=\{0,8\}$的轨道和

$$\chi_0(\tau)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}_{\rm ext}}}q^{L_0-\frac{c}{24}}=\sum_{\ell\in I}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\ell}q^{L_0-\frac{c}{24}}=\sum_{\ell\in I}\chi_\ell(\tau), \tag{5.32}$$

其中 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_{\rm ext}}=\bigoplus_{\ell\in I}\mathcal{H}_\ell$，或简写为

$$\chi_0(\tau)=\chi_{\ell=0}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}(\tau)+\chi_{\ell=8}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}(\tau). \tag{5.33}$$

令 J 表示与 $\ell=8$对应的简单流。现在， J 的融合对可积权的作用为

$$J:\ell\mapsto 8-\ell, \tag{5.34}$$

因此，$A_{1,8}$ 的九个初级场分解为以下轨道

$$\{0,8\},\qquad\{1,7\},\qquad\{2,6\},\qquad\{3,5\},\qquad\{4\}. \tag{5.35}$$

通过 J进行扩张后，由 J 的作用联系起来的态成为扩张代数的同一个不可约模的一部分，因此，扩张特征标自然是对 J-轨道求和。此外，只有那些相对于扩张手征代数满足局域性的 $A_{1,8}$ 模才能作为该扩张的未扭曲模保留下来。对于我们所考虑的扩张，为得到 $\mathbf{III}_2$, ，此局域性条件恰好筛选出偶数 ℓ扇区，因此，在轨道 5.35中，允许的轨道为

$$\{0,8\},\qquad\{2,6\},\qquad\{4\}, \tag{5.36}$$

而奇数-ℓ 轨道 $\{1,7\}$ 和 $\{3,5\}$ 则从未扭曲谱中投影出去。等价地，未扭曲模是单值化荷 $Q_J(\ell)=h_\ell+h_J-h_{J\ell}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1)$ 为零的那些模；在这里，这一条件筛选出 ℓ。结果是扩张代数的三个不可约模，其$A_{1,8}\cong\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8$ 特征标为 [83]

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}_0^{\mathbf{III}_2}&=\chi_{\ell=0}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}+\chi_{\ell=8}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8},\\ \widetilde{\chi}_{\frac{1}{5}}^{\mathbf{III}_2}&=\chi_{\ell=2}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}+\chi_{\ell=6}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8},\\ \widetilde{\chi}_{\frac{3}{5}}^{\mathbf{III}_2}&=\chi_{\ell=4}^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8},\end{aligned} \tag{5.37}$$

其中

$$\chi_\ell^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k}(\tau)=\frac{q^{\frac{(2\ell+1)^2}{4(k+2)}}}{\eta(\tau)^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[2\ell+1+2n(k+2)\right]q^{n[2\ell+1+n(k+2)]}. \tag{5.38}$$

计算不同 ℓ的 q级数展开，我们得到[7]

$$\begin{aligned}
\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}_{\ell=0} =& q^{-\frac{1}{10}}\left(1+3q+9q^2+22q^3+51q^4+\ldots\right),\\
\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}_{\ell=2} =& q^{\frac{1}{10}}\left(3+9q+27q^2+66q^3+153q^4+\ldots\right),\\
\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}_{\ell=4} =& q^{\frac{1}{2}}\left(5+15q+45q^2+110q^3+255q^4+\ldots\right),\\
\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}_{\ell=6} =& q^{\frac{11}{10}}\left(7+21q+63q^2+141q^3+318q^4+\ldots\right),\\
\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}_{\ell=8} =& q^{\frac{19}{10}}\left(9+16q+48q^2+99q^3+217q^4+\ldots\right).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Us将其代入 5.37，我们发现$\mathbf{III}_2$ 特征标具有如下 q级数展开 s

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}^{\mathbf{III}_2}_{0}(\tau) =& q^{-\frac{1}{10}}\left(1+3q+18q^2+38q^3+99q^4+\ldots\right),\\
\widetilde{\chi}^{\mathbf{III}_2}_{\frac{1}{5}}(\tau) =& q^{\frac{1}{10}}\left(3+16q+48q^2+129q^3+294q^4+\ldots\right),\\
\widetilde{\chi}^{\mathbf{III}_2}_{\frac{3}{5}}(\tau) =& q^{\frac{1}{2}}\left(5+15q+45q^2+110q^3+255q^4+\ldots\right).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

从这些展开式可以立即看出，真空模含有 3 个权一流，与 $\dim(\mathfrak{su}(2)) = 3$ 相符。其他主场的基态简并度分别为 3 和 5，自然与 $\mathfrak{su}(2)$ 的自旋1和自旋2表示 **3** 和 **5** 相符，正如A.34 和 A.35 中所述。接下来，对于 $G_{2,\ 1}$，我们利用这样一个事实：其特征标分解可以用 $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_3 \times \widehat{\mathfrak{u}}(1)_2$ 特征标表示如下 [83]

$$\begin{aligned}
\chi^{G_{2,1}}_{0} =& \chi^{\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2}_{0}\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_3}_{\ell=0} + \chi^{\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2}_{1}\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_3}_{\ell=3},\\
\chi^{G_{2,1}}_{\frac{2}{5}} =& \chi^{\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2}_{1}\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_3}_{\ell=1} + \chi^{\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2}_{0}\chi^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_3}_{\ell=2},
\end{aligned} \tag{5.41}$$

其中， $\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2$ 特征标为

$$\begin{aligned}
\chi^{\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2}_{0}(\tau) =& \left(\frac{\theta_3}{\eta}\right)(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}\left(1+3q+4q^2+7q^3+13q^4+\ldots\right)\\
\chi^{\widehat{\mathfrak{u}}(1)_2}_{1}(\tau) =& \left(\frac{\theta_2}{\eta}\right)(\tau) = q^{\frac{1}{12}}\left(2+2q+6q^2+8q^3+14q^4+\ldots\right).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

将其代入 5.41，我们得到以下 q级数展开

$$\begin{aligned}
\chi^{G_{2,1}}_{0}(\tau) =& q^{-\frac{7}{60}}\left(1+14q+42q^2+140q^3+350q^4+\ldots\right),\\
\chi^{G_{2,1}}_{\frac{2}{5}}(\tau) =& q^{\frac{17}{60}}\left(7+34q+119q^2+322q^3+819q^4+\ldots\right).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

这里，我们发现真空模在权一处有 14 个流，与 $\dim(G_2) = 14$ 相符；对于非平凡初级场，我们发现其基态简并度为 7，与维数相符

[7]我们 n 请注意，在 [83], 中，这些表达式是相对于 $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 给出的，但按照我们的约定， $\ell = 2j$

基本表示。由这些特征标，我们现在可以定义权重为 $\{0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ 的三个轨道求和张量特征，如下所示

$$\begin{aligned}
\chi_0^{G_{2,1}^{\otimes 2}}(\tau) &= \left(\chi_0^{G_{2,1}}\right)^2(\tau), \\
\chi_{\frac{2}{5}}^{G_{2,1}^{\otimes 2}}(\tau) &= 2\left(\chi_0^{G_{2,1}}\chi_{\frac{2}{5}}^{G_{2,1}}\right)(\tau), \\
\chi_{\frac{4}{5}}^{G_{2,1}^{\otimes 2}}(\tau) &= \left(\chi_{\frac{2}{5}}^{G_{2,1}}\right)^2(\tau).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

我们考虑一个中心荷为 $(c,\ \tilde{c}) = (\frac{12}{5},\ \frac{28}{5})$，因此，利用5.44和5.37，我们构造

$$\chi^{E_8} = \tilde{\chi}_0^{\mathbf{III}_2}\chi_0^{G_2^{\otimes 2}} + \tilde{\chi}_{\frac{1}{5}}^{\mathbf{III}_2}\chi_{\frac{4}{5}}^{G_2^{\otimes 2}} + \tilde{\chi}_{\frac{3}{5}}^{\mathbf{III}_2}\chi_{\frac{2}{5}}^{G_2^{\otimes 2}}. \tag{5.45}$$

真空部分的贡献为

$$\tilde{\chi}_0^{\mathbf{III}_2}\chi_0^{G_2^{\otimes 2}} = q^{-\frac{1}{3}}\left(1 + (3+28)q + \ldots\right), \tag{5.46}$$

其中贡献了 $3+28=31$ 个权一态，分解为 $14+14=28$，来源于 $G_{2,1}^{\otimes}$ 的真空张量积特征。因此，我们得到 $31 = 14+14+3$，以及真空模的如下分支规则

$$(\mathbf{14},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{14},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3}). \tag{5.47}$$

接下来，由 $\tilde{\chi}_1^{\mathbf{III}_2}\chi_4^{G_{2,1}^{\otimes 2}}$，我们得到5.5

$$\chi_{\frac{1}{5}}^{\mathbf{III}_2}\chi_{\frac{4}{5}}^{G_{2,1}^{\otimes 2}} = q^{-\frac{1}{3}}\left(147q + 2212q^2 + \ldots\right), \tag{5.48}$$

其中 $147 = 3\times 49 = 3\times(7\cdot 7)$，这正是维数（$\mathbf{7}$，$\mathbf{7}$，$\mathbf{3}$）。最后，$\tilde{\chi}_3^{\mathbf{III}_2}\chi_2^{G_{2,1}^{\otimes 2}}$ 的贡献为5.5

$$\tilde{\chi}_{\frac{3}{5}}^{\mathbf{III}_2}\chi_{\frac{2}{5}}^{G_{2,1}^{\otimes 2}} = q^{-\frac{1}{3}}\left(70q + 1530q^2 + \ldots\right), \tag{5.49}$$

其中 $70 = 5\times 14 = 5\times(7+7)$，这与 $(\mathbf{7},\mathbf{1},\mathbf{5}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{7},\mathbf{5})$ 相符。将所有权一贡献合并起来，我们得到 $31+147+70 = 248$，而该分解恰好就是我们在 A.36 中找到的分支。

5.3.2 对易子对的模张量范畴

接下来，我们讨论双线性配对 $\mathbf{III}^2 \otimes G_2^{\otimes 2}{}_{,1} \to E_{8,1}$ 背后的模张量范畴内容。我们首先确定中心荷较低的因子 $\mathbf{III}_2$，所对应的模张量范畴，然后精确解释为何 $G_2^{\otimes 2}{}_{,1}$ 是 Fib^2，平方斐波那契模张量范畴；与此同时，相关的手征数据自然地组织成三个特征标，但对应四个初级场。

令 $\mathcal{C}_{G_{2,1}} = \mathrm{Rep}(G_{2,1})$ 表示与有理顶点算子代数 $G_{2,1}$相关联的酉模张量范畴。它也称为 $\widehat{\mathfrak{g}}_2$ WZW模型 所产生的 1 级可积最高权G_2 模的辫带范畴。该理论恰有两个初级场，$I_{\mathcal{C}_{G_{2,1}}} = \{\mathbb{1}, \tau\}$，它们的共形权重分别为 $\{0, \frac{2}{5}\}$。此外，非平凡初级场满足斐波那契融合规则

$$\tau \otimes \tau = \mathbb{1} \oplus \tau. \tag{5.50}$$

$G_{2,1}$ 的秩二模数据与斐波那契酉模张量范畴 [85] 相同。因此，我们只需有

$$\mathcal{C}_{G_{2,1}} \simeq \mathrm{Fib}, \tag{5.51}$$

其中 Fib 表示秩为 2、融合为 5.50 的酉斐波那契模张量范畴。在手征代数层面，我们取张量积顶点算子代数$G_2^{\otimes 2}{}_{1,}$。根据张量积顶点算子代数的一般结果，其表示范畴等价于各个因子的表示范畴的 Deligne张量积 [86]

$$\mathrm{Rep}\left(G_{2,1}^{\otimes 2}\right) \simeq \mathrm{Rep}\left(G_{2,1}\right) \boxtimes \mathrm{Rep}\left(G_{2,1}\right). \tag{5.52}$$

因此，结合5.51，最终得到

$$\mathrm{Rep}\left(G_{2,1}^{\otimes 2}\right) \simeq \mathrm{Fib} \boxtimes \mathrm{Fib}. \tag{5.53}$$

作为一个手征有理共形场论，$G_2^{\otimes 2}{}_{,\ 1}$ 有四个初级场，对应于以下各对

$$(\mathbb{1}, \mathbb{1}), \qquad (\mathbb{1}, \tau), \qquad (\tau, \mathbb{1}), \qquad (\tau, \tau). \tag{5.54}$$

然而，相关的环面特征标存在意外简并，因为以下两个因子完全相同

$$\chi_{(\mathbb{1},\tau)} = \chi_{\mathbb{1}}\chi_{\tau} = \chi_{\tau}\chi_{\mathbb{1}} = \chi_{(\tau,\mathbb{1})}. \tag{5.55}$$

因此，尽管有四个初级场，却只有三个不同的特征标。我们选取真空-真空特征标 $\chi^{(2)} \equiv \chi_{\mathbb{1}}\chi_{\mathbb{1}}$ 和混合扇区特征标 $\chi_1^{(2)} \equiv$

$\chi_1\chi_\tau = \chi_\tau\chi_1$，以及非平凡的配对特征[8] $\chi_2^{(2)} \equiv \chi_\tau\chi_\tau$。设 $U \subseteq A$为一个顶点子代数，并令 $V \equiv \mathsf{Com}_A(U)$ 表示它的对易子。那么，如 [87], 所示，由出现在 A中的 U-模生成的 $\mathsf{Rep}(U)$ 的张量子范畴，与由相应的 V-模生成的 $\mathsf{Rep}(V)$ 的张量子范畴之间存在辫反转张量等价，亦即镜像等价。将此应用于我们的嵌入，可得$\mathcal{C}_{\mathbf{III}_2}$ 是 $\mathcal{C}_{G_{2,\ 1}}$的带状反向。具体而言，若 $\mathcal{C}$ 表示由 $\mathcal{C}$ 通过反转编织和扭曲（记作 rev）得到的模范畴，则有

$$\mathcal{C}_{\mathbf{III}_2} \simeq \overline{\mathcal{C}_{G_{2,1}^{\otimes 2}}}, \qquad \mathrm{Rep}(\mathbf{III}_2) \simeq (\mathrm{Fib} \boxtimes \mathrm{Fib})^{\mathrm{rev}}\,. \tag{5.56}$$

从 5.50中，我们注意到不存在任何可逆简单对象，因此皮卡群是平凡的

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{III}_2) \cong 1. \tag{5.57}$$

此外，5.52 中描述的 $\mathsf{Rep}\left(G_{2,1}^{\otimes 2}\right)$ 具有平凡的皮卡群，因此不存在非平凡的可逆简单对象；根据镜像等价性，$\mathbf{III}_2$也同样如此。这是一个强有力的结构约束，因为平凡的皮卡群意味着不存在 $\mathbb{Z}_n$ 简单流缺陷，也不存在基于可逆线的标准类群替代规则，正如我们将在下一小节中很快看到的那样。最后，我们注意到，尽管不存在任何可逆线，但该理论仍然具有量子维数为非整数的拓扑线。在 $\mathsf{Fib}^{\boxtimes 2}$中，四个初级场可以看作是具有量子维数[9] $1, \varphi, \varphi, \varphi^2$的成对对象5.54，其中 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$是黄金比例。这些是真正的拓扑线算符，但只有 $(1,1)$ 是可逆的。

5.3.3 缺陷配分函数

我们考虑的缺陷对应较低的中心荷，即 $\mathbf{III}_2$。为求出相应的S-矩阵，我们参考附录D中概述的步骤。代入 $c = \frac{12}{5}$ 对应于 $\mathbf{III}_2$ 且 $(h_1,\ h_2) = \left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$，得到

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{1}{10}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{10}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ \mu_1 &= \frac{59}{225}, \quad \nu_1 = \frac{49}{25}, \\ a &= -\frac{3}{10}, \quad g = \frac{2}{5}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

[8]这个特征标对应于两个不等价的单对象（$\mathbb{1}$，τ）和（τ，$\mathbb{1}$），它们具有相同的特征标。用 [43], 的语言来说，这对应于由三个特征标构成的模不变量中出现的重数对（d_1，d_2）所体现的同一现象。[9]量子维数满足 $d_{X\otimes Y} = d_X d_Y$且 $d_{X\oplus Y} = d_X + d_Y$，因此根据融合规则 5.50，我们有$d_\tau^2 = d_{\mathbb{1}} + d_\tau = 1 + d_\tau$，解得 $d_\tau = \varphi$。由于维数在 Deligne积 $\mathsf{Fib}^{\boxtimes 2}$下相乘，我们得到维数 $\{1, \varphi, \varphi, \varphi^2\}$。

由此，我们得到以下 S-矩阵

$$S=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-5}{2} & \frac{\sqrt{5}+5}{2} & 2\\ \frac{\sqrt{5}+5}{2} & \frac{\sqrt{5}-5}{2} & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}, \tag{5.59}$$

其中我们使用了 $(n_1,n_2)=(3,5)$，来自 [43]。注意，代入 $\widetilde{c}=\frac{28}{5}$，对应于 $G_{2,1}^{\otimes 2}$ 且 $(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_0=&-\frac{7}{30},\quad \alpha_1=\frac{17}{30},\quad \alpha_2=\frac{1}{6},\\ \mu_1=&-\frac{119}{225},\quad \nu_1=\frac{127}{75},\\ a=&\frac{3}{10},\quad g=-\frac{12}{5},\end{aligned} \tag{5.60}$$

利用这些系数进行计算，得到完全相同的 S-矩阵，只不过现在 $(n_1,n_2)=(4,9,7)$。现在，我们构造 Verlinde 线，并考察它们对初级场的作用。我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}_0|\phi_i\rangle=&|\phi_i\rangle,\\ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_0\rangle=&\alpha|\phi_0\rangle,\qquad \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_1\rangle=\frac{1}{\alpha}|\phi_1\rangle,\qquad \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_2\rangle=-|\phi_2\rangle,\\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_0\rangle=&\frac{1}{\varphi-3}|\phi_0\rangle,\quad \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_1\rangle=-\frac{1}{\varphi\sqrt{5}}|\phi_1\rangle,\quad \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_2\rangle=\frac{1}{2}|\phi_2\rangle,\end{aligned} \tag{5.61}$$

其中 $\alpha=\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}-5}=-(1+\varphi)$。由此可见，$\widehat{\mathcal{L}}_0$ 是平凡线，也就是恒等线。这里，所有非平凡线都不可逆。利用 5.4，空间圈缺陷配分函数为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{\mathbb{1}}=&|\chi_0|^2+|\chi_1|^2+|\chi_2|^2,\\ \mathcal{Z}^{\widehat{\mathcal{L}}_1}=&\alpha|\chi_0|^2+\frac{1}{\alpha}|\chi_1|^2-|\chi_2|^2,\\ \mathcal{Z}^{\widehat{\mathcal{L}}_2}=&\frac{2}{\sqrt{5}-5}|\chi_0|^2-\frac{2}{\sqrt{5}+5}|\chi_1|^2+\frac{1}{2}|\chi_2|^2.\end{aligned} \tag{5.62}$$

从范畴的角度来看，这正是我们应当预期的，因为 Fib 没有非平凡的可逆对象，因此 $\mathrm{Fib}^{\boxtimes 2}$ 也只有平凡的可逆对象。由镜像等价可知，$\mathbf{III}_2$也同样如此。相关的 $\mathbb{Z}_2$ 缺陷 g 是置换缺陷，它交换位于 $\ell=4$ 之上的两个初级场；这些不动点来自 $A_{1,8}$ 单流扩张。我们将共享 χ_2 特征标的两个初级场记为 ϕ_3^+ 和 ϕ_3^-，其特征标 $\chi_{\frac{3}{5},\pm}^{\mathbf{III}_2}$ 满足 $\chi_{\frac{3}{5},\pm}^{\mathbf{III}_2}=\chi_{\frac{3}{5}}^{\mathbf{III}_2}$。于是，$\mathbb{Z}_2$ 置换缺陷可写为

$$g:\phi_{\frac{3}{5}}^+\leftrightarrow\phi_{\frac{3}{5}}^-,\qquad \phi_0\mapsto\phi_0,\qquad \phi_{\frac{1}{5}}\mapsto\phi_{\frac{1}{5}}. \tag{5.63}$$

现在，我们可以将所得的交换缺陷配分函数表示如下

$$\mathcal{Z}^g = \left|\chi_0^{\mathbf{III}_2}\right|^2 + \left|\chi_{\frac{1}{5}}^{\mathbf{III}_2}\right|^2 + 2\left|\chi_{\frac{3}{5}}^{\mathbf{III}_2}\right|^2. \tag{5.64}$$

我们在此指出，在双线性替换规则中不会发生任何变化，因为$\mathbf{III}_2$ 的置换对称性不可见。然而，这个置换配分函数值得分析。用模形式表示，可将其简化为

$$\mathcal{Z}^g(\tau,\overline{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^6}\left(|\Theta'_{1,10}+\Theta'_{9,10}|^2 + |\Theta'_{3,10}+\Theta'_{7,10}|^2 + 2|\Theta'_{5,10}|^2\right), \tag{5.65}$$

其中，我们将 $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8$ 特征标表示为

$$\chi_\ell^{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_8}(\tau) = \left(\frac{\Theta'_{\ell+1,10}}{\eta^3}\right),(\tau) \tag{5.66}$$

其中，我们定义了 theta 导数和

$$\Theta'_{r,10}(\tau) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}}(20n+r)q^{\frac{(20n+r)^2}{40}}, \qquad r\in\mathbb{Z}. \tag{5.67}$$

用扭曲缠绕记号表示这个配分函数，可得 $Z\left[\begin{smallmatrix}e\\g\end{smallmatrix}\right]$，其中 g沿空间周期插入，而时间边界条件保持不扭曲。在 $\gamma\in\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in$SL(2,Z) 作用下，边界条件变换如下 [68, 68]

$$(g,h)\mapsto(h^c g^d, h^a g^b). \tag{5.68}$$

因此，从 (g,e) 出发，最终得到 (g^d,g^b)。现在，为了保持扇区 (g,e)，我们要求 $g^b=e$；由于 g 的阶为 2，这恰好就是条件 $b\equiv 0$ (模 2)。此外，由于 det $\gamma = ad-bc = 1$ 和 b 为偶数，因此 d 为奇数，且有 $g^d=g$。所以，只要 $b\equiv 0$ (模 2)，空间扭曲就会自动保持不变。因此，不变子群为

$$\Gamma^0(2) \equiv \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) | b\equiv 0 \pmod 2\right\}. \tag{5.69}$$

因此，置换缺陷配分函数 $\mathcal{Z}^g(\tau,\ \tau)$ 在同余子群 $\Gamma^0(2)$ 下保持不变。 S-变换交换各周，即将空间缺陷振幅映射为相应的时间孪生缺陷振幅 $(g,\ e)\ \mapsto(e,\ g^{-1})\ =(e,\ g)$。$T$-变换将 $(g,\ e)$ 映射为 $\mapsto(g,\ g)$，因此与子群论证完全吻合。

5.4 $\left(A_{2,1}^{\otimes 2}, A_{2,1}^{\otimes 2}\right)$

我们考虑一个中心荷为 $(c,\ \widetilde{c})\ =(4,\ 4)$ 的交换子对，并由此构造

$$\chi^{E_8} = \chi_0^{A_2^{\otimes 2}}\chi_0^{A_2^{\otimes 2}} + \chi_{\frac{1}{3}}^{A_2^{\otimes 2}}\chi_{\frac{2}{3}}^{A_2^{\otimes 2}} + \chi_{\frac{2}{3}}^{A_2^{\otimes 2}}\chi_{\frac{1}{3}}^{A_2^{\otimes 2}}. \tag{5.70}$$

我们考虑的缺陷对应于 $A_{2\,1,\circ}^{\otimes 2}$。代入 $c=4$，并取 $(h_1,h_2)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，得到

$$\begin{aligned} \alpha_0 =& -\frac{1}{6},\quad \alpha_1 = \frac{1}{6},\quad \alpha_2 = \frac{1}{2},\\ \mu_1 =& \frac{1}{3},\quad \nu_1 = \frac{17}{9},\\ a =& -\frac{1}{6},\quad g = 0. \end{aligned} \tag{5.71}$$

由此，我们得到如下 S-矩阵

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.72}$$

其中我们使用了 $(n_1,n_2)\ =(3,9)$ 来自 [43]。现在，我们构造 Verlinde 线，并考察它们对初级场的作用。我们有

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_0|\phi_i\rangle =& |\phi_i\rangle,\\ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_0\rangle =& |\phi_0\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_1\rangle = \frac{1}{4}|\phi_1\rangle,\quad \widehat{\mathcal{L}}_1|\phi_2\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_2\rangle,\\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_0\rangle =& |\phi_0\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_1\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_1\rangle,\ \widehat{\mathcal{L}}_2|\phi_2\rangle = \frac{1}{4}|\phi_2\rangle, \end{aligned} \tag{5.73}$$

对于 $A_{2,1}\cong\widehat{\mathfrak{su}}(3)_1$，，三个主场的量子维数都为一，并满足以下融合规则

$$\begin{aligned} \phi_1\otimes\phi_1 =& \phi_2,\\ \phi_1\otimes\phi_2 =& \phi_0,\\ \phi_2\otimes\phi_2 =& \phi_1. \end{aligned} \tag{5.74}$$

每个主场都是可逆的，简单流群与全部主场构成的集合一致。因此，$A_{2,1}$ 的皮卡群为

$$\mathrm{Pic}\left(A_{2,1}\right)\cong\mathbb{Z}_3. \tag{5.75}$$

接下来，对于张量积理论 $A_{2\,1,}^{\otimes 2}$，我们用配对 (ϕ_a,ϕ_b) 标记初级场，其中 $a,b\in\{0,1,2\}$，并按分量定义融合如下

$$(\phi_a,\phi_b)\otimes(\phi_{a'},\phi_{b'}) = (\phi_a\otimes\phi_{a'},\phi_b\otimes\phi_{b'}). \tag{5.76}$$

由于每个因子中的所有初级场都是可逆的，乘积理论中的每个主场也都是可逆的。因此，皮卡群分解如下

$$\mathrm{Pic}\left(A_{2,1}^{\otimes 2}\right) \cong \mathbb{Z}_3^2. \tag{5.77}$$

一组方便的生成元可由简单流给出

$$g_1 = (\phi_1, \phi_0), \qquad g_2 = (\phi_0, \phi_1), \tag{5.78}$$

它们满足

$$g_1^3 = g_2^3 = \mathbb{1}, \qquad g_1 g_2 = g_2 g_1. \tag{5.79}$$

Pic($A_{2\,1,}^{\otimes 2}$) 中的每个元素都可以唯一地表示为 (ϕ_a, ϕ_b)，因此，皮卡群与该理论的全部简单流群重合。显然，张量积理论中不存在二阶（即 Z_2 ）可逆线，因为每条线的阶数都是 $\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}3$。为了求出缺陷配分函数的显式形式，我们首先将 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 视为两个对易生成元，它们的幂在赤道振幅上生成完整的 Z_3^2 缺陷族。具体而言，对于 $(m,n) \in \mathsf{Z}_3^2,$ ，我们定义缺陷算符

$$R_{m,n} \equiv \widehat{\mathcal{L}}_1^m \widehat{\mathcal{L}}_2^n, \tag{5.80}$$

它在三个分块上分别以以下特征值对角作用

$$\lambda_0(m,n) = 1, \qquad \lambda_1(m,n) = \left(\frac{1}{4}\right)^m \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \lambda_2(m,n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{4}\right)^n. \tag{5.81}$$

在左半球的时间周期上穿入 $R_{m,n}$ ，同时保持右半球不变，我们得到以下全纯缺陷振幅

$$\mathcal{Z}_{m,n}(\tau) = \chi_0(\tau)\chi_0(\tau) + \lambda_1(m,n)\chi_{\frac{1}{3}}(\tau)\chi_{\frac{2}{3}}(\tau) + \lambda_2(m,n)\chi_{\frac{2}{3}}(\tau)\chi_{\frac{1}{3}}(\tau), \tag{5.82}$$

其中特征标的定义见A.53。现在可以立即写出所有代表元，即恒等线 (0，0)、第一生成元 (1，0)、第二生成元 (0，1) 以及对角元 (1，1)。恒等线为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{0,0} =& \chi_0\chi_0 + \chi_{\frac{1}{3}}\chi_{\frac{2}{3}} + \chi_{\frac{2}{3}}\chi_{\frac{1}{3}} \\ =& \left(\frac{\Theta_0^4 + 12\Theta_0^2\Theta_1^2 + 8\Theta_0\Theta_1 + 6\Theta_1^4}{\eta^8}\right)(\tau) \\ =& \chi^{E_8}(\tau),\end{aligned} \tag{5.83}$$

其中 θ 级数的定义见A.54。其余缺陷配分函数为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{1,0} =&\chi_0\chi_0+\frac{1}{4}\chi_{\frac{1}{3}}\chi_{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}\chi_{\frac{2}{3}}\chi_{\frac{1}{3}},\\ \mathcal{Z}_{0,1} =&\chi_0\chi_0-\frac{1}{2}\chi_{\frac{1}{3}}\chi_{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}\chi_{\frac{2}{3}}\chi_{\frac{1}{3}},\\ \mathcal{Z}_{1,1} =&\chi_0\chi_0-\frac{1}{8}\chi_{\frac{1}{3}}\chi_{\frac{2}{3}}-\frac{1}{8}\chi_{\frac{2}{3}}\chi_{\frac{1}{3}}.\end{aligned} \tag{5.84}$$

这使得皮卡群 5.77 如何使赤道粘合发生形变变得完全具体。代入特征标的表达式，我们发现缺陷配分函数 5.84彼此相等，从而得到如下唯一的模形式表达式

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{E_8,(A_{2,1}^{\otimes 2};(m,n))}(\tau) =&\left(\frac{\Theta_0^4+3\Theta_0^2\Theta_1^2-\Theta_0\Theta_1^3+\frac{15}{4}\Theta_1^4}{\eta^8}\right)(\tau)\\ =&q^{-\frac{1}{3}}\left(1+27q^{\frac{2}{3}}+5q+\frac{1215}{4}q^{\frac{4}{3}}+594q^{\frac{5}{3}}-7q^2+\dots\right),\end{aligned} \tag{5.85}$$

对于 $(m,n)\neq(0,0)$。θ级数 $\Theta_{0,1}$ 是 Γ(3) 的模形式，因此

$$F(\tau)\equiv\left(\eta^8\mathcal{Z}^{E_8,(A_{2,1}^{\otimes 2};(m,n))}\right)(\tau), \tag{5.86}$$

是 Γ(3) 上的权为 4 的模形式。因此，我们有

$$\Gamma_{E_8,\left(A_{2,1}^{\otimes 2};(m,n)\right)}=\Gamma(3), \tag{5.87}$$

作为子群，在该子群作用下，对于 $(m,n)\neq(0,0)$ 的缺陷配分函数保持不变。 $\mathcal{Z}_{(m,n)}$ 对于 $(m,n)\neq(0,0)$ 仅在 Γ(3) 下保持不变，这意味着相应的拓扑缺陷线按 $\mathbb{Z}_3$ 分级，或者等价地说，它们在固定的非平凡平坦 $\mathbb{Z}_3$ 背景中定义了环面振幅。通过将 SL(2,Z) 作用写成 T: $(m,n)\mapsto(m,m+n)$ 模 3，以及 S: $(m,n)\mapsto(n,-m)$ 模 3，可以将其明确表示出来。因此，完整的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 映射类群通过置换缺陷扭曲扇区而非平凡地作用，而由 T^3 和 ST^3S^{-1} 生成的 Γ(3) 正是该作用的核。

6 结论与讨论

在这项工作中，我们构建了一个赤道投影 框架，通过交换子对获取有理共形场论中的拓扑缺陷数据。其核心思路是：不再直接进行高秩亚纯理论中往往难以处理的计算，而是转而对中心荷较低的因子中的特征标进行可控操作；在该因子中，模数据和缺陷本征值都可以明确计算。由此得到的赤道振幅，为拓扑线数据与全纯特征标技术搭建了具体桥梁，而后者本身就可自然获得

在有理共形场
论中。

首个概念性成果是，赤道投影原理明确揭示了缺陷插入在模变换下如何传递的确切含义。该框架并不假设缺陷算符与模数据彼此可交换，而是追踪模群对插入算符的共轭作用，从而清晰展现模协变性，并阐明半球上的对角Verlinde线插入如何在交叉通道中转化为融合操作。这一视角尤其适用于交换子对构造：这类构造具有一个指向母理论的典范双线性配对，因此自然产生一族在 SL(2，Z) 下封闭的单侧投影振幅。

以此为基础，我们给出了明确的轨形构造和分支规则计算，在$E_{8,\ 1}$中实现了一系列交换子对，并着重讨论至少一个因子属于 [22]的亚纯余集分类中的张量积共形场论的情形。这些例子提供了一种系统机制，用于构造缺陷配分函数，其模性质可直接作为模函数加以分析；同时，它们也具体展示了代数数据（如 Kac-Moody子代数、简单流扩张和融合规则）如何与格实现、自同构作用等几何约束相互作用。所得的缺陷可观测量表明，即使固定亚纯理论不变，不同的交换子分解也能揭示缺陷数据的不同扇区，并带来定性上新颖的模特征。贯穿我们三特征标配对示例的一个核心主题是，交换子对理念自然地延伸到了双特征标情形之外，而替换规则最初正是在双特征标情形中发展出来的。在三特征标情形下，模表示、从MMS构造 [41], 中提取的缺陷本征值，以及张量积示例中出现的特征标简并，带来了额外结构：缺陷族可能带有$\mathbb{Z}_n$分次，模协变性可能仅在同余子群上闭合，而置换型缺陷虽然无法通过朴素的双线性替换探测，却能通过精细的扭曲缠绕分析加以识别。交换子对视角能够高效地整理这些现象，因为它告诉我们应当分析哪些中心荷较低的理论，哪些缺陷扇区从范畴论角度看是自然的，以及如何在等变特征标层面实现这些插入算符。更广泛地说，交换子对框架对于在高秩亚纯共形场论中识别新颖的缺陷配分函数尤其有成效。随着中心荷增大，代数结构（如Kac-Moody流及其嵌入的组织方式）与几何结构（如格实现

以及其自同构群）之间的相互作用会变得愈发复杂。尤其在这一范围内，张量积型交换子对提供了一种自然的组织原则：它们给出受控的分解，使缺陷能够从较简单的因子引入，同时仍能探究母理论中真正的高秩现象。沿着这一思路，诸如 E_8 的格自同构群为替换规则提供了一种强有力的扩展机制。尽管 [1] 利用此类对称性，在双特征交换子对中构造了缺陷配分函数，但同一理念还可进一步推广到三特征标（以及更高特征标）配对，从而为构造尚未在中心荷为 $c = 16$、24、32及更高中心荷的亚纯理论中明确给出的缺陷可观测量打开了大门。

致谢

我们感谢 David Poland、Mikhail Isachenkov、Bowen Shi、Sunil Mukhi、Suresh Govind- rajan、Jishu Das、Timmavajjula Venkata Karthik 和 Igor Frenkel，与他们进行了多次深入而富有启发性的讨论；在本工作的整个发展过程中，他们也提出了许多建议。NU 还要感谢 Colin Coane、Evan Craft、Daniel Quenani、Ryan Everly、Ian Moult、Matthew Mitchell 和 Sri Tata，感谢他们进行了有益的交流，并在各个阶段为我们的想法提供了宝贵的反馈。NU 感谢 Gordon Rogelberg、Shankar Ganesh、Meng Cheng、Tony Liu、Brett Oertel 和 Nayan Myerson-Jain 早期的讨论与鼓励。NU 还感谢 Xingping Yang 在数学问题上的讨论，以及对模张量范畴文献所给予的深刻指导；也感谢 Karan Bhatia 参与讨论，并耐心解答有关模张量范畴的问题。感谢 Matthew Mitchell 和 Mark Gonzalez 帮助制作 TikZ 图像。最后，NU 感谢 Ana Karina Raygoza Cortez 与其进行讨论，并始终给予支持。NU 获得美国能源部项目 DE-SC0017660 的资助。AD 的工作获得英国科学技术设施理事会整合拨款 ST/T000600/1 的支持，项目名称为“希格斯中心的粒子理论”。

$\mathbf{E_{8,1}}$ 中交换子对的分支规则$E_{8,\ 1}$

分支规则是李代数的不可约表示在限制到子代数时的分解。当对称代数 $\mathfrak{g}$ 被限制到子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$时，每个 $\mathfrak{g}$-表示都会分解为 $\mathfrak{h}$-表示的直和。具体而言，若 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ 且 R 是一个 $\mathfrak{g}$-不可约表示，则

$$R_{\downarrow \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}'} \cong \bigoplus_{(\lambda,\lambda')} N^{R}_{\lambda,\lambda'}(\lambda,\lambda'), \tag{A.1}$$

其重数为$N_{\lambda,\ \lambda'}^{R}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。在WZW模型中，相关对象是仿射代数$\widehat{\mathfrak{g}}_k$。真空模 $\mathcal{H}_0^{\mathfrak{g}}$ 在仿射子代数 $\widehat{\mathfrak{h}}_{k_h}\oplus\widehat{\mathfrak{h}}'_{k_{h'}}$ 下的分解如下

$$\mathcal{H}_0^{\mathfrak{g}}\cong\bigoplus_{(\lambda,\lambda')}\mathcal{H}_\lambda^{\mathfrak{h}}\otimes\mathcal{H}_{\lambda'}^{\mathfrak{h}'},\tag{A.2}$$

而在特征标层面，这就变成了双线性恒等式

$$\chi_0^{\mathfrak{g}}(\tau)=\sum_{(\lambda,\lambda')}N_{\lambda,\lambda'}\chi_\lambda^{\mathfrak{h}}(\tau)\chi_{\lambda'}^{\mathfrak{h}'}(\tau),\tag{A.3}$$

其中$N_{\lambda,\ \lambda'}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示分支重数。在这里，我们将仿射代数$E_{8,\ 1}$限制到仿射代数 $\mathcal{A}\otimes A'\subset E_{8,\ 1}$，并将其视为一种共形嵌入。在构成 $c=8$ 故事基础的交换子对情形中，分支函数是常数，因此我们得到有限个有理共形场论特征标乘积之和。一旦特征标的双线性分解已知，我们便可以将$\chi_{E_{8,\ 1}}$中的系数解释为如下形式

$$\chi_{E_{8,1}}(\tau)=q^{-\frac{1}{3}}\left(1+248q+4124q^2+34752q^3+\ldots\right),\tag{A.4}$$

通过追踪每个仿射级上出现的表示。这正是 $\chi_{E_{8,\ 1}}$ 中 [1], 的双特征标分析所采用的逻辑。在那里，作者通过对 q-级数展开 A.4使用 E_8 伴随表示 **248** 在适当的极大子代数下的有限维分支，并将同样的模式提升到仿射特征标分解中。一个关键的概念要点是，系数 248 计算的是全纯理论中的权一流$\widehat{\quad}\qquad\widehat{\quad}$。因此，当我们将这些流限制到 $\mathfrak{h}_{k_h}\oplus\mathfrak{h}'_{k_{h'}}$时，它们会分解为每个因子的伴随流，以及非平凡（$\lambda,\ \lambda'$）扇区中的额外权一初级场，而这种分解由有限维 **248**的分支所支配。因此，**248** 的有限分支规则，是对真空模完整仿射分支的投影。

全纯$E_{8,1}$ WZW模型的真空模，在限制到作为互相对易因子出现的仿射代数时，只允许一组刚性的分解。设$\widetilde{\qquad\qquad\qquad\qquad}$我们有手征代数嵌入 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\subset E_{8,1}$，其中 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{A}$构成一对对易$\widetilde{\ }$，则 $E_{8,1}$ 真空表示分解为有限个 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$-模的直和。在亏格一情形下，这体现为如下形式的双线性特征标恒等式

$$\chi_{E_{8,1}}(\tau)=\sum_{i\in\ I_{\mathcal{A}}}\chi_i^{\mathcal{A}}(\tau)\widetilde{\chi}_{\phi(i)}^{\widetilde{\mathcal{A}}}(\tau),\tag{A.5}$$

其中 $\phi:\ I_{\mathcal{A}}\to I_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ 是粘合双射。如此一来，有限维 E_8表示对极大子代数的限制，便已能预示权一$\widetilde{\ }$态如何重组为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 的流，以及扩展

$\sim\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 至完整的$E_{8,\ 1}$代数。对于双特征交换子对，这一策略已在 [1], 中得到详细发展，作者从A.4 出发，通过将 E_8在子代数 $A_1 \oplus E_7$ 下的伴随表示分解来解释 248，如下所示

$$\mathbf{248} \to (\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{133}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{56}), \tag{A.6}$$

并且，他们对其他交换子对（例如 $A_2 \oplus E_6$、 $G_2 \oplus F_4$）也重复这一做法，随后将这些分解与以相应有理共形场论特征标表示的 $\chi_{E_{8,\ 1}}$ 的双线性恒等式对应起来。现在，我们的目标是将这一做法推广到三特征标交换子对。在这种情形下，特征标恒等式确定了哪些仿射模会出现，而有限分支规则则解释了为何 q 级数的系数会以这种方式对齐。因此，特征标双线性恒等式与有限分支规则相互印证。在本节中，我们将这一思路拓展到 $c = 8$ 景观中出现的三特征标交换子对。与双特征标情形相比，这些情况更为微妙，原因有二。首先，若干相关的手征理论，例如 $B_{r,\ 1}$、$\mathbf{III_2}$, , 以及诸如 $A_2^{\otimes 2}{}_{,\ 1}$ 这样的张量积构造，具有非平凡的简单流结构和／或非平凡的编织自等价群。因此，朴素的对角配对并非先验上唯一的可能性。其次，三特征标情形会出现真正的简并现象：不同的初级场可能具有相同的共形权重，甚至作为 q 级数展开时具有相同的亏格一特征标；因此，正确的分支必须在表示层面追踪这些标签，而不能只关注权重层面。我们得到了一组唯一且由表示论确定的分支规则，它们既能将 $\chi_{E_{8,\ 1}}$ 特征标重现为双线性和，也与**248** 的预期有限维分解相吻合。明确写出的分支规则在本文其余部分也发挥着结构性作用。本节将交换子对的分支规则一一确定下来，从而为追踪拓扑缺陷线在赤道投影上的作用搭建了具体的计算平台。

A.1 ($D_{2,1}$,$D_{6,1}$)

考虑由 $D_{r,1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(2r)_1$ 描述的 D-级 1 WZW模型。首先，对于 $D_{2,1}$，有限李代数 $\mathfrak{so}(4)$ 分解为 $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$，因为 Spin(4) $\cong$ SU(2) $\times$ SU(2)。在 1 级，对应的流代数也相应地分解

$$\widehat{\mathfrak{so}}(4)_1 \cong \widehat{\mathfrak{su}}(2)_1 \oplus \widehat{\mathfrak{su}}(2)_1, \tag{A.7}$$

各部分的级别相同，因为在此情形下嵌入的 Dynkin 指数为一。标准的极大群链为[10]

$$E_8 \supset \mathrm{Spin}(16) \supset \mathrm{Spin}(4) \times \mathrm{Spin}(12), \tag{A.8}$$

在 1 级时，我们有如下共形嵌入 [88]

$$E_{8,1} \supset D_{8,1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(16)_1, \tag{A.9}$$

在有限李代数层面，伴随表示按如下方式分支 [89]

$$\mathbf{248}_{\downarrow \mathfrak{so}(16)} = \mathbf{120} \oplus \mathbf{128}. \tag{A.10}$$

接下来，在 $\mathfrak{so}(16)$ 内，我们取 $\mathfrak{so}(16) \supset \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(12)$，这等价于陈述$D_8 \supset D_2 \oplus D_6$。为了确定这一分支，我们考察相应 WZW 特征标的显式 q-级数展开。对于该理论，$D_{2,\ 1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(4)_1$，，我们有初级场 $I_{D_{r,\ 1}} = \{\mathbb{1}, \nu, \sigma, \widetilde{\sigma}\}$，其共形权重为 $h = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$。$D_{2,\ 1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(4)_1$ 特征标的 q-级数展开为

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathbb{1}}^{D_2}(\tau) =& q^{-\frac{1}{12}} \left(1 + 6q + 17q^2 + 38q^3 + \ldots\right), \\
\chi_{\nu}^{D_2}(\tau) =& q^{-\frac{1}{12}} \left(4q^{\frac{1}{2}} + 8q^{\frac{3}{2}} + 28q^{\frac{5}{2}} + \ldots\right), \\
\chi_{\sigma}^{D_2}(\tau) = \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_2}(\tau) =& q^{-\frac{1}{12}} \left(2q^{\frac{1}{4}} + 8q^{\frac{5}{4}} + 20q^{\frac{9}{4}} + \ldots\right).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

这里，$\chi_{\mathbb{1}}^{D_2}$在 $\mathcal{O}(q)$ 处的系数 6 是 $\dim(\mathfrak{so}(4)) = 6$，即 1 级的伴随流。$D_{6,\ 1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(12)_1$ 特征标的 q-级数展开为

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathbb{1}}^{D_6}(\tau) =& q^{-\frac{1}{4}} \left(1 + 66q + 639q^2 + 3774q^3 + \ldots\right), \\
\chi_{\nu}^{D_6}(\tau) =& q^{-\frac{1}{4}} \left(12q^{\frac{1}{2}} + 232q^{\frac{3}{2}} + 1596q^{\frac{5}{2}} + \ldots\right), \\
\chi_{\sigma}^{D_6}(\tau) = \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_6}(\tau) =& q^{-\frac{1}{4}} \left(32q^{\frac{3}{4}} + 384q^{\frac{7}{4}} + 2496q^{\frac{11}{4}} + \ldots\right).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

同样，$\chi_{\mathbb{1}}^{D_6}$at $\mathcal{O}(q)$ 中的 66 是 $\dim(\mathfrak{so}(12)) = 66$。最后，对于 $D_{8,1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(16)_1$ with $c = 8$，我们有如下 q-级数展开

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathbb{1}}^{D_2} =& q^{-\frac{1}{3}} \left(1 + 120q + 2076q^2 + 17344q^3 + \ldots\right), \\
\chi_{\sigma}^{D_2}(\tau) = \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_8}(\tau) =& q^{-\frac{1}{3}} \left(128q + 2048q^2 + 17408q^3 + \ldots\right).
\end{aligned} \tag{A.13}$$

[10]我们仅用有限维链来整理分支；共形嵌入 $E_{8,1} \supset D_{8,1}$，随后在表示层面限制 D_8 到 $D_2 \oplus D_6$。

由此我们立即看出，在第一激发能级，120 是 dim($\mathfrak{so}(16)$) 的伴随表示，而 128 是 $\mathfrak{so}(16)$ 的手征旋量的维数。对于分支 $D_{8,1} \to D_{2,1} \oplus D_{6,1}$，真空模和旋量模分解如下

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{1}}^{D_8} =& \chi_{\mathbb{1}}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\mathbb{1}}^{D_6} + \chi_{\nu}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\nu}^{D_6}, \\ \chi_{\sigma}^{D_8} =& \chi_{\sigma}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\sigma}^{D_6} + \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\widetilde{\sigma}}^{D_6}, \end{aligned} \tag{A.14}$$

为清楚起见，我们用 $\widetilde{\chi}^{D_6}$ 表示第二个因子的特征标。现在展开乘积，并求出提出 $q^{-\frac{1}{3}}$ 后 q^1 的系数。首先，$\chi_{\mathbb{1}}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\mathbb{1}}^{D_6}$ 对真空部分的贡献为

$$\chi_{\mathbb{1}}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\mathbb{1}}^{D_6} = q^{-\frac{1}{3}} \left[1 + (6 + 66)\, q + \ldots\right]. \tag{A.15}$$

由于这些流来自 $D_{2,\ 1}$，且在 $D_{6,\ 1}$ 下为中性，因此它们在 $D_{2,\ 1} \oplus D_{6,\ 1}$ 下的表示为 $(\mathbf{6}, \mathbf{1})$。类似地，我们还有来自 $D_{6,\ 1}$、在 $D_{2,\ 1}$ 下为中性的流，因此它们变换为 $(\mathbf{1}, \mathbf{66})$。接下来，贡献为

$$\chi_{\nu}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\nu}^{D_6} = q^{-\frac{1}{3}} \left[(4 \cdot 12) q + \ldots\right] \tag{A.16}$$

其余的 $4 \cdot 12 = 48$ 流混合这两个因子，并变换为 $(\mathbf{4}, \mathbf{12})$。因此，我们看到 $120 = 6 + 66 + 48$，而分支规则为

$$\mathbf{120} \to (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{66}) \oplus (\mathbf{4}, \mathbf{12}). \tag{A.17}$$

接下来，对于 Spin(16) 的手征旋量 $\mathbf{128}$，我们有

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\sigma}^{D_6} =& q^{-\frac{1}{3}} \left(2 \cdot 32 + \ldots\right), \\ \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_2} \widetilde{\chi}_{\widetilde{\sigma}}^{D_6} =& q^{-\frac{1}{3}} \left(2 \cdot 32 + \ldots\right), \end{aligned} \tag{A.18}$$

由此可读出首项重数为 $128 = 64 + 64 = (2 \cdot 32) + (2' \cdot 32')$。这里，$2, 2'$ 表示 Spin(4) 的两个手征旋量，而 $32, 32'$ 表示 Spin(12) 的两个手征旋量。现在，我们得到旋量模的如下分支

$$\mathbf{128} \to (\mathbf{2}, \mathbf{32}) \oplus (\mathbf{2'}, \mathbf{32'}). \tag{A.19}$$

关于$\mathbf{120}$ 与$\mathbf{128}$ 的分支规则，也可以分别由伴随表示和克利福德代数分解得出。我们在附录C中给出。由A.17与A.19，我们得到分支规则

$$\mathbf{248} \to (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{66}) \oplus (\mathbf{4}, \mathbf{12}) \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{32}) \oplus (\mathbf{2'}, \mathbf{32'}). \tag{A.20}$$

对于这一交换子对，我们有两个不同的旋量初级场 σ 与 $\widetilde{\sigma}$，它们对于$D_{r,\ 1}$具有相同的共形权重 $h_\sigma = h_{\widetilde{\sigma}} = \frac{r}{8}$，且它们的分次维数一致，即$\chi_\sigma^{D_r} = \chi_c^{D_r}$。现在，当我们用共形权重标记重写特征标时，我们令

$$\begin{aligned}\chi_{\frac{1}{4}}^{D_2} \equiv& \chi_\sigma^{D_2} = \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_2},\\ \chi_{\frac{3}{4}}^{D_6} \equiv& \chi_\sigma^{D_6} = \chi_{\widetilde{\sigma}}^{D_6},\end{aligned} \tag{A.21}$$

并且我们有

$$\chi^{E_8} = \chi_0^{D_2}\chi_0^{D_6} + \chi_{\frac{1}{2}}^{D_2}\chi_{\frac{1}{2}}^{D_6} + 2\chi_{\frac{1}{4}}^{D_2}\chi_{\frac{3}{4}}^{D_6}. \tag{A.22}$$

A.2 $(B_{1,1}$,$B_{6,1})$

现在我们有共形嵌入

$$B_{1,1} \oplus B_{6,1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(3)_1 \oplus \widehat{\mathfrak{so}}(13)_1 \subset \widehat{\mathfrak{so}}(16)_1, \tag{A.23}$$

因为 $B_{r,\ 1} \cong \widehat{\mathfrak{so}}(2r+1)_1$。我们紧密遵循附录 C 中介绍的方法来求得分支规则。块嵌入 $\mathfrak{so}(16) \supset \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(13)$ 的实现形式为

$$\mathbf{16} \to (\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{13}). \tag{A.24}$$

利用维数

$$\dim(\Lambda^2\mathbf{3}) = \dim(\mathfrak{so}(3)) = 3, \qquad \dim(\Lambda^2\mathbf{13}) = \dim(\mathfrak{so}(13)) = 78, \qquad \dim(\mathbf{3}\otimes\mathbf{13}) = 39, \tag{A.25}$$

并应用恒等式 C.3，我们得到以下分支

$$\mathbf{120} \to (\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{13}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{78}). \tag{A.26}$$

接下来，对于旋量 **128** 的分支，我们使用 Clifford 分解。通过奇数 $\oplus$ 奇数分解 $16 = 3 \oplus 13$，我们得到 Spin(16) 的手征旋量为

$$S_{\pm}^{(16)} = S^{(3)} \otimes S^{(13)}, \tag{A.27}$$

即每个手征旋量都限制为同一个不可约表示（**2**,**64**）。这里，$S^{(3)}$ 是 Spin(3) $\cong$ SU(2)（偶然同构）的唯一旋量，而 $S^{(13)}$ 是 Spin(13) 的唯一旋量。除了标准的低秩偶然同构，例如 Spin(3) $\cong$ SU(2)、Spin(4) $\cong$ SU(2) $\times$ SU(2)、Spin(6) $\cong$ SU(4) 之外，在更高秩时 Spin(N) 不再与 SU(n) 有进一步的等同，因此 Spin(13) 没有这种简化。所以我们使用一般的旋量维数公式，其形式为 [90]

$$\dim(S^{(N)}) = 2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}, \tag{A.28}$$

而对于 $N=3$ 和 $N=13$，我们分别有 $\dim(S^{(3)})=2$ 和 $\dim(S^{(13)})=64$。因此，我们得到分支

$$\mathbf{248}\to(\mathbf{3},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{78})\oplus(\mathbf{3},\mathbf{13})\oplus(\mathbf{2},\mathbf{64}), \tag{A.29}$$

其中（**2**,**64**）表示 Spin(3) 和 Spin(13) 的唯一旋量的张量积。

A.3 $(\mathbf{III}_2,G_{2\,1,}^{\otimes 2})$

在 $E_{8,1}$ 中，交换子对（III_2,$G_{2\,1,}^{\otimes 2}$）在权一处体现为 E_8 伴随表示**248** 在有限子代数下的分解

$$\mathfrak{e}_8\ \supset\ \mathfrak{g}_2^{(L)}\oplus\mathfrak{g}_2^{(R)}\oplus\mathfrak{a}_1\,. \tag{A.30}$$

顶点算子代数 $\mathbf{III}_2$ 是一个$\mathbb{Z}_2$ 单流扩张$A_{1,\ 8}$ [43]，并与共形嵌入结合

$$G_{2,1}\otimes G_{2,1}\otimes A_{1,8}\subset E_{8,1}, \tag{A.31}$$

由此得到交换子对（$\mathbf{III}_2$,$G_{2\,1,}^{\otimes 2}$）。获得此分支的一种有效方法是使用例外极大链

$$\mathfrak{e}_8\ \supset\ \mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{f}_4,\qquad \mathfrak{f}_4\ \supset\ \mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{g}_2, \tag{A.32}$$

并分两步分解**248**。首先，我们考察**248** 在 $\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{f}_4$ 下的分解。E_8 的伴随表示分解为 [1, 89]

$$\mathbf{248}\ \to(\mathbf{14},\mathbf{1})\ \oplus\ (\mathbf{7},\mathbf{26})\ \oplus\ (\mathbf{1},\mathbf{52}), \tag{A.33}$$

其中 **14** 是 G_2 的伴随表示，**7** 是其基本表示，而 **26**，**52** 分别是F_4的基本表示和伴随表示。第二步是将 F_4 表示分解到 $\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{g}_2$之下。在 $F_4\supset A_1\times G_2^{(R)}$ 之下，我们使用 A.34 和 A.35，然后重新排列因子为（$G_2^{(L)}$，$G_2^{(R)}$，A_1）。现在我们得到以下标准分解 [89]

$$\mathbf{26}=(\mathbf{5},\mathbf{1})\ \oplus\ (\mathbf{3},\mathbf{7}), \tag{A.34}$$

$$\mathbf{52}=(\mathbf{3},\mathbf{1})\ \oplus\ (\mathbf{1},\mathbf{14})\ \oplus\ (\mathbf{5},\mathbf{7}), \tag{A.35}$$

其中 **3** 与 **5** 是 $A_1\cong\mathfrak{su}(2)$的自旋1与自旋2不可约表示。我们现在可以组合以得到 $\mathfrak{g}_2^{(L)}\oplus\mathfrak{g}_2^{(R)}\oplus\mathfrak{a}_1$。为此，我们将 A.34–A.35 代入 A.33，并将因子写为（$G_2^{(L)}$，$G_2^{(R)}$，A_1），从而得到

$$\mathbf{248}\ \to\ (\mathbf{14},\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{14},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3})\oplus(\mathbf{7},\mathbf{7},\mathbf{3})\oplus(\mathbf{7},\mathbf{1},\mathbf{5})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{7},\mathbf{5}). \tag{A.36}$$

维数检验得出

$$14+14+3+(7\cdot 7\cdot 3)+(7\cdot 5)+(7\cdot 5)=14+14+3+147+35+35=248. \tag{A.37}$$

在仿射情形中，相应的共形嵌入 $G_{2,\ 1}\otimes G_{2,\ 1}\otimes A_{1,\ 8}\subset E_{8,\ 1}$，连同 $\mathbf{Z}_2$ 单流扩张 $A_{1,\ 8}\rightsquigarrow \mathrm{III}_{2,\ ,}$ 是交换子对（$\mathrm{III}_{2,}$ $G_{2\ 1,}^{\otimes 2}$ ）的起源。

A.4 $(A_{4,1},A_{4,1})$

交换子对 $(A_{4,1},A_{4,1})$ 在权一处对应于有限维极大秩子代数

$$\mathfrak{e}_8\ \supset\ \mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{su}(5). \tag{A.38}$$

因此，相关的分支规则是将 E_8 伴随表示 **248** 分解为$\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{su}(5)$ 的不可约表示。这一分支例如见方程 *(3.* [91] 中的 (3.7)，并列于 [89]

$$\mathbf{248}\ \to\ (\mathbf{24},\mathbf{1})\ \oplus\ (\mathbf{1},\mathbf{24})\ \oplus\ (\mathbf{10},\mathbf{5})\ \oplus\ (\overline{\mathbf{10}},\overline{\mathbf{5}})\ \oplus\ (\mathbf{5},\mathbf{10})\ \oplus\ (\overline{\mathbf{5}},\overline{\mathbf{10}}), \tag{A.39}$$

回忆一下，$\mathbf{10}\cong\Lambda^2\mathbf{5}$ 以及 $\overline{\mathbf{10}}\cong\Lambda^2\overline{\mathbf{5}}$，因此A.39 中的混合直和项可视为

$$(\mathbf{5},\mathbf{10})\cong(\mathbf{5},\Lambda^2\mathbf{5}),\qquad(\mathbf{10},\mathbf{5})\cong(\Lambda^2\mathbf{5},\mathbf{5}), \tag{A.40}$$

共轭表示也类似。于是维数检验变为 immediat e

$$24+24+4\ \dim(\mathbf{5})\dim(\mathbf{10})=24+24+4\cdot 50=248. \tag{A.41}$$

A.5 $(A_{2\ 1,}^{\otimes 2},A_{2\ 1,}^{\otimes 2})$

我们先从有限维李代数层面开始，这里使用以下标准的极大秩链

$$\mathfrak{e}_8\supset\mathfrak{su}(3)_{(4)}\oplus\mathfrak{e}_6,\qquad\mathfrak{e}_6\supset\mathfrak{su}(3)_{(1)}\oplus\mathfrak{su}(3)_{(2)}\oplus\mathfrak{su}(3)_{(3)}. \tag{A.42}$$

这里，下标（i）标记 $\mathfrak{su}$(3) 因子，而非仿射层。这是一种熟知的极大秩构造，其中嵌入 $E_8\supset$ SU(3)$\times E_6$ 可从扩展Dynkin图中看出，或者等价地说，可由 E_8 根格包含一个 $A_2\oplus E_6$ 根子系统得出。第二个嵌入 $E_6\supset$ SU(3)^3 是所谓的三分化极大秩子群 [92, 93]。在仿射层上，同一极大秩结构提升为以下共形嵌入[94]

$$A_{2,1}\times E_{6,1}\subset E_{8,1}. \tag{A.43}$$

利用 E_6 以极大秩包含 SU(3) 这一事实，我们可以认为 $E_{6,\ 1}$ 包含三个彼此对易的仿射 $A_{2,\ 1}$ 因子，因此得到以下共形嵌入

$$A_{2,1}^{\otimes 4} \subset E_{8,1}. \tag{A.44}$$

这是因为，在三分化嵌入中，每个 $\mathfrak{su}(3) \hookrightarrow \mathfrak{e}_6$ 的 Dynkin 指数均为 1，因此在 1 级时，诱导出的仿射子代数为 $A_{2,1}$ 和 $c(A_{2\,1,}^{\otimes 3}) = 6 = c(E_{6,1})$ [95]（见 §2.2）。将四个 $A_{2,1}$ 因子分成两组，每组两个，便得到交换子对 $(A_{2\,1,}^{\otimes 2}, A_{2\,1,}^{\otimes 2}) \subset E_{8,1}$。我们先考虑 $E_8 \supset \mathrm{SU}(3) \times E_6$，其标准分支规则为 [89]

$$\mathbf{248} \to (\mathbf{8},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{78}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{27}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{27}}), \tag{A.45}$$

其中**8** 是 SU(3) 的伴随表示，称为八重态；**78** 是 E_6的伴随表示，而**27** 是 E_6的基本表示。这里，（**8**,**1**）和（**1**,**78**）这些直和项，实际上就是流子代数 $\mathfrak{su}$(3) 和 $\mathfrak{e}_6$，它们包含在 $\mathfrak{e}_8$ 中。此外，还有（$\mathbf{3},\mathbf{27}$）和（**3**,**27**），它们构成了在两个因子下变换的非对角补空间。下面给出更精确的表述。李代数分解如下

$$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{m}, \tag{A.46}$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{e}_6$ 内 $\mathfrak{e}_8$子代数的补空间。$\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{e}_8$ 上的伴随作用保持这一分解，因此，$\mathfrak{m}$ 是 SU(3) $\times$ E_6的表示。在分解 A.45 中，(8, 1) 是 SU(3) 的伴随表示，(1, 78) 是 E_6的伴随表示。剩余子空间 $\mathfrak{m}$是非对角补空间，即 $\mathfrak{m} \cong$ (3, 27) $\oplus$ (3, 27)。维数检验得到所需结果，$248 = 8 + 78 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 27$。接下来，我们将 E_6 表示限制到子群 $\mathrm{SU}(3)^{(1)} \times \mathrm{SU}(3)^{(2)} \times \mathrm{SU}(3)^{(3)}$下，基本伴随表示分解如下 [93]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{27} \to (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}}),\\
&\overline{\mathbf{27}} \to (\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{3}),\\
&\mathbf{78} \to (\mathbf{8},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{8}) \oplus (\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}),
\end{aligned} \tag{A.47}$$

将其代入 E_8 分支后，可得到 **248** 在以下对象下的显式分解

$$\left(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3)_{(1)}\right) \times \left(\mathrm{SU}(3)_{(2)} \times \mathrm{SU}(3)_{(3)}\right), \tag{A.48}$$

或等价地，在 $A_{2\,1\,\text{下},}^{\otimes 4}$。将表示写作 $(R_1, R_2; R_3, R_4)$，其中 R_i 是 i^{th} SU(3) 因子的一个不可约表示，我们得到以下分支规则（显式证明见附录C

)

$$\begin{aligned}\mathbf{248} \to (\mathbf{8},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{8};\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{8},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{8}) \\ \oplus (\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}};\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3};\mathbf{3},\mathbf{1}) \\ \oplus (\mathbf{3},\mathbf{3};\mathbf{1},\mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}};\mathbf{3},\mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1};\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}) \\ \oplus (\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{3}};\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3};\overline{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{3}}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1};\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}).\end{aligned} \tag{A.49}$$

乘积不可约表示的维数很简单：

$$\dim(R_1,R_2;R_3,R_4) = \dim\, R_1 \cdot \dim\, R_2 \cdot \dim\, R_3 \cdot \dim\, R_4. \tag{A.50}$$

利用 $\dim\ \mathbf{1}=1$、$\dim\ \mathbf{3}=\dim\overline{\mathbf{3}}=3$ 和 $\dim\ \mathbf{8}=8$，我们得到正确的维数计数。

$$4\cdot(8\cdot 1^3)+8\cdot(1\cdot 3^3)=32+216=248. \tag{A.51}$$

现在让我们直接根据特征标验证 E_8 伴随表示的 $\mathfrak{su}(3)^{\oplus 4}$ 分支。当我们想要显式计算由拓扑缺陷线引起的缺陷配分函数时，这种配对很快就会派上用场。 E_8 真空模分解为两个 $A_{2,1}^{\otimes}$ 块的张量积模的有限和。每个 $A_{2,1}\cong\widehat{\mathfrak{su}}(3)_1$ 的中心荷为 $c=2$，因此我们考虑这些块

$$\mathcal{V}\equiv A_{2,1}^{\otimes 2}, \qquad \widetilde{\mathcal{V}}\equiv A_{2,1}^{\otimes 2}, \tag{A.52}$$

~ ~，其中心荷为 $c(\mathcal{V})=c(\mathcal{V})=4$。简而言之，我们将 $c(\mathcal{V})=\widetilde{c}$。这些模块共同填充 $c=8$，与 E_8相符。为了明确写出这种配对关系，我们可以按照其 Z_3 简单流荷来组织 $\mathcal{V}$模。具体而言， $\widehat{\mathfrak{su}}(3)_1$ 有三个可积最高权模，分别标记为荷 0、1、2（模 3），其融合由模 3 [70]加法给出。按照三分化约定，我们可以将它们看作 1、3、3，其中 3 是荷为 2 的对象。令 χ_0、χ_1、χ_2 分别表示荷为 0、1、 2 的无味特征标。它们具有如下 q级数展开[11]

$$\begin{aligned}\chi_0(\tau) &= \left(\frac{\Theta_0}{\eta^2}\right)(\tau) = q^{-\frac{1}{12}}\left(1+8q+17q^2+46q^3+\ldots\right), \\ \chi_1(\tau)=\chi_2(\tau) &= \left(\frac{\Theta_1}{\eta^2}\right)(\tau) = q^{\frac{1}{4}}\left(3+9q+27q^2+57q^3+\ldots\right),\end{aligned} \tag{A.53}$$

[11]在 **1** 级，**3** 和**3** 具有与 q-级数相同的未加味特征标，不过我们保留荷标记以追踪融合与分支。

其中 [96]

$$\begin{aligned}\Theta_0(\tau) =& \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} q^{m^2+mn+n^2} \equiv a(q)\\ =&1+6q+6q^3+6q^4+\ldots,\\ \Theta_1(\tau) =& q^{\frac{1}{3}} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} q^{m^2+mn+n^2+m+n} \equiv q^{\frac{1}{3}} c(q)\\ =&3q^{\frac{1}{3}}+3q^{\frac{4}{3}}+6q^{\frac{7}{3}}+6q^{\frac{13}{3}}+\ldots,\end{aligned} \tag{A.54}$$

它们是 θ 级数，即 Γ(3) 的权重 1 模形式（带有一个特征标）。这里，总体指数反映了 $\frac{c}{24}=\frac{1}{12}$ 和最低共形权重 $-h=\frac{1}{3}$，因为 $-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$。对于张量积模 $\mathcal{V}$，总荷量就是 $-a+b$ （模 3），因为其简单流具有可加性。因此，我们可以将具有给定荷量的所有模归并在一起，并写成

$$\begin{aligned}\chi_0^{A_{2,1}^{\otimes 2}}(\tau) \equiv& \left(\chi_0\chi_0+\chi_1\chi_2+\chi_2\chi_1\right)(\tau)\\ =&q^{-\frac{1}{6}}\left(1+18q^{\frac{2}{3}}+16q+108q^{\frac{5}{3}}+98q^2+486q^{\frac{8}{3}}+364q^3+\ldots\right),\\ \chi_{\frac{1}{3}}^{A_{2,1}^{\otimes 2}}(\tau) \equiv& \left(\chi_0\chi_1+\chi_1\chi_0+\chi_2\chi_2\right)(\tau)\\ =&q^{\frac{1}{6}}\left(6+9q^{\frac{1}{3}}+66q+54q^{\frac{4}{3}}+300q^2+243q^{\frac{7}{3}}+1128q^3+\ldots\right)\\ =&\chi_{\frac{2}{3}}^{A_{2,1}^{\otimes 2}}(\tau).\end{aligned} \tag{A.55}$$

现在，对于交换子对 $(\mathcal{V},\ \mathcal{V})\subset E_{8,\,1}$，$E_{8,\,1}$ 真空特征标为

$$\chi_{E_{8,1}}(\tau)=\chi_0^{\mathcal{V}}(\tau)\chi_0^{\widetilde{\mathcal{V}}}(\tau)+\chi_{\frac{1}{3}}^{\mathcal{V}}(\tau)\chi_{\frac{2}{3}}^{\widetilde{\mathcal{V}}}(\tau)+\chi_{\frac{2}{3}}^{\mathcal{V}}(\tau)\chi_{\frac{1}{3}}^{\widetilde{\mathcal{V}}}(\tau). \tag{A.56}$$

这里，真空配对的 q-级数展开如下

$$\chi_0^{\mathcal{V}}(\tau)\chi_0^{\widetilde{\mathcal{V}}}(\tau)=q^{-\frac{1}{3}}\left(1+36q^{\frac{2}{3}}+\mathbf{32}q+\ldots\right), \tag{A.57}$$

其中恰有 32 个权一态的贡献。这些正是代数 $\mathfrak{su}(3)^{\oplus 4}$的流，因此它们按四个伴随表示的直和变换

$$(\mathbf{8},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{8};\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{8},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{8}). \tag{A.58}$$

接下来，我们考虑第一个交叉项的 q-级数展开

$$\chi_{\frac{1}{3}}^{\mathcal{V}}(\tau)\chi_{\frac{2}{3}}^{\widetilde{\mathcal{V}}}(\tau)=q^{\frac{1}{3}}(36q^{\frac{2}{3}}+\mathbf{108}q+\ldots), \tag{A.59}$$

其中的贡献为108个权一态。另一交叉项$\chi_2^{\mathcal{V}}\chi_1^{\mathcal{V}}$ 同样贡献108个权一态，因此我们总共有 $248-32=216$ 分解为

$$216=8\times 27=8\times(3\cdot 3\cdot 3). \tag{A.60}$$

这正是我们从分支A.49所应预期的。 $\mathfrak{su}(3)^{\oplus 4}$在 $\mathfrak{e}_8$ 内的补集变换为三重基本表示之和，三个因子为**3**或**3** 以及一个平凡因子**1**，每个维数为27。这八个三重基本表示如A.49所示，并构成一个维数为216的补集。

B $G_{2,\ 1}$ 轨形拓扑系数

我们从

$$\Lambda^{L_3}_{L_1,L_2} \equiv \mu^{L_3}_{L_1,L_2}\Delta^{L_1,L_2}_{L_3}. \tag{B.1}$$

给定 $\mu_*:\ \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$，以及 $\Delta_F:\ \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$，其中下标 F 表示一个弗罗贝尼乌斯代数，其分量由以下映射定义

$$\begin{aligned}\mu^{L_3}_{L_1,L_2} &: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathcal{H})}(L_1,\mathfrak{A})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathcal{H})}(L_2,\mathfrak{A})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathcal{H})}(L_3,\mathfrak{A}),\\ \Delta^{L_3}_{L_1,L_2} &: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathcal{H})}(L_1,\mathfrak{A})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathcal{H})}(L_2,\mathfrak{A})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\mathcal{H})}(L_3,\mathfrak{A}),\end{aligned} \tag{B.2}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是一个霍普夫代数。对于无重数情形，我们用标量 $\mu^{L_3}_{L_1,\ L_2}\in\mathbb{C}$ 表示乘以交织算子基 $L_1\otimes L_2\to L_3$。幺正性要求

$$\mu^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}=1,\qquad \mu^{\tau}_{\mathbb{1},\tau}=\mu^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}}=1,\qquad \mu^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\tau}=\mu^{\mathbb{1}}_{\tau,\mathbb{1}}=0, \tag{B.3}$$

唯一非平凡的乘法常数为

$$\mu^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau}\equiv x,\qquad \mu^{\tau}_{\tau,\tau}\equiv y. \tag{B.4}$$

结合律 $\mu\circ(\mu\otimes\mathrm{id})=\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\mu)$ 在融合规则 4.69 上变为一个二分量约束，因为 $\dim\mathrm{Hom}(\tau^{\otimes 3},\tau)=2$。具体而言，在左结合基中，系数向量为 $(x,\ y^2)$，而在右结合基中，它是同一个向量，但通过基变换 $F^{\tau}_{\tau\tau\tau}$相关联。因此，我们要求

$$\begin{pmatrix}x\\ y^2\end{pmatrix}=F^{\tau}_{\tau\tau\tau}\begin{pmatrix}x\\ y^2\end{pmatrix}. \tag{B.5}$$

利用 4.70，我们发现 $(F-1)$-核条件给出

$$x=\frac{y^2}{\sqrt{\varphi}}. \tag{B.6}$$

因此，结合律迫使 $\tau\tau\to(\mathbb{1}\oplus\tau)$ 的两个通道之间存在一个无理关系。我们作出如下选择

$$(x,y)=\left(\varphi^{-\frac{1}{2}},1\right), \tag{B.7}$$

接下来，我们将 Δ 按分量写出 $\Delta^{L_1,\ L_2}_{\ L_3}$并将基底交织算子 $L_3 \to L_{21} \otimes L_2$相乘。用 [71]，该 泡泡移动 的语言来说，现在的公理如下

$$\mu \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}. \tag{B.8}$$

在无重数情形下，一个非常明确的解法是逐通道地选择 Δ 作为 μ 的双模截面[12]。具体而言，对于输出 $\mathbb{1}$，只有这些配对有贡献：$(\mathbb{1},\ \mathbb{1})$ 和 $(\tau,\ \tau) \to \mathbb{1}$。因此，我们令

$$\mu^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}\Delta^{\mathbb{1},\mathbb{1}}_{\mathbb{1}} + \mu^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau}\Delta^{\tau,\tau}_{\mathbb{1}} = 1. \tag{B.9}$$

一种典范的对称选取是令 Δ与该二维空间中 μ的转置成正比，即

$$\Delta^{\mathbb{1},\mathbb{1}}_{\mathbb{1}} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \Delta^{\tau,\tau}_{\mathbb{1}} = \frac{x}{1+x^2}. \tag{B.10}$$

接下来，对于 τ输出，有贡献的配对是 $(\mathbb{1},\ \tau)$、$(\tau,\ \mathbb{1})$ 和 $(\tau\tau) \to \tau$。因此我们令

$$\Delta^{\mathbb{1},\tau}_{\tau} + \Delta^{\tau,\mathbb{1}}_{\tau} + y\Delta^{\tau,\tau}_{\tau} = 1, \tag{B.11}$$

再次采用对称转置选取

$$\Delta^{\mathbb{1},\tau}_{\tau} = \Delta^{\tau,\mathbb{1}}_{\tau} = \frac{1}{2+y^2}, \qquad \Delta^{\tau,\tau}_{\tau} = \frac{y}{2+y^2}. \tag{B.12}$$

这正是使 B.8 在分量中显现的操作。它在结构上与普通群轨形中的 $\frac{1}{|G|}$ 归一化具有相同作用。现在我们可以明确计算拓扑系数$\Lambda^{L_3}_{L_1,\ L_2}$。

1. 真空输出 $L_3 = 1$:
   只有 $(\mathbb{1},\ \mathbb{1})$ 和 $(\tau,\ \tau)$ 有贡献:

$$\Lambda^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}} = \mu^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1},\mathbb{1}}\Delta^{\mathbb{1},\mathbb{1}}_{\mathbb{1}} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \Lambda^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau} = \mu^{\mathbb{1}}_{\tau,\tau}\Delta^{\tau,\tau}_{\mathbb{1}} = \frac{x^2}{1+x^2}. \tag{B.13}$$

2. τ 输出 $L_3 = \tau$:
   $(\mathbb{1},\ \tau)$、$(\tau,\ \mathbb{1})$、$(\tau,\ \tau)$ 的贡献 $\to \tau$:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\tau}_{\mathbb{1},\tau} &= \mu^{\tau}_{\mathbb{1},\tau}\Delta^{\tau,\mathbb{1}}_{\tau} = \frac{1}{2+y^2}, \\ \Lambda^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}} &= \mu^{\tau}_{\tau,\mathbb{1}}\Delta^{\tau,\mathbb{1}}_{\tau} = \frac{1}{2+y^2}, \\ \Lambda^{\tau}_{\tau\tau} &= \mu^{\tau}_{\tau,\tau}\Delta^{\tau,\tau}_{\tau} = \frac{y^2}{2+y^2}. \end{aligned} \tag{B.14}$$

根据我们的选择 B.7，并利用 $1+\varphi = \varphi^2$这一事实，我们得到列表 4.88。

[12]这就是选择一个可分幂等元的范畴论类比。

C 关于分支规则的更多计算

来自 $\Lambda^2(\mathbf{16})$的 120

Spin(16) 的**120** 在 Spin(16) $\supset$ Spin(4) $\times$Spin(12) 下的分支规则，最容易通过对伴随表示与二形式的等同得到。事实上，$\mathfrak{so}(N)$ 由 R^N 的反对称自同态构成，因而作为 $\mathfrak{so}(N)$-模，与 $\Lambda^2(\mathrm{R}^N)$ [97] 有典范等同

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{so}(N)} \;\cong\; \Lambda^2(\mathbf{N}). \tag{C.1}$$

在 $\mathfrak{so}(16) \supset \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(12)$ 下，矢量表示分解为

$$\mathbf{16} \;\to\; (\mathbf{4},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{12}). \tag{C.2}$$

应用 Λ^2 并使用标准恒等元

$$\Lambda^2(A\oplus B) \;\cong\; \Lambda^2 A \;\oplus\; (A\otimes B) \;\oplus\; \Lambda^2 B, \tag{C.3}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\Lambda^2(\mathbf{16}) &\to \Lambda^2(\mathbf{4},\mathbf{1}) \oplus \big((\mathbf{4},\mathbf{1})\otimes(\mathbf{1},\mathbf{12})\big) \oplus \Lambda^2(\mathbf{1},\mathbf{12}) \\ &\cong (\Lambda^2\mathbf{4},\mathbf{1}) \;\oplus\; (\mathbf{4},\mathbf{12}) \;\oplus\; (\mathbf{1},\Lambda^2\mathbf{12}).\end{aligned} \tag{C.4}$$

取维数后，我们得到

$$\dim(\Lambda^2\mathbf{4}) = \dim(\mathfrak{so}(4)) = 6, \qquad \dim(\Lambda^2\mathbf{12}) = \dim(\mathfrak{so}(12)) = 66, \qquad \dim(\mathbf{4}\otimes\mathbf{12}) = 48, \tag{C.5}$$

因此

$$\mathbf{120} \;\to\; (\mathbf{6},\mathbf{1}) \;\oplus\; (\mathbf{1},\mathbf{66}) \;\oplus\; (\mathbf{4},\mathbf{12}), \tag{C.6}$$

正如所声称的。

Clifford 分解与手征性中的 128

为描述手征旋量 **128** 的分支，我们不妨回顾一下：旋量表示自然地构造为克利福德代数 [97] 的模。设 V 是一个实偶维二次空间，Cl(V) 是其克利福德代数。若 V 正交分解为

$$V \;\cong\; V_1 \;\oplus\; V_2, \tag{C.7}$$

那么就存在一个典范分次代数同构

$$\mathrm{Cl}(V) \;\cong\; \mathrm{Cl}(V_1)\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V_2)\,, \tag{C.8}$$

其中，$\widehat{\otimes}$ 表示 $\mathbb{Z}_2$分次张量积。特别地，对于带有标准内积的 $V=\mathbb{R}^{2n}$，以及分裂 $\mathbb{R}^{2n}\cong\mathbb{R}^{2r}\oplus\mathbb{R}^{2n-2r}$，我们有

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2n}) \;\cong\; \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2r})\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2n-2r}). \tag{C.9}$$

令 $S^{(2m)}$ 表示 $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m})$ 的复旋量模。上述分解意味着，作为 $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2r})\widehat{\otimes}\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2n-2r})$ 的模，我们有

$$S^{(2n)} \;\cong\; S^{(2r)}\otimes S^{(2n-2r)}. \tag{C.10}$$

当 $2m$ 为偶数时，手征算子 $\Gamma_{(2m)}$（即 $2m$ 伽马矩阵的乘积）给出了外尔旋量的分解 $S^{(2m)}=S^{(2m)}_{+}\oplus S^{(2m)}_{-}$。在正交分裂下，手征性分解如下（整体符号取决于约定）：

$$\Gamma_{(2n)} \;=\; \Gamma_{(2r)}\otimes\Gamma_{(2n-2r)}, \tag{C.11}$$

因此，$\pm$ 本征子空间满足同手征选择定则

$$\begin{aligned} S^{(2n)}_{+} &\;\cong\; \big(S^{(2r)}_{+}\otimes S^{(2n-2r)}_{+}\big) \;\oplus\; \big(S^{(2r)}_{-}\otimes S^{(2n-2r)}_{-}\big), \\ S^{(2n)}_{-} &\;\cong\; \big(S^{(2r)}_{+}\otimes S^{(2n-2r)}_{-}\big) \;\oplus\; \big(S^{(2r)}_{-}\otimes S^{(2n-2r)}_{+}\big). \end{aligned} \tag{C.12}$$

现在我们专门讨论 $2n=16$ 以及分裂 $\mathbb{R}^{16}\cong\mathbb{R}^4\oplus\mathbb{R}^{12}$, 对应于 $\mathrm{Spin}(16)\supset\mathrm{Spin}(4)\times\mathrm{Spin}(12)$。$\mathrm{Spin}(4)$ 的手征旋量 $\cong\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{SU}(2)_R$为 $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ 和 $(\mathbf{1},\mathbf{2})$，分别记作 $\mathbf{2}$ 和 $\mathbf{2}'$；而 $\mathrm{Spin}(12)$ 的手征旋量是互不等价的外尔旋量 $\mathbf{32}$ 和 $\mathbf{32}'$。取 $S^{(16)}_{+}\cong\mathbf{128}$，C.12 得

$$\mathbf{128} \;\to\; (\mathbf{2},\mathbf{32}) \;\oplus\; (\mathbf{2}',\mathbf{32}'), \tag{C.13}$$

这就是所需的分支。

$A_{2\,1,}^{\otimes 4}$ 的分支规则计算

在本附录中，我们给出一项具体计算，以帮助理解 E_8 伴随表示$\mathbf{248}$ 作为四个彼此对易的 $\mathrm{SU}(3)$ 因子的表示；这种方式使下述交换子对的分解一目了然

$$\mathrm{SU}(3)^4=\big(\mathrm{SU}(3)_{(1)}\times\mathrm{SU}(3)_{(2)}\big)\times\big(\mathrm{SU}(3)_{(3)}\times\mathrm{SU}(3)_{(4)}\big)\,. \tag{C.14}$$

我们首先定义

$$H \equiv \mathrm{SU}(3)_{(1)} \times \mathrm{SU}(3)_{(2)} \times \mathrm{SU}(3)_{(3)} \times \mathrm{SU}(3)_{(4)}, \tag{C.15}$$

并考虑该嵌入

$$\iota : H \hookrightarrow \mathrm{SU}(3)_{(4)} \times E_6. \tag{C.16}$$

我们知道以下由.....定义的三分化嵌入

$$\jmath : \mathrm{SU}(3)_{(1)} \times \mathrm{SU}(3)_{(2)} \times \mathrm{SU}(3)_{(3)} \hookrightarrow E_6, \tag{C.17}$$

因此，C.16 的作用为

$$\iota(g_1, g_2, g_3, g_4) \equiv (g_4, \jmath(g_1, g_2, g_3)) \in \mathrm{SU}(3)_{(4)} \times E_6. \tag{C.18}$$

这是我们将用来限制表示的映射。现在，固定一个 E_8-表示V，使得将 V限制到 H，只需将 V 视为子群 $\mathrm{SU}(3)_{(4)} \times E_6 \subset E_8$ 的一个表示，然后沿嵌入 C.16 进一步限制即可。因此，每当元素 $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in H$作用于 V时，它都是通过元素 $(g_4, \jmath(g_1, g_2, g_3)) \in \mathrm{SU}(3)_{(4)} \times E_6 \subset E_8$起作用的。我们将 H 的一个不可约表示记为 (R_1, R_2, R_3, R_4)，其中 R_i 是 $\mathrm{SU}(3)^{(i)}$的 i^{th} 不可约表示。为了清楚呈现交换子对 C.14 的分拆形式，我们将该不可约表示改写为 $(R_1, R_2; R_3, R_4)$。

对于群 G, K，令

$$A : G \to \mathrm{GL}(V), \qquad B : K \to \mathrm{GL}(W), \tag{C.19}$$

它们在有限维向量空间 V, W 上的表示。它们的外张量积，定义为 $A \boxtimes B$，是 $G \times K$ 在 $V \otimes W$ 上的表示，定义如下

$$(A \boxtimes B)\,(g, k)(v \otimes w) \equiv A(g)v \otimes B(k)w. \tag{C.20}$$

因此，若 R是 $\mathrm{SU}(3)^{(4)}$ 的表示，且 S是 E_6的表示，则 $\mathrm{SU}(3)_{(4)} \times E_6$上的表示 (R, S) 恰好是 $R \boxtimes S$。现在，我们可以计算 E_8 分支中每一项上的限制 $\mathrm{Res}_H^{\mathrm{SU}(3)_{(4)} \times E_6}$。限制与直和可交换，而外张量积对直和的分配方式如下

$$\begin{aligned} R \boxtimes \left(\bigoplus_i S_i \right) &\cong \bigoplus_i (R \boxtimes S_i), \\ \left(\bigoplus_i R_i \right) \boxtimes S_i &\cong \bigoplus_i (R_i \boxtimes S)\,. \end{aligned} \tag{C.21}$$

现在，对于表示 $R\boxtimes S$，其到 H 的限制为

$$\mathrm{Res}_{H}^{\mathrm{SU}(3)_{(4)}\times E_6}(R\boxtimes S)=R_{(4)}\boxtimes\mathrm{Res}_{H}^{\mathrm{SU}(3)_{(4)}\times E_6}(s), \tag{C.22}$$

其中，$\mathrm{SU}(3)^3$ 通过 $\jmath$嵌入 E_6 中。现在给出明确的限制。逐项限制如下：

1. $(\mathbf{8},\mathbf{1})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{8},\mathbf{1})|_H=&\mathbf{8}_{(4)}\boxtimes(\mathbf{1}\circ\jmath)\\=&\mathbf{8}_{(4)}\boxtimes\mathrm{Res}_{\mathrm{SU}(3)^3}(\mathbf{1})\\=&(\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{8}).\end{aligned} \tag{C.23}$$

2. $(\mathbf{1},\ \mathbf{78})$：

$$\begin{aligned}(\mathbf{1},\mathbf{78})|_H=&\mathbf{1}_{(4)}\boxtimes(\mathbf{78}\circ\jmath)\\=&\mathbf{1}_{(4)}\boxtimes\mathrm{Res}_{\mathrm{SU}(3)^3}(\mathbf{78})\\=&\mathbf{1}_{(4)}\boxtimes\left[(\mathbf{8},\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{8})\oplus(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3})\oplus(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}})\right]\\=&(\mathbf{8},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{8};\mathbf{1},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{8},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}};\mathbf{3},\mathbf{1})\oplus(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3};\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1}).\end{aligned} \tag{C.24}$$

3. $(\mathbf{3},\ \mathbf{27})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{3},\mathbf{27})|_H=&\mathbf{3}_{(4)}\boxtimes\mathrm{Res}_{\mathrm{SU}(3)^3}(\mathbf{27})\\=&\mathbf{3}_{(4)}\boxtimes\left[(\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1})\oplus(\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3})\oplus(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}})\right]\\=&(\mathbf{3},\mathbf{3};\mathbf{1},\mathbf{3})\oplus(\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}};\mathbf{3},\mathbf{3})\oplus(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1};\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}).\end{aligned} \tag{C.25}$$

将这些结果精确汇总后，得到分支 A.49。（$\mathbf{3},\mathbf{27}$）限制是 C.25的复共轭，并给出了其余的直和项。

D 计算 S矩阵

用于 [41]中三特征标理论的 S-矩阵构造为

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \frac{1}{n_1}\frac{N_1}{N_0}\alpha_{01} & \frac{1}{n_2}\frac{N_2}{N_0}\alpha_{02}\\ n_1\frac{N_0}{N_1}\alpha_{10} & \alpha_{11} & \frac{n_1}{n_2}\frac{N_2}{N_1}\alpha_{12}\\ n_2\frac{N_0}{N_2}\alpha_{20} & \frac{n_2}{n_1}\frac{N_1}{N_2}\alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}, \tag{D.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_{00} =& \frac{s(a)s\left(a+\frac{1}{2}g\right)}{s(2a)s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)}, \qquad \alpha_{01} = -\frac{s(a)^2}{s(2a)s(2a+g)}, \qquad \alpha_{02} = \frac{s(a)s\left(a+\frac{1}{2}g\right)}{s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)s(2a+g)}, \\
\alpha_{10} =& -2\frac{s\left(3a+\frac{1}{2}g\right)s\left(a+\frac{1}{2}g\right)c\left(\frac{1}{2}g\right)}{s(2a)s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)}, \\
\alpha_{11} =& \frac{s\left(3a+\frac{1}{2}g\right)^2 s(a)}{s(2a)s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)} - \frac{s\left(a+\frac{1}{2}g\right)(a)}{s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)s(2a+g)}, \\
\alpha_{12} =& 2\frac{s\left(a+\frac{1}{2}g\right)^2 c\left(\frac{1}{2}g\right)}{s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)s(2a+g)}, \\
\alpha_{20} =& \frac{s\left(3a+\frac{1}{2}g\right)s(3a+g)}{s(2a)s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)}, \qquad \alpha_{21} = \frac{s(3a+g)s(a)}{s(2a)s(2a+g)}, \qquad \alpha_{22} = \frac{s(a)s\left(a+\frac{1}{2}g\right)}{s\left(2a+\frac{1}{2}g\right)s(2a+g)}.
\end{aligned} \tag{D.2}$$

这里，$s(x) = \sin(\pi x)$，$c(x) = \cos(\pi x)$，常数 a 和 g 为

$$\begin{aligned}
a =& -\frac{1}{4}(6\alpha_0+1) \pm \frac{1}{4}\sqrt{-12\alpha_0^2+4\alpha_0+9-4\nu_1}, \\
g =& -6\alpha_0 - 2 - 6a,
\end{aligned} \tag{D.3}$$

其中，平方根前的正负号由以下情况决定：$(+, -) = (h_1 > h_2,\ h_1 < h_2)$。归一化常数$N_{0,1,2}$ 为

$$\begin{aligned}
N_0 =& \frac{\Gamma(g)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}g\right)} \frac{\Gamma(-1-3a-g)\Gamma\left(-1-3a-\frac{1}{2}g\right)\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+a+\frac{1}{2}g\right)}{\Gamma(-2a)\Gamma\left(-2a-\frac{1}{2}g\right)}, \\
N_1 =& (16)^{1+2a}\frac{\Gamma(-1-3a-g)\Gamma(1+a)^3}{\Gamma(-2a-g)\Gamma(2+2a)}, \\
N_2 =& (16)^{2+4a+g}\frac{\Gamma(g)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}g\right)}\frac{\Gamma(1+a)^2\Gamma\left(1+a+\frac{1}{2}g\right)^2}{\Gamma\left(2+2a+\frac{1}{2}g\right)\Gamma(2+2a+g)}.
\end{aligned} \tag{D.4}$$

我们还有

$$\alpha_0 = -\frac{c}{24}, \qquad \nu_1 = \frac{20}{9} - \mu_1, \tag{D.5}$$

最后，μ_1 可显式计算如下

$$\mu_1 = \frac{2}{9} - 4\left(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_0\right), \tag{D.6}$$

with

$$\alpha_i = -\frac{c}{24} + h_i,\ h_0 = 0. \tag{D.7}$$

参考文献

[1] *S. Hegde*与*D. P. Jatkar*，交换子对中拓扑缺陷线的缺陷配分函数，现代物理学快报*A 37 (2022)* 2250193 [2101.12189].[2] *Y.-H. Lin*与*S.-H. Shao*，怪兽共形场论的对偶缺陷，物理学杂志*A 54 (2021) 065201*[1911.00042].[3] *A. N. Schellekens*，亚纯$c = 24$ 共形场论，数学物理通讯 *153 (1993*年*)* 159 [*hep-th*/9205072].[4] *A. M. Polyakov*，玻色弦的量子几何，物理学快报*B 103 (1981) 207*.[5] *G. W. Moore*与*N. Seiberg*，经典与量子共形场论，数学物理通讯 *123 (1989) 177*.[6] *S. D. Mathur*、*S. Mukhi*与*A. Sen*，论有理共形场论的分类，物理学快报*B213 (1988*年*) 303*.[7] *P. Bantay*与*T. Gannon*，共形特征标与模表示，《高能物理学杂志》*02 (2006*年*)* 005 [*hep-th*/0512011].[8] *A. R. Chandra*与*S. Mukhi*，高于$c = 24$的奇异现象，*SciPost Phys. 6 (2019) 053*[1812.05109].[9] *E. Witten*，再论三维引力，*0706.3359*.[10] *A. Maloney*与*E. Witten*，三维中的量子引力配分函数，《高能物理学杂志》*02 (2010)* 029 [0712.0155].[11] *M. R. Gaberdiel*，对极值自对偶共形场论的约束，《高能物理学杂志》*11 (2007)* 087 [0707.4073].[12] *I. M. Burbano*、*J. Kulp*与*J. Neuser*，E_8, 中的对偶缺陷，《高能物理学杂志》*10 (2022)* 186 [2112.14323].[13] *C. Stigner*，有理共形场论中的因子化约束与边界条件，*1006.5923*.[14] *P. Bantay*，模表示的核与有理共形场论中的伽罗瓦作用，数学物理通讯 *233 (2003)* 423 [*math*/0102149].[15] *A. Das*与*N. B. Umasankar*，模线性微分方程的二特征标解与三特征标解及*Fricke*群的拉马努金-艾森斯坦恒等式，*2211.15369*.[16] *N. B. Umasankar*，*Hecke*群与*Fricke*群的模线性微分方程，*2210.07186*.[17] *M. Barkeshli*、*P. Bonderson*、*M. Cheng*与*Z. Wang*，拓扑相的对称性分数化、缺陷与规范化，物理评论*B 100 (2019)* 115147 [1410.4540].[18] *D. Gaiotto*、*A. Kapustin*、*N. Seiberg*与*B. Willett*，广义整体对称性，《高能物理学杂志》*02 (2015)* 172 [1412.5148].[19] *V. Benedetti*、*H. Casini*、*Y. Kawahigashi*、*R. Longo*与*J. M. Magan*，模不变性即完备性，物理评论*D 110 (2024)* 125004 [2408.04011].

[20] *S.-H. Shao*，《覆水难收：非可逆对称性 *TASI*讲座》，载于《基本粒子物理理论高级研究学院 *2023*：对称性诸方面》，*8*，*2023*，*2308.00747*。[21] *N. Iqbal*，《广义全局对称性耶拿讲座：原理与应用》，*7*，*2024*，*2407.20815*。[22] *A. Das*、*C. N. Gowdigere* 和 *S. Mukhi*，《由陪集构造新的亚纯共形场论》，《高能物理学杂志》*07*（*2022*）152 [2207。04061]。[23] *L. Rastelli*、*B. C. Rayhaun*、*M. Sacchi* 和 *G. Zafrir*，$2+2=4$，*2601.00058*。[24] *A. R. Chandra*、*S. Mukhi* 和 *P. Singh*，《广义四维配分函数与模微分方程》，*2512.02107*。[25] *A. Deb*，《广义舒尔极限、模微分方程与量子单值迹》，*2512.02102*。[26] *E. P. Verlinde*，《二维共形场论中的融合规则与模变换》，《核物理 *B*》*300*（*1988*）*360*。[27] *N. Drukker*、*D. Gaiotto* 和 *J. Gomis*，《四维规范理论与二维共形场论中的缺陷之益》，《高能物理学杂志》*06*（*2011*） 025 [1003。1112]。[28] *D. Gaiotto*，《开*Verlinde*线算符》，*1404.0332*。[29] *J. Frohlich*、*J. Fuchs*、*I. Runkel* 和 *C. Schweigert*，《缺陷线、对偶与广义轨形》，载于《第*16*届国际数学物理大会》，第*608–613*页，*2010*，*0909.5013*，*DOI*。[30] *C.-M. Chang*、*Y.-H. Lin*、*S.-H. Shao*、*Y. Wang* 和 *X. Yin*，《二维中的拓扑缺陷线与重整化群流》，《高能物理学杂志》*01*（*2019*） 026 [1802。04445]。[31] *J. Chen*、*B. Haghighat* 和 *Q.-R. Wang*，《Z_N-准费米子共形场论中的准融合范畴与拓扑缺陷线》，*2309.01914*。[32] *E. Frenkel*，《顶点代数与代数曲线》，*2000*。[33] *I. Frenkel*、*J. Lepowsky* 和 *A. Meurman*，《顶点算子代数与魔群》。*Academi*

c

出版社，波士顿，美国，1988年。[34] V. G. Kac，初学者的顶点代数，1997年，https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118198735。[35] Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky，顶点算子代数的模范畴的张量积理论，*i*，《数学选刊》**1** （1993年）699。[36] Y.-Z. Huang、A. A. Kirillov 和 J. Lepowsky，辫子张量范畴与顶点的扩张

ex

算子代数，《数学物理通讯》**337**(2014) 1143.[37] Y. Zhu，顶点算子代数特征标的模不变性，《美国数学会杂志》**9**(1996) 237。

[38] *G. Mason*，向量值模形式与线性微分算子，《国际数论杂志》*03 (2007) 377*。[39] *P. Bantay* 和 *T. Gannon*，模群的向量值模函数与超几何方程，《数论与理论物理通讯》 *1 (2007) 651*。[40] *S. D. Mathur*、*S. Mukhi* 和 *A. Sen*，任意有理共形场论中关联函数与特征标的微分方程，《核物理 *B*》*312 (1989) 15*。[41] *S. D. Mathur*、*S. Mukhi* 和 *A. Sen*，基于环面模几何的共形场论重构，《核物理 *B*》*318 (1989) 483*。[42] *H. R. Hampapura* 和 *S. Mukhi*，关于具有两个特征标的二维共形场论，《高能物理学杂志》*01 (2016)* 005 [1510.04478].[43] *A. Das*、*C. N. Gowdigere* 和 *S. Mukhi*，亚纯陪集与三特征标共形场论的分类，《高能物理学杂志》*03 (2023)* 023 [2212.03136].[44] *T. Gannon*，模群的向量模形式理论，《数学与计算机科学论丛》*8 (2014)* 247 [1310.4458].[45] *A. Das*、*C. N. Gowdigere* 和 *J. Santara*，朗斯基指数与有理共形场论，《高能物理学杂志》*04 (2021)* 294 [2012.14939].[46] *S. G. Naculich*，有理共形特征标的微分方程，《核物理 *B*》*323 (1989) 423*。[47] *Y. Pan* 和 *Y. Wang*，带味模微分方程，*2306.10569*。[48] *A. Das*、*C. N. Gowdigere*、*S. Mukhi* 和 *J. Santara*，具有可动极点的模微分方程与可容许有理共形场论特征标，《高能物理学杂志》*12 (2023)* 143 [2308.00069].[49] *S. Govindarajan*、*A. Sadanandan* 和 *J. Santara*，三特征标有理共形场论的准特征标，*2510.24248*。[50] *V. G. Turaev*，纽结与三维流形的量子不变量，第*18*卷。*1994* 年。[51] *B. N. Bakalov* 和 *A. A. Kirillov*，张量范畴与模函子讲义，*2000*，*https://api.semanticscholar.org/CorpusID:52201867*。[52] *A. Kitaev*，精确求解模型及其他模型中的任意子，《物理年鉴》*321 (2006) 2*[*cond-mat*/0506438].[53] *J. Fuchs*、*I. Runkel* 和 *C. Schweigert*，有理共形场论关联函数的拓扑场论构造 *1*：配分函数，《核物理 *B*》*646 (2002)* 353 [*hep-th*/0204148].[54] *J. Fuchs*、*I. Runkel* 和 *C. Schweigert*，有理共形场论关联函数的拓扑场论构造 *2*：无定向世界面，《核物理 *B*》*678 (2004)* 511 [*hep-th*/0306164].[55] *G. Felder*、*J. Frohlich*、*J. Fuchs* 和 *C. Schweigert*，有理共形场论中的关联函数与边界条件及三维拓扑，《组合数学》*131 (2002) 189*[*hep-th*/9912239]。

[56] T. Gannon, 《Cappelli-Itzykson-Zuber A-D-E 分类》, 《数学物理评论》12 (2000) 739[math/9902064].[57] J. Frohlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert, 《有理共形场论中的 Picard 群》, 2004, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:13921194.[58] M. Cheng 和 D. J. Williamson, 《($1+1$)d 有理共形场论中的相对反常》, 物理评论·研究 2 (2020) 043044 [2002.02984].[59] C. Edie-Michell, 《A、B、C 和 G 型模张量范畴的自等价》, Adv. Math. 402 (2022) 108364.[60] J. Albert、Y. Honda、J. Kaidi 和 Y. Zheng, 《$(E_8)_1$ 中的 Haagerup 对称性? 》, 2512.08225.[61] H. Sonoda, 《共形场论的缝合。2.》, 《核物理 B》311 (1988) 417.[62] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert, 《有理共形场论关联函数的拓扑场论构造 I：配分函数》, 《核物理 B》646 (2002) 353.[63] G. W. Moore 和 N. Seiberg, 《有理共形场论的多项式方程》, 物理学快报B212 (1988) 451.[64] A. A. Belavin、A. M. Polyakov 和 A. B. Zamolodchikov, 《二维量子场论中的无限维共形对称性》, 《核物理 B》241 (1984) 333.[65] M. B. Green、J. H. Schwarz 和 E. Witten, 《超弦理论。第1卷：引言》, 剑桥数学物理专著。7, 1988.[66] M. A. Knus, 《李代数的三元对偶自同构》, 《变换群》14 (2009) 361.[67] C.-M. Chang、J. Chen 和 F. Xu, 《二维费米子共形场论中的拓扑缺陷线》, SciPost Phys. 15 (2023) 216 [2208.02757].[68] R. Dijkgraaf、C. Vafa、E. P. Verlinde 和 H. L. Verlinde, 《轨形模型的算子代数》, 《数学物理通讯》123 (1989) 485.[69] D. Robbins 和 T. Vandermeulen, 《来自模轨道的轨形》, 物理评论D 101 (2020)106021 [1911.05172].[70] P. Di Francesco、P. Mathieu 和 D. Senechal, 《共形场论》, 当代物理学研究生教材。施普林格出版社，纽约，1997，10.1007/978-1-4612-2256-9.[71] A. Perez-Lona、D. Robbins、E. Sharpe、T. Vandermeulen 和 X. Yu, 《关于规范化不可逆对称性的笔记。第一部分：无重数情形》, 《高能物理学杂志》02 (2024) 154 [2311.16230].[72] A. A. Kirillov, 《李群与李代数导论》, 剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，剑桥，2008.[73] A. Davydov、M. Mueger、D. Nikshych 和 V. Ostrik, 《非退化编织融合范畴的 Witt 群》, 2010, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119165523.[74] E. Rowell、R. Stong 和 Z. Wang, 《模张量范畴的分类》, 《数学物理通讯》292 (2009) 343 [0712.1377]。

[75] *A. N. Schellekens* 和 *S. Yankielowicz*，《简单流、模不变量与不动点》，国际现代物理学杂志 *A 5 (1990) 2903*.[76] *B. Gato-Rivera* 和 *A. N. Schellekens*，《*(Z(p))**k* 的简单流模不变量的完整分类》，《数学物理通讯》*145 (1992) 85*.[77] *T. Bartsch*、*M. Bullimore* 和 *A. Grigoletto*，《扩展算子的高阶表示》，*2304.03789*.[78] *M. Henningson* 和 *N. Wyllard*，《$N = 4$ *SYM* 在 *T**3* 上的束缚态：*Spin(2n)* 与例外群》，《高能物理学杂志》*07 (2007)* 084 [0706.2803].[79] *J. Bockenhauer*，《一级 *Wess-Zumino-Witten* 模型的代数表述》，《数学物理评论》*8 (1996)* 925 [*hep-th*/9507047].[80] *C.-y. Dong*、*H.-s. Li* 和 *G. Mason*，《轨形理论中迹函数的模不变性》，《数学物理通讯》*214 (2000)* 1 [*q-alg*/9703016].[81] *R. Volpato*，《顶点代数、拓扑缺陷与月光》，*2412.21141*.[82] *H. Weber*，《代数学教程》，第三卷。*Friedrich Vieweg und Sohn*，不伦瑞克，*1908*.[83] *W. Ji* 和 文小刚，《不可逆反常与反常配分函数的映射类群变换》，物理评论·研究 *1 (2019)* 033054 [1905.13279].[84] *Y.-Z. Huang*，《顶点张量范畴的刚性与模性》，《当代数学通讯》*10 (2008)* 871 [*math*/0502533].[85] *A. Davydov* 和 *T. Booker*，《*Fibonacci*范畴中的交换代数》，*1103.3537*.[86] *R. McRae*，《顶点算子代数模范畴的 *Deligne* 张量积》，*2304.14023*.[87] *R. McRae*，《陪集顶点算子代数的一般镜像等价定理》，中国科学：数学 *67 (2024)* 2237 [2107.06577].[88] *Y.-J. Chu* 和 *Z.-J. Zheng*，《顶点算子代数中 *embedding* d_8 *into* e_8 的类比》，*0808.1458*.[89] *R. C. Slansky*，《统一模型构建的群论》，《物理学报告》*79 (1981) 1*.[90] *S. Okubo*，《克利福德代数的表示及其应用》，《日本数学杂志》*41 (1995) 59*[*hep-th*/9408165].[91] *T. W. Grimm* 和 *T. Weigand*，《全局 *F* 理论大统一理论中的阿贝尔规范对称性与质子衰变》，物理评论 *D 82 (2010)* 086009 [1006.0226].[92] *D. N. Dinh*、*D. T. Huong*、*N. T. Duy*、*N. T. Nhuan*、*L. D. Thien* 和 *P. Van Dong*，《翻转三分化中的味改变》，物理评论*D 99 (2019)* 055005 [1901.07969].[93] *K. S. Babu*、*B. Bajc* 和 *V. Susˇ c*，《E_6 对称性破缺产生的三分化》，《高能物理学杂志》*07 (2023)*011 [2305.16398]。

[94] C. C´ordova、P.-S. Hsin 和 K. Ohmori，例外陈-西蒙斯-物质对偶，*SciPostPhys.***7** (2019) 056 [1812。11705]。[95] S. Mukhopadhyay 和 R. Wentworth，曲线上的广义 *theta* 函数、奇异对偶与奇正交丛，1608.04990。[96] M. D. Hirschhorn、F. G. Garvan 和 J. M. Borwein，雅可比 *theta* 函数的三次类比 $\theta(z, q)$，加拿大数学杂志**45** (1993年) 673。[97] W. Fulton 和 J. W. Harris，表示论：入门课程，1991，https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118744956。