arXiv:2602.02715v1 [math.AP] 2 Feb 2026

聚焦型非线性波动方程常微分方程型爆破曲面的散射与稳定性

Istvan Kadar[1] 与Warren Li[2,3]

[1]苏黎世联邦理工学院数学系，*Rämistrasse 101*，*8006*苏黎世，瑞士[2]斯坦福大学数学系，*450 Jane Stanford Way 380*号楼，斯坦福，加利福尼亚州*94305*，美国[3]剑桥大学三一学院，剑桥*CB2 1TQ*，英国

2026年2月4日

摘要

我们研究任意时空维数的闵可夫斯基空间中任意幂次的聚焦型幂次非线性波动方程。我们完整地阐明了在类空超曲面上呈现常微分方程型爆破 的解的局部稳定性与散射理论（二者均在高正则性空间中），其中每一点的爆破由显式解 $\phi_{\mathrm{model}} = c_p t^{-\alpha_p}$刻画。

给定一个充分正则的类空超曲面 Σ_f，以及辅助散射数据ψ，我们构造出非线性波动方程的唯一对应解，使其在 Σ_f 上局部形成常微分方程型奇点，并以 ψ 作为散射数据。反过来，我们证明，这类常微分方程型奇点对于奇点之外适当正则的扰动是局部稳定的；在此类扰动之后，爆破曲面和散射数据仍保持正则，并连续依赖于这些扰动。

目录

1 引言 **2**

1.1 聚焦半线性波动方程背景.3 1.2 相关方程.5 1.3 证明思路.5 1.4 精确陈述.8 1.5 展望与概述.10

2 几何与分析框架 **11**

2.1 散射构造的框架.12 2.2 稳定性问题的框架.13 2.3 两种几何设定的比较.16

3 散射构造：定理 1.1 的证明 **18**

3.1 线性与非线性算子的映射性质.18 3.2 奇异拟设.19 3.3 能量估计与非线性解.20

4 稳定性：定理 1.2 的证明 **24**

4.1 雅可比系数的交换波动方程.24 4.2 自举假设与能量估计.28 4.3 插值与输运估计.30 4.4 散射数据的恢复.33

5 局部稳定性与正则性 36

1 引言

本文研究聚焦非线性波动方程

$$P[\phi] := \Box\phi + |\phi|^{p-1}\phi = (-\partial_t^2 + \Delta_x)\phi + |\phi|^{p-1}\phi = 0, \tag{1.1}$$

对于闵可夫斯基空间（$\mathbb{R}^{n+1}, \eta$）中任意空间维数 $n \geq 1$ 下的任意指数 $p > 1$，众所周知，(1.1) 可能在有限时间内形成奇点，其显式齐次解为

$$\phi_{\text{model}} = c_p t^{-\alpha_p}, \quad \text{where } \alpha_p = \frac{2}{p-1},\ c_p^{p-1} = \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}. \tag{1.2}$$

此类解通常称为在超平面 $\{t = 0\}$ 上发生常微分方程型爆破。通过庞加莱变换，可以直接证明存在这样一种解：它在任意类空超平面上形成奇点，且时间方向既可以向前，也可以向后。也就是说，对于 $|\mathbf{v}| < 1$ 和 $T \in \mathbb{R}$，我们可以构造如下形式的解

$$\phi = c_p(1 - |\mathbf{v}|^2)^{\frac{1}{p-1}} \cdot (T \pm t - \mathbf{v} \cdot x)^{-\alpha_p}.$$

本文旨在实现两个相关目标。首先，我们将存在性结论推广，证明对于任意给定的光滑类空超曲面，都存在一个在其上爆破的 (1.1) 的解；事实上，我们通过辅助散射数据刻画所有此类解。其次，我们证明，此类常微分方程型爆破解在远离奇点的类空超曲面上，对其诱导的柯西数据的扰动具有稳定性；特别是，经过此类扰动后，爆破曲面和辅助散射数据仍保持正则，并接近其初始值。

为了陈述我们的定理，先引入以下量会很有帮助：β_p，γ_p 和 κ_p，

$$\beta_p = \frac{2p}{p-1}, \quad \gamma_p = \beta_p(\beta_p - 1) = \frac{2p(p+1)}{(p-1)^2}, \quad \kappa_p = \frac{\beta_p + \alpha_p}{2} = \frac{p+1}{p-1}. \tag{1.3}$$

我们还使用记号 $\mathbb{B}_r(x)$ 表示欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $r > 0$、中心为 x的球，以及 $\mathbb{B}_r = \mathbb{B}_r(0)$。接下来给出我们的第一个主要结果。

定理 *1.1*（定理 *1.4* 的粗略版本）。设 $s \geq s_0 := 30\kappa_p + \frac{n+1}{2} + 5$ 且 $f \in H^s(\mathbb{B}_3), \psi \in H^{s-\lfloor 2\kappa_p \rfloor}(\mathbb{B}_3)$，其中 $|\partial f| < 1/10$ 且 $f(0) = 0$。令 $t = t - f(x)$。那么存在 $t_1 \in (0, 1)$，其取决于 $\|f\|_{H^{s_0}(\mathbb{B}_3)}$ 和 $\|\psi\|_{H^{s_0-\lfloor 2\kappa_p \rfloor}(\mathbb{B}_3)}$，以及方程 *(1.1)* 的一个奇异解 $\phi \in C^{s-\frac{n+1}{2}-12\kappa_p}(M_{\mathbf{t}_1})$，定义在区域 $M_{\mathbf{t}_1} = \{|x|/2 < 1 - t : t \in (0, t_1)\}$ 内，并在 $t = 0$ 时取 (ψ, f) 作为“初始数据”，如定义 *2.1* 所定义。

特别地，ϕ 在超曲面 $\Sigma_f = \{t = f(x)\}$ 处形成一个常微分方程型奇点

$$\phi = (1 - |\partial f|^2)^{\frac{1}{p-1}} \cdot c_p \mathbf{t}^{-\alpha_p} + o(\mathbf{t}^{-\alpha_p}), \qquad as\ \mathbf{t} \to 0. \tag{1.4}$$

图*1*给出了直观示意。

为简洁起见，我们暂时省略了式 (1.4) 中用于确定 ϕ 的数据 ψ 的具体方式。在第 1.3 节中，我们将讨论这一项对于式 (1.1) 的空间齐次（因而是常微分方程）类比的意义，并请读者参见式 (1.21) 了解精确的渐近行为。

关于奇点稳定性的第二个结果，我们首先给出针对模型爆破解 (1.2) 的扰动的定理；该解在 $t = 1$ 处诱导出柯西数据 $\phi = c_p$ 和 $\partial_t\phi = -\alpha_p c_p$。更一般的结果见推论 1.6。

定理 1.2（定理 1.5 的粗略版本）。存在 $\epsilon_* > 0$，使得对所有 $0 < \epsilon < \epsilon_*$，以下结论成立：假设 $s \geq s_0 := 202\kappa_p + \frac{n}{2} + 2$，并令 $(\phi_0, \phi_1) \in H^{s+2}(\mathbb{B}_6) \times H^{s+1}(\mathbb{B}_6)$，使得

$$\|\phi_0 - c_p\|_{H^{s_0+2}} + \|\phi_1 + \alpha_p c_p\|_{H^{s_0+1}} \leq \epsilon. \tag{1.5}$$

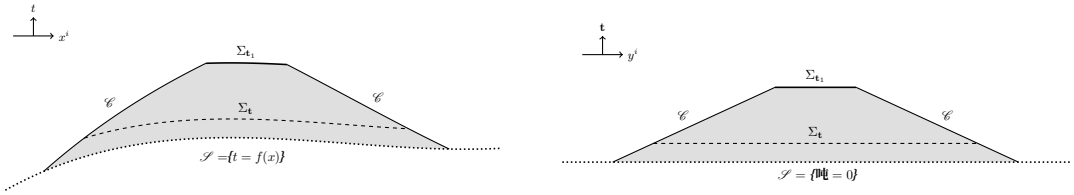

图*1*：定理 *1.1* 的示意图。我们证明了在阴影区域内存在一个满足 (1.1) 的解；左图展示的是以 (t,x) 为坐标的区域，右图展示的是变换后的以 $t = t - f(x)$ $y^i = x^i$ 为坐标的区域。该区域的过去边界满足：解 ϕ 在 $\{t = f(x)\}$ 上发生常微分方程爆破，并具有适当的散射数据 ψ。

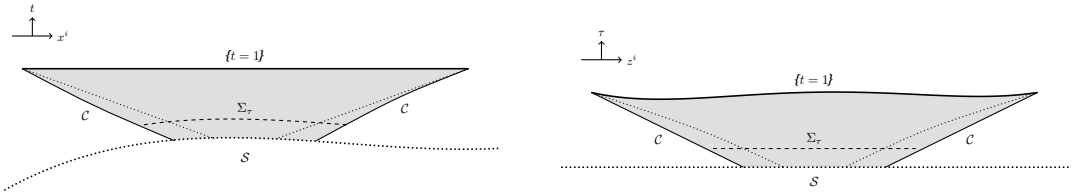

图*2*：一个示　　定理 *1.2* 的示意图。我们证明，在 $\{t = 1\}$ 处对模型常微分方程爆破解数据进行正则扰动，只会对（过去）奇异边界 $\mathscr{S}$ 产生扰动性影响。

考虑具有初始数据 $\phi|_{t=1} = \phi_1$ 和 $\partial_t\phi|_{t=1} = \phi_0$ 的方程 (1.1) 的解 ϕ 。那么存在函数 f, $\psi \in H^{s-202\kappa_p}(\mathbb{B}_4)$，使得 ϕ 可以延拓到区域 $M = \{|x| < 3(1+t)\ f(x) < t \leq 1\}$，并在类空超曲面 $\Sigma = \{t = f(x)\} \cap M$ 上呈现常微分方程型爆破，且具有辅助散射数据 ψ。图 *2* 展示了示意图。

在全文中，我们将定理 1.1 称为散射构造，将定理 1.2 称为稳定性问题。注意，由于主方程（1.1）具有时间反射对称性，这些构造同样适用于超曲面未来或过去的奇点，其中初始数据定义在该超曲面上。

1.1 聚焦半线性波的背景

方程（1.1）有着悠久的发展历史，无法在此详尽回顾，因此我们主要关注常微分方程型奇点的形成研究；有关更多细节，请参见 [Str90；Tao06；HR12；Col18；CMZ19；DK+22；Don24]以及其中的参考文献。

给定方程（1.1）的一组光滑柯西数据，并假设其在有限时间内（未来或过去）形成奇点，可以定义 $\mathcal{D}$ 为最大存在域，并将 $\Sigma^{\pm} = \partial^{\pm}\mathcal{D}$ 的未来边界和过去边界分别定义为相应边界。下面我们将详细讨论 $\Sigma^{\pm}$ 的几何学。一般而言，目前仅知 $\Sigma^{\pm}$ 具有利普希茨正则性（[Ali95]），见图 3。为便于说明，以下讨论将重点放在 $\Sigma = \Sigma^{+}$ 上，而过去边界 Σ^{-} 则完全类似。

我们将 $\mathscr{S} \subset \Sigma$ 记为 Σ的类空部分，它由局部 Lipschitz 常数严格小于[1] 1 的点构成。不难看出，任意两点 p_1，$p_2 \in \mathscr{S}$ 都会在奇点出现之前的有限时间内变得因果不连通，因此从几何意义上说，我们无法区分爆破解是否先发生在 p_1 还是 p_2，即使按照通常的闵可夫斯基时间坐标，我们可以对这些点进行排序。因此，应当认为 $\mathscr{S}$的连通分支同时形成其奇点。

[1]假设 Σ 具有更高的正则性，例如 C^1，那么很容易看出，该条件等价于通常的要求：法向量是类时的。

我们还引入 Σ中的非特征点，按照 [MZ03], 的定义，它们是满足以下性质的点 $(t_1, x_1) \in \mathscr{R} \subset \Sigma$：存在一个截断的类空锥，$\{(t-t_1) = \epsilon|x-x_1|, t_0 < t < t_1\}$，对于某个 $\epsilon < 1$，该锥包含于存在域 $\mathcal{D}$中。先验地，我们有包含关系 $\mathscr{S} \subset \mathscr{R}$。

在一维情形下，文献 [MZ03; MZ08; MZ12; CZ13] 表明，$\mathscr{R}$ 是 Σ 的 C^1 正则开子集，且特征点 $\mathscr{R}^c = \Sigma \setminus \mathscr{R}$ 构成一个离散集。此外，成立 $\mathscr{I} = \mathscr{R}$，即所有非特征点都是类空的。在 [Nou08], 中，$\mathscr{R}$ 的 C^1 正则性被提升为具有 $C^{1,\alpha}$正则性，对某个 $\alpha > 0$。特别地，他们证明：

定理 1.3 ([MZ08; Nou08])。 设 ϕ 是*(1.1)*的有限能量解，即：$(\phi|_{t=0}, \partial_t\phi|_{t=0}) \in \dot{H}^1 \times L^2$，其最大存在域为$D$。则最大存在边界 $\Sigma^+ = \partial^+ D$是一条非空的利普希茨曲线，其特征点构成 Σ 的一个离散子集，且 Σ 的非特征部分是开的，并对某个 $\alpha > 0$是 $C^{1,\alpha}$ 正则的。

尽管已有研究 [MZ16; MZ15] 证明，在对 p 和 n施加次共形限制时，模型常微分方程爆破解的扰动也有类似结果，但高维情形下 $\mathscr{S}$ 的现象学要丰富得多。

例如，我们简要指出，对于 (1.1)，图 3 所示的许多奇点确实会出现在较高的空间维数中。特别是，存在非特征、非类空奇点，其局部形状为某一点的未来光锥。例如，对于 $d \geq 5$，$p = 3$ 存在 $c_1(d)$ $c_2(d) > 0$，使得 (1.1) 有如下自相似解，其中 Σ^+ 是从 (0，0) $\in \mathbb{R}^{d+1}$发出的闵可夫斯基未来光锥，见 [GS21]。

$$\phi = \frac{1}{t} \cdot \frac{c_1(d)}{1 + c_2(d)|x|^2 t^{-2}}. \tag{1.6}$$

这些解在 $d = 7$ 下的（余维一）稳定性也在 [GS21], 中得到研究；此外，[CGS24]还研究了 $p = 2$ 情形下的一个类似例子。有人认为，这些解是稳定的常微分方程爆破区域与色散区域之间的阈值解 [GMS20]。我们称它们为局部裸奇点——沿用 [Van23] 的说法——这是因为存在柯西视界[2], ，意味着类时观察者可以离开初始数据的依赖域，尽管解仍足够正则，能够保证沿观察者轨迹的局部适定性[3] 。预计 [KST09; HR12] 中构造的快于自相似的奇点也属于这一类。

在定理 1.1 中，我们关注于构造具有任意光滑 $\mathscr{S}$ 区域的解。在[KL93] 中，已经证明 $\Box\phi = -e^{\phi}$ 方程可以将任意解析类空超曲面作为爆破区域。随后，这一结果被推广到有限索伯列夫正则性，并进一步推广到（1.1）的三次 $p = 3$ 情形以及其他非线性项，[Kic07，第 10]章。在这项工作中，Kichenassamy 还利用散射数据的概念和纳什-莫泽定理证明了定理 1.2 的对应结果。在 1 维情形，Kilip-Visan [KV11]证明了（1.1）在有限正则性下的一般构造。在高维情形，许多情形同样已得到研究，甚至包括 $p \notin \mathbb{N}$ [CMZ19；CMZ20]。

上述一些工作是在低正则性框架下进行的（初始数据属于能量类）。因此限制了构造所能涵盖的 p 范围，相比之下，我们在高正则性框架下开展工作，这一选择的动机来自我们在定理 1.2 的稳定性问题中能够证明的相应正则性。也就是说，定理 1.1 得出了任意维数和幂次 p下、在 C^N 类中针对 $N \gg 1$的类空奇性形成构造。

另一方面，在定理 1.2 中，我们关注的是，当把 (1.1) 的初始数据扰动到远离 Σ 时，爆破曲面 $\mathscr{S}$ 的稳定性 与正则性 性质。我们注意到，单个爆破点的稳定性此前已在 [DS12; DS14; DS16; CD19], 中得到研究，并以 [Ost24] 中对所有 $p > 1, d \in \mathbb{N}$ 成立的结果作为结论。然而，这些工作仍未阐明爆破曲线 Σ 的稳定性性质，尤其没有证明整条曲线仍保持接近原来的 $\mathscr{S}$。此前唯一表明后一性质的工作是 [MZ08; Nou08] ，针对

[2]我们指出，尽管显式解 (1.6) 在 $\{r = t\}$ 上光滑，但保留这一整体图景的扰动解在穿过该超曲面时，其正则性可能有限。[3]对于方程 (1.1)，目前尚不知道是否存在更强的零奇点，使得穿过这些奇点时适定性失效。

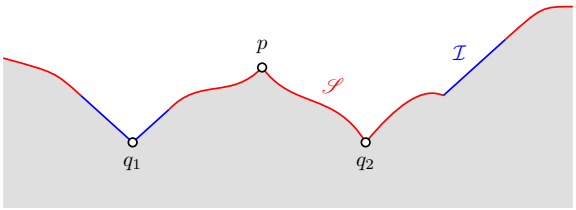

图*3*：奇异曲面 Σ^+ 可能的先验结构，解存在于灰色区域内。红色部分表示类空部分 $\mathscr{I}$；蓝色部分表示零段。我们还在 Σ^+ 中标出了一个特征点 p，而 q_1 和 q_2 则分别是非特征奇点和非类空奇点的例子。

$d = 1$，其中稳定性在 $C^{1,\alpha}$ 类中得到证明，至少对于能量类 $\dot{H}^1 \times L^2$ 中的初始数据扰动而言。

定理 1.2 中，对于充分正则的“背景”奇异解的高正则性扰动，我们证明，对于任意 $N \geq 0$、所有时空维数 $d \geq 1$ 以及任意幂次 $p > 1$，爆破曲线都与原始爆破超曲面 $\mathscr{I}$ 保持 C^N-接近。特别地，对于模型常微分方程爆破解的光滑扰动，所得爆破曲线是我们起初所考虑的常数 t-超曲面的光滑扰动。

1.2 相关方程

我们简要回顾相关非线性波动方程中的奇性形成。许多半线性方程中都存在常微分方程爆破的类似现象，并且很可能也有与定理 1.1 和定理 1.2 类似的结果，例如 $\Box\phi = \pm(\partial_t\phi)^2$ 或 $\Box\phi = F(\phi)|\nabla\phi|_\eta^2$。但我们指出，对于许多其他研究充分的半线性波动方程，例如（双曲型）杨–米尔斯方程或波映射方程 [4]，目前尚不清楚是否会发生类空奇性形成。

事实上，非线性波动方程中研究最深入的类空奇性形成案例，是可能与适当物质模型耦合的爱因斯坦方程；例如参见 [FRS23; FL20; Li24; LV25], 。此处预期的行为在现象学上丰富得多，超出了本文的讨论范围，参见 [Luk23]。尤其是，即使局限于空间齐次情形，相关常微分方程也能产生有趣而非平凡的行为，在某些情形下甚至会呈现混沌行为 [BKL71; Rin01]。

关于上述相关方程中的其他类型的奇性形成，无论是（渐近）自相似奇性形成，还是快于自相似的奇性形成，都有大量文献。对于从 $\mathbb{R}^{d+1}$ 到 $\mathbb{S}^d$ 的 $d \geq 3$波映射方程，已知有显式自相似解 [Sha88; BB15]，它们除奇点 (0，0) 外均光滑，其情形与 (1.6) 类似。也就是说，对于这一解，Σ 由一个非特征点和一个光滑零锥构成，解可以沿该零锥光滑延拓。[BDS21]的工作表明，Σ 的这种几何结构是稳定的，因此，与本文研究的聚焦波动方程相比，这是奇性形成的“典型”形式。[MR+22b]还发现了欧拉方程的自相似解。对于许多其他双曲型问题，也已证明存在快于自相似的奇性形成，例如 [KST08; RR12]。关于更一般演化方程的奇性形成，请读者参阅 [RS14; MR+22a; Kim24] 及其中的参考文献。

1.3 证明思路

我们通过如下常微分方程问题来说明证明中的许多思想；该问题对应于 (1.1) 的空间齐次解，所用方法可转化到偏微分方程框架中：

$$\partial_t^2\phi = \phi^p. \tag{1.7}$$

[4]在空间齐次性的假设下，波映射可化为描述测地线运动的方程；对于闭目标流形，不存在常微分方程爆破，因此可以预期不会出现“类空”奇点。对于所有由具有非负能量泛函的哈密顿系统导出的方程，情况也类似。

注意，模型解 (1.2) 也是该常微分方程的一个解。

接下来，将 $\phi = c_p t^{-\alpha_p} + \psi t^{\beta_p}$ 视为拟设，其中 $\psi \in \mathbb{R}$，我们注意到，只有在 (1.3) 中定义的指数 β_p 才会产生可能的低阶扰动。形成奇点的一般解可以写为

$$\phi = c_p(t-t_0)^{-\alpha_p} + \psi(t-t_0)^{\beta_p} + \mathcal{O}((t-t_0)^{\beta_p'}), \quad \beta_p' \coloneqq -\alpha_p + (\lfloor 2\kappa_p + 1 \rfloor + 2\kappa_p)/2. \tag{1.8}$$

这里，$t_0 \in \mathbb{R}$ 是爆破时间，$\psi \in \mathbb{R}$ 是其余的散射数据，而 $\mathcal{O}$ 项关于 $t\partial_t$具有无限正则性，这意味着对于所有 $N \in \mathbb{N}$，其余误差项的 $(t\partial_t)^N$ 阶导数以 $O((t-t_0)^{\beta_p'})$的速率衰减。

我们类比定理 1.1 的散射构造，讨论如何构造具有 (1.8) 形式的解。我们固定 $t_0 = 0$，并令 $\psi \in \mathbb{R}$ 保持任意。记 $\phi = \phi_0 + \bar{\phi} = c_p t^{-\alpha_p} + \bar{\phi}$，常微分方程 (1.7) 化为

$$(\partial_t^2 - \gamma_p t^{-2})\bar{\phi} = \mathcal{N}[\bar{\phi}], \quad \text{where } \mathcal{N}_{\phi_0}[\bar{\phi}] = \phi^p - c_p^p t^{-p\alpha_p} - \gamma_p t^{-2}\bar{\phi}. \tag{1.9}$$

注意到 $\mathcal{N}_{\phi_0}$ 在 $\bar{\phi}$ 上对 $|\bar{\phi}/\phi_0| < 1/2$光滑，并且按二次阶消失：$|\mathcal{N}_{\phi_0}[\bar{\phi}]| \lesssim t^{-2+\alpha_p}\bar{\phi}^2$.

拟设： 散射构造的第一步是，对于固定的 ψ，任意给定 $N \in \mathbb{R}$，都可以构造形如 (1.8) 的近似解 $\phi_N \in C^\infty((0,1))$，使其满足

$$f_N \coloneqq \partial_t^2 \phi_N - \phi_N^p = \mathcal{O}(t^N). \tag{1.10}$$

粗略地说，这是因为首先将 $\bar{\phi} = \psi t^{\beta_p}$ 代入 (1.9) 会产生一个非齐次项$\mathcal{N}[\psi t^{-\beta_p}] = O(t^{\beta_p'})$。但是，由于对于形如 t^a且满足 $a > \beta_p$的函数，(1.9) 左端的线性化算子可逆，我们可以反复修正非线性项，直到误差达到 $O(t^N)$。特别地，我们注意到以下计算

$$(\partial_t^2 - \gamma_p t^{-2})t^q = \big(q(q-1) - \gamma_p\big)t^{q-2}, \tag{1.11a}$$

$$(\partial_t^2 - \gamma_p t^{-2})t^{\beta_p}\log t = (2\beta_p - 1)t^{\beta_p - 2}. \tag{1.11b}$$

精确解： 给定一个满足 (1.10) 的近似解 ϕ_N，当 N 足够大时，通过能量估计可得到一个实际解 ϕ。记 $\phi = \phi_N + \bar{\phi}$，于是

$$(\partial_t^2 - \gamma_p t^{-2})\bar{\phi} = \Big(f_N + \mathcal{N}_{\phi_N}[\bar{\phi}] - \underbrace{(p\phi_N^{p-1} - \gamma_p t^{-2})}_{\mathcal{O}(t^{-2+2\gamma_p})}\bar{\phi}\Big). \tag{1.12}$$

其中，非线性项 $\mathcal{N}_{\phi_N}[\bar{\phi}]$ 定义为 $\mathcal{N}_{\phi_N}[\bar{\phi}] = \phi^p - \phi_N^p - p\phi_N^{p-1}\bar{\phi}$，并满足二次界 $|\mathcal{N}_{\phi_N}[\bar{\phi}]| \lesssim t^{-2+\alpha_p}|\bar{\phi}|^2$。

现在，我们可以通过极限论证构造 ϕ。用截断函数 $\chi(t/2^{-n})$ 截断 f_N，并对 $t \ll 2^{-n}$ 求解 (1.12)，指定 $\bar{\phi} = 0$，证明诸如 $\bar{\phi} = \mathcal{O}(t^N)$ 的一致估计，然后取 $n \to \infty$ 并使用适当的紧性论证。

为了得到这样的一致估计，可以：(i) 将 (1.12) 乘以 $t^{-q}\partial_t\phi$ 并进行分部积分，然后 (ii) 对 $\alpha\partial_t(t^{-q-2}\bar{\phi}^2)$ 进行分部积分，从而得到

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} t^{-q-1}q(\partial_t\bar{\phi})^2 - t^{-q-3}(q+2)\gamma_p\bar{\phi}^2 + \big[t^{-q}(\partial_t\bar{\phi})^2 - \gamma_p t^{-q-2}\bar{\phi}^2\big]_{t_0}^{t_1} &= \int_{t_0}^{t_1} t^{-q}\bar{f}_N\partial_t\bar{\phi}, \\ \alpha\int_{t_0}^{t_1} t^{-q-3}(q+2)\bar{\phi}^2 - 2t^{-q-2}\bar{\phi}\partial_t\bar{\phi} + \big[\alpha t^{-q-2}\bar{\phi}^2\big]_{t_0}^{t_1} &= 0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 f_N 是 (1.12) 的右端。取 $q > 2\beta_p$，使得 $q(q+2) > 16\gamma_p$，并可选取满足 $4\alpha^2 < q(q+2)(\alpha - \gamma_p)$ 的 α。将这两个方程按此选择相加，可在左端得到对 ϕ 的强制性控制。利用柯西-施瓦茨不等式，可得到关于 f_N 的控制。

¯ ¯应用索伯列夫嵌入，只要 t_1 足够小，我们还可以将依赖于 f_N 的项 ϕ 吸收到左¯端。因此，我们得到 ϕ 的一致有界性，并由紧性可得解的存在性。

最后请注意，我们可以对 (1.12) 施加 $t\partial_t$ 进行对易；由于 f_N 关于这些向量场具有额外的正则性，ϕ 也具有这种正则性。

唯一性： 假设存在两个解 ϕ_1，ϕ_2 它们具有相同的爆破时间 $t_0 = 0$，且¯散射数据 ψ。根据构造，ϕ_1 的拟设部分，ϕ_2 必定相同。记 $\phi = \phi_1 - \phi_2$，我们得出，对于任意 N，$\bar{\phi} = \mathcal{O}(t^N)$。然后，我们写出

$$(\partial_t^2 - \gamma_p t^{-2})\bar{\phi} = (\phi_1 + \bar{\phi})^p - \phi_1^p - p\phi_1^{p-1}\bar{\phi}, \tag{1.14}$$

并应用 (1.13) 中的能量估计，得到

$$\left\| t^{-N}\bar{\phi} \right\|_{L^2(0,t_1)} \lesssim \left\| t^{-N+1}\bar{\phi} \right\|^2_{L^2(0,t_1)}. \tag{1.15}$$

¯取 t_1 充分小，可得 $\phi = 0$。定理 1.1 的证明概要至此完成。

关于没有散射数据的解： 为便于与文献中的先前工作（例如 [CMZ19；CMZ20]）进行比较，我们介绍一种替代方法，以构造在 $t = 0$ 处形成常微分方程型奇点的 (1.7) 的非唯一解。我们可以将线性化 (1.9) 写为

$$t\partial_t t^{2\beta_p - 1} t\partial_t t^{-\beta_p}\bar{\phi} = t^{\beta_p + 1}\bar{f}, \tag{1.16}$$

其中 $\bar{f} = \mathcal{N}[\bar{\phi}]$。注意，左侧线性化算子的核由 $\{t^{\beta_p}, t^{-\beta_p+1}\}$ 张成，其中 $\beta_p - 1 > \alpha_p$。对带有 $c < \alpha_p$ 的情形，求解 (1.16) 中的 $\bar{f} = \mathcal{O}(t^{-c-2})$，并寻找一个使 $t^{-\beta_p+1}$ 部分消失的解 $\bar{\phi}$，可得

$$t\partial_t t^{-\beta_p}\bar{\phi} = t^{-2\beta_p+1}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\bar{t}}\bar{t}^{\beta_p+1}\bar{f}(\bar{t}) = \mathcal{O}(t^{-c-\beta_p}). \tag{1.17}$$

¯在某个 t_1 时刻为 ϕ 设定初始数据，可得

$$\phi = t^{\beta_p}(t^{-\beta_p}\phi)|_{t=t_1} - \int_t^{t_1}\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\tilde{t}}\tilde{t}^{-2\beta+1}\int_0^{\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\bar{t}}\bar{t}^{\beta_p+1}\bar{f}(\bar{t}), \tag{1.18}$$

其中第二部分属于 $\mathcal{O}(t^{-c})$。利用 $\mathcal{N}: \mathcal{O}(t^{-c}) \to \mathcal{O}(t^{-c-2+(\alpha_p-c)})$ 对于 $c < \alpha_p$，可以据此构造一个在 0 处形成奇点的（非唯一）解。

稳定性： 接下来，我们将说明如何证明，对远离 $t = t_0$ 的扰动，形如 (1.8) 的奇性形成具有稳定性，也就是定理 1.2 的齐次类比。我们不直接研究 (1.7)，而是引入由 $c_p\tau^{-\alpha_p} = \phi$ 隐式定义的变量 τ，以及量 $\mathring{\Omega}^2 = (\partial_t\tau)^2 - 1$。对于这类量，展开 (1.8) 意味着

$$\tau = (t - t_0) - \frac{\psi}{\alpha_p c_p}(t - t_0)^{2\kappa_p+1} + \mathcal{O}((t - t_0)^{2\kappa_p+2}), \tag{1.19a}$$

$$\text{and} \quad \mathring{\Omega}^2 = -\frac{2\psi(2\kappa_p + 1)}{c_p\alpha_p}t^{2\kappa_p} + \mathcal{O}(t^{2\kappa_p+1}). \tag{1.19b}$$

利用 (1.7) 进行直接计算可得方程

$$\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\mathring{\Omega}^2 = 2\kappa_p\mathring{\Omega}^2, \tag{1.20}$$

由此可知，$\mathring{\Omega}^2$ 实际上是 $\tau^{2\kappa_p}$ 的整数倍，记为 $\hat{\psi}\tau^{2\kappa_p}$。这意味着

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \sqrt{1 + \hat{\psi}\tau^{2\kappa_p}},$$

通过应用适当的反函数定理，可以用它恢复 (1.19a) 和 (1.19b)，其中 t_0 和 ψ 与远离奇点处 $\tau(t)$ 的（受扰动）初始数据具有适当的关联。

克服导数损失：在定理 1.2 研究的偏微分方程问题中，我们研究的不只是常微分方程 (1.20)，而是一个偏微分方程，我们将其简化示意为

$$\tau\partial_\tau\mathring{\Omega}^2 = 2\kappa_p\mathring{\Omega}^2 + \tau\partial_z J,$$

这里预期 J（它表示从 $(t,\ x)$ 坐标到 $(\tau,\ x)$ 坐标的变换的雅可比矩阵的分量）是光滑且有界的。因此，从常微分方程的角度来看，这个附加项是 $\mathcal{O}(\tau)$，属于“好的误差项”。

然而，误差项中出现 ∂_z 这一事实意味着，我们必须先“克服导数损失”，并论证为何可以将这一项估计为 $O(\tau)$。这是通过能量估计，利用我们暂且简化示意为以下形式的方程来完成的

$$\partial_\tau^2\partial_z J = \kappa_p\tau^{-2}\mathring{\Omega}^2\partial_z J + \kappa_p J\tau^{-1}\partial_\tau\partial_z J + \cdots.$$

在稳定性问题中，我们必须在 τ 中向后积分这样的方程。事实上，我们使用一个 $\tau^q\partial_\tau$ 乘子并进行分部积分，以证明当 $q > 0$ 取得足够大时，$\tau^q\partial_z J$ 有界。

遗憾的是，这还不足以证明我们先前所期望的 $\tau\partial_z J = O(\tau)$。相反，我们通过证明可以使用类似的能量估计来说明 $\tau^q\partial_z^K J$ 有界，从而完成论证，其中 $q > 0$ 的选取与阶数 K 无关。随后，我们可以通过插值论证，用 J 和 $\partial_z^K J$ 来估计 $\partial_z J$，从而得到 $\tau\partial_z J = O(\tau^{1-\frac{q}{K}})$；只要 K 取得足够大，从常微分方程的角度看，这也是一个“好的误差项”。至此，我们大致完成了对定理 1.2 的证明思路概述。

1.4 精确陈述

下面精确陈述定理 1.1 和定理 1.2，并说明附加散射数据 ψ 所起的作用。

定理 1.4. 设 $s, f, \psi, \mathbf{t}, \mathbf{t}_1, M_{\mathbf{t}_1}$ 如定理 *1.1* 中所述，并且 $\Sigma_{\tilde{\mathbf{t}}} = \{\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}}\} \cap M_{\mathbf{t}_1}$。则存在一个满足以下渐近行为的方程 *(1.1)* 的唯一解：

$$\phi = \phi_0 + \mathbf{t}^{-\alpha_p}\sum_{1\le j\le\lfloor 2\kappa_p\rfloor}\mathbf{t}^j H^{s-j}(\Sigma_{\mathbf{t}}) + \psi\mathbf{t}^{\beta_p} + \mathfrak{e} + \begin{cases}\mathbf{t}^{\beta_p}\log\mathbf{t}\, H^{s-2\kappa_p}(\Sigma_{\mathbf{t}}) & \text{if } 2\kappa_p\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{if } 2\kappa_p\notin\mathbb{N}\end{cases} \tag{1.21}$$

其中 $\phi_0 = c_p(1-|\partial f|^2)^{\frac{1}{p-1}}\mathbf{t}^{-\alpha_p}$ 且 $\mathfrak{e}\in\mathbf{t}^{\beta_p'}L^\infty((0,\mathbf{t}_1);\, H^{s-12\kappa_p}(\Sigma_{\mathbf{t}}))$，其中某个 $\beta_p' > \beta_p$。

注 1.1（存在区间）。尽管模型常微分方程解 (1.2) 在区域 $\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}$中对任意 $\mathbf{t}_1 > 0$ 值都存在（即它在未来方向上全局存在），但很容易论证，当 ψ 和 $|\partial f|$取较大值时，预计会出现退化 $\mathbf{t}_1 \to 0$。即使在空间齐次情形下，当$f \equiv 0$ 和 $\psi \equiv \psi_{\text{const}} \neq 0$时，也可以利用常微分方程 (1.7) 得出存在时间按$\mathbf{t}_1 \sim \psi^{\frac{1}{p-1}}$常数的尺度变化。

注记 1.2（正则性）。定理 1.4 中导数的数量远非最佳，我们预计仅在本文的框架内就能达到更小的数值。此外，请注意，式 (1.21) 中构造的解具有 $s - 12\kappa_p$ 正则性，而我们要求 $s > 30\kappa_p + \frac{n+1}{2} + 5$。这种差异源于我们证明唯一性的方式。

注记 1.3（无散射数据的解）。 请注意，在定理 1.4 中，我们需要使用 $s \sim (p-1)^{-1}$ 个导数，因为 $p \to 1$。沿用与 [CMZ19], 类似的方法，即使在 $p \to 1$ 极限下，也可以利用紧性论证构造导数数量有界的解，正如在 (1.16) 附近所做的那样。[5] 然而，这些解并未由散射数据刻画ψ，因此如定理 1.4 所示，它们并不唯一。我们认为，对于散射理论及相应的唯一性而言， $p \to 1$ 的 $s \to \infty$ 退化是必要的。

定理 1.5。 设 s、ϵ_* 如定理 *1.2* 所述。则存在 $f \in H^{s-200\kappa_p}(\mathbb{B}_4)$ 以及 $\psi \in H^{s-202\kappa_p}(\mathbb{B}_4)$，使得具有初始数据 $\phi|_{t=1} = \phi_0$ 和 $\partial_t \phi|_{t=1} = \phi_1$的方程 *(1.1)* 的唯一解 ϕ 可延拓至 $M = \{|x| < 3(1+t)\ f(x) < t \leq 1\}$，且当 $\mathbf{t} = t - f(x)$时， ϕ满足如下形式的渐近展开：

$$\phi = \phi_0 + \mathbf{t}^{-\alpha_p} \sum_{j \leq \lfloor 2\kappa_p \rfloor} \mathbf{t}^j H^{s-200\kappa_p - j}(\Sigma_{\mathbf{t}}) + \psi \mathbf{t}^{\beta_p} + \mathfrak{e} + \begin{cases} \mathbf{t}^{\beta_p} \log \mathbf{t} H^{s-2\kappa_p}(\Sigma_{\mathbf{t}}) & \text{if } 2\kappa_p \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{if } 2\kappa_p \notin \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.22}$$

其中 $\phi_0 = c_p(1 - |\partial f|^2)^{\frac{1}{p-1}}(1-f)^{-\alpha_p}$以及 $\mathfrak{e} \in \mathbf{t}^{\beta_p'} L^\infty((0,\ \mathbf{t}_1);\ H^{s-202\kappa_p - 1}(\Sigma_{\mathbf{t}}))$ 对于某个 $\beta_p' > \beta_p$

对于满足条件 *(1.5)* 的 $(\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)})$ 及 $i \in \{1,2\}$，此外还有

$$\left\| f^{(1)} - f^{(2)}, \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \right\|_{H^{s-2-200\kappa_p} \times H^{s-2-202\kappa_p}} \lesssim \left\| \phi_0^{(1)} - \phi_0^{(2)}, \phi_1^{(1)} - \phi_1^{(2)} \right\|_{H^{s+2} \times H^{s+1}}. \tag{1.23}$$

注记 1.4（谱理论）。 我们注意到，文献 [Ost24], 是一系列研究 [DS12; DS14; CD19], 的集大成之作，它也证明了定理 1.2 中常微分方程爆破的稳定性；更准确地说，证明了曲面上单个爆破点的稳定性。 [Ost24] 的方法是在爆破点附近适当的自相似坐标下研究一个（非自伴）谱问题，并证明存在谱隙，以此确认稳定性；而且，这种方法所需的正则性假设可以低得多，即只需 $s > \frac{n}{2}$。[6] 而我们的方法无需研究谱问题，至少无需超出理解常微分方程不动点稳定性的范围。

最后，由于定理 1.4 和 1.5 可以转化为纯局部陈述，我们得到任意常微分方程爆破型类空奇点的稳定性，其渐近行为如定理 1.1 所述。图 4 展示了一个示意图。

推论 1.6。 设 $s \geq s_0 := 232\kappa_p + 10 + n$，以及 $f \in H^s(\mathbb{B}_2)$ $\psi \in H^{s-\lfloor 2\kappa_p \rfloor}(\mathbb{B}_2)$ 满足

$$|\partial f| < 1/10, \qquad \|f\|_{H^s}, \|\psi\|_{H^{s-\lfloor 2\kappa_p \rfloor}} \leq 1, \tag{1.24}$$

并设 ϕ、$\mathbf{t}$、$M_{\mathbf{t}_1}$与定理 *1.1* 中相同。则存在一个常数 $\epsilon > 0$，其取决于 ϕ，使得以下结论成立：设 ϕ_0、ϕ_1 是定义在 $\Sigma_{\mathbf{t}_1/2} = \{\mathbf{t} = \mathbf{t}_1/2\}$ 上的函数，满足

$$\left\| (\phi_0 - \phi)|_{\Sigma_{\mathbf{t}_1/2}} \right\|_{H^{s-30\kappa_p+1}} + \left\| (\phi_1 - \partial_t \phi)|_{\Sigma_{\mathbf{t}_1/2}} \right\|_{H^{s-30\kappa_p}} \leq \epsilon_s, \tag{1.25}$$

且 $\epsilon_s < \epsilon_\circ$。则存在 $\bar{f}$、$\bar{\psi} \in H^{s-232\kappa_2}(\mathbb{B}_2)$ 以及方程 *(1.1)* 的一个解 $\bar{\phi}$，其初始数据为（ϕ_0、ϕ_1），属于$\hat{} M = \{|x| \leq 5\ (t + 1/3)\ \} \cap \{\mathbf{t} \leq \mathbf{t}_1/2\} \cap \{t > \bar{f}\}$，其中 $\bar{\phi}$在趋向 $\{t = \bar{f}\}^-$时呈现常微分方程爆破解，并具有辅助散射数据 ψ，且进一步满足

$$\left\| f - \bar{f}, \psi - \bar{\psi} \right\|_{H^{s-232\kappa_p}} \lesssim \epsilon_s. \tag{1.26}$$

我们还证明了所有类空奇点的光滑性（其奇性形成过程足够规整），这些奇点始于光滑初始数据：

[5]特别地，第 3.3 节的能量估计意味着 $\left\| t^\alpha \mathcal{V}_{\mathrm{b}}^k \mathring{\phi} \right\|_{L^2} \lesssim \left\| t^\alpha \mathring{\phi} \right\|_{L^2}$ 满足关于 $\alpha > \alpha_p - 1/2$ 和$\mathring{\phi} = \phi - \phi_0$的界。我们可以将这一结果与 $t^\alpha L^2$ 中的 $(\partial_t^2 - p\phi_0^{p-1})$ 的可逆性陈述结合起来，其中 $\alpha \in (\alpha_p - 1/2, \beta_p - 1/2)$，从而将估计改进为 $\left\| t^\alpha \mathcal{V}_{\mathrm{b}}^k \mathring{\phi} \right\|_{L^2} \lesssim \left\| t^{\alpha-1} \mathring{\phi} \right\|_{L^2}$。由紧性可得存在性。

[6]如第 1.1 节所述，在研究裸奇点 时也会出现类似的谱问题，但我们预计在这种情况下，该谱会产生物理后果，例如柯西视界的有限 正则性。

推论 1.7。 设 $s_0 = 202\kappa_p + 10 + \frac{n}{2}$ 和 $f \in H^{s_0-200\kappa_p}(\mathbb{B}_2)$ 满足 $f(0) = 0$ 和 $|\partial f| < 1/10$。设 ϕ 是 $M = \{|x| < 3(1+t)\ f(x) < t \le 1\}$ 中方程 *(1.1)* 的一个解，并具有如 *(1.21)* 所示的展开。此外，假设在类空超曲面 $\Sigma \subset M$ 上有 $(\phi, \partial_t\phi) \in H^{s+1}(\Sigma) \times H^s(\Sigma)$。则有以下更高的正则性： $f \in H^{s-200\kappa_p}(\mathbb{B}_4)$。

事实上，只需假设对于某个 $\alpha > 0$， $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{B}_2)$，且 ϕ 是一个满足 (1.4) 中展开形式的解。 (1.1)

推论 1.8。 设 $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{B}_4)$ 对某个 $\alpha > 0$ 成立，且 $f(0) = \partial f(0) = 0$，并且 $|\partial f| < 1/10$，令 $\mathbf{t} = t - f(x)$。令 $\tilde{\phi}_0 = c_p \mathbf{t}^{-\alpha_p}(1 - |\partial f|^2)^{p^{-1}}$，并令 ϕ 为 *(1.1)* 在 $M = \{|x| \le (3(1+t))\ f(x) \le t \le 1\}$ 中的一个解，满足

$$\phi = \tilde{\phi}_0 + \mathbf{t}^{-\alpha_p+\alpha} L^\infty(\mathcal{M}). \tag{1.27}$$

假设对于某个 $\frac{1}{2} \le \tilde{t} \le 1$，将 ϕ 限制在超曲面 $\Sigma = \{t = \tilde{t}\} \cap M$ 上后，有 $\phi|_\Sigma \in H^{s+1}, \partial_t\phi|_\Sigma \in H^s$，且 $s \ge (200\kappa_p + 5 + \frac{n}{2})\left(1 + \frac{2n}{\alpha}\right)$，那么 $f \in H^{s-200\kappa_p}(\mathbb{B}_4)$。

因此，利用定理 1.3，我们可以得出结论： $\mathbb{R}^{1+1}$ 中的奇异曲面除一个离散点集外均光滑：

推论 1.9。 设 $d = 1$ 和 ϕ 是方程 *(1.1)* 的光滑有限能量解，即：$(\phi|_{t=0}, \partial_t\phi|_{t=0}) \in \dot{H}^1 \times L^2 \cap C^\infty \times C^\infty$。那么，奇异边界的非特征部分是光滑的。

1.5 展望与概述

我们在引言末尾讨论若干未予探讨的开放问题，但希望本文提出的一些技巧和思路能够对这些问题有所帮助；随后概述本文其余部分的内容。

有限能量解的最大整体双曲发展： 给定任意不可延拓类空超曲面 Σ，定理 1.1 提供了一种构造解的方法，使其朝向 Σ形成常微分方程型奇点。然而，正如 [CMZ20], 中所指出的，这类解未必具有有限能量。因此，我们将方程 (1.1) 的有限能量解沿不可延拓类空超曲面形成常微分方程型奇点的构造问题留作以下开放问题：

猜想 1.10。 存在一个不可延拓类空超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 以及有限能量光滑柯西数据 $(\phi_0, \phi_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得该方程的解

$$P[\phi] = 0, \qquad (\phi|_{t=0}, \partial_t\phi|_{t=0}) = (\phi_0, \phi_1) \tag{1.28}$$

沿着所有 Σ 形成常微分方程型奇点。

阈值行为： 为了说明阈值行为的含义，我们来考察三次聚焦非线性波的具体情形，其中 $p = 3$ 出现在 (1.1) 中，且处于超临界维数[7] $n \ge 5$。在这种情况下，很容易证明，平凡解 $\phi \equiv 0$ 在初始数据的光滑局部化扰动下是稳定的（$(\phi|_{t=0}, \partial_t\phi|_{t=0}) = (0,0)$，这意味着对于小而局部化的初始数据，$P[\phi] = 0$ 的解在全局时间内存在，并散射至线性波。另一方面，对于足够大的（但仍具有有限能量的）初始数据，我们预期会形成常微分方程型奇点，例如显式的模型常微分方程爆破解 (1.2)；此外，正如定理 1.2 所证明的，这种定性的爆破行为对于初始数据的小局部化扰动也具有稳定性。

一个有趣的问题是理解小数据区域（其中解全局存在并发生散射）与大数据开放区域（在我们的情形下，

[7]有关能量临界问题中阈值行为的示例，请参见 [Bec14; KNS15] .

这意味着常微分方程型爆破）之间的过渡。也就是说，我们研究一族单参数初始数据的动力学，这族初始数据在小数据区域（例如平凡初始数据）与大数据区域（例如模型常微分方程爆破对应的初始数据）之间插值。遵循 [GS21; GMS20], ，我们提出以下猜想，其中非平凡自相似解 (1.6) 是两个区域之间的阈值。

猜想 1.11。存在一个光滑[8]单参数族 $(\phi_{0,\omega}, \phi_{1,\omega})$，其中 $\omega \in [0,1]$，作为非线性波 $P[\phi] = 0$ 的初始数据，满足 $p = 3$ 和 $n \geq 5$，其意义为 $(\phi|_{t=1}, \partial_t\phi|_{t=1}) = (\phi_{0,\omega}, \phi_{1,\omega})$，并且对某个 $\omega^* \in (0,1)$，满足以下条件：

1. 我们有 $(\phi_0, \phi_1) = (0,0)$，并且对于 $0 \leq \omega < \omega^*$，相应的解在过去方向上于整个时间范围内全局存在。*2.* 我们有 $(\phi_0, \phi_1) \equiv (c_3, -\alpha_3 c_3)$，至少在某个足够大的球内如此；对于 $\omega^* < \omega \leq 1$，相应的 $P[\phi] = 0$ 解在过去方向上发生爆破，并且最大存在域的过去边界的某一部分是一个光滑的类空超曲面 Σ_ω^-，沿着该超曲面，解表现出常微分方程型爆破。*3.* 在阈值 $\omega = \omega^*$处，数据 $(\phi_0, \phi_1)_{\omega^*}$ 的过去发展在点 $(t,x) = (0,0)$ 处发生爆破，并且在该点的未来光锥内，随着 $t \downarrow 0$，解趋近于非平凡的自相似解 *(1.6)*。该解应表现出局部裸奇点形成。

我们建议读者参阅 [GS21；GMS20]，以进一步了解对此类阈值行为的评述；该行为也与其他相关半线性方程有关，并与爱因斯坦方程中的引力坍缩及裸奇点形成现象相关，参见 [GM07]。

概述：我们首先在第2节介绍散射构造与稳定性问题的分析与几何框架。我们分别在第 3 节和第 4 节证明定理1.2与定理1.4。最后，我们在第5节证明关于更一般类空奇点的推论 1.7 与推论1.8。

致谢作者感谢Birgit Schörkhuber对手稿提出的有益意见。部分工作是在第一作者任职于Princeton Gravity Initiative、第二作者于普林斯顿大学攻读研究生期间完成的。第一作者感谢SNSF启动资助TMSGI2 226018的支持。我们感谢维也纳大学埃尔温·薛定谔数学与物理研究所在“非线性波与相对论”研讨会（2024年6月17日至21日）上接待我们，本工作即在此次研讨会期间启动。

2 几何与分析框架

本节将介绍几何形式体系和函数空间，这些内容将在第 2.1 节和第 2.2 节中分别用于定理 1.1 的散射构造证明和定理 1.2 的稳定性结果证明。正如引言中所述，稳定性是在另一种 (τ, z) 坐标系中证明的，我们将在第 2.3 节中将其与 (x,t) 联系起来

在本文中，我们只使用整数阶正则性 $s, K \in \mathbb{N}$，通常不特别说明这一限制。

[8]这里的光滑性是指，该族关于空间变量 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及插值参数 ω均光滑。我们将初始数据置于 $t = 1$，这与定理 1.2 的框架类似，其中奇点位于 $t = 0$附近。

2.1 散射构造的设置

考虑一个满足以下条件的函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\sup |\partial f| < 1/10, \quad f(0) = 0. \tag{2.1}$$

我们取$\mathbf{t}\ \mathbf{t} = \mathbf{t}(t,x) = t - f(x)$，并引入以下时空区域，其中 $\mathbf{t}_1 > 0$:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1} \coloneqq \{\mathbf{t} < \mathbf{t}_1, |x| < 2(1-t)\}, \quad \mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}(s) \coloneqq \{\mathbf{t} \in (0,s)\}, \quad \Sigma_s \coloneqq \{\mathbf{t} = s\}. \tag{2.2}$$

详细说明见图1。特别地，注意边界 $\partial\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}(s)$由位于$\{\mathbf{t} = \mathbf{t}_1\} \cap \partial\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}(s)$处的未来指向类空分量、截断圆锥 $\mathscr{C} = \{|x| = 2(1-t)\} \cap \partial\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}(s)$，以及过去指向类空边界 $\mathscr{S} = \{\mathbf{t} = 0\} \cap \partial\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}(s)$组成。

我们首先记录一些几何量，它们将有助于构造定理 1.1 中的散射解。在证明中，我们将使用 $\mathbf{t} = t - f(x)$ 和 $y^i = x^i$ 作为坐标。相对于这些坐标，闵可夫斯基度规 η、通常的坐标向量场 $T = \partial_t$ 和 ∂_{x^i}以及波算子 $\Box$可写成以下形式。

$$\eta = -d\mathbf{t}^2 + 2(\partial_i f)d\mathbf{t}dy^i + (\delta_{ij} - \partial_i f \partial_j f)dy^i dy^j, \tag{2.3a}$$

$$T \coloneqq \partial_t|_x = \partial_{\mathbf{t}}|_y, \quad \partial_{x^i}|_t \coloneqq \partial_{y^i}|_{\mathbf{t}} - (\partial_i f)\partial_{\mathbf{t}}|_y, \tag{2.3b}$$

$$\Box = -(1 - |\partial f|^2)\partial_{\mathbf{t}}^2 + \underbrace{(\Delta_x f - 2\partial_i f \cdot \partial_{y^i})\partial_{\mathbf{t}} + \Delta_y}_{P_f}. \tag{2.3c}$$

我们引入两组算子 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}} \coloneqq \{\mathbf{t}T, \mathbf{t}\partial_y, \mathbf{1}\}$ 和 $\mathcal{V}_{\mathrm{b}} \coloneqq \{\mathbf{t}T, \partial_y, \mathbf{1}\}$。它们分别刻画最高阶正则性，以及我们将用来与方程交换的算子。我们将 $\mathrm{Diff}_{\mathrm{b}}$ 记为$\mathcal{V}_{\mathrm{b}}$ 在$\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}$ 上光滑函数倍数所张成的空间，并将 $\mathrm{Diff}_{\mathrm{b}}^k$ 记为它们的 k 重乘积。

记号 2.1. 对于函数 $f : \mathcal{M}_{\mathbf{t}_1} \to \mathbb{R}$，我们将$\mathcal{V}_{\mathrm{b}}^k f$ 记为通过$\mathcal{V}_{\mathrm{b}}$中的算子作用得到的 $\mathbb{R}^{k(n+1)}$ 值函数:

$$\mathcal{V}_{\mathrm{b}}^k f \coloneqq \{\Gamma_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2}...\Gamma_{\alpha_k} f : \Gamma_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{b}}\}. \tag{2.4}$$

我们引入以下基于 L^∞ 和 L^2 的函数空间: 对于任意整数 $s \geq 0$ 和 $q \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X_{\infty,\infty}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) &\coloneqq \{f \in \mathbf{t}^q L^\infty(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) : \mathcal{V}_{\mathrm{b}}^s f \in L^\infty(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})\}, \\ X_{2,2}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) &\coloneqq \left\{f \in \mathbf{t}^q L^2(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) : \mathbf{t}^{-1/2}\mathcal{V}_{\mathrm{b}}^s f \in L^2(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})\right\}, \\ X_{\infty,2}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) &\coloneqq \left\{f \in \mathbf{t}^q L^2(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) : \mathcal{V}_{\mathrm{b}}^s f \in L^\infty\left((0,\mathbf{t}_1); L^2(\Sigma_{\mathbf{t}})\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

以及相应的范数。这里，$X_{\infty,\infty}$ 用于以最直观的方式表述与坐标无关的界，$X_{2,2}$ 用于闭合能量估计，而 $X_{\infty,2}$ 用于构造近似解。我们还定义了有限正则性空间 s ，其在$\mathbf{t}$中具有截至 q 阶的展开

$$X_{\mathrm{s}}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) = \{f \in L^2(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) : f \in \sum_{j=0}^{q} \mathbf{t}^j H^{s-j}(\Sigma_0) + \sum_{j=q+1}^{Q} \mathbf{t}^j H^{s-q}(\Sigma_0)\}, \tag{2.6}$$

这里我们采用约定 $\sum^q = \sum^{\lfloor q \rfloor}$。下标 s 表示“光滑”，用于说明 $\mathbf{t}$ 坐标中的行为。由索伯列夫嵌入可知，对于任意 $\epsilon > 0$，有以下包含关系:

$$\begin{aligned} X_{\infty,\infty}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) &\subset X_{\infty,2}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) \subset X_{\infty,\infty}^{s-\frac{n+1}{2};q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) \\ X_{\infty,2}^{s;q+\epsilon}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) &\subset X_{2,2}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) \subset X_{\infty,2}^{s-1;q-\epsilon}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

利用之前定义的算子空间和函数空间，我们显然有

$$\mathrm{Diff}_{\mathrm{b}}^k : X_{\infty,\infty}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) \to X_{\infty,\infty}^{s-k;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}), \quad \mathrm{Diff}_{\mathrm{b}}^k : X_{\infty,2}^{s;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) \to X_{\infty,2}^{s-k;q}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}). \tag{2.8}$$

现在，我们来引入所研究的 (1.1) 的精确定义解类:

定义 2.1. 设 $s_p := s - \lfloor 2\kappa_p \rfloor > \frac{n+2}{2}$ and $f \in C^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ $\psi \in C^{s_p}(\mathbb{R}^n)$。若函数$\phi \in X_{\infty,\infty}^{2;-\alpha_p}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$ 是 (1.1) 的一个正则性为 s、散射数据为 (f, ψ) 的奇异解，且 ϕ 满足 (1.1)，则称之为

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \mathbf{t}^{1-\alpha_p} X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) + \mathbf{t}^{\beta_p} \log \mathbf{t} \phi_{\log} + \mathbf{t}^{\beta_p} \psi + X_{\infty,2}^{s_p-1;\beta_p'}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}), \quad \text{if } 2\kappa_p \in \mathbb{N}, \\ \phi &= \phi_0 + \mathbf{t}^{1-\alpha_p} X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) + \mathbf{t}^{\beta_p} \psi + X_{\infty,2}^{s_p-1;\beta_p'}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}), \quad \text{if } 2\kappa_p \notin \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $\phi_{\log} \in H^{s_p}(\Sigma_0)$, $\phi_0 := c_p(1 - |\partial f|^2)^{\frac{1}{p-1}} \mathbf{t}^{-\alpha_p}$ 以及一些[9] $\beta_p' > \beta_p$。

2.2 稳定性问题的设定

对于定理 1.2 中研究的稳定性问题，我们将方程 (1.1) 改写为关于坐标 τ 的方程，其中 ϕ 的爆破曲面将精确地由 τ 的零点集表示。

引理 2.1. 设 ϕ 是 *(1.1)* 的一个解，且 τ 满足 $\phi =: c_p \tau^{-\alpha_p}$。则 τ 满足方程

$$\Box \tau = \kappa_p \tau^{-1} \left(1 + \nabla_\alpha \tau \nabla^\alpha \tau\right), \tag{2.10}$$

其中 κ_p 定义于 (1.3)。

证明. 假设 $\phi > 0$，这可通过如下显式计算得到：

$$\Box \left(c_p \tau^{-\alpha_p}\right) = c_p \alpha_p \kappa_p \nabla_\alpha \tau \nabla^\alpha \tau \cdot \tau^{-\alpha_p - 2} - c_p \alpha_p \Box \tau \cdot \tau^{-\alpha_p - 1},$$
$$|\phi|^{p-1}\phi = c_p^p \tau^{-p\alpha_p} = \alpha_p \kappa_p \tau^{-\alpha_p - 2},$$

其中我们使用了 (1.2) 中 α_p 和 c_p 的显式表达式。 □

注释 2.1。 我们指出，方程 (2.10) 在 $\gamma = 1$ 下也是聚焦指数非线性波动方程 $\Box\phi = -e^\phi$ 经过变量替换$\tau = e^\phi$后得到的一个恰当变换形式。特别地，可以轻松地调整本文中的论证来研究这个问题。

在研究稳定性问题时，我们使用坐标 (τ, z^i)，其中 τ 如上所述，且 $z^i = x^i$。以下定义将用于描述坐标变换[10]Φ 的雅可比矩阵：$(t, x^i) \to (\tau, z^i)$。

定义 2.2. 我们定义 W, V^i 以及时空度规函数 Ω^2 如下：[11]

$$W := -\nabla_\alpha \tau \nabla^\alpha t = -\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad V^i := \nabla_\alpha \tau \nabla^\alpha x^i = \frac{\partial \tau}{\partial x^i}, \quad \Omega^2 := -\nabla_\alpha \tau \nabla^\alpha \tau = W^2 - \delta_{ij} V^i V^j. \tag{2.11}$$

我们还使用记号 $J = (W, V^i)^\intercal \in \mathbb{R}^{n+1}$。

因此，w 坐标向量场和微分具有如下线性变换 :

$$T = \frac{\partial}{\partial t} = W \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = V_i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z^i}, \tag{2.12a}$$

$$dt = W^{-1}\left(d\tau - V_i dz^i\right), \quad dx^i = dz^i. \tag{2.12b}$$

[9] β_p' 的最大值受(1.8)中相应值的限制[10]我们从几何上推导 W, V^i 的方程，因此通常不指明 W, V^i 是相对于哪个坐标系表示的。为便于阅读，我们更倾向于使用诸如 W“以(x, t)坐标表示”或“以(τ, z)坐标表示”之类的术语，而不是插入诸如 $\Phi^\star$的前推。
[11]我们在全文中使用爱因斯坦求和约定，并始终用 η 升降希腊指标，用 δ_{ij} 和 δ^{ij}升降拉丁指标。

我们还将常数 τ 超曲面的单位法向量定义为

$$N \coloneqq -\frac{\nabla \tau}{\Omega} = \frac{W}{\Omega}\partial_\tau - \frac{V_i}{\Omega}\partial_{z^i}. \tag{2.12c}$$

对于 $(\tau,\ z^i)$ 坐标系，可以验证闵可夫斯基度规 η 和逆闵可夫斯基度规 η^{-1} 可写为如下形式。

$$\eta = -W^{-2}\left(d\tau - V_i dz^i\right)\left(d\tau - V_j dz^j\right) + \delta_{ij}dz^i dz^j, \tag{2.12d}$$

$$\eta^{-1} = -\Omega^2\frac{\partial}{\partial\tau}\otimes\frac{\partial}{\partial\tau} + V^i\frac{\partial}{\partial\tau}\otimes\frac{\partial}{\partial z^i} + V^i\frac{\partial}{\partial z^i}\otimes\frac{\partial}{\partial\tau} + \delta^{ij}\frac{\partial}{\partial z^i}\otimes\frac{\partial}{\partial z^j}, \tag{2.12e}$$

最后，波算子 $\Box$ 利用 $\det\ \eta = W^{-2}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\tau^2\Box\Phi &= \frac{\tau^2}{\sqrt{-\det\eta}}\partial_\mu\left(\sqrt{-\det\eta}\cdot(\eta^{-1})^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right)\\ &= (\eta^{-1})^{\mu\nu}\cdot\tau^2\partial_\mu\partial_\nu\Phi + W\tau\partial_\mu(W^{-1}(\eta^{-1})^{\mu\nu}))\cdot\tau\partial_\nu\Phi.\end{aligned} \tag{2.12f}$$

注2.2（模型常微分方程取值）。对于 (1.2) 中的模型常微分方程爆破 ϕ_{model}，上述量取值为 $W=1$, $V=0$, $\Omega^2=1$。沿 $\mathbf{v}\in\mathbb{B}_1$ 方向进行洛伦兹变换后，这些量变为 $W=(1-|\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$, $V_i=\mathbf{v}_i W$, $\Omega^2=1$。

对于稳定性问题，我们再次使用算子 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}}=\{\tau\partial_\tau,\ \tau\partial_z,\ 1\}$ 来衡量最高阶正则性，而我们的交换子向量场始终具有 ∂_z 的形式，尤其是选择为与 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}}$ 中的算子交换。对于函数 Φ，我们用 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\Phi$ 表示向量 $(\tau\partial_\tau\Phi,\ \tau\partial_z\Phi,\ \Phi)^\intercal$，而 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J$ 表示对所有 i，将 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}}W$ 与 $\mathcal{V}_{\mathrm{top}}V^i$ 拼接所得的结果。

接下来，我们引入以下时空区域，它们将有助于证明；其中，帽记号表示我们是在 $(\tau,\ z)$ 坐标系下进行讨论。

$$\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1} \coloneqq \{0<\tau\le\tau_1, |z|<2(\tau+2)\},\quad \hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\tau_1} \coloneqq \{\tau_0<\tau<\tau_1\}\cap\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1},\quad \hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}} = \{\tau=\tilde{\tau}\}\cap\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1}. \tag{2.13}$$

区域 $\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\ \tau_1}$ 的边界由两个过去指向的类空部分 $\{\tau=\tau_0\}\cap\partial\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\ \tau_1}$ 和 $\mathscr{C}=\{|z|=2(\tau+2)\}\cap\partial\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\ \tau_1}$，以及未来指向的类空部分 $\{\tau=\tau_1\}\cap\partial\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\ \tau_1}$ 组成，见图 2。我们还使用以下定义在超曲面 Σ_τ 上的 L^2 和 L^∞ 函数空间，其中 $s\in\mathbb{N}$，$q\in\mathbb{R}$。

$$\begin{aligned}H^{s;q}(\hat{\Sigma}_\tau) &\coloneqq \{f\in\tau^q L^2(\hat{\Sigma}_\tau) : \partial_z^\alpha f\in\tau^q L^2(\hat{\Sigma}_\tau)\ \forall\ 0\le|\alpha|\le s\},\\ C^{s;q}(\hat{\Sigma}_\tau) &\coloneqq \{f\in\tau^q L^\infty(\hat{\Sigma}_t) : \partial_z^\alpha f\in\tau^q L^2(\hat{\Sigma}_\tau)\ \forall\ 0\le|\alpha|\le s\},\end{aligned} \tag{2.14}$$

配备适当的范数 $\|\cdot\|_{H^{s;q}(\hat{\Sigma}_\tau)}$ 和 $\|\cdot\|_{C^{s;q}(\hat{\Sigma}_\tau)}$。当 $q=0$ 时，我们通常省略第二个上标。注意，与 (2.5) 中定义的 $X^{s,\bullet}$ 空间相比，这里不包含与 $\tau\partial_\tau$ 的对易。不过，为了便于在两个问题之间进行转换，我们也按照 (2.5) 定义 $X^{s,\bullet}(\hat{\mathcal{M}})$，其中采用 $(\mathrm{t},\ x)\mapsto(\tau,\ z)$。

记号 2.2。 L^2 任意超曲面 $\hat{\Sigma}_\tau$ 上的范数不包含体积形式，因此

$$\|\Phi\|^2_{L^2(\hat{\Sigma}_\tau)} = \int_{\hat{\Sigma}_\tau}|f|^2dz = \int_{\mathbb{B}_{2(\tau+4)}}|f(\tau,z)|^2dz.$$

我们使用索伯列夫嵌入：对于 $s>s'+\frac{n}{2}$，有

$$C^{s;q}(\hat{\Sigma}_\tau)\subset H^{s;q}(\hat{\Sigma}_\tau)\subset C^{s';q}(\hat{\Sigma}_\tau), \tag{2.15}$$

其中，任何隐含常数都依赖于 s，s'，但不依赖于 τ。

2.2.1 W 与 V^i的方程组

对非线性波动方程 (2.10) 的分析将通过推导关于量 W、 V^i 和 Ω^2 的适当非线性方程来完成。首先，这些方程构成一个非线性波动方程系统:

引理 2.2. 设 τ 是*(2.10)*的一个解，且 W、 V^i 如*(2.11)*中所定义。雅可比系数W 与 V^i 满足方程

$$\tau^2\Box W = -\kappa_p(1-\Omega^2)W - \kappa_p W\tau\partial_\tau\Omega^2, \tag{2.16a}$$

$$\tau^2\Box V^i = -\kappa_p(1-\Omega^2)V^i - \kappa_p V^i\tau\partial_\tau\Omega^2 - \kappa_p\tau\partial_{z^i}\Omega^2. \tag{2.16b}$$

证明. 利用(2.11)中 W 的定义、 ∇ 与 $\Box$ 及 η对易这一事实、 $\nabla^2 t = 0$以及(2.10)，我们得到

$$\begin{aligned}\tau^2\Box W &= -\tau^2\Box\left(\eta(\nabla\tau,\nabla t)\right) = -\tau^2\eta(\nabla\Box\tau,\nabla t)\\ &= -\kappa_p\tau^2\eta\left(\nabla\left(\tau^{-1}(1-\Omega^2)\right),\nabla t\right)\\ &= \kappa_p(1-\Omega^2)\eta(\nabla\tau,\nabla t) + \kappa_p\tau\eta(\nabla\Omega^2,\nabla t),\end{aligned}$$

再利用(2.12a)即得(2.16a)。(2.16b)的推导与此类似。 □

在这些二阶方程之外，日后在推导 W, V^i,Ω^2 的逐点估计或构造展开时，考虑如下一阶方程组将是有用的。我们导出由 $N+1$ 个此类方程组成的系统，对应于雅可比系数的自由度，并相对于 ϕ_{model} 附近如下"线性小量"。

定义 2.3. 我们将 U^i 和 $\mathring{\Omega}^2$ 定义如下:

$$U^i = \frac{V^i}{W}, \qquad \mathring{\Omega}^2 = \Omega^2 - 1. \tag{2.17}$$

注意，我们可以通过以下关系用这些量表示 V^i, W和 Ω^2

$$\Omega^2 = \mathring{\Omega}^2 + 1, \quad W = \sqrt{\frac{\Omega^2}{1-\delta_{ij}U^iU^j}}, \quad V^i = WU^i. \tag{2.18}$$

U^i 和 $\mathring{\Omega}$的一阶方程如下。

命题 2.3. 对于满足 (2.10) 的 τ，以及如 (2.11) 中的 W、 V^i、Ω^2，有

$$\tau\partial_\tau U^i = W^{-2}\tau\partial_{z^i}W, \tag{2.19}$$

$$\tau\partial_\tau\mathring{\Omega}^2 = 2\kappa_p\mathring{\Omega}^2 + 2\tau\partial_{z^i}V^i. \tag{2.20}$$

证明。 方程 (2.19) 是 (2.12b) 中的 1-形式 $dt = W^{-1}d\tau - U_i dz^i$ 为闭形式这一事实的直接推论。为导出 (2.20)，我们将 (2.10) 与波算子 (2.12f) 的表达式结合使用，从而得到

$$\begin{aligned}\kappa_p(1-\Omega^2) &= \tau\Box\tau\\ &= W\tau\partial_\mu(W^{-1}(\eta^{-1})^{\mu\tau})\\ &= W\tau\partial_\tau(-\Omega^2W^{-1}) + W\tau\partial_{z^i}(W^{-1}V^i)\\ &= -\tau\partial_\tau\Omega^2 + \Omega^2\tau\partial_\tau\log W + W\tau\partial_{z^i}(W^{-1}V^i)\\ &= -\frac{1}{2}\tau\partial_\tau\mathring{\Omega}^2 - \frac{\Omega^2}{2}\tau\partial_\tau\log(1-\delta_{ij}U^iU^j) - V^iW^{-1}\partial_{z^i}W + \tau\partial_{z^i}V^i,\end{aligned}$$

其中在最后一行我们使用了 (2.18)。

利用 (2.19) 展开第二项，可得

$$-\frac{\Omega^2}{2}\tau\partial_\tau\log(1-\delta_{ij}U^iU^j)=W^2\delta_{ij}U^i\tau\partial_\tau U^j=V^iW^{-1}\tau\partial_{z^i}W.$$

将其代入上式并化简，得到 (2.20)。交换后的方程 (4.35) 和 (4.36) 也可立即得到。

□

请注意，从几何上看，U^i 是沿着 τ 恒定的超曲面对 t 求偏导。由于我们希望 τ 恒定（等价地，ϕ恒定）对应于超曲面，因此这对 U^i施加了一个额外的可积性条件。

注记 2.3。 利用 $U^i=-\partial_{z^i}t$，以下可积性条件将始终成立

$$\partial_{z_j}U^i-\partial_{z_i}U^j=0. \tag{2.21}$$

我们可以将 (2.21) 视为一个"约束方程"，它由其余方程 (2.16) 传播，因此在下文中基本可以忽略它。

注记 2.4（自由度）。ϕ 的散射数据显然由两个函数组成（f,ψ）。对于 W,V^i，显然可以根据（2.19）和（2.20），从$U^i|_{\Sigma_0}$以及 $\mathring{\Omega}^2$的 $\tau^{2\kappa}$部分所包含的信息出发，通过展开重构 W,V^i。虽然后者似乎提供了更多初始数据，但很容易看出 $U^i=\frac{\partial_i\tau}{\partial_t\tau}=\partial_i|_{\Sigma_0}t=\partial_i f$。因此，鉴于（2.21），自由度并不匹配。

作为第 2.2 节的总结，我们在（τ,z^i）坐标系下引入奇点处散射数据 的概念。

定义 2.4。 设 $s>\frac{n}{2}+2+\lfloor 2\kappa_p\rfloor$ 和 $s_p:=s-\lfloor 2\kappa_p\rfloor$，且 $\mathfrak{f}\in C^{s+1}(\mathbb{B}_r)$ $\mathfrak{w}\in C^{s_p}(\mathbb{B}_r)$。如果函数 W,V^i 是正则性为 s的非线性波动方程（2.16）的散射解，其散射数据为（$\mathfrak{f},\mathfrak{w}$），则有 W,V^i在（τ,z^i）坐标系下满足（2.16），$W\in(1/2,2)$，并且相关的（U^i, $\mathring{\Omega}^2$）对所有 $0<\tau<\tau_1$满足以下渐近行为：

$$\begin{aligned}
&U^i=\partial_i\mathfrak{f}+\tau X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\hat{\mathcal{M}})+\tau^{2\kappa_p+1}\log\tau H^{s_p-1}(\hat{\Sigma}_0)+\tau^{2\kappa_p+1}H^{s_p-1}(\hat{\Sigma}_0)+X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'+1}(\hat{\mathcal{M}}), && \text{若 } 2\kappa_p\in\mathbb{N}\\
&U^i=\partial_i\mathfrak{f}+\tau X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\hat{\mathcal{M}})+\tau^{2\kappa_p+1}H^{s_p-1}(\hat{\Sigma}_0)+X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'+1}(\hat{\mathcal{M}}), && \text{if } 2\kappa_p\notin\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

对于某个 $\kappa'>\kappa_p$ 且

$$\begin{aligned}
&\mathring{\Omega}^2=\tau X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\mathcal{M}_{\tau_1})+\tau^{2\kappa_p}\log\tau\, H^{s_p}(\hat{\Sigma}_0)+\tau^{2\kappa_p}\mathfrak{w}+X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa'}(\hat{\mathcal{M}}), && \text{if } 2\kappa_p\in\mathbb{N},\\
&\mathring{\Omega}^2=\tau X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\mathcal{M}_{\tau_1})+\tau^{2\kappa_p}\mathfrak{w}+X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa'}(\hat{\mathcal{M}}), && \text{if } 2\kappa_p\notin\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.3 两种几何设定的比较

本节记录方程 (1.1) 的解如何确定常数 ϕ 超曲面及诸如 (W, V^i) 的几何量，以及如何根据这些几何量重构 ϕ。为简化记号，我们仅讨论 $2\kappa_p\notin\mathbb{N}$ 的情形，其他情形留给读者。对于定义域，我们也将采取较为宽松的处理；以下对应关系仅应在 ˆ 交集 $\mathcal{M}_{\mathfrak{t}_1}\cap\mathcal{M}_{\tau_1}$ 中成立，但下文不再对此作精确说明。

引理 2.4。 固定 $p>1$ 使得 $2\kappa_p\notin\mathbb{N}$，并定义 $s_p=s-\lfloor 2\kappa_p\rfloor>\frac{n+2}{2}+2$。

(a) 设 ϕ 是方程 *(1.1)* 的一个正则性为 s 的奇异解，如定义 *2.1* 所述。那么有$\tau\in X^{s;2\kappa_p}{}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{M}_{\mathfrak{t}_1})+\mathfrak{t}^{2\kappa_p+1}H^{s_p}(\Sigma_0)+X^{s_p-1;\,\infty}{}_{2}{}^{\lfloor 2\kappa_p+1\rfloor},(\boldsymbol{M}_{\mathfrak{t}_1})$。

此外，坐标 V^i、W 中的几何量是一个正则性为 $s-1$ 的散射解，如定义 *2.4* 所述。

(b) 逆向结论成立：给定 V^i、W 在 $\hat{M}$ 中正则性为 s 的几何散射解，如定义 *2.4* 所述，则可推出：存在 $f \in H^s(\Sigma_0)$ 以及相应的 $\mathbf{t} = t - f(x)$，使得 $\phi = \tau^{-\alpha_p} c_p$，其中 $\partial_t \tau = W$、$\partial_{x^i} \tau = V^i$ 是一个正则性为 $s-1$ 的奇异解。

证明。 (a) 注意到 $(\phi_0/c_p)^{-1/\alpha_p} = \mathbf{t}(1-|\partial f|^2)^{-1/2}$。根据定义 2.1，将 τ 展开为

$$\begin{aligned}\tau = (\phi/c_p)^{-1/\alpha_p} &= (\phi_0/c_p)^{-1/\alpha_p}\Big(1+\frac{\phi-\phi_0}{\phi_0}\Big)^{-1/\alpha_p} \\ &= \mathbf{t}(1-|\partial f|^2)^{-1/2} + \mathbf{t}^2 X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p-1}(\mathcal{M}) - \mathbf{t}^{2\kappa_p+1}\frac{\psi}{c_p\alpha_p} + X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa'+1}(\mathcal{M}), \quad (2.24)\end{aligned}$$

其中 ψ 是 （2.9）的散射数据，且 $\kappa' > \kappa_p$。对 τ 求导并利用（2.11），还可得到

$$V^i = \partial_i f(1-|\partial f|^2)^{-1/2} + \mathbf{t} X_{\mathrm{s}}^{s-2;2\kappa_p-1}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) - \mathbf{t}^{2\kappa_p}\partial_i f\frac{(2\kappa_p+1)\psi}{c_p\alpha_p} + X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'}(\mathcal{M}), \tag{2.25a}$$

$$W = (1-|\partial f|^2)^{-1/2} + \mathbf{t} X_{\mathrm{s}}^{s-2;2\kappa_p-1}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}) - \mathbf{t}^{2\kappa_p}\frac{(2\kappa_p+1)\psi}{c_p\alpha_p} + X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'}(\mathcal{M}), \tag{2.25b}$$

$$\text{and thus } U^i = X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\mathcal{M}) + \mathbf{t}^{2\kappa_p+1} H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'}(\mathcal{M}), \tag{2.25c}$$

其中，最后一步利用了显式表达式所蕴含的在$\mathbf{t}^{2\kappa_p}$ 阶系数之间的抵消。可将主阶项与注 2.2 进行比较。误差项 $X^{s_p-2}{}_{;\infty\,2}{}^{2\kappa'}(\mathcal{M})$ 中也存在类似的抵消，因此可将其改进为 $X^{s_p-2}{}_{;\infty\,2}{}^{2\kappa'+1}(\mathcal{M})$。

仍需将坐标从 $(\mathbf{t}\ y)$ 变换为 (τ, z)。由（2.25b）可知，当$\mathbf{t}_1$ 足够小时， $\partial_t \tau = W \in (1/2,2)$，因此对所有 $s' \le s_p - 1$ 及所有q'， $X^{s'}{}_{;2\,2}{}^{q'}(\mathcal{M}) = X^{s'}{}_{;2\,2}{}^{q'}(\hat{\mathcal{M}})$，且范数等价。利用包含关系 $X^{s;q+\epsilon}{}_{\infty\,2}(\mathcal{M}) \subset X^{s;q}{}_{2\,2}(\mathcal{M}) \subset X^{s-1;q}{}_{\infty\,2}(\mathcal{M})$ 对所有 $\epsilon > 0$ 均成立，可知我们可以将 $\tau(\mathbf{t}\ x)$ 反解为

$$\mathbf{t}(\tau, z) = \tau(1-|\partial f|^2)^{1/2} + \tau^2 X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p-1}(\hat{\mathcal{M}}) + \tau^{2\kappa_p+1} H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'+1-\epsilon}(\hat{\mathcal{M}}). \tag{2.26}$$

因此，我们得到 V^i, W具有正确的形式，可作为正则性为 $s-1$ 的散射解，其坐标为（τ, z）。

我们还计算得， $\tilde{\tau} := \mathbf{t}(1-|\partial f|^2)^{-1/2}$ 满足 $\eta(\mathrm{d}\tilde{\tau}, \mathrm{d}\tilde{\tau}) = -1 + \mathbf{t} X_{\infty\,2}^{s-1;1}(\mathcal{M})$。为了恢复 $\mathring{\Omega}^2$ 的散射数据，我们计算

$$\mathring{\Omega}^2 = \eta(\mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\tau) + 1 = \mathbf{t} X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p-1}(\mathcal{M}) - \mathbf{t}^{2\kappa_p}\frac{2\psi(2\kappa_p+1)}{c_p\alpha_p} + X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'}(\mathcal{M}). \tag{2.27}$$

因此，在（τ, x）坐标下也有类似的表达式。

（b）反过来，我们使用（2.11）中 W 的定义，将 $t(\tau, y)$ 表示为

$$\begin{aligned}\partial_\tau t = W^{-1} &\in X_{\mathrm{s}}^{s;2\kappa_p}(\hat{\mathcal{M}}) + \tau^{2\kappa_p} H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa_p'}(\hat{\mathcal{M}}), \\ \partial_{z^i} t = \frac{V^i}{W} = U^i &\in X_{\mathrm{s}}^{s;2\kappa_p}(\hat{\mathcal{M}}) + \tau^{2\kappa_p+1} H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa_p'+1}(\hat{\mathcal{M}}),\end{aligned} \tag{2.28}$$

其中，该包含关系由关于 W 的 L^∞ 界以及定义 2.4 得出。因此，利用可积条件（2.21）和（2.19）来确定 t，我们得到

$$t \in X_{\mathrm{s}}^{s+1;2\kappa_p}(\hat{\mathcal{M}}) + \tau^{2\kappa_p+1} H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa'+1}(\hat{\mathcal{M}}). \tag{2.29}$$

令$\mathbf{t}(\tau, z) = t(\tau, z) - t(0, z)$，使得

$$\mathbf{t} = W^{-1}\tau + \tau^2 X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\hat{\mathcal{M}}) + \tau^{2\kappa_p+1} H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-1;2\kappa_p'}(\hat{\mathcal{M}}). \tag{2.30}$$

利用 $W \in (1/2, 2)$，我们知道，对于每个 z，$\mathbf{t}(\tau, z)$ 都是可逆函数。与 (a) 中一样，我们可以使用 (2.28) 和 (2.30) 求出逆

$$\tau = W\mathbf{t} + \mathbf{t}X_{\mathrm{s}}^{s-1;2\kappa_p}(\mathcal{M}) + \mathbf{t}^{2\kappa_p+1}H^{s_p}(\Sigma_0) + X_{\infty,2}^{s_p-2;2\kappa'-\epsilon}(\mathcal{M}). \tag{2.31}$$

由此，我们可以利用定义 $\phi = c_p\tau^{-\alpha_p}$ 得到 ϕ 是正则性为$s-1$的奇异解。

□

3 散射构造：定理 1.1 的证明

我们遵循第 1.3 节中所阐述的策略。我们首先在第 3.1 节中，将 (1.1) 在主阶常微分方程爆破附近线性化，即 (3.1) 中的 ϕ_0，并研究该线性算子以及相关非线性算子在第 2.1 节所引入空间之间的性质。接下来，在第 3.2 节中，我们构造拟设 ϕ_N，使其在 $N \gg 1$时，于相差任意小误差项$\mathcal{O}(\mathbf{t}^N)$的意义下求解 (1.1)。最后，在第 3.3 节中，我们推导能量估计，从而对这类近似解附近的线性化算子给出强制性控制，并在强迫项于 N充分大时为$\mathcal{O}(\mathbf{t}^N)$的条件下得到良好的先验估计。我们通过极限论证求得非线性解。

3.1 线性算子与非线性算子的映射性质

固定 $f \in H^{s+1}(\mathbb{B}_3)$，其中 ~~$s >$~~ $\frac{n+4}{2}$。我们要寻找一个解，使其主导阶具有如下形式

$$\phi_0 := (1 - |\partial f|^2)^{\frac{1}{p-1}} c_p \mathbf{t}^{-\alpha_p}. \tag{3.1}$$

利用 (2.3c)，在 ϕ_0 附近对 (1.1) 中的 $P[\phi]$ 进行线性化，得到

$$\Box + p\phi_0^{p-1} = -(1 - |\partial f|^2)\big(\partial_{\mathbf{t}}^2 - \gamma_p \mathbf{t}^{-2}\big) + P_f =: P_0 + P_f. \tag{3.2}$$

我们注意到，P_0 属于 $\mathbf{t}^{-2}\mathrm{Diff}_{\mathrm{b}}^2$，而 P_f 属于 $\mathbf{t}^{-1}\mathrm{Diff}_{\mathrm{b}}^2$，其系数为 H^{s-1}。我们还注意到，主导算子，即 P_0，在形如 $g(y)\mathbf{t}^\beta$（其中 $\beta \neq \beta_p$）的表达式上可逆，如 (1.11) 所示。

我们还引入以下表达式，它们表示附加线性项和非线性项，这些项在对 Ψ 附近的 $P[\Psi + \Phi] = 0$ 进行“线性化”时产生：

$$\mathfrak{E}_\Psi[\Phi] = -p(\phi_0^{p-1} - \Psi^{p-1})\Phi, \qquad \mathcal{N}_\Psi[\Phi] = (\Psi + \Phi)^p - \Psi^p - p\Psi^{p-1}\Phi. \tag{3.3}$$

这些表达式的定义使得 $P[\Psi + \Phi] = 0$ 恰好等价于

$$P_0\Phi + P_f\Phi + \mathfrak{E}_\Psi[\Phi] + \mathcal{N}_\Psi[\Phi] = -P[\Psi]. \tag{3.4}$$

在下述引理中，我们沿用第 2.1 节引入的分析框架，记录了$\mathcal{N}$ $\mathfrak{E}$的一些映射性质。

引理 3.1. 固定 $s > \frac{n+4}{2}$ ~~和~~ $s' \in \big[\frac{n+2}{2}, ~~s =~~ 1\big]$, $q \geq 1$。

1. 令 $\Phi \in X^{s'}{}_{;\infty}{}^{q-\alpha_p}{}_{2}(M\mathbf{t}_1)$ 和 $\Phi_1 \in X^{s'}{}_{;\infty}{}^{1-\alpha_p}{}_{2}(M\mathbf{t}_1)$。那么，对于$\mathbf{t}_1 < 1$，有

$$\mathfrak{E}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi], \mathcal{N}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi] \in X_{\infty,2}^{s';q-\alpha_p-1}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}). \tag{3.5}$$

2. 设 $\Phi \in X^{s'}{}_{;2}{}^{q-\alpha_p}{}_{2}(M\mathbf{t}_1)$ 和 $\Phi_1 \in X^{s'}{}_{;2}{}^{1-\alpha_p}{}_{2}(M\mathbf{t}_1)$，则有

$$\mathfrak{E}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi], \mathcal{N}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi] \in X_{2,2}^{s';q-\alpha_p}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}). \tag{3.6}$$

3. 设 $q \in \mathbb{N}$ 和 $\Phi \in \mathbf{t}^{q-\alpha_p} X^{s';0}_{\mathrm{s}}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$ 以及 $\Phi_1 \in \mathbf{t}^{1-\alpha_p} X^{s;s-s'}_{\mathrm{s}}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$，则有

$$\mathfrak{E}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi], \mathcal{N}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi] \in \mathbf{t}^{q-\alpha_p-1} X^{s;s-s'}_{\mathrm{s}}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}). \tag{3.7}$$

4. 我们对 $\Phi_1 \in X^{s;1-\alpha_p}_{\infty,2}(\mathcal{M})$ 有一个非线性估计，并且 $\|\Phi_2\|_{X^{s;q-\alpha_p}_{2,2}(M)} \ \|\Phi_3\|_{X^{s;q-\alpha_p}_{2,2}(M)} \le 1$

$$\|\mathcal{N}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi_2] - \mathcal{N}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi_3]\|_{X^{s;q-\alpha}_{2,2}} \lesssim \|\Phi_2 - \Phi_3\|_{X^{s;q-\alpha_p}_{2,2}}. \tag{3.8}$$

证明。注意到当 x 充分小时，$|(1+x)^p - 1 - px| \lesssim_p x^2$，并将其展开，即可得到第一个不等式。

$$\mathcal{N}_\Psi[\Phi] = \Psi^p\Big((1+\Phi/\Psi)^p - 1 - p\Phi/\Psi\Big) \in X^{s;-p\alpha_p+2q}_{\infty,2} \subset X^{s;q-\alpha_p-1}_{\infty,2}, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{E}_{\phi_0+\Phi_1}[\Phi] = \phi_0^{p-1}\big((1+\Phi_1/\phi_0)^{p-1} - 1\big)\Phi \in X^{s;-(p-1)\alpha_p+1+q-\alpha_p}_{\infty,2} = X^{s;q-\alpha_p-1}_{\infty,2}, \tag{3.10}$$

其中我们用到了 $\alpha_p(p-1) = 2, q \ge 1$。第二个结论由相同的计算得出，使用嵌入 (2.7) 和乘积估计；注意，我们因索伯列夫而损失了一个衰减幂次，但最终这不会造成影响。接下来，(3.6) 可由以下事实得出：我们所作的所有展开都是光滑的，因此若 Φ_1, Φ 是光滑的，结果也光滑。

最后，(3.8) 由 $\mathcal{N}_\Psi[\Phi]$ 关于 $|\Phi|/\Psi < 1/2$ 的光滑性及其二次性得出。

$$|(1+x)^p - 1 - px| - |(1+(x+y))^p - 1 - p(x+y)| \lesssim |y|, \qquad \forall x, y < 1/2. \tag{3.11}$$

□

3.2 奇异拟设

定义 3.1. 我们称 ϕ 是衰减为 N、正则性为 $s > N + \frac{n+1}{2}$ 的奇异拟设，如果它具有形式[12] (2.9)，并且

$$\Box\phi + \phi^p \in X^{s-N-2;N-\alpha_p-3/2}_{\infty,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}). \tag{3.12}$$

容易得到，只要 $f \in H^{s+1}(\mathbb{B}_1)$，$\phi_0$ 就是衰减为 $1/2$、正则性为 $s-2$ 的奇异拟设。为改进这一拟设，对于慢衰减误差，我们使用由(1.11)给出的显式反演，即当 $q \le \beta_p$时的$\mathcal{O}(\mathbf{t}^q)$。对于更快衰减的误差，不必追踪其精确结构，我们转而在$X_{\infty,2}(\mathcal{M})$空间中对误差和修正给出界，并使用如下一般常微分方程结果：

引理 3.2. 给定$f \in X^{s;q}_{\infty,2}(M)$ 且 $q > \beta_p$，存在唯一的 $g \in X^{s;\beta_p+}_{\infty,2}(M)$ 使得$(t^2\partial_t^2 - \gamma_p)g = f$，并且它实际上满足$g \in X^{s;q}_{\infty,2}(M)$。

证明。为了证明该引理，只需证明以下常微分方程[13] 结果

$$\big\|\{1, t\partial_t\}^k g\big\|_{t^q L^\infty((0,1])} \lesssim \big\|\{1, t\partial_t\}^k (t\partial_t - q')^g\big\|_{t^q L^\infty((0,1])}, \qquad \forall q > q', \ \ g \in t^{q'+}L^\infty((0,1])。 \tag{3.13}$$

注意到，通过与 $t^{q'}$ 对易，只需证明 $q' = 0$ 的 (3.13)。令 $\|t\partial_t g\|_{t^q L^\infty} = 1$ 归一化，并对 $k = 0$ 计算

$$\|g\|_{L^\infty} \le \sup_{t\in[0,1)} t^{-q} \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{t} |t\partial_t g| \le \sup_{t\in[0,1)} t^{-q} \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{t} t^q = q^{-1} \tag{3.14}$$

[12]我们对正则性作出 $1/2$ 移位，以便能够用相同的记号处理 $p \in \mathbb{N}$ 情形，其中展开中会出现对数项。[13]参见 [HV20，引理 7。5] 基于 L^2 的类比结果。

利用 (1.3)，我们将 $(t^2\partial_t^2-\gamma_p)g=f$ 与 $t^{-\beta_p}$ 对易，得到

$$(t^2\partial_t^2+2\beta_p t\partial_t)(t^{-\beta_p}\phi)=\big(t\partial_t+2\beta_p-1\big)t\partial_t(t^{-\beta_p}\phi)=t^{-\beta_p}f. \tag{3.15}$$

两次应用 (3.13) 即得该结果。 □

这将是 重要的是，在构造拟设时要区分 $2\gamma_p$ 为整数的情形。

命题 3.3. 固定散射数据 $N\in\mathbb{N}$、 $s-N>\lfloor 2\kappa_p\rfloor+5+\frac{n+1}{2}$、 $f\in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\psi\in H^{s-\lfloor 2\kappa_p\rfloor}(\mathbb{R}^n)$。则存在一个正则性为 s、衰减阶为 $N+\lfloor 2\kappa_p\rfloor$ 、散射数据为 ψ 的奇异拟设 ϕ，满足 $P[\phi]\in X^{s-N-\lfloor 2\kappa_p\rfloor-2,N-5/2}_{2,\infty}(\mathcal{M})$。

证明. 这可由借助显式公式 (1.11) 或引理 3.2 迭代求逆首项算子得到，类似于 [CMZ20；Kic07] 中的做法。为完整起见，我们给出一些细节。

我们重点讨论 $2\kappa_p\in\mathbb{N}$ 这一情形，另一种情形更容易处理。首先，对 $q<\lfloor 2\kappa_p\rfloor$，我们求出满足 $P[\phi_q]\in\mathbf{t}^{q-\alpha_p-1}X^{s-q-1}_{\mathrm{s}}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$ 的 ϕ_q。对于 $q=0$，我们使用定义 2.1 中的 ϕ_0。对于 $q\geq 1$，令 $\phi_q=\phi_{q-1}+\psi_q\mathbf{t}^{q-\alpha_p}$ 满足方程 $P_0[\psi_q\mathbf{t}^{q-\alpha_p}]$，从而使其成为 $P[\phi_{q-1}]$的首项；更精确地说，

$$\big((\alpha_p-q)(\alpha_p-q+1)-\gamma_p\big)(1-|\partial f|^2)\psi_q:=-\mathbf{t}^{\alpha_p+1-q}P[\phi_{q-1}]|_{\mathbf{t}=0}. \tag{3.16}$$

We 断言 $P[\phi_{q-1}]\in\mathbf{t}^{q-\alpha_p-2}X^{s-q-2}_{\mathrm{s}}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$ 且 $\psi_q\in H^{s-q}(\Sigma_0)$。事实上，我们可以写成 e

$$P[\phi_q]=P[\phi_{q-1}]+P_0[\psi_q]+\big(P_f[\psi_q]+\mathfrak{E}_{\phi_{q-1}}[\psi_q]+\mathcal{N}_{\phi_{q-1}}[\psi_q]\big), \tag{3.17}$$

利用引理 3.1 中的 (3.5) 和显式公式 (1.11) 作归纳，即可得证。

接下来，我们将 $\phi_{\log}$定义为 $(2\beta_p-1)\phi_{\log}=-\lim_{\mathbf{t}\to 0}\mathbf{t}^{\beta_p+2}P[\phi_{2\kappa_p-1}]$，使得

$$P[\underbrace{\phi_{2\kappa_p-1}+\phi_{\log}\mathbf{t}^{\beta_p}\log\mathbf{t}+t^{\beta_p}\psi}_{=:\phi_{\lfloor 2\kappa_p\rfloor}}]\in X^{s-2\kappa_p-1;\beta_p-1-\epsilon}_{\infty,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})+X^{s-2\kappa_p-2;\beta_p-\epsilon}_{\infty,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}),\quad\forall\epsilon>0. \tag{3.18}$$

接下来，我们构造 ϕ_q，使得 $q>\lfloor 2\kappa_p\rfloor$，$(\mathcal{M})+X^{s-q-2;q-\alpha_p-1/2}_{\infty,2}$，$(\mathcal{M})$。我们用 $(P[\phi_q])_1$ 和 $(P[\phi_q])_2$ 表示分解得到的这些项。对于 $2\kappa_p<q<N$，我们通过对 y 进行参数化求解方程 $P_0\psi_q=-(P[\phi_{q-1}])_1$，来定义 $\psi_q\in X^{s-2q;q-\alpha_p}_{\infty,2}$，$(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$；该方程的解由引理 3.2 给出。以 $\phi=\phi_{N+\lfloor 2\kappa_p\rfloor}$ 作为拟设即可得到结果：

$$\begin{aligned}P[\phi]\in X^{s-N-\lfloor 2\kappa_p\rfloor-1;N+\lfloor 2\kappa_p\rfloor-\alpha_p-3/2}_{\infty,2}(\mathcal{M})+X^{s-N-\lfloor 2\kappa_p\rfloor-2;N+\lfloor 2\kappa_p\rfloor-\alpha_p-1/2}_{\infty,2}(\mathcal{M})\\ \subset X^{s-N-\lfloor 2\kappa_p\rfloor-2;N+\lfloor 2\kappa_p\rfloor-\alpha_p-3/2}_{\infty,2}(\mathcal{M})\subset X^{s-N-\lfloor 2\kappa_p\rfloor-2;N-3/2}_{\infty,2}(\mathcal{M}).\end{aligned} \tag{3.19}$$

□

3.3 能量估计与非线性解

接下来，我们证明线性化算子 $P_{\phi_0}=\Box+p\phi_0^{p-1}$ 的一个能量估计。尽管 $p\phi_0^{p-1}$ 部分的 P_{ϕ_0} 将被视为误差项，但我们仍将其明确写出，因为它决定了 q 的取值，使得我们能够获得 $P_{\phi_0}:X^{s;q}_{2,2}(\mathcal{M})\to X^{s;q-2}_{2,2}(\mathcal{M})$ 的可逆性，正如第 1.3 节中那样。我们首先给出一些一般定义。

定义3.2。对于定义在闵可夫斯基空间中区域 $\mathcal{D}$ 上的某个函数 $\Phi\colon U\to\mathbb{R}$，定义其能量动量张量为

$$\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]:=\nabla_\mu\Phi\,\nabla_\nu\Phi-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\cdot\eta(\nabla\Phi,\nabla\Phi). \tag{3.20}$$

于是，对于同一区域 $\mathcal{D}$ 中的某些向量场 Z^μ 和 Q^μ，我们将与三元组 (Φ,Z^μ,Q^μ) 相关联的能量流定义为向量场 $\mathbb{J}^\mu=\mathbb{J}^\mu[\Phi,Z,Q]$，其定义如下：

$$\mathbb{J}^\mu=(\eta^{-1})^{\mu\nu}\mathbb{T}_{\nu\sigma}[\Phi]Z^\sigma-Q^\mu\Phi^2. \tag{3.21}$$

引理 3.4. 考虑由下式给出的向量场 Z^μ 和 Q^μ

$$Z^\mu := \mathbf{t}^{-2q} T^\mu = \mathbf{t}^{-2q} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\right)^\mu, \quad Q^\mu := \frac{\kappa_p^2}{2} \mathbf{t}^{-2(q+1)} T^\mu. \tag{3.22}$$

那么，对于如 *(3.21)* 中的 $q \geq 4\kappa_p$ 和 $\mathbb{J}^\mu = \mathbb{J}^\mu[\Phi, Z, Q]$，有

$$\nabla_\mu \mathbb{J}^\mu \geq \mathbf{t}^{-2q} \Box_\Phi T\Phi + \frac{q}{4} \mathbf{t}^{-2q-3} |\mathcal{V}_{\mathrm{top}} \Phi|^2_{\ell^2} + \frac{\kappa_p^2 q \left|\Phi\right|^2}{4}, \tag{3.23}$$

以及在常数 $\mathbf{t}$ 超曲面上的强制性：对于 $N^\mu = -$ $\frac{d_{\mathbf{t}}}{-\eta(\nabla \mathbf{t}, \nabla \mathbf{t})^{1/2}}$，

$$\frac{1}{4} |\mathcal{V}_{\mathrm{top}} \Phi|^2_{\ell^2} \leq \mathbb{J}^\mu N_\mu \leq 4 |\mathcal{V}_{\mathrm{top}} \Phi|^2_{\ell^2}. \tag{3.24}$$

证明。 首先计算梯度 $\nabla^\mu \mathbf{t}$ 和法向量场 N^μ将有所帮助。通过通常的闵可夫斯基坐标，我们得到

$$d\mathbf{t} = dt - \partial_i f dx^i,$$

因此，梯度向量场 $\nabla^\mu \mathbf{t}$ 为

$$-\nabla \mathbf{t} = \frac{\partial}{\partial t} + \partial_i f \frac{\partial}{\partial x^i} = (1 - |\partial f|^2) T + \partial_i f \frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中使用了 (2.3b)。此外，还可推出 $N = (1 - |\partial f|^2)^{1/2} T + (1 - |\partial f|^2)^{-1/2} \partial_i f \frac{\partial}{\partial y^i}$ $\overline{\quad i}$.

现在，由于 T 是一个 Killing 向量场，因此变形场 $\mathcal{L}_Z \eta$ 和 $\operatorname{div} Q$ 为

$$(\mathcal{L}_Z \eta)_{\mu\nu} = \nabla_\mu Z_\nu + \nabla_\nu Z_\mu = -2q \mathbf{t}^{-2q-1} (\nabla_\mu \mathbf{t} T_\nu + \nabla_\nu \mathbf{t} T_\mu),$$
$$\operatorname{div} Q = -\kappa_p^2 (q+1) \mathbf{t}^{-2q-3} T^\mu \partial_\mu \mathbf{t} = -\kappa_p^2 (q+1) \mathbf{t}^{-2q-3}.$$

经过经典计算可得

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \mathbb{J}^\mu &= \frac{1}{2} \mathbb{T}_{\mu\nu} (\mathcal{L}_Z \eta)^{\mu\nu} - \operatorname{div} Q \Phi^2 - 2(Q\Phi)\Phi + \mathbf{t}^{-2q} \Box \Phi \cdot T\Phi \\ &= -2q \mathbf{t}^{-2q-3} \cdot \mathbf{t}^2 \mathbb{T}(T, \nabla \mathbf{t}) + \kappa_p^2 (q+1) \mathbf{t}^{-2q-3} \Phi^2 - \kappa_p^2 \mathbf{t}^{-2q-3} (\mathbf{t} T\Phi)\Phi + \mathbf{t}^{-2q} \Box \Phi \cdot T\phi. \end{aligned} \tag{3.25}$$

接下来，利用 (2.3a) 及上述结果可知 $\eta(T, \nabla \mathbf{t}) = -1$，我们将 $\mathbb{T}(T, \nabla \mathbf{t})$ 计算为 $\mathbf{b}$ e

$$\mathbb{T}(T, \nabla \mathbf{t}) = -\frac{1}{2} \left((1 - |\partial f|^2)(T\Phi)^2 + \gamma^{ij} \partial_{y^i} \Phi \partial_{y^j} \Phi \right).$$

将其代入 (3.25)，并利用 $|\partial f|^2 < \frac{1}{2}$，然后使用杨氏不等式对交叉项 $(\mathbf{t}T\Phi)\Phi$ 进行界定，即可得到估计 (3.23)。强制性 (3.24) 类似，其中我们反复使用 $|\partial f|^2 < \frac{1}{2}$，以及 $\eta(T, N) = -(1 - |\partial f|^2)^{-1/2}$。 $\square$

现在我们利用这一形式体系为算子 $P_{\phi_0} = \Box + p\phi_0^{p-1}$ 证明一个能量估计。

命题 3.5。 设 $f \in H^{s+1}(\mathbb{B}_3)$ 对于 $s >\geq \frac{N+4}{2}$ 成立。设 ψ, F 是支集包含于 $\{\mathbf{t} \geq \mathbf{t}_0 > 0\} \cap M_{\mathbf{t}_1}$ 且满足 $P_{\phi_0} \psi = F$ 的光滑函数。那么，对于 $q > q_0 = \frac{10\kappa_p}{1 - |\partial f|^2}$，以及 $k \in \mathbb{N}_{<s}$ 和 $j \in \mathbb{N}$，有如下估计成立

$$\left\| (\mathbf{t}\partial_{\mathbf{t}})^j \mathcal{V}_{\mathrm{top}} \psi \right\|^2_{X^{k;q+2}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})} \lesssim_{k,q,j} \left\| (\mathbf{t}\partial_{\mathbf{t}})^j F \right\|^2_{X^{k;q}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})}. \tag{3.26}$$

注记 3.1. 就 q_0的最小值而言，本命题远非最优。我们相信，通过优化常数并将 $|\partial f|$限制得更小，用同样的方法可以得到 $q_0 = \beta_p - 2$。

证明。步骤 *1*：我们从未经交换的估计 $k=0$ 出发，并取充分大的 $q>4\kappa_p$，其具体大小将在证明过程中确定。我们对引理 3.4中所考虑的流 $\mathbb{J}^\mu=\mathbb{J}^\mu[\psi,Z,Q]$应用散度定理。利用该引理，我们知道

$$\nabla_\mu\mathbb{J}^\mu[\psi,Z,Q]\geq\mathbf{t}^{-2q-1}(-p\phi_0^{p-1}\psi+F)\mathbf{t}T\psi+\frac{q}{4}\mathbf{t}^{-2q-3}|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\psi|^2_{\ell^2}+\frac{q\kappa_p^2\psi^2}{4}.$$

接下来，利用 $\phi_0=(1-|\partial f|^2)^{\frac{1}{p-1}}c_p\mathbf{t}^{-\alpha_p}$，其中 $\alpha_p=\frac{2}{p-1}$和 $pc_p^{p-1}=\frac{2p}{(p+1)(p-1)}=\gamma_p<2\kappa_p^2$，我们发现只要 $\frac{q\kappa_p}{8}>\gamma_p(1-|\partial f|^2,$，就可以吸收 $\mathbf{t}^{-2q-1}p\phi_0^{p-1}|\psi\mathbf{t}T\psi|\leq\frac{q}{8}|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\psi|^2_{\ell^2}+\frac{q\kappa_p^2}{8}\psi^2$，因此得到

$$\nabla_\mu\mathbb{J}^\mu[\psi,Z,Q]\geq\mathbf{t}^{-2q-3}\left(\frac{q}{8}|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\psi|^2_{\ell^2}+\mathbf{t}T\psi\cdot\mathbf{t}^2F\right).$$

由于 $\mathbb{J}^\mu$ 的两个分量都是过去指向的因果向量，$\mathbb{J}^\mu$ 本身也是如此。因此，在 $\mathcal{M}^{\mathbf{t}_1}$ 中应用散度定理时，任何边界积分中法向量为未来指向的类时向量所产生的贡献都是正的，可以忽略。另一方面，由于我们假设在$\{\mathbf{t}\geq\mathbf{t}_0\}$中具有紧支撑，边界积分在 $\Sigma_{\mathbf{t}_0}$ 处的贡献也可以假定为零。

因此，由散度定理可得

$$\frac{q}{8}\int_{\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}}\mathbf{t}^{-2q-3}|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\psi|^2_{\ell^2}\leq\int_{\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1}}\mathbf{t}^{-2q-1}F\cdot\mathbf{t}T\psi.$$

利用杨氏不等式可得带有 $k=0$ 和 $q\mapsto q+0.5$ 的估计 (3.26)。

步骤 *2*：现在我们应用交换子来增大 k 的可能取值，回顾一下，我们使用的交换子向量场为 ∂_y 和 $\mathbf{t}\partial_\mathbf{t}$。首先，注意到以下对易关系，

$$[\partial_y,(1-|\partial f|^2)^{-1}P_{\phi_0}]\psi=A\psi,\tag{3.27}$$

其中，A 是一个二阶算子，在 $\partial_\mathbf{t}\partial_y$ 和 ∂_y^2 前的系数为 H^{s-1}，其大小仅取决于 $\|f\|_{C^{2\infty}}$ 特别地，将 (3.26) 的 $k=0$ 情形应用于方程

$$P_{\phi_0}\partial_y\psi=(1-|\partial f|^2)A(\psi)+(1-|\partial f|^2)\partial_y((1-|\partial f|^2)^{-1}F),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\psi\|^2_{X^{1;q+2}_{2,2}}\lesssim_f\|F\|^2_{X^{1;q}_{2,2}}+\|(\partial_y\partial_\mathbf{t}\psi,\partial_y^2\psi)\|^2_{X^{0;q}_{2,2}}&\lesssim\|F\|^2_{X^{1;q}_{2,2}}+\|\mathbf{t}^{-1}\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\psi\|^2_{X^{0;q}_{2,2}}\\&\lesssim\|F\|^2_{X^{1;q}_{2,2}}+\mathbf{t}_1^2\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\partial_y\psi\|^2_{X^{1;q+2}_{2,2}},\end{aligned}$$

其中，在最后一步中，我们使用了 $\mathbf{t}\leq\mathbf{t}_1$。因此，当 $\mathbf{t}_1$ 足够小时，最后一项可以被吸收，从而得到 $k=1$ 的估计 (3.26)。类似地，对于任意多重指标 α，都可以与 ∂_y^α 进行对易，从而对任意 k 得到 (3.26)，其中隐含常数取决于 $\|f\|_{H^{k+1}}$。

为了也恢复$\mathbf{t}\partial_\mathbf{t}$ 导数，我们利用 (2.3c) 中 $\Box$ 的形式，将 $\partial_\mathbf{t}^2\psi$ 表示为其他导数的形式，从而得到

$$\left\|(\mathbf{t}\partial_\mathbf{t})^2\psi\right\|_{X^{0;q+2}_{2,2}}\lesssim_f\|\psi\|_{X^{0;q+2}_{2,2}}+\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\partial_y\psi\|_{X^{0;q-1}_{2,2}}+\|F\|_{X^{0;q}_{2,2}}.\tag{3.28}$$

更高阶$\mathbf{t}\partial_\mathbf{t}$ 导数的推导类似。

步骤 *3*：为了证明 $\partial_\mathbf{t}$ 对易可以独立于 ∂_y 对易实现，我们计算得

$$P_{\phi_0}\partial_\mathbf{t}\phi=-\frac{2}{\mathbf{t}^3}(1-|\partial f|^2)\phi+\partial_\mathbf{t}F.\tag{3.29}$$

将 (3.26) 应用于 $q\mapsto q+1$，并利用前面的估计对右端的第一项取界，即可得到所需结果。

□

为应用上述线性估计，我们考虑围绕拟设 ϕ_1 的线性化问题，其中$\bar{}$的衰减阶为 q_0， q_0 如命题 3.5 所述。将 (1.1) 的一个解写为 $\phi_1+\phi$，$\bar{}$，其中 ϕ 满足

$$-P_{\phi_0}\bar{\phi}=\mathfrak{E}_{\phi_1}[\bar{\phi}]+\mathcal{N}_{\phi_1}[\bar{\phi}]+\underbrace{\Box\phi_1+\phi_1^p}_{=:F_1}. \tag{3.30}$$

$\bar{}$我们证明，只要对 F_1进行截断，就存在一个关于 ϕ 的存在区间，该区间对于截断位置为 F_1是一致的，因此，根据紧性，可得到方程（3.30）的一个解。

引理 3.6。令 $k\geq 5+\frac{n+1}{2}$和 $q>q_0+1$ 关于 q_0 如命题 *3.5* 中所述。固定 $f\in X^{k+1}_{2,2}(\mathbb{B}_3)$， $F_1\in X^{k;q}_{2,2}(\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}_1})$ 以及 $\phi_1=\phi_0+X^{k;1-\alpha_p}_{\infty,2}(\boldsymbol{M})$。存在一个充分小的 $\mathbf{t}_1$，使得方程（*3.30*）存在一个唯一解$\bar{\phi}\in X^{k-1;q-1}_{2,2}(\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}_1})$，且该解属于 $\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}_1}$。这里，唯一性是在空间 $X^{k-1;q-1}_{2,2}(\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}_1})$内成立的。

假设 $(\mathbf{t}\partial_{\mathbf{t}})^j F\in X^{k;q}_{2,2}(\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}_1})$，则对于 $\bar{\phi}$也有同样的改进，即 $(\mathbf{t}\partial_{\mathbf{t}})^j\bar{\phi}\in X^{k-1;q-1}_{2,2}(\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}_1})$。

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$证明。我们通过紧性从如下定义的序列 ϕ_m 构造 ϕ。设 ϕ_m 是方程 (3.30) 的一个解，其中 $F_1\in X^{k;q}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})$ 乘以 $\chi(\mathbf{t}/2^m)$，且当$\mathbf{t}$ 充分小时 $\bar{\phi}_m$ 消失。存在充分小的$\mathbf{t}_1\bar{}$，使得对所有 $m>-\log\mathbf{t}_1$， ϕ_m 都存在于 $(0,\mathbf{t}_1)$ 中，并且以下一致估计成立

$$\left\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\bar{\phi}_m(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})\right\|_{X^{k;q}_{2,2}}\leq 1. \tag{3.31}$$

步骤 *1*：应用命题 3.5 可得

$$\left\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\bar{\phi}_m\right\|_{X^{k;q+2}_{2,2}}\lesssim_f\|F_1\|_{X^{k;q}_{2,2}}+\left\|\mathfrak{E}_{\phi_1}[\bar{\phi}_m]+\mathcal{N}_{\phi_1}[\bar{\phi}_m]\right\|_{X^{k;q}_{2,2}} \tag{3.32}$$

利用引理 3.1 中的 (3.6) 对最后两项作如下界定

$$\left\|\mathfrak{E}_{\phi_1}[\bar{\phi}_m]+\mathcal{N}_{\phi_1}[\bar{\phi}_m]\right\|_{X^{k;q}_{2,2}}\lesssim_{\phi_1}\left\|\bar{\phi}_m\right\|_{X^{k;q+1}_{2,2}} \tag{3.33}$$

在假设$\left\|\bar{\phi}_m\right\|_{X^{k;q}_{2,2}}\leq 1$下。通过取充分小的 $\mathbf{t}_1$，可以使$\|F_1\|_{X^{k;q}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_1})}$任意小，并通过自举得到 (3.31)。

步骤 *2*：利用 $X^{k,q}_{,2}\to X^{k-1,q-1}_{2,2}$，是一个紧嵌入，我们知道 $\bar{\phi}_m\to\bar{\phi}$ 属于 $X^{k-1,q-1}_{,2,2}$。这就 $\bar{\phi}$ 解出了 (3.30)，并满足$\left\|\bar{\phi}\right\|_{X^{k-1,q-1}_{2,2}}\leq 1$。

步骤 *3*：为了证明唯一性，假设 $\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2\in X^{k-1,q-1}_{2,2}(\mathcal{M})$，且二者都是 (3.30) 的解。$\bar{}$ $\bar{}$令 $\phi_\Delta=\phi_1-\phi_2$，则

$$P_{\phi_0}\phi_\Delta-\mathfrak{E}_{\phi_1}[\phi_\Delta]=\mathcal{N}_{\phi_1}[\bar{\phi}_1]-\mathcal{N}_{\phi_1}[\bar{\phi}_2]. \tag{3.34}$$

右端关于 ϕ_Δ 呈线性形式，由 (3.8) 捕获。令我们用截断函数 χ_n 乘以 (3.34)：$=\chi(\mathbf{t}/2^n)$，并对 $(k-1,q-1)$ 使用估计 (3.26) 应用于 (3.34)，得到

$$\|\chi_n\phi_\Delta\|_{X^{k-1;q+1}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_2})}\lesssim\mathbf{t}_2\|\chi_n\phi_\Delta\|_{X^{k-1;q+1}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_2})}+\sum_{i\in 1,2}\|(\chi_{n+2}-\chi_n)\phi_i\|_{X^{k-1;q+1}_{2,2}(\mathcal{M}_{\mathbf{t}_2})}. \tag{3.35}$$

右端项在极限 $n\to\infty$ 中消失，因此，当$\mathbf{t}_2$ 充分小时，我们得到$\phi_\Delta=0$。$\{\mathbf{t}\in(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1)\}$ 中的唯一性由波动方程的标准唯一性得出。 □

定理 3.7. 设 s、f、ψ如定理 *1.1* 中所述。则存在*(1.1)*的唯一奇异解 ϕ，其正则性 $s-12\kappa_p$ 如定义 *2.1* 所述。

证明。令 q_0 如命题 3.5 所述。利用命题 3.3，我们设 ϕ_1 为一个具有衰减$q_0+\lfloor 2\kappa_p\rfloor+3$和正则性 $s>q_0+\lfloor 2\kappa_p\rfloor+10+\frac{n+2}{2}$的拟设，使得 $P[\phi_1]\in X^{\frac{s-q_0-\lfloor 2\kappa_p\rfloor}{2};\infty,q_0}$。将我们要构造的解记为 $\phi=\phi_1+\bar{\phi}$。那么引理 3.6 给出 $\bar{\phi}\in X^{\frac{s-q_0-\lfloor 2\kappa_p\rfloor-1}{2};2,q_0-1}$该解。

¯ ¯为证明唯一性，假设存在两个解 ϕ_1, ϕ_2，它们具有展开式 (2.9)，其中 ϕ_1, ϕ_2 表示 $X^{s-30\kappa_p}$;
2 2 β_p' ,中的余项。我们可以将 $\bar{\phi}_\Delta = \bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2$ 所满足的方程写为

$$P_0\bar{\phi}_\Delta + P_f\bar{\phi}_\Delta = \mathcal{N}_{\phi_0}[\phi_2 + \bar{\phi}_\Delta] - \mathcal{N}_{\phi_0}[\phi_1]. \tag{3.36}$$

使用与第 3.2 节相同的论证，我们可以进一步得到 $\bar{\phi}_\Delta \in X^{s-30\kappa_p-j}_{2}$; 2 $\beta_p'+j$ ，。取$j = 12\kappa_p$ 可推出 $\beta_p' + j > q_0$，因此我们可以应用命题 3.5 的能量估计，得出¯满足 $\phi_\Delta = 0$。

□

4 稳定性：定理 1.2 的证明

本节证明定理 1.2 中给出的奇异超曲面及散射数据的稳定性。正如第 1.3 节所述，本证明的大部分内容不会使用通常的闵可夫斯基时间坐标 t，而是使用隐式定义为 $\phi = c_p\tau^{-\alpha_p}$ 的 τ 坐标，其中奇点$\mathscr{S}$自然地表现为曲面 $\{\tau = 0\}$。

也就是说，我们使用第 2.2 节中引入的（τ， z^i）坐标系。在第 4.1 节中，我们汇总非线性波动方程 (2.16) 中涉及交换子和乘子向量场的计算，并据此推导第 4.2 节中的主要（退化）能量估计。接着，我们利用这一能量估计在第 4.3 节中得到 L^∞ 估计，其中关键在于使用命题 2.3 中的“输运”系统。最后，在第 4.4 节中，我们按照定义 2.4 恢复散射数据。

4.1 雅可比系数的交换波动方程

我们将使用 (2.16a) 和 (2.16b) 为 W 和 V^i 推导能量估计。为刻画问题的几何特征并简化计算，我们再次采用定义3.2中的几何形式体系。关键估计将通过对以下能量流$\mathbb{J}^\mu[\Phi, Z, Q]$应用散度定理得出，以下将其简称为 $\mathbb{J}^\mu[\Phi]$，具体如下。

引理 4.1。 对于某个 $\tilde{q} > 0$，我们定义乘子向量场 Z^μ 和向量场 Q^μ 如下：

$$Z^\mu := \tau^{2(\tilde{q}+1)}T^\mu = W\tau^{2(\tilde{q}+1)}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^\mu, \qquad Q^\mu := -\frac{\kappa_p^2}{2}T^\mu = -\frac{\kappa_p^2}{2}W\tau^{2\tilde{q}}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^\mu \tag{4.1}$$

设 $\mathbb{J}^\mu[\Phi] = \mathbb{J}^\mu[\Phi, Z, Q]$ 如定义*3.2*所述。则有以下散度恒等式：

$$\nabla_\mu\mathbb{J}^\mu[\Phi] = -\Omega^{-1}\tau^{2\tilde{q}-1}\left[2(\tilde{q}+1)\tau^2\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]T^\mu N^\nu + \tilde{q}\kappa_p^2 W\Phi^2 - \Omega W(\kappa_p^2\Phi + \tau^2\Box\Phi)\cdot\tau\partial_\tau\Phi\right], \tag{4.2}$$

其中， $\mathbb{T}[\Phi](T、\ N) = \mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]T^\mu N^\nu$可表示为以下强制量：

$$\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]T^\mu N^\nu = \frac{W\Omega^{-1}}{2}\Big(\Omega^2(\partial_\tau\Phi)^2 + \delta^{ij}(\partial_{z^i}\Phi)(\partial_{z^j}\Phi)\Big). \tag{4.3}$$

证明。散度：回顾一下会很有用：向量场 $T^\mu = W\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^\mu$ 是闵可夫斯基空间上的 Killing 向量场，并且对于 $(\pi^Z)^{\mu\nu} = (\mathcal{L}_Z\eta)_{\mu\nu} = \nabla_\mu Z_\nu + \nabla_\nu Z_\mu$，有

$$\nabla_\mu\mathbb{J}^\mu[\Phi] = \frac{1}{2}\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]\left(\pi^Z\right)^{\mu\nu} - (\operatorname{div}Q)\Phi^2 + \Box\Phi\cdot Z^\mu\nabla_\mu\Phi - 2\Phi\cdot Q^\mu\nabla_\mu\Phi. \tag{4.4}$$

现在，由于 T^μ 是 Killing 向量场，很容易验证

$$(\mathcal{L}_Z\eta)^{\mu\nu} = 2(\tilde{q}+1)\tau^{2\tilde{q}+1}\left(\nabla^\mu\tau\, T^\nu + T^\mu\,\nabla^\nu\tau\right) \quad \text{and} \quad \operatorname{div}Q = -\tilde{q}\kappa_p^2\tau^{2\tilde{q}-1}T^\mu\,\nabla_\mu\tau.$$

将 $\nabla^\mu\tau = -\Omega^{-1}N^\mu$ 代入，并利用 $\eta(N,\ T) = -\Omega^{-1}W$，即可得到该结果。

强制性：为计算 $\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]N^\mu T^\mu$，我们将利用 $T = W\frac{\partial}{\partial\tau}$ 和 $N = \Omega\frac{\partial}{\partial\tau} - \Omega^{-1}V^i\frac{\partial}{\partial z^i}$，从而得到 $\eta(T, N) = -\Omega^{-1}W$，进而得到

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]N^\mu T^\mu &= (N\Phi)(T\Phi) + \frac{1}{2}\Omega^{-1}W\eta(\nabla\Phi,\nabla\Phi)\\ &= W\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\left(\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - \Omega^{-1}V^i\frac{\partial\Phi}{\partial z^i}\right) + \frac{1}{2}\Omega^{-1}W\left\{-\Omega^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)^2 + 2V^i\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z^i} + \delta^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial z^i}\frac{\partial\Phi}{\partial z^j}\right\},\end{aligned}$$

由此立即得到 (4.3)。 □

接下来，我们引入一些示意性记号，以简化某些向量场对易计算的结果。首先，我们引入一些量，最终将证明它们一致有界。

定义 4.1。我们用 $\vec{\Phi}$ 表示下面这个 $\mathbb{R}^{n+2}$中的向量：

$$\vec{\Phi} = (\kappa_p\Phi, \tau\partial_\tau\Phi, \tau\partial_{z^k}\Phi)^\top.$$

类似地，我们用 $\vec{W}$和 $\vec{V}^i$分别表示向量 $(\kappa_p(W-1)\ \tau\partial_\tau W,\ \tau\partial_{z^k}W)^\intercal$和 $(\kappa_p V^i,\ \tau\partial_\tau V^i,\ \tau\partial_{z^k}V^i)^\intercal$。我们还将使用记号 $\vec{J}$来表示 $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$ 中的向量，该向量由 $\vec{W}$ 和 $\vec{V}^i$ 对所有 i拼接而成。

接下来，我们引入向量 $\vec{J}_0$，用于表示当 $\tau\to 0$时收敛[14] 至 0 的量。

定义 4.2. 我们还定义 $\vec{J}_0$ 来表示以下内容，其中我们遍历所有 i, j。

$$\vec{J}_0 = (\tau\partial_\tau W, \tau\partial_{z^j}W, \tau^2\partial_\tau^2 W, \tau^2\partial_\tau\partial_{z^j}W, \tau\partial_\tau V^i, \tau\partial_{z^j}V^i, \tau^2\partial_\tau^2 V^i, \tau^2\partial_\tau\partial_{z^j}V^i, \Omega^2-1)^\intercal.$$

记号 4.1. 下文中，诸如$\mathbf{L}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{Q}_\bullet$ 这样的粗体符号表示适当向量空间上的线性、双线性或多重线性形式，其系数允许依赖于 W 和 V^i 的取值（且这种依赖是光滑的）。线性形式$\mathbf{L}$ 总是作用于最高阶项，而双线性形式$\vec{\mathbf{B}}$ 的一个自变量是最高阶项，另一个自变量则是 J_0。另一方面，$\mathbf{Q}_\bullet$ 的各个自变量在适当意义下都是低阶项。$\mathbf{Q}_\bullet$ 的下标圆点$_\bullet$，有时也用于$\mathbf{B}_\bullet$，是简写，表示这些系数依赖于指标 α 和 α_ℓ，但无需明确写出这种依赖关系。

由于$\mathbf{L}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}_\bullet$的系数仅依赖于 V^i, W，而不依赖于它们的导数，稍后将引入的自举 (4.15a) 将推出这些形式的算子范数有界。另一条自举 (4.15b) 将表明，$\vec{J}_0$ 中的对象在趋近$\tau\to 0$时还具有良好的消失性质，因此双线性形式$\mathbf{B}(\cdot\ \vec{J}_0)$很容易估计。

接下来，我们推导一些引理，用于描述用坐标向量场 ∂_z^α 对方程 (2.16a) 和 (2.16b) 进行交换后所发生的情况。交换 ∂_z^α 与 $\Box$所产生的非线性项，要么导数阶数较低，要么包含与 $\vec{J}_0$ 中的项相乘的最高阶项，因此当 $\tau\to 0$ 时会相应地消失。然而，$\partial_z^\alpha(\Box\Phi)$ 包含主阶项，对这些项进行界估计将给出能量估计 $\tilde{q}$ 衰减率的下界。

引理 4.2。设 V^i 和 W 是系统 (2.16a) 和 (2.16b) 的解。那么，对于满足 $|\alpha|\geq 1$ 的任意多重指标 α，有：对于 $\Phi\in\{W\}\cup\{V^i:\ i=1,\dots,n\}$,

$$[\tau^2\Box, \partial_z^\alpha]\Phi = \mathbf{B}_{comm}(\partial_z^{|\alpha|}\vec{J}, \vec{J}_0) + \sum_{\substack{L\geq 2,\,|\alpha_\ell|\geq 1\\ \sum|\alpha_\ell|=|\alpha|}}\mathbf{Q}_{comm,\bullet}(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\dots,\partial_z^{\alpha_L}\vec{J}), \tag{4.5}$$

其中，记号 $\partial_z^{|\alpha|}\vec{J}$ 表示对所有满足 $|\beta|=|\alpha|$ 的多重指标 β 对 $\partial_z^\beta\vec{J}$ 进行拼接。

[14]可以将各分量与 $\vec{J}_0$ 定义 2.4 进行比较，以了解它们为何消失

证明。回忆一下由（2.12f）给出的τ, z^i坐标下波算子 $\Box$ 的形式。由于 ∂_z^α与算子 $\tau\partial_\mu$可交换，因此

$$[\tau^2\Box, \partial_z^\alpha]\Phi = -\partial_z^\alpha(\eta^{-1})^{\mu\nu}\cdot\tau^2\partial_\mu\partial_\nu\Phi - \partial_z^\alpha(W\tau\partial_\mu(W^{-1}(\eta^{-1})^{\mu\nu})))\cdot\tau\partial_\nu\Phi$$
$$+\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|\\ |\beta|,|\gamma|\geq 1}}\partial_z^\beta(\eta^{-1})^{\mu\nu} * \partial_z^\gamma(\tau^2\partial_\mu\partial_\nu\Phi) + \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|\\ |\beta|,|\gamma|\geq 1}}\partial_z^\beta(W\tau\partial_\mu(W^{-1}(\eta^{-1})^{\mu\nu})))*\partial_z^\gamma(\tau\partial_\nu\Phi). \quad (4.6)$$

注意，对于 Φ 属于 W 或 V^i 的情形，首行中的表达式 $\tau^2\partial_\mu\partial_\nu\Phi$ 和 $\tau\partial_\nu\Phi$ 可写成 $\tau\partial_z\vec{J}$，且也包含在 $\vec{J}_0$ 中。因此，利用 (2.12e) 将 $(\eta^{-1})^{\mu\nu}$ 表示为关于 W 和 V^i 的形式后，很容易看出，首行中的项可以分别并入 (4.5) 中的 $\mathbf{B}_{comm}$ 项或 $\mathbf{Q}_{comm,\bullet}$ 项。同样，(4.6) 中的最后一项也很容易并入 (4.5) 的 $\mathbf{Q}_{comm,\bullet}$ 部分。

接下来需要处理 (4.6) 第二行的第一项。利用波动方程 (2.16a) 和 (2.16b)，将 $\tau^2\partial_\tau^2\Phi$ 表示为涉及 $\tau\partial_{z^i}$ 的表达式及低阶项，我们可以将对象 $\tau^2\partial_\mu\partial_\nu$ 示意性地改写为

$$\tau^2\partial_\mu\partial_\nu\Phi = \tau\partial_z\vec{J} \quad \text{or} \quad \Omega^{-2}(\tau\partial_z\vec{J} + \vec{J}*\tau\partial_z\vec{J} + \vec{J} + \vec{J}*\vec{J}*\vec{J}). \quad (4.7)$$

现在考虑表达式 $\partial_z^\beta(\eta^{-1})^{\mu\nu} * \partial_z^\gamma(\tau^2\partial_\mu\partial_\nu\Phi)$。代入 (4.7) 并展开后，所有不涉及 $\tau\partial_z\vec{J}$ 的项都可以直接归入 (4.5) 中的 $\mathbf{Q}_{comm,\bullet}$ 部分。对于涉及 $\tau\partial_z\vec{J}$ 的项，我们注意到，由于 $|\beta|\geq 1$ 和 $(\eta^{-1})^{\mu\nu}$ 是 V^i 或 $\sum(V^i)^2 - W^2$ 之一，因此存在某个 β'，满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$，使得我们可以写成

$$\partial_z^\beta(\eta^{-1})^{\mu\nu} = \tau^{-1}\partial_z^{\beta'}\vec{J} \quad \text{or } \tau^{-1}\partial_z^{\beta'}(\vec{J}*\vec{J}).$$

这意味着我们可以将导数和 τ 从任意一个 $\tau\partial_z\vec{J}$ 都分配到 $\partial_z^\beta(\eta^{-1})^{\mu\nu}$ 上。例如，我们可以将 $\partial_z^\beta(\eta^{-1})^{\mu\nu} * \partial_z^\gamma\tau\partial_z\vec{J}$ 改写为

$$\partial_z^{\beta'}\vec{J} * \partial_z^\gamma\partial_z\vec{J} \quad \text{or} \quad \partial_z^{\beta'}(\vec{J}*\vec{J}) * \partial_z^\gamma\partial_z\vec{J}.$$

如果 $|\gamma|\leq|\alpha|-2$，使得 $|\beta'|\geq 1$，那么这类项可以包含在 (4.5) 的 $\mathbf{Q}_{comm,\bullet}$ 部分中。另一方面，如果 $|\gamma| = |\alpha| - 1$，使得 β' 为空，那么注意到 $\partial_z^\beta(\eta^{-1})^{\mu\nu}$ 还可以进一步写成 $\vec{J}_0$ 或 $\vec{J}_0 * \vec{J}$，而最高阶项 $\partial_z^\gamma\partial_z\vec{J}$ 包含在 $\partial_z^{|\alpha|}\vec{J}$中，因此这类表达式则包含在 (4.5) 的 $\mathbf{B}_{comm}$ 部分中。其他所有项也可类似处理。

□

引理 4.3。设 W 和 V^i 是 (2.16a) 和 (2.16b)的解。那么，对于 $|\alpha|>1$,

$$\partial_z^\alpha\left(\tau^2\Box W\right) = \mathbf{L}_W(\partial_z^\alpha\vec{J}) + \mathbf{B}_{in,\bullet}(\partial_z^\alpha\vec{J}, \vec{J}_0) + \sum_{\substack{J\geq 2,\,|\alpha_j|\geq 1\\ \sum|\alpha_j|=|\alpha|}}\mathbf{Q}_{in,\bullet}(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\ldots,\partial_z^{\alpha_J}\vec{J}), \quad (4.8)$$

$$\partial_z^\alpha\left(\tau^2\Box V^i\right) = \mathbf{L}_{V^i}(\partial_z^\alpha\vec{J}) + \mathbf{B}_{in,\bullet}(\partial_z^\alpha\vec{J}, \vec{J}_0) + \sum_{\substack{J\geq 2,\,|\alpha_j|\geq 1\\ \sum|\alpha_j|=|\alpha|}}\mathbf{Q}_{in,\bullet}(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\ldots,\partial_z^{\alpha_J}\vec{J}), \quad (4.9)$$

其中，线性项$\mathbf{L}_W$和$\mathbf{L}_{V^i}$的系数显式依赖于 V^i 和 W，如下所示：

$$\mathbf{L}_W(\partial_z^\alpha\vec{J}) = 2\kappa_p W^2(\partial_z^\alpha W - \partial_z^\alpha\tau\partial_\tau W) - 2\kappa_p\sum_i V^i W(\partial_z^\alpha V^i - \partial_z^\alpha\tau\partial_\tau V^i), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{L}_{V^i}(\partial_z^\alpha\vec{J}) = 2\kappa_p W(V^i\partial_z^\alpha W - V^i\partial_z^\alpha\tau\partial_\tau W - \partial_z^\alpha\tau\partial_{z^i}W)$$
$$-2\kappa_p\sum_j V^j(V^i\partial_z^\alpha V^j - V^i\partial_z^\alpha\tau\partial_\tau V^j - \partial_z^\alpha\tau\partial_{z^i}V^j). \quad (4.11)$$

证明。这里，我们只需将 ∂_z^α 应用于（2.16a）和（2.16b）的右端。例如，我们有

$$\partial_z^\alpha\left(-\kappa_p(1-\Omega^2)W\right) = -\kappa_p(1-\Omega^2)\partial_z^\alpha W + 2\kappa_p W(W\partial_z^\alpha W - \sum_i V^i\partial_z^\alpha V^i) + \text{lower order terms.}$$

现在，在我们将 $2\kappa_p W(W\partial_z^\alpha W - \sum_i V^i\partial_z^\alpha V^i)$ 的贡献保留在线性项 (4.10) 之内的同时，我们利用 Ω^2-1 是 $\vec{J}_0$ 的一部分，从而将 $-\kappa_p(1-\Omega^2)\partial_z^\alpha W$ 放到 (4.8) 的 $\mathbf{B}_{in,\bullet}$ 部分。低阶项随后被纳入多重线性贡献 $\mathbf{Q}_{in,\bullet}$。其余计算类似进行。

□

推论 4.4. 假设以下结论在任意区域 $D \subset M$ 中成立。

$$W,\Omega,W^{-1},\Omega^{-1} \le \sqrt{2}, \quad \sum_i |V_i|^2 \le \frac{1}{2}, \quad |\vec{J}_0|_{\ell^2} \le \epsilon^{1/2}\tau^{1/2}. \tag{4.12}$$

于是，令 $\mathcal{J}$ 表示集合 $\{W-1, V^1, \dots, V^n\}$，则对满足 $|\alpha| = K \ge 1$ 的任意多重指标 α，我们在区域 D 中有如下界，其中 $D>0$ 为某个固定常数。

$$\begin{aligned}\sum_{\Phi\in\mathcal{J}} |\Omega W(\kappa_p^2\partial_z^\alpha\Phi + \tau^2\Box\partial_z^\alpha\Phi)(\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha\Phi)| &\le 100\kappa_p \sum_{\Phi\in\mathcal{J}} \left(2\tau^2\mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\alpha\Phi]T^\mu N^\nu + \kappa_p^2(\partial_z^\alpha\Phi)^2\right)\\ &+ D\epsilon^{1/2}\tau^{1/2}\sum_{\substack{\Phi\in\mathcal{J}\\ \beta=|\alpha|}} [2\tau^2\mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\beta\Phi]T^\mu N^\nu + \kappa_p^2(\partial_z^\beta\Phi)^2] + \left|\sum_{\substack{L\ge 2, |\alpha_\ell|\ge 1\\ \sum|\alpha_\ell|=K}} \mathbf{Q}_\bullet(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\dots,\partial_z^{\alpha_L}\vec{J})\cdot\partial_z^\alpha\tau\partial_\tau\Phi\right|.\end{aligned} \tag{4.13}$$

在零阶，我们还有更简单的界

$$\sum_{\Phi\in\mathcal{J}} |\Omega W(\kappa_p^2\Phi + \tau^2\Box\Phi)(\tau\partial_\tau\Phi)| \le 100\kappa_p \sum_{\Phi\in\mathcal{J}} \left(2\tau^2\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]T^\mu N^\nu + \kappa_p^2\Phi^2\right). \tag{4.14}$$

证明. 对任意 $\Phi\in\mathcal{J}$，我们将引理 4.2 与引理 4.3 结合起来，可得

$$\begin{aligned}\tau^2\Box\partial_z^\alpha\Phi &= [\tau^2\Box, \partial_z^\alpha\Phi] + \partial_z^\alpha\Phi\\ &= \mathbf{L}_\Phi(\partial_z^\alpha\vec{J}) + \mathbf{B}_\bullet(\partial_z^\alpha\vec{J},\vec{J}_0) + \sum_{\substack{L\ge 2, |\alpha_\ell|\ge 1\\ \sum|\alpha_\ell|=L}} \mathbf{Q}_\bullet(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\dots,\partial_z^{\alpha_L}\vec{J}),\end{aligned}$$

其中，我们简单地定义 $\mathbf{B}_\bullet = \mathbf{B}_{comm,\bullet} + \mathbf{B}_{in,\bullet}$ 以及 $\mathbf{Q}_\bullet = \mathbf{Q}_{comm,\bullet} + \mathbf{Q}_{in,\bullet}$。

由此可得

$$\begin{aligned}\Omega W(\kappa_p^2\partial_z^\alpha\Phi + \tau^2\Box\partial_z^\alpha\Phi)(\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha\Phi) &= \underbrace{\Omega W(\kappa_p^2\partial_z^\alpha\Phi + \mathbf{L}_\Phi(\partial_z^\alpha\vec{J}))\cdot\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha\Phi}_{\text{(I)}}\\ &+ \underbrace{\mathbf{B}_\bullet(\partial_z^{|\alpha|}\vec{J},\vec{J}_0)\cdot W\Omega\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha\Phi}_{\text{(II)}} + \underbrace{\sum_{\substack{L\ge 2, |\alpha_\ell|\ge 1\\ \sum|\alpha_\ell|=L}} \mathbf{Q}_\bullet(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\dots,\partial_z^{\alpha_L}\vec{J})\cdot W\Omega\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha\Phi}_{\text{(III)}}.\end{aligned}$$

滥用记号并将 ΩW 吸收到$\mathbf{Q}_\bullet$中后，项 (III) 保留为 (4.13) 中的最后一项。对于项 (II)，我们利用界 (4.12) 写成

$$\text{(II)} \le D\epsilon^{1/2}\tau^{1/2}\cdot\frac{1}{4}|\partial_z^\alpha\vec{J}|_{\ell^2}^2 \le D\epsilon^{1/2}\tau^{1/2}\sum_{|\beta|=|\alpha|}\sum_{\Phi\in\mathcal{J}}[2\tau^2\mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\beta\Phi]T^\mu N^\nu + \kappa_p^2(\partial_z^\beta\Phi)^2],$$

这里我们用到了 (4.3)。这正是 (4.13) 中的倒数第二项。

在 (4.13) 第一行中，主要贡献来自线性项 (I)。为了界定此项，我们可以利用 (4.10) 和 (4.11) 展开 $\mathbf{L}_\Phi(\partial_z^\alpha \vec{J})$，对 $\Phi \in \mathcal{J}$ 求和，然后反复使用杨氏不等式。下面给出一些例子来说明这一过程：

- (4.10) 中第二项的贡献为

$$\begin{aligned}|2\kappa_p \Omega W^3 \partial_z^\alpha \tau \partial_\tau W \cdot \partial_z^\alpha \tau \partial_\tau W| &= 2\kappa_p W^2 \cdot \Omega W (\partial_z^\alpha \tau \partial_\tau W)^2 \\ &\le 4\kappa_p \cdot 2\tau^2 \mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\alpha W] T^\mu N^\mu,\end{aligned}$$

  在最终估计中使用 (4.3)。

- (4.10) 中第四项的贡献为：对 i 中的求和使用柯西-施瓦茨不等式，然后使用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}\sum_i |2\kappa_p \Omega V_i W^2 \partial_z^\alpha \tau \partial_\tau V^i \cdot \partial_z^\alpha \tau \partial_\tau W| &\le \kappa_p W \left(\sum_i |V_i|^2\right)^{1/2} \cdot \Omega W \left((\tau \partial_\tau W)^2 + \sum_i (\tau \partial_\tau V^i)^2\right) \\ &\le 2\kappa_p \cdot \sum_{\Phi \in \mathcal{J}} 2\tau^2 \mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\alpha \Phi] T^\mu N^\mu.\end{aligned}$$

- (4.11) 中第四项的贡献，连同对 i 和 j 的求和，在对两重求和均使用柯西-施瓦茨不等式后，可估计为

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} |2\kappa_p \Omega W V_i V_j \partial_z^\alpha V^j \cdot \partial_z^\alpha \tau \partial_\tau V^i| &\le 2\kappa_p \Omega W \left(\sum_i |V_i|^2\right) \left(\sum_j (\partial_z^\alpha V^j)^2\right)^{1/2} \left(\sum_i (\partial_z^\alpha \tau \partial_\tau V^i)^2\right)^{1/2} \\ &\le 2\left(\sum_j \kappa_p^2 (\partial_z^\alpha V^j)^2 + \sum_i 2\tau^2 \mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\alpha V^i] T^\mu N^\mu\right).\end{aligned}$$

- (I) 中由于 $\kappa_p^2 \partial_z^\alpha \Phi$ 产生的附加线性项估计为

$$\begin{aligned}\sum_{\Phi \in \mathcal{J}} \Omega W |\kappa_p^2 \partial_z^\alpha \Phi \cdot \tau \partial_\tau \partial_z^\alpha \Phi| &\le \sum_{\Phi \in \mathcal{J}} \kappa_p \sqrt{\Omega W} |\kappa_p \partial_z^\alpha \Phi| \cdot |\sqrt{\Omega W} \partial_z^\alpha \tau \partial_\tau \Phi| \\ &\le \kappa_p \sum_{\Phi \in \mathcal{J}} \left(\kappa_p^2 (\partial_z^\alpha \Phi)^2 + 2\tau^2 \mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\alpha \Phi] T^\mu N^\mu\right).\end{aligned}$$

系统地逐项处理剩余项，并回想我们只考虑 $\kappa_p \ge 1$，最终可得

$$\text{(I)} \le 100\kappa_p \sum_{\Phi \in \mathcal{J}} \left(\kappa_p^2 (\partial_z^\alpha \Phi)^2 + 2\tau^2 \mathbb{T}_{\mu\nu}[\partial_z^\alpha \Phi] T^\mu N^\nu\right),$$

正如所需。零阶估计 (4.14) 可类似地得出，只需直接使用方程 (2.16a) 和 (2.16b)。

□

4.2 自举假设与能量估计

在第 4 节的后续内容中，我们经常会提到以下自举假设：

$$W, W^{-1}, \Omega, \Omega^{-1} \le \sqrt{2}, \quad V^i \le \sqrt{2}, \tag{4.15a}$$

$$|\partial_{z^i} \vec{J}|_{\ell^2} \le 1, \tag{4.15b}$$

$$|\vec{J}_0|_{\ell^2} \le \epsilon^{1/2} \tau^{1/2}. \tag{4.15c}$$

ˆ 第 4.2 节的关键命题如下；回顾区域$\mathcal{M}_{\tau_0,\tau_1}$以及来自（2.13）的超曲面 ˆ Σ_τ 的定义。

命题 4.5。 设 $\tau_0 < \tau_1$。假设 W, V^i 满足区域 ˆM_{τ_0,τ_1}中的系统 (2.16) 。此外，自举假设 (4.15a)、(4.15b) 和 (4.15c) 在此区域内均成立。那么，对所有整数 $K \geq 0$ 和 $\tilde{q} \geq 200\kappa_p$，有

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_0})} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \lesssim_{K,\tilde{q}} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})}. \tag{4.16}$$

证明中，构造以下几何能量将会有所帮助。

定义 4 3 $0 < \tau_0 \leq \tau_1$ Σ_τ $\tau_0[\Phi]$ $\Phi \in$ .. 对于，我们定义超曲面 ˆ 上函数 (ˆ C^{K+1} $\mathcal{M}$,) 的（零阶）$\tau_0\tau_1$ 能量 $\mathcal{E}$以及体能量$\mathcal{E}$,，如下: $\tau_0\,\tau_1[\Phi]$ —

$$\mathcal{E}_{\tau_0}[\Phi] \coloneqq \int_{\hat{\Sigma}_{\tau_0}} \mathbb{J}_\mu[\Phi] N^\mu \, \mathrm{dvol} = \int_{\hat{\Sigma}_{\tau_0}} \tau_0^{-2\tilde{q}} W \left(\tau_0^2 \mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi] T^\mu N^\nu + \frac{1}{2}\kappa_p^2 \Phi^2 \right) dz, \tag{4.17}$$

$$\overline{\mathcal{E}}_{\tau_0,\tau_1}[\Phi] \coloneqq \int_{\mathcal{M}_{\tau_0,\tau_1}} \mathbb{J}_\mu[\Phi] N^\mu \, \frac{\mathrm{dvol}}{\tau} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{E}_{\tilde{\tau}}[\Phi] \Omega^{-1} \, \frac{d\tau}{\tau}. \tag{4.18}$$

我们也常用 $\mathcal{E}^{(0)}_{\tau_0}[\Phi]$ 和 $\mathcal{E}^{(0)}_{\tau_0}{}_{,\tau_1}[\Phi]$ 分别代替 $\mathcal{E}_{\tau_0}[\Phi]$ 和 $\mathcal{E}_{\tau_0,\tau_1}[\Phi]$。 ⊣

or $K \geq 1$，我们还定义 K 阶能量（包括超曲面上的能量和体积区域内的能量） as

$$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[\Phi] = \sum_{|\alpha|=K} \mathcal{E}_{\tau_0}[\partial_z^\alpha \Phi], \quad \overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[\Phi] = \sum_{|\alpha|=K} \overline{\mathcal{E}}_{\tau_0,\tau_1}[\partial_z^\alpha \Phi], \tag{4.19}$$

以及总能量$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[J]$ 和$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}{}_{,\tau_1}[J]$ 定义如下

$$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[J] = \mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[W-1] + \sum_i \mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[V^i], \quad \overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[J] = \overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[W-1] + \sum_i \overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[V^i]. \tag{4.20}$$

最后，为方便记号，定义如下。（将 Φ 替换为 J 时，同理。）

$$\mathcal{E}^{(\leq K)}_{\tau_0}[\Phi] = \sum_{k=0}^K \mathcal{E}^{(k)}_{\tau_0}[\Phi], \qquad \overline{\mathcal{E}}^{(\leq K)}_{\tau_0,\tau_1}[\Phi] = \sum_{k=0}^K \overline{\mathcal{E}}^{(k)}_{\tau_0,\tau_1}[\Phi]. \tag{4.21}$$

引理 4.6。 假设自举条件(4.15a)成立，则对任意整数 $K \geq 0$ ，以下强制性成立

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\Phi\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_\tau)} \lesssim_{K,\tilde{q},p} \mathcal{E}^{(\leq K)}_{\tau_0}[\Phi] \lesssim_{K,\tilde{q},p} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\Phi\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_\tau)}$$

将 Φ 替换为 J 时，同理。

证明。 由 Ω 上界的定义、(4.15a) 中的 W 以及强制性 (4.3) 可立即得到。

□

命题 *4.5* 的证明。 我们对引理 4.1 中的散度恒等式进行积分，从而得到，对于 $0 <\tau_0 \leq \tau_1$，$\mathcal{E}[\Phi]$ 和 $\mathcal{E}[\Phi]$ 满足以下不等式。

$$\mathcal{E}_{\tau_0}[\Phi] + 2\tilde{q}\overline{\mathcal{E}}_{\tau_0,\tau_1}[\Phi] \leq \mathcal{E}_{\tau_1}[\Phi] + \int_{\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\tau_1}} \tau^{2\tilde{q}} W(\kappa_p^2\Phi + \tau^2\Box\Phi) \cdot \tau\partial_\tau\Phi \, \frac{\mathrm{dvol}}{\tau}. \tag{4.22}$$

利用 (4.14) 并对 $\Phi \in \mathcal{J} = \{W, V^1, \ldots, V^n\}$ 求和，对于选择 $\tilde{q} \geq 200\kappa_p$，我们可以将涉及 $\int$ ˆ$\mathcal{M}^{\tau_0,\tau_1}$ 的体项吸收到左端，从而得到 $K = 0$ 所需的结果。

类似地，在 (4.22) 中用 $\partial_z^\alpha\Phi$ 替换 Φ，对于 $\Phi\in\mathcal{J}$，我们可以利用 (4.13) 并对所有 $|\alpha|=K$ 和 $\Phi\in\mathcal{J}$ 求和，从而推出以下结论：对于有界系数的多重线性形式 $\mathbf{Q}_\bullet$。

$$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[J]+2\tilde{q}\overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[J]\le(200\kappa_p+D\epsilon^{1/2}\tau^{1/2})\overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[J]+\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_1}[J]$$
$$+\sum_{\substack{|\alpha|=K\\ \Phi\in\mathcal{J}}}\sum_{\substack{L\ge2,|\alpha_\ell|\ge1\\ \sum|\alpha_\ell|=K}}\int_{\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\tau_1}}\tau^{2\tilde{q}}\left|\mathbf{Q}_\bullet(\partial_z^{\alpha_1}\vec{J},\dots,\partial_z^{\alpha_L}\vec{J})\cdot\partial_z^\alpha\tau\partial_\tau\Phi\right|\frac{d\mathrm{vol}}{\tau}.\quad(4.23)$$

现在，当 $\tilde{q}\ge200\kappa_p$ 和 ϵ 充分小时，我们可以将右端的第一项吸收到左端。此外，可以对右端的最后一项应用杨氏不等式，并利用在自举假设 (4.15a) 下 $\mathbf{Q}_\bullet$ 的系数有界这一事实，从而得到

$$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[J]+\tilde{q}\overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[J]\lesssim\sum_{\substack{L\ge2,|\alpha_\ell|\ge1\\ \sum|\alpha_\ell|=K}}\int_{\hat{\mathcal{M}}_{\tau_0,\tau_1}}\tau^{2\tilde{q}}|\partial_z^{\alpha_1}\vec{J}\cdots\partial_z^{\alpha_L}\vec{J}|^2\,\frac{d\mathrm{vol}}{\tau}+\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_1}[J].\quad(4.24)$$

为了估计右端的多线性项，应用如下乘积估计将是有用的；这是对 [Tay13 命题 3.6] 的一个温和推广。

引理 4.7. 设 $B\subset\mathbb{R}^n$ 为一个球，并设 f_1、f_2、……、f_L 为 B 上适当正则的函数。设$K>0$和 $\sum|\alpha_\ell|=K$。则存在常数 $D=D(K,L)$，与 B 的半径无关，使得如下乘积估计成立。

$$\int_B|\partial_x^{\alpha_1}f_1\cdots\partial_x^{\alpha_L}f_L|^2\,dx\le D\sum_{\ell=1}^L\left(\|f_\ell\|^2_{H^K(B)}\cdot\prod_{m\ne\ell}\|f_m\|^2_{L^\infty(B)}\right).\quad(4.25)$$

为了将引理 4.7 应用于 (4.24) 中的多线性项，我们令 $f_1,\dots,f_L$ 各自为 $\vec{J}$ 的某个一阶导数，并应用自举假设 (4.15b)，从而看出

$$\|\partial_z^{\alpha_1}\vec{J}\cdots\partial_z^{\alpha_L}\vec{J}\|^2_{L^2(\hat{\Sigma}_\tau)}\lesssim\sum_{k=1}^{K-1}\|\partial_z\vec{J}\|^{2(K-k)}_{L^\infty}\|\vec{J}\|^2_{H^k(\Sigma_\tau)}\lesssim\|\vec{J}\|^2_{H^{K-1}}\lesssim\tau^{-2\tilde{q}}\mathcal{E}^{(\le K-1)}_\tau[J].$$

因此，将 (4.24) 中的多线性表达式写成表达式$\|\partial_z^{\alpha_1}\vec{J}\dots\partial_z^{\alpha_L}\vec{J}\|_{L^2(\hat{}\Sigma_\tau)}$关于时间的适当积分，并利用引理 4.6，我们可得

$$\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_0}[J]+\tilde{q}\overline{\mathcal{E}}^{(K)}_{\tau_0,\tau_1}[J]\lesssim\overline{\mathcal{E}}^{(\le K-1)}_{\tau_0,\tau_1}[J]+\mathcal{E}^{(K)}_{\tau_1}[J],\quad(4.26)$$

由此，通过直接的归纳论证可得

$$\mathcal{E}^{(\le K)}_{\tau_0}[J]+\tilde{q}\overline{\mathcal{E}}^{(\le K)}_{\tau_0,\tau_1}[J]\lesssim\mathcal{E}^{(\le K)}_{\tau_1}[J].\quad(4.27)$$

然后只需利用引理 4.6，即可推出 (4.16)。 □

4.3 插值与输运估计

为改进自举假设，我们使用命题 2.3 中的一阶方程，并将其视为关于 $\tau\partial_\tau$ 的“输运方程”。为克服这些方程右端的“导数损失”，我们将利用第 4.2 节中推导出的高阶 H^s 控制，并应用插值估计。

在使用输运方程之前，首先需要将定理 1.2 中的初始数据假设，即 (1.5)，转换为第 2.2 节框架下对某个 $\hat{}\,\Sigma_{\tau_1}$ 的假设。这将通过一个局部时间内的柯西稳定性论证，并结合一个索博列夫不等式来完成。我们有如下结果：

引理 4.8. 固定 $s_0 > \frac{n}{2}+1$。设 $\phi = \phi(t,x)$ 是满足初始数据假设 (1.5)的 (1.1) 的一个解。则存在 τ_1，满足 $|1-\tau_1| \lesssim \epsilon$，使得在超曲面 $\hat{\Sigma}_{\tau_1}$上，关于第 *2.2* 节中的 (τ, z^i) 坐标系，对 W, V^i 有如下估计。

$$\|W-1\|_{H^s(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|V^i\|_{H^s(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|U^i\|_{C^2(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|\mathring{\Omega}^2\|_{C^2(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} \lesssim \epsilon. \tag{4.28}$$

此外，对于满足（1.1）且在$\{t = 1\}$上具有如定理 *1.2* 所述初始数据（$\phi_0^{(m)}$ 、$\phi_1^{(m)}$ ）的 $\phi^{(1)}$、 $\phi^{(2)}$ ，相应的几何量 $W_{(m)}$、 $V^{i}{}_{(m)}$ $U^i_{(m)}$、 $\mathring{}\Omega^2_{(m)}$还分别满足相应的稳定性估计。

$$\begin{aligned}\|W_{(1)} - W_{(2)}\|_{H^{s-1}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|V^i_{(1)} - V^i_{(2)}\|_{H^{s-1}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|U^i_{(1)} - U^i_{(2)}\|_{C^2(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|\mathring{\Omega}^2_{(1)} - \mathring{\Omega}^2_{(2)}\|_{C^2(\hat{\Sigma}_{\tau_1})}& \\ \lesssim \left\|\phi_0^{(1)} - \phi_0^{(2)}, \phi_1^{(1)} - \phi_1^{(2)}\right\|_{H^{s+2}\times H^{s+1}}.&\end{aligned} \tag{4.29}$$

证明。记 $\mathscr{H}_1$ 为超曲面$\{t(\tau,\ z^i) = 1,\ z \in \mathbb{B}_6\}$，其中坐标系为（$\tau$，$z^i$）。于是，对于 $T = \partial_t$ （闵可夫斯基空间中的标准时间平移）以及定义如下的流，

$$\mathbb{J}^\mu[\Phi] = (\eta^{-1})^{\mu\nu}\mathbb{T}_{\nu\sigma}[\Phi]T^\sigma - \frac{1}{2}T^\mu\Phi^2,$$

由 $\phi = c_p\tau^{-\alpha_p}$ 的变换可知，初始数据假设（1.5）恰好转化为如下几何估计。

$$\sum_{\Phi\in\{V^i, W-1\}}\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathscr{H}_1}\mathbb{J}_\nu[\partial_z^\alpha\Phi]N^\nu d\mathrm{vol} \lesssim \epsilon^2.$$

现在考虑区域 $\hat{\mathcal{M}} := \{\tau > 0,\ |z| < 2(\tau+2)\}$。注意，当 ϵ 充分小时，$\hat{\mathscr{H}}_1$ 是一个穿过$\mathcal{M}$外边界的类空超曲面，这意味着可以在$\hat{\mathcal{M}}$中、$\hat{\mathcal{M}}$ 的过去局部求解系统（2.16）。令 $\tau_1 = \min_{\mathscr{H}_1}\tau$，并利用关于 $\mathbb{J}^\mu[\Phi]$的散度定理，容易验证，特别地，可以将（2.16）求解至超曲面$\hat{\Sigma}_{\tau_1} = \hat{\mathcal{M}}\cap\{\tau = \tau_1\}$，并传播估计

$$\sum_{\Phi\in\{V^i, W-1\}}\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\hat{\Sigma}_{\tau_1}}\mathbb{J}_\nu[\partial_z^\alpha\Phi]N^\nu d\mathrm{vol} \lesssim \epsilon^2.$$

利用额外一步的索伯列夫嵌入，由于 $s \ge \frac{n}{2}+2$，可以证明这蕴含 (4.28)。稳定性估计 (4.29) 通过对方程作差推导得出；请注意，和拟线性方程中的通常情况一样，这会损失一个额外的导数。

□

在下一个引理中，我们将利用第 4.2 节的结果，将低阶 L^∞ 估计传播到整个区域 $\tau_0 \le \tau \le \tau_1$，最终目标是改进自举假设。

引理 4.9。 设 $K \ge 200\kappa_p + \frac{n}{2} + 2$。考虑满足命题 *2.3* 中一阶系统的 W, V^i。假设在 $\tau = \tau_1$ 处，初始数据界 (4.28) 成立。此外，假设对于 $s = K$，能量估计 (4.16) 成立，同时自举假设 (4.15a)也成立。那么，对于所有$0 < \tau_0 \le \tau_1$，我们有以下改进的 L^∞ 界：

$$\sum_i |U^i|^2 + |\mathring{\Omega}^2|^2 \le \epsilon^{2/3}. \tag{4.30}$$

事实上，对于任意满足 $|\alpha| \le 2$ 的多重指标 α，同样的结论成立：

$$\sum_i |\partial_z^\alpha U^i|^2 + |\partial_z^\alpha\mathring{\Omega}^2|^2 \le \epsilon^{2/3}. \tag{4.31}$$

证明。令 $\tilde{q}=200\kappa_p$。根据$\mathcal{V}_{\mathrm{top}}$的定义，并利用 (2.19) 和 (2.20) 通过适当的乘积估计控制 $\tau\partial_\tau$ 导数，由初始数据假设 (4.28) 还可得，对于 $K=s\geq 200\kappa_p+\frac{n}{2}+2$，我们有

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J\|_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})}\lesssim\epsilon, \tag{4.32}$$

其中我们注意到，$\tilde{q}$ 无关紧要，因为 $|\tau-1|\lesssim\epsilon$ 很小，所以 τ_1^{-q} 次幂可以忽略。

我们令 $\vec{X}$表示向量（U^i，$\mathring{\Omega}^2$）$^\intercal$。将（2.19）和（2.20）的右端用 U^i和 $\mathring{\Omega}^2$,表示后，我们得到

$$\tau\partial_\tau\vec{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&2\kappa_p\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\vec{X}+\mathbf{M}^i\tau\partial_{z^i}\vec{X}, \tag{4.33}$$

其中矩阵$\mathbf{M}^i$ 的各项都是 W，V^i 的显式函数，因此根据自举假设（4.15a），满足 $\|\mathbf{M}^i\vec{X}\|_{L^\infty}\lesssim\|\vec{X}\|_{L^\infty}$。

Gagliardo–Nirenberg–Sobolev 插值公式 [（Tay13，命题 3.5] ）推广到球$\hat{\Sigma}_\tau\cong\mathbb{B}_r$ 后可得以下估计成立。

$$\|\partial_z\vec{X}\|_{L^\infty(\hat{\Sigma}_\tau)}\lesssim\|\vec{X}\|_{L^\infty}^{1-\sigma}\|\vec{X}\|_{\dot{H}^K(\hat{\Sigma}_\tau)}^{\sigma},\qquad\text{where }\sigma=\frac{1}{K-\frac{n}{2}}. \tag{4.34}$$

将 $\partial_z^\alpha\vec{X}$用 $\partial_z^\alpha\vec{J}$表示并代入（4.16），从而推出$\|\vec{J}\|_{H^K(\hat{\Sigma}_\tau)}\leq\tau^{-\tilde{q}}\|\vec{J}\|_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_0})}\lesssim\tau^{-q}\epsilon$，我们得到

$$\|\mathbf{M}^i\tau\partial_{z^i}\vec{X}\|_{L^\infty(\hat{\Sigma}_\tau)}\lesssim\|\vec{X}\|_{L^\infty}^{1-\sigma}\cdot\epsilon^\sigma\tau^{1-\tilde{q}\sigma}.$$

将其代入（4.33），并利用矩阵$\mathbf{B}$ 相对于 $\mathbb{R}^{n+1}$上的标准ℓ^2 范数是正定的，我们由此可得

$$\tau\partial_\tau\|\vec{X}\|_{L^\infty}^2\gtrsim\|\vec{X}\|_{L^\infty}^{2-\sigma}\cdot\epsilon^\sigma\tau^{1-\tilde{q}\sigma},$$

这可化简为

$$\partial_\tau(\|\vec{X}\|_{L^\infty}^{\sigma})\gtrsim\sigma\epsilon^\sigma\tau^{-\tilde{q}\sigma}.$$

因此，由于 K 取得足够大，使得对于我们所选取的 $\tilde{q}=200\kappa_p$有 $0<\tilde{q}\sigma<1$，我们可以向后积分，从而得到

$$\|\vec{X}\|_{L^\infty(\hat{\Sigma}_\tau)}^{\sigma}\lesssim(1+\sigma)\epsilon^\sigma\quad\forall\tau\in(0,1),$$

由此可直接推出（4.30）。

为推导高正则性估计（4.31），我们首先将方程（2.19）和（2.20）与 ∂_z^α 交换，注意到对于任意多重指标 α，都有

$$\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha U^i=W^{-2}\tau\partial_{z^i}\partial_z^\alpha W+\sum_{\substack{L\geq 2,|\alpha_\ell|\geq 1\\\sum|\alpha_\ell|=|\alpha|+1}}\tau\boldsymbol{Q}_{U^i,\bullet}(\partial_z^{\alpha_1}W,\dots,\partial_z^{\alpha_L}W), \tag{4.35}$$

$$\tau\partial_\tau\partial_z^\alpha\mathring{\Omega}^2=2\kappa_p\partial_z^\alpha\mathring{\Omega}^2+2\tau\partial_{z^i}\partial_z^\alpha V^i. \tag{4.36}$$

然后，结合类似的论证，并对 $|\alpha|$ 进行归纳以处理（4.35）中的多线性项，即可得到估计（4.31）。□

命题 4.10。假设当 ϵ 足够小时以及对于 $s=K\geq 200\kappa_p+\frac{n}{2}+A+2$（其中 $A\geq 2$），(4.28) 成立。那么，求解 (2.16a) 和(2.16b) 的 W和 V^i 的最大存在域包含整个区域$\hat{M}_{\tau_1}$，并且对于 $\Phi\in\{W-1,V^i\}$，我们有以下关于 $\tilde{q}=200\kappa_p$及所有 $\tau\in(0,\tau_1]$ 的 L^2和 L^∞ 界。

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\Phi\|_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_\tau)}\lesssim_K\epsilon,\qquad\|\Phi\|_{C^2(\hat{\Sigma}_\tau)}\lesssim_K\epsilon. \tag{4.37}$$

此外，将区域 $\{\tau = 0, |z| < 4\} \cong \mathbb{B}_4 \subset \partial\,\hat{}M$ 视为同一区域，存在 $C^A(\mathbb{B}_4)$ 函数$\mathfrak{W}(z)$ 和 $\mathfrak{V}^i(z)$，满足 $\|\mathfrak{W}-1\|_{C^A} + \|\mathfrak{V}^i\|_{C^A} \lesssim \epsilon$，使得

$$W(\tau,z) \to \mathfrak{W}(z), \quad V^i(\tau,z) \to \mathfrak{V}^i(z) \quad in\ C^A(\mathbb{B}_4)\ as\ \tau \to 0. \tag{4.38}$$

此外，必然有 $\mathfrak{W}^2$（z） $-\delta_{ij}\mathfrak{V}^i$（$z$）$\mathfrak{V}^j$（$z$） $\equiv 1$。

证明。 证明可通过标准的自举论证得到。假设自举假设 (4.15a)、(4.15b) 和 (4.15c) 在某个自举区域 $\hat{}\mathcal{M}_{boot} = \hat{}\mathcal{M}_{\tau_{boot},\ 1}$ 上成立，即这些假设对 $\tau \in [\tau_{boot}, 1]$ 成立。那么，第 4.2 节和第 4.3 节的结论对 $\tau \in [\tau_{boot}, 1]$ 成立。

为了将存在区域扩展到 $\mathcal{M}_{\tau_{boot}}$，我们使用引理 4.9 来估计 (4.35) 和 (4.36) 的右端，并改进自举假设。由于 $A \geq 2$，引理 4.9 告诉我们

$$\|\vec{X}\|_{C^2(\hat{\Sigma}_\tau)} \leq \epsilon^{2/3} \quad \forall \tau \in [\tau_{boot}, 1], \tag{4.39}$$

from 利用这一点，可以立即结合其一阶导数应用 (2.18)，从而证明 t

$$|\Omega^2 - 1|, |W-1|, |V^i|, |\partial_z W|, |\partial_z V^i| \leq \epsilon^{1/2},$$

这改进了自举假设 (4.15a) 和 (4.15b)。

接下来需要改进最后一个自举假设 (4.15c)。注意，只需证明该元组的所有分量都以某个量（例如 {v1}）为界，即可立即得到这一结论。

$$\vec{X}_0 = (\tau\partial_\tau \vec{X}, \tau\partial_{z^j}\vec{X}, \tau^2\partial_\tau^2\vec{X}, \tau^2\partial_\tau\partial_{z^j}\vec{X}, \mathring{\Omega}^2),$$

但这基本上可由 (4.39) 和 (4.33) 中的输运方程直接推出。具体来说，(4.39) 立即给出 $|\tau\partial_{z^j}\vec{X}| \lesssim \epsilon$；将其代入关于 $\mathring{}\Omega^2$ 的输运方程，得到

$$|\tau\partial_\tau\mathring{\Omega}^2 - 2\kappa_p\mathring{\Omega}^2| \lesssim \epsilon\tau.$$

由于 $\kappa_p \geq 1$，还可得 $|\mathring{}\Omega^2| + |\tau\partial_\tau\mathring{}\Omega^2| \lesssim \epsilon$；对 (4.33) 中的方程再取一个 $\tau\partial_\tau$ 导数或 ∂_{z^j} 导数，便可类似地得到 $\vec{X}_0$ 的其余分量的界。因此，(4.15c)ˆ 也得到了改进，从而在整个区域 $\mathcal{M}_{\tau_1}$ 内存在解。

接下来，我们利用假设 $A \geq 2$。对输运方程 (4.33) 进一步求 ∂_z 导数，并除以 τ，不难发现对 $|\alpha| \leq A$ 有

$$\partial_\tau\partial_z^\alpha U^i = O(\tau^{-\tilde{q}\sigma}), \quad \partial_\tau(\tau^{-2\kappa_p}\mathring{\Omega}^2) = O(\tau^{-\tau^{-\tilde{q}\sigma}-2\kappa_p}),$$

其中 $\tilde{q}\sigma < 1$ 与引理 4.9 的证明中相同。事实上，我们可以对 $U^i, \mathring{}\Omega^2 \in C^{|\alpha|-1}$ 进行归纳，并结合界 L^∞ $\big((0,\tau_1)$ 应用 (4.34)； $\tau^{-\tilde{q}}H^K\big)$ 从而得到右端的有界性。由此，当 $\tau \to 0$ 时， $U^i(\tau,z) \to \mathfrak{u}^i(z)$ 与 $\mathring{}\Omega^2(\tau,z) \to 0$ 以速率 $O(\tau)$ 在 C^A 拓扑中收敛，再利用 (2.18) 便得到收敛性 (4.38)。

□

4.4 散射数据的恢复

本节中，我们取命题 4.10 中构造的解，并应用输运方程 (2.19) 和 (2.20)，以恢复定义 2.4 中定义的散射解。

引理 4.11. 固定 $\tilde{q} \notin \mathbb{N}$。令 U^i，$\Omega \in L^\infty([0,\tau_1]; \tau^{-\tilde{q}}H^K(\hat{}\Sigma_\tau))$ 为满足界 *(4.15)* 的解，该解满足 (2.19) 和 (2.20)，其中 $K > \tilde{q} + 2\kappa_p + \frac{n}{2} + 10$。那么$(U^i, \Omega)$ 是一个正则性为$K - \lfloor\tilde{q}+1\rfloor$ 的散射解，其散射数据为 $\mathfrak{f} \in H^{K-\lfloor\tilde{q}+1\rfloor}(\hat{}\Sigma_0)$ 和 $\mathfrak{w} \in H^{K-\lfloor\tilde{q}+1\rfloor-\lfloor 2\kappa\rfloor}(\hat{}\Sigma_0)$。

证明。 a) 我们只证明 $2\kappa_p \notin \mathbb{N}$ 的情形；当 $2\kappa_p \in \mathbb{N}$ 时，唯一的区别是最后的积分会多出一个对数项，这部分留给读者。只需证明，对于$\Phi \in \{U^i, \Omega\}$，有

$$\begin{aligned}\Phi \in \sum_{j=c_\Phi}^{\lfloor 2\kappa_p \rfloor} \tau^j H^{K-\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor - j}(\hat{\Sigma}_0) + c_\Phi \tau^{2\kappa_p} H^{K-\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor - \lfloor 2\kappa_p \rfloor}(\hat{\Sigma}_0) \\ + L^\infty\big([0,\tau_1]; \tau^{\lfloor 2\kappa_p \rfloor + \mathfrak{c}} H^{K-\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor - \lfloor 2\kappa_p \rfloor}(\hat{\Sigma}_0)\big)\end{aligned} \tag{4.40}$$

其中 $c_{\mathring{\Omega}} = 1$， $c_{U^i} = 0$，以及 $\mathfrak{c} = (\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor - \tilde{q})/2$。我们将 (2.20) 写作 $\partial_\tau \tau^{-2\kappa_p} \mathring{\Omega} = \tau^{-2\kappa_p} \partial_{z^i} V^i$。
首先，我们声称，对于 $j \le \lfloor \tilde{q} \rfloor$，有

$$\Phi \in L^\infty\big([0,\tau_1]; \tau^{-\tilde{q}+j} H^{K-j}(\hat{\Sigma}_0)\big). \tag{4.41}$$

事实上，这很容易通过归纳得到。对于 U^i，只需注意，利用 (4.41)、(4.15a) 和插值，我们有 $\|W^{-2}\partial_{z^i} W\|_{H^{K-j-1}} \lesssim \tau^{-\tilde{q}+j}$。若 $j+1 \le \lfloor \tilde{q} \rfloor$，则通过简单积分可得 (4.41 U^i $j+1$ $\mathring{}^2$, $\partial_\tau \tau^{-2\kappa_p}{}^{\mathring{}2} \in$) 对于..... $L^\infty([0,\tau_1]\ \tau^{-\tilde{q}+j-2\kappa_p} H^{K-j}\ \Sigma_0\ )$ 成立。对于 Ω，我们则得到 Ω；（ˆ）。再次利用归纳假设，并在 $j+1 \le \lfloor \tilde{q} \rfloor$ 时进行积分，即可推出 (4.41)。

接下来，我们断言，对于 $l < \lfloor 2\kappa_p \rfloor$，有

$$\Phi \in Z_\Phi^{K,l} := \sum_{j=c_\Phi}^{l} \tau^j H^{K-\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor - j}(\hat{\Sigma}_0) + L^\infty\big([0,\tau_1]; \tau^{\min(\mathfrak{c}+l, 2\kappa_p)} H^{K-\lfloor \tilde{q}+1+l \rfloor}(\hat{\Sigma}_0)\big). \tag{4.42}$$

我们将用归纳法证明 (4.42)。对于 $l = -1$，这一点已经证明。 U^i 的归纳步骤由额外的积分公式得到

$$\Phi \in Z_\Phi^{K,l}, \partial_\tau U^i \in Z_U^{K-1,l} \implies U \in Z_U^{K,l+1}.$$

对于 $\mathring{}\Omega^2,$，我们利用这样一点：对 τ 的积分所产生的额外项会得到一个可以并入展开中 L^∞ 项的项，因此

$$\partial_\tau \tau^{-2\kappa_p} \mathring{\Omega}^2 \in \tau^{-2\kappa_p} Z_U^{K-1,l} \implies \tau^{-2\kappa_p} \mathring{\Omega}^2 \in \tau^{-2\kappa_p} Z_{\mathring{\Omega}}^{K,l}.$$

最后，对 $\mathring{}\Omega^2$ 再进行一次积分，得到 (4.40)。

为了使误差项具有完整的 $X_{2,\ 2}$ 正则性，请注意，我们可以利用方程 (2.19) 和 (2.20)，将关于 ∂_{z^i} 的正则性转换为关于 $\tau\partial_\tau$ 的正则性。 □

推论4.12。 设 ϕ_0、ϕ_1、s 如定理 *1.2* 中所述。那么 ϕ 是一个正则性为 $s - 202\kappa_p - 1$ 的奇异解。

证明。 由引理 4.8、引理 4.11 和命题 4.10，可得定义 2.4 中所述散射解 $(W,\ V^i)$ 的存在性。我们可以利用引理 2.4 为 ϕ 恢复一个奇异解。 □

作为本节的总结，我们还将说明如何推导两个不同解 $(U^i_{(j)},\ \mathring{}\Omega^2_{(j)})$ 之间差异的稳定性估计，其中 $j = 1,\ 2$；考虑到 (4.29) 后，这些估计将用于求得 (1.23)，从而完成定理 1.5 的证明。

引理 4.13 (差异估计)。 对于引理 *4.11* 中所述的任意一对 $U^i_{(j)}$、$\Omega_{(j)}$（$j \in \{1、2\}$），记 $\mathfrak{f}_{(j)}, \mathfrak{w}_{(j)}$ 为相应的散射解，则有

$$\|\mathfrak{f}_{(1)} - \mathfrak{f}_{(2)}\|_{H^{K-1-\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor}(\hat{\Sigma}_0)} + \|\mathfrak{w}_{(1)} - \mathfrak{w}_{(2)}\|_{H^{K-1-\lfloor \tilde{q}+1 \rfloor - \lfloor 2\kappa_p \rfloor}(\hat{\Sigma}_0)} \lesssim \left\|(U^i_{(1)} - U^i_{(2)}, \mathring{\Omega}^2_{(1)} - \mathring{\Omega}^2_{(2)})\right\|_{H^{K-1}(\hat{\Sigma}_1)}. \tag{4.43}$$

这尤其推出了 *(1.23)*。

(证明概要)。估计 (4.43) 将通过对 $(U^i_{(m)},\ \mathring{\Omega}^2_{(m)})$ 对应的方程作差来推导。我们定义 $(U_\Delta, \Omega_\Delta) = (U_{(1)} - U_{(2)}, \Omega_{(1)} - \Omega_{(2)})$，并类似地定义 (V^i_Δ, W_Δ)。记 $J_{(m)} = (W_{(m)}, V^{i}{}_{(m)})^\intercal$ $J = (J_{(1)}, J_{(2)})^\intercal$，并令 J_Δ 表示它们的差。我们对差值 (V^i_Δ, W_Δ) 证明一个（退化的）能量估计；下面仅给出证明概要，因为这基本遵循命题 4.5 和引理 4.9 的稳定性证明中的相同步骤。随后，按照引理 4.13 中的相同步骤即可得到结论。

回顾 (2.12f) 中波算子的形式，并注意到，由于度量系数 $(V^{i}{}_{(1)}\ W_{(1)})$ 和 $(V^{i}{}_{(2)}\ W_{(2)})$ 不同，我们将有两个不同的波算子 $\Box_1$，$\Box_2$。对 $m = 1, 2$ 的方程 (2.16a) 作差，可推导出如下方程：

$$\tau^2\Box_1 W_\Delta = -\tau^2(\Box_1 - \Box_2)W_2 + \kappa_p\left(\mathring{\Omega}^2_\Delta W_{(1)} - (1 - \Omega^2_{(2)})W_\Delta - W_\Delta\tau\partial_\tau\Omega^2_{(1)} - W_{(2)}\tau\partial_\tau\mathring{\Omega}^2_\Delta\right). \quad (4.44)$$

右端波算子之差可用记号 4.1 中的多重线性形式表示，其中关于 $J_{(m)}$ 在 $m \in \{1, 2\}$ 上的光滑依赖性隐含在形式 $\mathbf{B}_1$,$\mathbf{B}_2$ 的系数中：

$$-\tau^2(\Box_1 - \Box_2)\Phi = \mathbf{B}_1(J_\Delta, \tau^2\partial^2\Phi) + \mathbf{B}_2(\tau\partial J_\Delta, \tau\partial\Phi). \quad (4.45)$$

注意，对于 Φ某个 $J_{(m)}$的分量（其中 $m \in \{1, 2\}$），系数 $\tau^2\partial^2\Phi$和 $\tau\partial\Phi$是 $\vec{J}_0$中的元素，定义 4.2 中对此有所说明；至少在利用方程 (2.16) 将 $\tau^2\partial^2_\tau\Phi$表示为 J_0中的其他项后是如此。

类似地，通过像推论 4.4 中那样与 ∂^α_z 对易，我们可以得到更高阶估计。对于 $|\alpha| = K$，可以发现，对于适当定义的 $\mathbf{B}_\bullet$ 和 $\mathbf{Q}_\bullet$，有

$$\begin{aligned}\tau^2\Box_1\partial^\alpha_z W_\Delta &= \partial^\alpha\Box_1 W_\Delta + [\Box_1, \partial^\alpha_z]W_\Delta \\ &= \mathbf{L}(\partial^\alpha_z\vec{J}_\Delta) + \mathbf{B}_\bullet(\partial^\alpha_z\vec{J}_\Delta, \vec{J}_0) + \mathbf{B}_1(J_\Delta, \tau^2\partial^2\partial^\alpha_z W_2) \\ &\quad + \sum_{\substack{L\geq 1, |\beta|\geq 0, |\alpha_\ell|\geq 1 \\ |\beta| + \sum|\alpha_\ell| = K}} \mathbf{Q}_\bullet(\partial^\beta_z\vec{J}_\Delta, \partial^{\alpha_1}_z\vec{J}, \ldots, \partial^{\alpha_L}_z\vec{J}),\end{aligned} \quad (4.46)$$

这里回顾一下，$\vec{J}$ 表示在 J 的所有分量上对 $(\kappa_p J, \tau\partial_\tau J, \tau\partial_{z^k} J)$ 进行拼接，而 $\vec{J}_\Delta$ 类似。注意，我们特意单独列出了项 $\mathbf{B}_1(J_\Delta, \tau^2\partial^2\partial^\alpha_z W_2)$，它在导数方面是最高阶的，并反映了系统 (2.16) 的拟线性。

利用 (4.44) 以及关于 V^i_Δ 的类似方程，如同第 4.2 节中所做的那样，我们可以对所有 $|\alpha| \leq K$、$\tilde{q} \geq 200\kappa_p$ 和 $0 < \tau_0 < \tau_1$ 推导出如下能量估计。

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\partial^\alpha_z J_\Delta\|^2_{H^{0,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_0})} + \tilde{q}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}\partial^\alpha_z J_\Delta\|^2_{H^{0,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})}\frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \\ &\qquad\lesssim \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J_\Delta\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\|\tau^2\Box_1\partial^\alpha_z W_\Delta\right\|_{H^{0,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})}\frac{\mathrm{d}\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}}.\end{aligned} \quad (4.47)$$

由于根据命题 4.5 和引理 4.11，我们已经对 $J_{(m)}$（至多两个导数）具有逐点先验控制，因此对于 $K = 0$，可得到以下能量估计。

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J_\Delta\|^2_{H^{0,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_0})} + \tilde{q}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J_\Delta\|^2_{H^{0,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})}\frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \lesssim \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}}J_\Delta\|^2_{H^{0,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})}. \quad (4.48)$$

我们希望证明，在所有阶数下都成立类似的估计。通过重复第 4.2 节中的过程

˜为了估计（4.46）中的右端，可以首先对 $K \geq 0$ 和 $\tilde{q} \geq 200\kappa_p$ 推导出以下结果。

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_0})} + \tilde{q}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \lesssim \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \|\vec{J}_\Delta\|^2_{L^\infty(\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1})} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} + \|\tau^2 \partial^2 J\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \right). \quad (4.49)$$

我们指出，(4.49) 第二行中出现的各项，来自对 (4.46) 中的多线性项$\mathbf{Q}_\bullet$ 应用乘积估计引理 4.7，也来自项$\mathbf{B}_1$。

现在我们利用 (4.37) 来估计第二行中的积分表达式，更确切地说，˜结合该式与 (4.16)，可得，对于命题 4.10 中的 $K \leq K$,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J\|^2_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \lesssim \epsilon^2.$$

事实上，只要选择 $\tilde{K} \leq K-1$，也可以用导数损失范数 $\tau\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J\|_{H^{K,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})}$来估计 $\|\tau^2\partial^2 J\|_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})}$；若 ∂^2 表示为 ∂_τ^2，则可能需要再次代入方程 (2.16)。省略细节后，我们因此得到

$$\|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_0})} + \tilde{q}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \lesssim \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})} + \epsilon^2 \|\vec{J}_\Delta\|^2_{L^\infty(\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1})}. \quad (4.50)$$

为了估计右端出现的$\|\vec{J}_\Delta\|_{L^\infty(\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1})}$ 项，我们考察差值所满足的输运方程

$$\tau\partial_\tau U^i_\Delta = W^{-2}_{(1)} \tau \partial_{z^i} W_\Delta - W_\Delta \frac{W_{(1)} + W_{(1)}}{W^2_{(1)} W^2_{(2)}} \tau \partial_{z^i} W_{(1)}, \quad (4.51)$$

$$\tau\partial_\tau \mathring{\Omega}^2_\Delta = 2\kappa_p \mathring{\Omega}^2_\Delta + 2\tau \partial_{z^i} V^i_\Delta. \quad (4.52)$$

Th也就是说，如果 $\vec{X}_\Delta = (U^i_\Delta, \mathring{\Omega}^2_\Delta)$，那么对于某些仅依赖于的矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}^i$，我们有 J,

$$\tau\partial_\tau \vec{X}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa_p \end{bmatrix} \vec{X}_\Delta + \tilde{\mathbf{M}}^i \tau \partial_{z^i} \vec{X}_\Delta. \quad (4.53)$$

˜应用引理 4.9 的方法，我们由此得到，对于 $K \geq 200\kappa_p + \frac{n}{2} + 1$ 和 $\tilde{q} = 200\kappa_p$，有逐点界

$$\|\vec{J}_\Delta\|^2_{L^\infty(\hat{\mathcal{M}}_{\tau_1})} \lesssim \sup_{\tilde{\tau}\in(\tau_0,\tau_1)} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{\tilde{K},-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})}. \quad (4.54)$$

在 (4.50) 中选取充分小的 ϵ，我们可以代入 (4.54)，从而得到，对于 $\tilde{q} = 200\kappa_p$,

$$\sup_{\tilde{\tau}\in(\tau_0,\tau_1)} \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{K-1,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tilde{\tau}})} \lesssim \|\mathcal{V}_{\mathrm{top}} J_\Delta\|^2_{H^{K-1,-\tilde{q}}(\hat{\Sigma}_{\tau_1})}.$$

注意，右端等价于 $\tau_1 > 0$时 (4.43) 的右端。然后，我们再次利用差值所满足的输运方程，并按照引理 4.11 中的方法进行处理，即可完成证明。

□

5 局部稳定性与正则性

在本节中，我们应用定理 1.4 和 1.5 推导推论 1.6 和 1.7。总体策略是：尽管推论 1.6 中的一般常微分方程爆破解未必接近

模型（空间齐次）常微分方程爆破解，但可以利用方程 (1.1) 的缩放、平移和洛伦兹变换对称性，将视野聚焦于奇点附近，从而使ϕ 在适当的范数下与模型常微分方程爆破解非常接近，尤其是满足应用定理 1.5 的条件。

所给出的论证大多较为简洁，不会像第 3 节和第 4 节那样需要大量计算。我们先在引理 5.1 中将定理 1.5 推广，使扰动可以位于任意类空超曲面上，这是一种柯西稳定性论证。然后，我们利用 (1.1) 的对称性，将稳定性局部化到一般类空超曲面附近，并证明推论 1.6。最后，我们使用相同的局部化论证，将正则性一直传播到奇点，并证明推论 1.6 和 1.7。

引理 5.1。令 $\phi = t^{-\alpha_p} c_p$ 为常微分方程爆破，且 s、s_0 如定理 *1.5* 所述。固定一个 H^{s+n+2}类空超曲面 $\Sigma \subset \{t \in (2,4)\} \cap \{|x| < 15\overline{\delta}\}$，其单位法向量 N满足 $N(\mathrm{d}t) \in [1/2, 2]$ 且$\|\Sigma\|_{H^{s+n+2}} \leq C$。那么存在 $\epsilon_C > 0$，使得满足以下条件的 $\phi_0 \in H^{s+2}(\Sigma)$ $\phi_1 \in H^{s+1}(\Sigma)$

$$\left\|\phi_0 - \underline{\phi}|_\Sigma\right\|_{H^{s_0+1}} + \left\|\phi_1 - \partial_t \underline{\phi}|_\Sigma\right\|_{H^{s_0}(\Sigma)} \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_C, \tag{5.1}$$

与过去区域中(1.1) 对应的解 ϕ ，其初始数据为 $\phi|_\Sigma = \phi_0$ 和 $\partial_t \phi|_\Sigma = \phi_1$，具有以下性质：存在 $f, \psi \in H^{s-202\kappa_p}$ ，使得 ϕ 可以延拓到区域 $M = \{|x| < 3(1+t)\ f(x) < t\} \cap I^-(\Sigma)$，并且在类空超曲面 $\{t = f(x)\} \cap M$ 上呈现常微分方程型爆破，且具有辅助散射数据 ψ。

证明。利用柯西稳定性将 ϕ 传播到适当的$\{t = 1\}$ 超曲面上（或其子集）即可得到，这样便可应用定理 1.5。 □

类似地，我们将推论 1.6 归结为局部于爆破超曲面一个小邻域的稳定性结果。

引理 5.2。设 $s, f, \psi, \phi,$ t和 $M_{\mathbf{t}_1}$ 如推论 *1.6* 中所述。则存在 $\delta, \epsilon > 0$，使得对所有满足于 $\Sigma_\delta = \{\mathbf{t} = \delta\}$ 的 ϕ_0, ϕ_1

$$\|(\phi_0 - \phi)|_{\Sigma_\delta}\|_{H^{s-30\kappa_p+1}(\Sigma_\delta)} + \|(\phi_1 - \partial_t \phi)|_{\Sigma_\delta}\|_{H^{s-30\kappa_p}(\Sigma_\delta)} \leq \epsilon_2 < \epsilon, \tag{5.2}$$

存在 $\bar{f}, \bar{\psi} \in H^{s-232\kappa_p}(\mathbb{B}_2)$ 以及方程（*1.1*）的一个解 $\bar{\phi}$，其初始数据为(ϕ_0, ϕ_1)，位于 $\bar{M} = \{|x| \leq \bar{5}(t+1/3)\} \cap \{\mathbf{t} \leq \delta\} \cap \{t > f\}$ 中，其中 ϕ 表现出朝向 $\{t = f\}$ 的常微分方程爆破解，并带有辅助散射数据 ψ，此外这些数据满足

$$\left\|f - \bar{f}, \psi - \bar{\psi}\right\|_{H^{s-232\kappa_p}} \lesssim \epsilon_2. \tag{5.3}$$

在证明引理 5.2 之前，我们利用它来得出我们的结果：

假设引理 *5.2*，证明推论 *1.6*。令$\mathcal{M}^{\mathrm{large}}$,$\mathcal{M}_{\mathrm{small}}$ 分别表示推论 1.6 和引理 5.2 中的存在区域。图 4 给出了示意图。注意，$\mathcal{M}^{\mathrm{large}} \setminus \mathcal{M}_{\mathrm{small}}$ 不包含 ϕ 的奇异曲面，因此 ϕ 及其适当的导数在该区域内有界。因此，由柯西稳定性可知，当 ϵ_1 充分小时，（1.25）蕴含（5.2）。于是，我们可以应用引理 5.2，在受限区域$\mathcal{M}_{\mathrm{large}} \cap \mathcal{M}_{\mathrm{small}}$中得到稳定性，从而得出该结果。

□

为证明引理 5.2，我们将对方程 (1.1) 的解应用如下缩放对称性。

定义 5.1. 设 $\phi: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ 为方程 (1.1) 的解。则对任意 $\delta > 0$， δ-重缩放 ϕ 定义为函数 $\phi_\delta: \delta^{-1}\mathcal{D} \to \mathbb{R}$，其定义如下:

$$\phi_\delta(\bar{t}, \bar{x}) = \delta^{\alpha_p} \phi(\bar{t}\delta, \bar{x}\delta). \tag{5.4}$$

容易验证， ϕ_δ 同样是 (1.1) 的解。

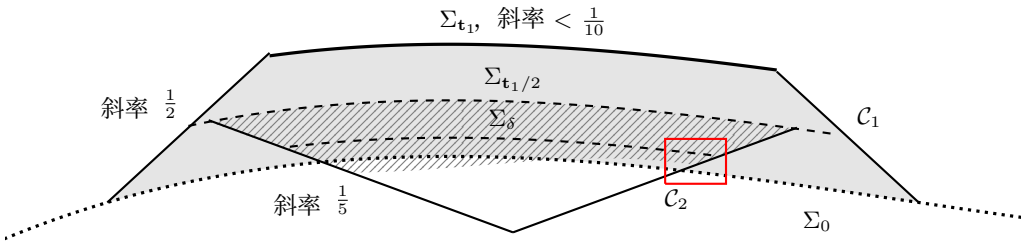

图 *4*：定理 *1.4* 中构造的解存在于由 $\mathcal{C}_1$、 $\Sigma_{\mathbf{t}_1}$ 和 Σ_0 界定的区域内（以灰色标示）；而推论 *1.6* 中描述的扰动解将构造在 $\Sigma_{\mathbf{t}_1/2}$、$\mathcal{C}_2$ 与一个新的常微分方程爆破解曲面之间（以阴影线标示）。我们还在图中标出了锥面的斜率。红框区域将在下方的图 *5* 中详细说明。

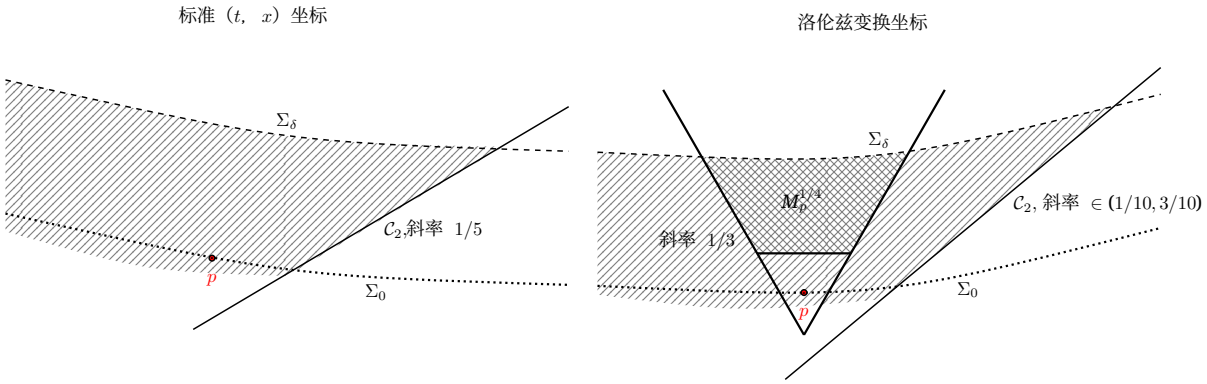

图*5*：左侧展示了图 *4* 中红框区域的放大图，引理 *5.2* 在此处得到证明。右侧展示了同一区域在洛伦兹变换坐标下的图像，此时 Σ_0 在 $p \in \Sigma_0$处的梯度为零。我们在交叉阴影区域 $M_p^{1/4}$中应用柯西稳定性，而该区域下方锥形区域内的稳定性则由定理 *1.5* 得出，具体如下文所述。

引理 5.2 的证明。记 $\mathcal{M}=\{|x|\le 5(t+1/3)\}\cap\{\mathbf{t}<\delta\}$，并令 $\Sigma_0=\mathcal{M}\cap\Sigma_0$ 表示限制在该区域内的奇点部分。

步骤 1（几何学）：设 $p\in\Sigma_0$ 是奇点上的一个点。通过施加大小至多为 $|\mathbf{v}|\le\sup|\partial f|<1/10$ 的洛伦兹变换，并利用时空平移对称性，不失一般性，可假设 $p=(0,0)$，且 $f(0)=\partial f(0)=0$。该变换使 (1.21) 中给出的 ϕ 的 $X_{2,2}$ 范数至多改变一个依赖于 $|\mathbf{v}|$ 和 s 的常数因子。在新的坐标中，仍有 $|\partial f|<1/5$。

对于取值 $-1\le a\le 1$，我们考虑区域 $\mathcal{M}_p^a=\{|x|<3(\delta/10+t)\}\cap\{\mathbf{t}<\delta\}\cap\{t>a\delta\}$。由图 5 可知，$\mathcal{M}_p^{-1}\subset\mathcal{M}$，因此渐近展开 (1.21) 在 $\mathcal{M}$ 内给出了对 ϕ 于 $\mathcal{M}_p^{-1}$ 中的显式控制。此外，在 $\mathcal{M}_p^{1/4}$ 中还成立 $t\sim\delta$。

步骤 2（缩放）：现在考虑 ϕ 的 δ-重缩放，并且如定义 5.1 所示，使用重缩放坐标 $\bar t$ 和 $\bar x$ 来描述 ϕ_δ 的区域。由步骤 1 可知，在重缩放的 $\mathcal{M}_p^{1/4}$ 中，有 $|\bar x|\lesssim 1$ 和 $\bar t\sim 1$。利用 (5.4) 和 (1.21)，我们得到

$$\phi_\delta(\bar t,\bar x)=\underbrace{\delta^{\alpha_p}c_p(\bar t\delta-f(\bar x\delta))^{-\alpha_p}(1-|\partial f(\delta\bar x)|^2)^{\alpha_p/2}}_{\phi_{\delta,\mathrm{m}}}+\mathring{\phi}_\delta. \tag{5.5}$$

这里，$\phi_{\delta,\mathrm{m}}$ 来源于 (1.21) 中的首项 ϕ_0，而剩余项 $\mathring{\phi}_\delta$ 满足：当 δ 足够小时，有界

$$\Big\|\delta^{-\alpha_p}(\bar t\delta-f(\bar t\delta))^{\alpha_p-1}\{1,\bar t\partial_{\bar t},\partial_{\bar x}\}^{s-30\kappa_p}\mathring{\phi}_\delta\Big\|_{L^2(\mathcal{M}_p^{1/4})}\lesssim_{f,\psi}1, \tag{5.6}$$

将其重新整理可得

$$\Big\|\{1,\bar t\partial_{\bar t},\partial_{\bar x}\}^{s-30\kappa_p}\mathring{\phi}_\delta\Big\|_{L^2(\mathcal{M}_p^{1/4})}\lesssim_{f,\psi}\delta. \tag{5.7}$$

Ne接下来，我们通过在 $\mathcal{M}_p^{1/4}$ 中展开 f，分析 ϕ_δ 的主要部分 $\phi_{\delta,\mathrm{m}}$，从而得到估计

$$\big\|\{1,\partial_{\bar x}\}^{s-30\kappa_p}\partial_{\bar x}f(\bar x\delta)\big\|_{L^2(\mathcal{M}_p^{1/4})}\lesssim\delta,\qquad\big\|\{1,\partial_{\bar x}\}^{s-30\kappa_p}f(\bar x\delta)\big\|_{L^2(\mathcal{M}_p^{1/4})}\lesssim\delta^2. \tag{5.8}$$

因此，我们可以形式化地将 $\phi_{\delta,\mathrm{m}}$ 展开为

$$\phi_{\delta,\mathrm{m}}=c_p(\bar t-f(\bar x\delta)/\delta)^{-\alpha_p}(1-|\partial f(\bar x\delta)|^2)^{\alpha_p/2}=c_p\bar t^{-\alpha_p}(1-\bar t^{-1}\mathcal{O}(\delta))^{-\alpha_p}(1-\mathcal{O}(\delta))^{\alpha_p/2}. \tag{5.9}$$

因此，在区域 $\mathcal{M}_p^{1/4}$ 中，其中 $|\bar x|$，$\bar t$，$\bar t^{-1}\lesssim 1$，可以使用适当的索伯列夫估计推出

$$\Big\|\{1,\bar t\partial_{\bar t},\partial_{\bar x}\}^{s-30\kappa_p}\Big(\phi_{\delta,\mathrm{m}}-c_p\bar t^{-\alpha_p}\Big)\Big\|_{L^2(\mathcal{M}_p^{1/4})}\lesssim_f\delta. \tag{5.10}$$

步骤 3（局部稳定性）：设 $\epsilon_{s,C}$ 为引理 5.1 中的小常数，为具体起见可取定 $C=10^4$。我们注意到，由 (1.24)，超曲面 $\Sigma_\delta=\{\mathbf{t}=\delta\}=\{t-f(x)=\delta\}$ 是 H^s 正则的。借助迹定理，界 (5.7) 与 (5.10) 足以得出：当 δ充分小时，成立

$$\big\|(\phi_\delta-c_p\bar t^{-\alpha_p})\big\|_{H^{s_0-30\kappa_p-1}(\Sigma_\delta)}+\big\|(\partial_t\phi_\delta+\alpha_pc_p\bar t^{-1-\alpha_p})\big\|_{H^{s_0-30\kappa_p-2}(\Sigma_\delta)}\le\frac{\epsilon_{10^4}}{2}. \tag{5.11}$$

由假设，如 (5.2) 中所述，$\bar\phi$ 的初始数据与 ϕ的初始数据 ϵ_2 接近。选取 $\epsilon_2<\epsilon_{s,104}$，我们由引理 5.1 得到，$\bar\phi$ 在 $\mathcal{M}_p^{-1}\cap\{\bar t>\bar f(x)\}$ 中对某个 $\bar f\in H^{s-232\kappa_p}$构成常微分方程爆破。此外，由 (1.23)，我们还有界

$$\big\|f-\bar f\big\|_{H^{s_0-232\kappa_p}}\lesssim\epsilon_2, \tag{5.12}$$

以及高阶范数的传播。

步骤 4（整体稳定性）：利用解的唯一性，我们可以将步骤 1 至 3 中得到的不同 ϕ拼接起来，从而在区域 $\bigcup_{p\in\Sigma_0}\mathcal{M}_p^{-1}$ 内构造一个解 $\bar\phi$。在该区域的其余部分，我们可以应用柯西稳定性，得出解保持有界。□

我们可以应用相同的缩放论证，将正则性一直传播到奇点：

推论 *1.7* 的证明。 由于光滑性是局部性质，取一点 $p \in \Sigma_0$，不失一般性地假设 $f(p) = \partial f(p) = 0$。考虑 $\mathcal{M}_p^\delta = \{|x| < 3(\delta/10 + t)\} \cap \{\mathbf{t} < \delta\} \cap \{t > \delta/4\}$，其中 δ 充分小，稍后再固定其值。

首先，注意到由 (1.1) 的正则性传播，ϕ 在 $\mathcal{M}_p^\delta$ 中是 H^s 正则的。也就是说，对于任意类空超曲面 $S \subset \mathcal{M}_p^\delta$，都有 $(\phi, \partial_t\phi) \in H^{s+1}(S) \times H^s(S)$。

如引理 5.2 证明中的步骤 *2* 所示，我们可以研究重标度解 ϕ_δ 以及相应的误差项 $\mathring{}\,\phi_\delta$，如 (5.5) 所示。同样的论证表明，当 δ 充分小时，我们可以应用引理 5.1 得出 $f \in H^{s-202\kappa_p}$。 □

最后，我们可以利用更严格的假设 $f \in C^{1,\alpha}$ 来获得相同的正则性传播：

推论 *1.8* 的证明。 本证明的策略是：通过与一个更光滑的拟设进行比较，证明弱渐近表达式 (1.27) 与奇点之外所假设的光滑性相结合，足以满足定理 1.5 的要求，只需利用方程的缩放对称性和庞加莱对称性即可。正如我们将看到的，先验 $C^{1,\alpha}$ 正则性以及 (1.27) 只需"优于缩放"即可。

步骤 *1*（时间坐标 ζ）：为了构造更光滑的拟设，我们首先对奇点 $\Sigma = \{\mathbf{t} = 0\} \cap \mathcal{M}$的边界定义函数进行光滑化。取一个非零的正 $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{M})$，使其支集远离 Σ，且位于 $\tilde{\mathbb{B}} = \{t \geq f(x)$ $t^2 + |x|^2 \leq 10\}$ 内，并考虑椭圆 Dirichlet 问题的解

$$(\partial_t^2 + \delta^{ij}\partial_{x^i}\partial_{x^j})\zeta = \psi, \qquad \zeta|_{\partial\tilde{\mathbb{B}}} = 0. \tag{5.13}$$

根据 [GT01，定理 8.33 和定理 8.34]，，我们知道存在唯一解 ζ，且满足$\zeta \in C^{1,\alpha}(\tilde{\mathbb{B}})$。我们注意到椭圆理论有以下推论：

。 。˜ ˜(i) 根据内部正则性和强极大值原理，$\zeta \in C^\infty(\mathbb{B})$，且 $\zeta > 0$ 在 $\mathbb{B}$中。

˜(ii) 根据霍普夫引理，可知在过去边界 $\partial\mathbb{B} \cap \{\mathbf{t} = 0\}$上 $\partial_t\zeta > 0$。此外，利用˜$\{\mathbf{t} = 0\} = \{t = f$ $(x)\}$ 是类空这一点，我们可知，在某个邻域 $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \{\mathbf{t} \leq \mathbf{t}_0\} \cap \{\zeta \leq \zeta_0\}$ 内，当 $\mathbf{t}_0, \zeta_0$ 充分小时，有

$$\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta, \mathrm{d}\zeta) \leq -\frac{(\partial_t\zeta)^2}{2} < 0,$$

˜因此，ζ 在$\mathcal{M}$ 中充当时间函数，使奇点在$\{\zeta = 0\}$处同步。

˜(iii) 此外，假设 $\mathrm{supp}\psi \cap \mathcal{M} = \emptyset$，我们利用以下椭圆估计推导出更高阶的 L^∞ 估计：对于某个 $p \in \mathcal{M}$，满足 $r = d(p, \Sigma)$，

$$\|\partial^{k+1}\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{B}_{r/4}(p))} \lesssim r^{-k}\|\partial\zeta - \partial\zeta(p)\|_{L^\infty(\mathbb{B}_{r/2}(p))} \lesssim r^{\alpha-k},$$

其中 在最后一步中，我们使用了 $C^{1,\alpha}$ 在 $\tilde{\mathbb{B}}$中的正则性。利用 $r \sim \zeta$ 在 ˜$\mathcal{M}$这一点，可以得到 s

$$\zeta, \partial\zeta \in L^\infty(\mathcal{M}), \quad \text{and } \zeta^{k-\alpha-1}\partial^k\zeta \in L^\infty(\mathcal{M}) \quad \forall k \geq 2. \tag{5.14}$$

由波动方程正则性的传播可知，解 ϕ 在$\{\zeta = \zeta_0/2\}$之前均是 H^s 正则的。

步骤 *2*（光滑试探函数）：我们定义 $\phi_0 := c_p\zeta^{-\alpha_p}\left|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta, \mathrm{d}\zeta)\right|^{\frac{1}{p-1}}$。注意，$\phi_0$的定义与 $\tilde{\phi}_0$一致，只需将 ζ替换为$\mathbf{t}$，因为 $\eta^{-1}(\mathrm{d}\mathbf{t}, \mathrm{d}\mathbf{t}) = 1 - |\partial f|^2$。事实上，很容易验证

˜由此可得 $\lim_{t\to 0}\phi_0/\phi_0 = 1$。现在我们将按如下方式计算区域$\mathcal{M}$ 中的 $\Box\phi_0$ 。

$$\begin{aligned}\Box\phi_0 &= -\alpha_p c_p \nabla_\mu\left(\zeta^{-\alpha_p-1}\nabla^\mu\zeta|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)|^{\frac{1}{p-1}} + \zeta^{-\alpha_p}|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)|^{-\frac{p-2}{p-1}}\partial\zeta * \partial^2\zeta\right)\\ &= -\alpha_p(\alpha_p+1)c_p\zeta^{-\alpha_p-2}|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)|^{\frac{p}{p-1}} + \zeta^{-\alpha_p-1}|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)|^{-\frac{p-2}{p-1}}\partial\zeta*\partial\zeta*\partial^2\zeta\\ &\qquad + \zeta^{-\alpha_p}\left(|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)|^{-\frac{p-2}{p-1}}\partial^3\zeta*\partial\zeta + |\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)|^{-\frac{2p-3}{p-1}}\partial\zeta*\partial\zeta*\partial^2\zeta*\partial^2\zeta\right)\\ &= -\phi_0^p + O(\zeta^{-\alpha_p-2+\alpha}),\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中，在最后一步中，我们利用了 (5.14) 以及 $|\eta^{-1}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta)| \sim 1$ in ˜$\mathcal{M}$。事实上，可以再取更多导数，从而发现对于任意多重指标 β （包括时间导数和空间导数），

$$\partial^\beta P[\phi_0] = O(\zeta^{-\alpha_p-2+\alpha-|\beta|}). \tag{5.16}$$

接下来写作 $\mathring{\phi} := \phi - \phi_0$。为了在 L^∞ 中估计这一项，我们首先注意到，由于 $\zeta = 0$ 在 $\{t = f(x)\}$处，且 ζ 是 $C^{1,\alpha}$ in ˜$\mathcal{M}$，必有

$$\partial_{x^i}\zeta = -\partial_{x^i}f\partial_t\zeta + O(\zeta^\alpha), \quad \zeta = (t-f(x))\partial_t\zeta + O(\zeta^{1+\alpha}),$$

由此可得 $\sqrt{-\eta^{-1}}(\mathrm{d}\zeta,\mathrm{d}\zeta) \overset{=}{\cancel{\frac{\zeta}{\sqrt{1-|\partial f|^2}}}} + \cancel{O(\zeta^{1+\alpha})}$。将其取 $-\alpha_p$ 次方，我们˜有 $\phi_0 - \phi_0 = O(\zeta^{-\alpha_p+\alpha})$，或者等价地

$$\mathring{\phi} \in \zeta^{-\alpha_p+\alpha}L^\infty(\mathcal{M}) \tag{5.17}$$

步骤 *3*（ $\mathring{\phi}$ 的高正则性估计）：考虑以下关于 $\mathring{\phi}$:

$$\Box\mathring{\phi} = \mathcal{N}_{\phi_0}[\mathring{\phi}] + \phi_0^{p-1}\mathring{\phi} - P[\phi_0]. \tag{5.18}$$

我们声称，对于所有多重指标 $|\beta| \le s$，包括 t 导数和 x 导数，

$$\zeta^{\alpha_p-1/2-\alpha/2+|\beta|}\partial^\beta\mathring{\phi} \in L^2(\mathcal{M}). \tag{5.19}$$

让我们回顾 $\mathbb{T}_{\mu\nu}[\Phi]$式（3.20）中的能量动量张量，并定义流 $\mathbb{J}^\mu[\Phi] = \zeta^q(\eta^{-1})^{\mu\nu}\mathbb{T}_{\nu\sigma}[\Phi]T^\sigma$，其中 $T = \partial_t$ 是闵可夫斯基空间中的通常时间平移向量场。如引理 3.4 中所述，我们得到

$$\mathrm{div}\mathbb{J}[\mathring{\phi}] = q\zeta^{q-1}\mathbb{T}_{\nu\sigma}[\mathring{\phi}]T^\sigma(\eta^{-1})^{\mu\nu}(\mathrm{d}\zeta)_\mu + \zeta^q\partial_t\mathring{\phi}\left(\Box\mathring{\phi}\right).$$

˜利用$\{\zeta < \zeta_0\} \subset \mathcal{M}$上的 ζ 界，我们得到第一项具有负的强制性，并满足界

$$\partial_t\zeta\zeta^{q-1}\left((\partial_t\mathring{\phi})^2 + \delta^{ij}\partial_{x^i}\mathring{\phi}\partial_{x^j}\mathring{\phi}\right) \le -10\zeta^{q-1}\mathbb{T}_{\nu\sigma}[\mathring{\phi}]T^\sigma(\eta^{-1})^{\mu\nu}(\mathrm{d}\zeta)_\mu \le 100\partial_t\zeta\zeta^{q-1}\left((\partial_t\mathring{\phi})^2 + \delta^{ij}\partial_{x^i}\mathring{\phi}\partial_{x^j}\mathring{\phi}\right).$$

令 $q = 2\alpha_p + 2 - \alpha$，并定义 $\Sigma_{\zeta_1} = \{\zeta = \zeta_1\} \cap \mathcal{M}$。我们在˜$\mathcal{D}_{\zeta_1,\zeta_2} = \mathcal{M} \cap \{\zeta \in (\zeta_1,\zeta_2)\}$ 中应用散度定理，对于 $0 < \zeta_1 < \zeta_2 \le \zeta_0$ 可得

$$\int_{\Sigma_{\zeta_2}}\mathbb{J}^\mu[\mathring{\phi}] \ge \int_{\Sigma_{\zeta_1}}\mathbb{J}^\mu[\mathring{\phi}] - \int_{\mathcal{D}_{\zeta_1,\zeta_2}}\mathrm{div}\mathbb{J}[\mathring{\phi}]. \tag{5.20}$$

应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\int_{\mathcal{D}_{\zeta_1,\zeta_2}}\zeta^q\partial_t\mathring{\phi}\Box\mathring{\phi} \lesssim 10^{-2}\int_{\mathcal{D}_{\zeta_1,\zeta_2}}\zeta^{q-1}(\partial_t\mathring{\phi})^2\,|\partial_t\zeta| + 100\int_{\mathcal{D}_{\zeta_1,\zeta_2}}\zeta^{q+1}\,|\partial_t\zeta|^{-1}\,(\Box\mathring{\phi})^2. \tag{5.21}$$

利用步骤 2 中的先验 $\mathring{\phi}, \zeta^2 P[\phi_0] \in \mathbf{t}^{-\alpha_p+\alpha} L^\infty(\mathcal{M})$ 估计，并利用 $|\mathcal{N}_{\phi_0} f| \lesssim \zeta^{-2+\alpha_p}|f|^2$，我们推导出 (5.19) 对 $|\beta| = 1$ 成立。

将 (5.18) 与 $\partial \in \{\partial_t, \partial_x\}$交换，我们得到

$$\Box \partial \mathring{\phi} = \phi_0^{p-1} \partial \mathring{\phi} + \mathring{\phi} \partial \phi_0^{p-1} + \partial \mathcal{N}_{\phi_0}[\mathring{\phi}] - \partial P[\phi_0]. \tag{5.22}$$

利用 (5.14)，我们对所有 $|\beta|$ 都有一致估计 $\zeta^{2+|\beta|} \partial^\beta \phi_0^{p-1} \in L^\infty(\mathcal{M})$，特别是

$$\int_{\mathcal{D}_{0,\zeta_1}} \zeta^{q+1} \left(\mathring{\phi} \partial \phi_0^{p-1} \right) \lesssim \int_{\mathcal{D}_{0,\zeta_1}} \zeta^{q-3} \mathring{\phi}^2. \tag{5.23}$$

注意，由 (5.16) 可知，我们还有 $\zeta^{\alpha_p+1-\frac{\alpha}{2}+1} \partial P[\phi_0] \in L^2(\mathcal{M})$。使用与之前相同的能量估计，并取 $q = 2\alpha_p + 4 - \alpha$，可得 $k = 2$ 对应的 (5.19)。一般情形可类似地通过归纳得到，并结合步骤 1 和步骤 2 中关于 $\partial^\beta \phi_0$ 和 $\partial^\beta P[\phi_0]$ 的已知估计。

步骤 *4*（结论）：最后，我们按照引理 5.2 的证明中的做法，应用柯西稳定性、缩放和局部存在性步骤。设 p 为奇点上的一点，对于较小的 δ，考虑 (5.10) 中的区域$\mathcal{M}_p^{1/4} \subset \tilde{\mathcal{M}}$。按照定义 5.1，将 ϕ 重缩放 δ 倍，记为 ϕ_δ，并将其拆分为

$$\phi_\delta(\bar{t}, \bar{x}) = \delta^{\alpha_p} \phi_0(\delta \bar{t}, \delta \bar{x}) + \mathring{\phi}_\delta. \tag{5.24}$$

由界 (5.17) 和 (5.19)，结合插值可得，对任意 $k \geq 0$，有以下估计（回忆一下，$\bar{t} \sim 1$ 和 $\zeta \sim \delta$ 属于 $\mathcal{M}_p^{1/4}$）：

$$\begin{aligned} \left\| \{1, \bar{t}\partial_{\bar{t}}, \partial_{\bar{x}}\}^k \mathring{\phi}_\delta \right\|_{L^2_{\bar{x},\bar{t}}(\mathcal{M}_p^{1/4})} &\lesssim \left\| \{1, \bar{t}\partial_{\bar{t}}, \partial_{\bar{x}}\}^{k'+k} \mathring{\phi}_\delta \right\|_{L^2_{\bar{x},\bar{t}}(\mathcal{M}_p^{1/4})}^{\frac{k}{k'+k}} \left\| \mathring{\phi}_\delta \right\|_{L^2_{\bar{x},\bar{t}}(\mathcal{M}_p^{1/4})}^{\frac{k'}{k'+k}} \\ &\lesssim_{k,k',\zeta} \delta^{\frac{k}{k'+k}(\alpha/2-\frac{n}{2})+\frac{k'}{k'+k}\alpha} \leq \delta^{\alpha/4}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

其中，我们选择 k' 使得 $2^{\frac{nk}{(k'+k)}} \leq \alpha/4$，以抵消因体积形式改变而导致的第二行第一个因子中的 $\frac{n}{2}$ 损失。利用关于 s 的假设，特别地，我们可以取 $k = 200\kappa_p + 5 + \frac{n}{2}$，从而得到 $\delta^{\alpha/4}$ 的小量性。

类似的估计也适用于主导阶部分；由步骤 1 和 2 的估计可得 (5.10) 的以下变体：对所有 $k \geq 0$

$$\left\| \{1, \bar{t}\partial_{\bar{t}}, \partial_{\bar{x}}\}^k \left(\delta^{\alpha_p} \phi_0(\delta \bar{t}, \delta \bar{x}) - c_p \bar{t}^{-\alpha_p} \right) \right\|_{L^2_{\bar{x},\bar{t}}(\mathcal{M}_p^{1/4})} \lesssim \delta^{\alpha/4}. \tag{5.26}$$

通过引理 5.1，我们首先获得了$f \in H^{5+\frac{n}{2}}$ 带有$\delta^{\alpha/4}$ 大小控制的改进结果，并且无论其是否足够小，$f \in H^{s-200\kappa_p}$ 范数都得以传播。这里，s 是所假设的 ϕ 在奇点之外的正则性，该正则性继承自我们对初始数据的假设。

□

参考文献

[Ali95] S. Alinhac。《非线性双曲方程中的爆破》。马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser，1995。[Bec14] M. Beceanu。“对称情形下能量临界波动方程的中心稳定流形”。载于：《J. Hyper. Differential Equations》11.03（2014），第 437–476 页。[BKL71] V. Belinski、I. Khalatnikov 和 E. Lifshitz。“相对论宇宙学中趋近奇点的振荡行为”。载于：《Sov. Phys. Usp.》13.6（1971），第 745–765 页。[BB15] P. Biernat 和 P. Bizoń。“高维等变波映射与杨-米尔斯场的通用自相似爆破”。载于：《数学物理通讯》338.3（2015），第 1443–1450 页。arXiv：1409.8214。[BDS21] P. Biernat、R. Donninger 和 B. Schörkhuber。“超临界波映射的双曲型相似坐标与全局稳定爆破轮廓”。载于：《Int. Math. Res. Not.》2021.21（2021），第 16530–16591 页。arXiv：1707.09812。[CMZ20] T. Cazenave、Y. Martel 和 L. Zhao。“能量次临界波动方程在任意给定紧集上爆破的解”。载于：《J. Differ. Equ.》268.2（2020），第 680–706 页。[CMZ19] T. Cazenave、Y. Martel 和 L. Zhao。“具有预设局部爆破曲面的非线性波动方程解”。载于：《Adv. Nonlinear Stud.》19.4（2019），第 639–675 页。arXiv：1904.03893。[CD19] A. Chatzikaleas 和 R. Donninger。“高维三次波动方程的稳定爆破”。载于：《J. Differ. Equ.》266.10（2019），第 6809–6865 页。[Col18] C. Collot。“能量超临界半线性波动方程的 II 型爆破流形”。载于：《Mem. Am. Math. Soc.》252（2018）。arXiv：1407.4525。[CZ13] R. Côte 和 H. Zaag。“一维空间中半线性波动方程的多孤子爆破解的构造”。载于：《Commun. Pure Appl. Math》66.10（2013），第 1541–1581 页。arXiv：1110.2512。[CGS24] E. Csobo、I. Glogić 和 B. Schörkhuber。“关于超临界二次波动方程的爆破”。载于：《分析与偏微分方程》17.2（2024），第 617–680 页。arXiv：2109.11931。[Don24] R. Donninger。“波动方程中的谱理论与自相似爆破”。载于：《Bull. Amer. Math. Soc.》61.4（2024），第 659–685 页。arXiv：2310.12016。[DS16] R. Donninger 和 B. Schörkhuber。“关于超临界波动方程中的爆破”。载于：《数学物理通讯》346.3（2016），第 907–943 页。[DS14] R. Donninger 和 B. Schörkhuber。“能量超临界波动方程的稳定爆破解动力学”。载于：《美国数学会汇刊》366.4（2014），第 2167–2189 页。arXiv：1201.4337。[DS12] R. Donninger 和 B. Schörkhuber。“能量次临界波动方程的稳定自相似爆破”。载于：《Dyn. Partial Differ. Equ.》9.1（2012），第 63–87 页。arXiv：1201.4337。[DK+22] T. Duyckaerts、C. Kenig、Y. Martel 和 F. Merle。“临界协旋波映射与径向三次波动方程的孤子分解”。载于：《数学物理通讯》391.2（2022），第 779–871 页。arXiv：2103.01293。[FL20] G. Fournodavlos 和 J. Luk。“渐近类Kasner奇点”。载于：《美国数学杂志》145（2020），第 1183–1272 页。arXiv：2003.13591。[FRS23] G. Fournodavlos、I. Rodnianski 和 J. Speck。“爱因斯坦方程的稳定大爆炸形成：完整的次临界区制”。载于：《J. Amer. Math. Soc.》36.3（2023），第 827–916 页。arXiv：2012.05888。[GT01] D. Gilbarg 和 N. Trudinger。《二阶椭圆型偏微分方程》。第 2 版。Springer，柏林、海德堡，2001。[GMS20] I. Glogić、M. Maliborski 和 B. Schörkhuber。“超临界三次波动方程的爆破阈值”。载于：《Nonlinearity》33.5（2020），第 2143–2158 页。arXiv：1905.13739。[GS21] I. Glogić 和 B. Schörkhuber。“超临界三次波动方程的余维一稳定爆破”。载于：《Adv. Math.》390（2021），第 107930 页。arXiv：1810.07681。[GM07] C. Gundlach 和 J. M. Martin-Garcia。“引力坍缩中的临界现象”。载于：《Living Rev. Relativ.》10.1（2007），第 5 页。arXiv：0711.4620。

[HR12] M. Hillairet 与 P. Raphaël. “四维能量临界波动方程的光滑 II 型爆破解”. 载于：《分析与偏微分方程》5.4 (2012)，第 777–829 页. arXiv: 1010.1768.[HV20] P. Hintz 与 A. Vasy. “闵可夫斯基空间的稳定性与度量的多重齐次性”. 载于：《偏微分方程年刊》1 (2020). arXiv: 1711.00195.[Kic07] S. Kichenassamy.《福克斯约化：在几何学、宇宙学与数理物理中的应用》. H. Brezis 等编. 第 71 卷. 非线性微分方程及其应用进展. 马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser，2007.[KL93] S. Kichenassamy 与 W. Littman. “非线性波动方程的爆破解曲面，II”. 载于：《偏微分方程通讯》18.11 (1993)，第 1869–1899 页.[KV11] R. Killip 与 M. Visan.《非线性波动方程的光滑解可在康托尔集上爆破》. 2011. arXiv: 1103.5257.[Kim24] K. Kim. 等变自对偶 *Chern-Simons-Schroding* 光滑有限时爆破的刚性

er

方程。2024。arXiv：2210.05412。[KST08] J. Krieger、W. Schlag 和 D. Tataru。《荷为一的等变临界波映射的重整化与爆破》。载于：《数学发明》171.3（2008），第 543–615 页。[KNS15] J. Krieger、K. Nakanishi 和 W. Schlag。《临界波动方程能量空间中基态的中心稳定流形》。载于：《数学年刊》361.1（2015），第 1–50 页。[KST09] J. Krieger、W. Schlag 和 D. Tataru。《临界聚焦半线性波动方程的缓慢爆破解 $H^1(\mathbb{R}^3)$》。载于：《杜克数学杂志》147.1（2009），第 1–53 页。[Li24] W. Li。《卡斯纳时空中的波动方程及线性化爱因斯坦-标量场系统的奇点散射》。即将发表于《偏微分方程年刊》。2024。arXiv：2401.08437。[LV25] W. Li 和 M. Van de Moortel。《带电物质有毛黑洞内部的卡斯纳反弹与振荡坍缩》。载于：《偏微分方程年刊》11.1（2025），第 3 页。arXiv：2302.00046。[Luk23] J. Luk。《广义相对论中的奇点 | EMS Press》。载于：ICM——国际数学家大会。5（2023），第 4120–4141 页。[MR+22a] F. Merle、P. Raphaël、I. Rodnianski 和 J. Szeftel。《能量超临界散焦非线性薛定谔方程的爆破》。载于：《数学发明》227.1（2022），第 247–413 页。arXiv：1912.11005。[MR+22b] F. Merle、P. Raphaël、I. Rodnianski 和 J. Szeftel。《可压缩流体内爆论 I：光滑自相似无黏剖面》。载于：《数学年刊》196（2022），第 567–778 页。arXiv：1912.10998。[MZ03] F. Merle 和 H. Zaag。《半线性波动方程爆破速率的确定》。载于：《美国数学杂志》125.5（2003），第 1147–1164 页。JSTOR：25099211。[MZ16] F. Merle 和 H. Zaag。《高维半线性波动方程解在相似变量中显式平稳解附近的动力学》。载于：《美国数学会汇刊》368（2016）。[MZ12] F. Merle 和 H. Zaag。《一维空间半线性波动方程爆破中特征点的存在性与分类》。载于：《美国数学杂志》134.3（2012），第 581–648 页。JSTOR：23240558。[MZ15] F. Merle 和 H. Zaag。《半线性波动方程非特征点概念与爆破剖面稳定性》。载于：《数学物理通讯》333.3（2015），第 1529–1562 页。[MZ08] F. Merle 和 H. Zaag。《一维半线性波动方程非特征点集合的开性及爆破曲线的正则性》。载于：《数学物理通讯》282.1（2008），第 55–86 页。[Nou08] N. Nouaili。《C^1，$^\alpha$ 一维半线性波动方程非特征点处爆破曲线的正则性》。载于：《偏微分方程通讯》33.8（2008），第 1540–1548 页。[Ost24] M. Ostermann。《各维聚焦半线性波动方程的稳定爆破》。载于：《美国数学会汇刊》377（2024），第 4727–4778 页。

[RS14] P. Raphael 和 R. Schweyer。《协旋能量临界调和热流的量子化慢速爆破解动力学》。载于：《分析与偏微分方程》7.8（2014），第 1713–1805 页。arXiv：1301.1859。[RR12] P. Raphaël 和 I. Rodnianski。《临界协旋波映射与等变杨–米尔斯问题的稳定爆破解动力学》。载于：《高等科学研究所数学出版物》115.1（2012），第 1–122 页。arXiv：0911.0692。[Rin01] H. Ringstrom。《Bianchi IX 吸引子》。载于：《亨利·庞加莱年刊》2.3（2001），第 405–500 页。arXiv： gr-qc/0006035。[Sha88] J. Shatah。《SU(2) σ-模型的弱解与奇点形成》。载于：《纯粹与应用数学通讯》41.4（1988），第 459–469 页。[Str90] W. A. Strauss。非线性波动方程。CBMS 区域会议系列第 73 号。数学科学会议委员会，1990。[Tao06] T. Tao。非线性色散方程。第 106 卷。CBMS 数学区域会议系列。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，2006。[Tay13] M. Taylor。偏微分方程 *III*。Springer New York，2013。[Van23] M. Van de Moortel。《黑洞内部弱零奇点的破裂》。载于：《杜克数学杂志》172.15（2023），第 2957–3012 页。arXiv：1912.10890。