PITT-PACC-2601

费米子对的量子层析在 e^+e^- 碰撞中：纵向束流极化效应

Yu-Chen Guo，[1, 2, *] Tao Han，[2, †] Matthew Low，[2, ‡] 和 Youle Su[2, §]
[1]理论与实验高能物理中心，辽宁师范大学物理系，中国大连 *116029*
[2]*PITT PACC*，匹兹堡大学物理与天文系，美国宾夕法尼亚州匹兹堡 *O'Hara* 街 *3941* 号，邮编 *15260*
（日期：2026 年 2 月 4 日）

arXiv:2602.02719v1 [hep-ph] 2 Feb 2026

摘要

我们对未来 e^+e^- 对撞机中的费米子对产生进行了量子层析研究，重点探讨纵向束流极化如何控制双量子比特自旋密度矩阵。我们研究了以下过程： $e^+e^- \to t\bar{t}$， $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 以及巴巴散射 $e^+e^- \to e^+e^-$，分别体现质量阈值行为、 Z 极点共振和 s/t道之间的相互作用。我们重点关注三个关键概念：以并发度 $\mathcal{C}$表征的量子纠缠、以最优 Clauser Horne Shimony Holt（CHSH）参数 $\mathcal{B}$表征的贝尔非定域性，以及以第二稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$表征的非稳定子性（"魔性"）´。对于由 s道主导的过程，纵向极化主要改变单自旋极化，而自旋关联矩阵基本保持不变，因此 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 相对稳健，但会显著改变 $\mathcal{M}_2$。相比之下，在巴巴散射中，极化会改变 s道与 t道的相对贡献，并可能显著影响全部三种可观测量。当同时计入统计不确定度和系统不确定度时，纠缠、贝尔非定域性和魔性的可观测性均超过 5σ 水平，这表明费米子对系统是研究高能轻子碰撞中量子信息的理想实验室。通过优化束流极化，未来 e^+e^- 对撞机将提供独特的机会，以实验方式探索并影响粒子相互作用中的量子资源。

* ycguo@lnnu.edu.cn
† than@pitt.edu
‡ matthew.w.low@gmail.com§
yos76@pitt.edu

目录

I. 引言 3

II. 量子层析与量子信息可观测量 5

A. 量子层析 B. 纠缠 C. 贝 5

尔非定域性 D. 魔性 7

7

8

¯III. 纵向束流极化下 ff 末态的量子行为 9

A. 顶夸克对产生 14 1. $t\bar{t}$ 14¯的量子态 2. tt 16的并发度、贝尔非定域性与量子层析 3. $t\bar{t}$ 19的第二稳定子 R´enyi 熵 B. 轻子对产生 21 1. $\mu^+\mu^-$ 23的量子态 2. $\mu^+\mu^-$ 26的并发度、贝尔非定域性与量子层析 3. $\mu^+\mu^-$ 29的第二稳定子 R´enyi 熵 C. 巴巴散射 31 1. e^+e^- 32的量子态 2. e^+e^- 37的并发度、贝尔非定域性与量子层析 3. e^+e^- 43的第二稳定子 R´enyi 熵 ¯D. ff 系统中的量子关联与魔性 45 1. 纠缠与魔性的行为 46 2. 极化敏感性：C_{ij}、B_k和 $\mathcal{M}_2$ 48 3. s/t道干涉 48

IV. 未来 e^+e^- 对撞机上量子可观测量的可观测性 49

A. $e^+e^- \to t\bar{t}$ 50

B. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 55

C. $e^+e^- \to e^+e^-$ 58

V. 总结与结论 60

致谢 63

¯A. 二量子比特 ff 系统的领先阶计算 64

参考文献 66

I. 引言

量子力学最引人注目的特征之一，是存在着无法用经典理论解释的粒子间关联。量子纠缠和贝尔非定域性等现象，已在使用光子、离子和原子的桌面实验中得到广泛验证；但在产生物质基本组成粒子的高能区，对这些现象的研究才刚刚起步 [1, 2]。这一领域既面临独特挑战，也蕴含着难得机遇：纠缠通过标准模型（SM）相互作用产生，并受相对论运动学和手征耦合支配。大型强子对撞机（LHC）等粒子对撞机提供了独特的机会，让我们能够在最短距离尺度、最高能量下，并在远离通常用于探索量子基础的低能实验室环境中，检验量子力学原理。与此同时，还有大量量子信息（QI）有待发掘。

¯首个明确提出测量自旋纠缠的对撞机方案聚焦于 tt 产生过程，并利用顶夸克轻子衰变作为自旋分析器 [3]。此后不久，ATLAS [4] 和 CMS [5], 测量了纠缠，且预计半轻子道的测量将进一步改进 [6–8]。总体而言，$t\bar{t}$系统是研究高能碰撞中纠缠独特性质的有趣系统 [9–12]。在大型强子对撞机上还可研究纠缠的其他末态包括 $\tau^+\tau^-$ [13, 14]、双玻色子 [15–29]和 bb [30] 态。轻子对撞机是探测末态纠缠的理想环境，例如 $\tau^+\tau^-$ [31–35]、 $t\bar{t}$ [36]、 $\mu^+\mu^-$ [37]、双玻色子 [38–40]、 YY [41]、 $\phi\phi$ [42]、 $\Lambda\Lambda$ [43, 44]以及$q\bar{q}$ [45] 系统。尽管基于自旋关联研究强子和轻子对撞机中多种系统的工作已有很多 [13–42, 46–50], ，也可以通过量子层析研究中性介子系统中味量子数之间的纠缠 [46]。

贝尔非定域性可通过贝尔不等式违背来量化 [51], ，例如，利用自旋关联矩阵 [52]构造的最优克劳泽-霍恩-西莫尼-霍尔（CHSH）参数。在 $t\bar{t}$系统中，需要寻找横向

动量较高的顶夸克，这使得在大型强子对撞机上进行观测颇具挑战 [7, 10, 12, 53–55]。在大型强子对撞机上，或许更有希望用于寻找贝尔非定域性的末态是 $\tau^+\tau^-$ [14]，其中5σ预计利用当前数据集即可实现观测。[1]

在量子计算中，魔性这一概念量化了量子计算机相对于经典计算机所具有的计算优势 [58]。该 $t\bar{t}$ 大型强子对撞机上的系统 [59] 已被证明展现出一系列魔性取值，以及 $\tau^+\tau^-$ 轻子对撞机上的系统 [60]。它还可用于对有效场论的系数设定限制 [61]。

人们还探索了许多其他量子度量与概念，包括虚构态的性质 [12, 55], 量子层析的运动学方法 [62], 利用距离度量约束新物理 [60], 退相干效应 [63–65], 情境性 [66], 量子失谐 [67, 68], 量子相干性的非局域优势 [69]以及弱测量 [70]。综述见参考文献 [1, 2, 71]。

得益于洁净的实验环境，未来的 e^+e^- 对撞机为探索量子关联提供了理想系统。以往研究已利用所提议的 e^+e^- 对撞机上 $\tau^+\tau^-$ [2, 14, 31–35, 72],$t\bar{t}$ [12, 36]以及 $q\bar{q}$ [45, 47] 的产生，广泛研究了量子纠缠和贝尔非定域性。未来的 e^+e^- 对撞机被设计为能够使用极化束流的精密装置 [73–79]。束流极化可能在包括基于量子信息概念的可观测量在内的广泛可观测量的精确测量中发挥关键作用，并能提高量子可观测量测量的统计灵敏度，同时还能区分不同螺旋度振幅的贡献。

在本工作中，我们建立了费米子对产生的统一量子层析描述，采用纵向极化 e^+e^- 束流 [80–88]。我们采用Fano-Bloch分解进行完整的双量子比特量子层析，并量化三个关键可观测量：并发度（$\mathcal{C}$）、贝尔非定域性（$\mathcal{B}$），以及魔性这一量子计算资源（$\mathcal{M}_2$），针对 $t\bar{t}$、 $\mu^+\mu^-$ 和 e^+e^- 末态。我们展示了极化依赖性的根本区别：对于 s道主导过程（$t\bar{t}$ 和 $\mu^+\mu^-$），束流极化主要调控单粒子偏振（$B_i^{\pm}$ ），从而强烈影响$\mathcal{M}_2$，而 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 则保持稳健，因为它们主要依赖于自旋关联矩阵[1]我们指出，这些研究并不检验局域实在论 [56, 57], ，而是从量子信息的角度研究量子力学预言。

C_{ij}。我们对高能巴巴散射进行了首次量子分析 $e^+e^- \to e^+e^-$，其中极化充当 s/t道干涉的独特通道调制器，从而使所有量子信息可观测量呈现出独特行为。我们还给出了这些量子可观测量在未来 e^+e^- 对撞机上的可观测性与精度的现实预期，并确定了用于测量的最优极化与运动学区域。

本文其余部分安排如下。在第II节中，我们介绍量子层析的框架，并引入三个量子信息可观测量。第III 节分析三种末态的量子行为，重点关注其物理特征和束流极化效应。第IV节从实验角度讨论这些变量的可观测性。最后，第V 节给出总结和结论。

II. 量子层析与量子信息可观测量

A. 量子层析

对于用态矢量 $|\psi\rangle$表示的纯量子态，一种等价的描述是与之对应的密度矩阵，其形式为投影算符 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$。

一般的量子态可以写为

$$\rho = \sum_{\alpha}^{n} w_\alpha \, |\alpha\rangle \langle\alpha| \,, \qquad \sum_{\alpha}^{n} w_\alpha = 1, \tag{1}$$

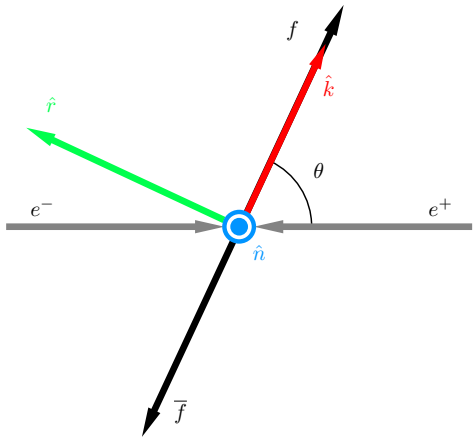
其中， w_a 是系综中子态 $|\alpha\rangle$所占的比例。如果该态只包含一项 $n = 1$，则它是纯态 $w_1 = 1$。否则，该态称为混合态。量子态是混合态还是纯态，可以用纯度定量表示，其定义为

$$P = \mathrm{Tr}(\rho^2). \tag{2}$$

对于纯态 $P = 1$ 和混合态 $P < 1$。可观测算符 O 的期望值可通过 $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\, O)$计算。

双量子比特态由密度矩阵描述 ρ，该矩阵可通过 Fano-Bloch分解 [89] 表示为

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \sum_i B_i^- \sigma_i \otimes \mathbb{I}_2 + \sum_i B_i^+ \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_i + \sum_{ij} C_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j\right). \tag{3}$$



^– ^ 图 1. 螺旋度基 {^r、^n， k} 在 $f\bar{f}$ 质心系中的定义。单位矢量 k^ 沿费米子动量方向，^n 垂直于散射平面，而^r = ^n × k 构成^一个右手三元组（等价地，^n = k × ^r）。

这里， $\mathbb{I}_2$ 表示单位矩阵 2×2，而 σ_i ($i = 1$，2，3)是相对于选定的正交归一自旋基 {^e_i}定义的泡利算符，即 $\sigma_i \equiv \vec{\sigma} \cdot \hat{e}_i$。$B_i^-$ (B_i^+)的三个分量表示费米子 f （反费米子 $\bar{f}$）的极化，由期望值 $B_i^- \equiv \langle \sigma_i \otimes \mathbb{I}_2 \rangle$ 和 $B_i^+ \equiv \langle \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_i \rangle$给出，而 3×3 系数 $C_{ij} \equiv \langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle$ 则表示自旋-自旋关联。总之， $B_i^\pm$ 和 C_{ij} 构成了 15 个实数 Fano 系数，可完整确定双自旋密度矩阵。从数据中确定这些系数，正是双量子比特量子层析的任务。

进行自旋关联或纠缠测量时，必须指定自旋量子化基。一个简单的选择是在x、^y，^z）实验室系中采用固定束流基， e^-e^+其中^z轴与入射 e^- 束流对齐。在高能区，更^–方便的选择是逐事件螺旋度基 {^r、^n， k}，其在 $f\bar{f}$ 质心^动量（c. m.）系中的定义如图1所示，其中 k 是费米子飞行方向，^n^垂直于散射平面，而^$r = \hat{n} \times k$ 构成一个右手三元组。

–系统的密度矩阵 ρ $f\bar{f}$ 可以通过两种互补的方法重构。衰变方法根据自旋分析器在 $B_i^\pm$ 和 C_{ij} 的衰变中所呈现的角分布，推断– f 和 $\bar{f}$ [3]。ATLAS 和 CMS 在纠缠测量中采用的就是这种方法 [4, 5, 8]。运动学方法则根据测得的产生运动学直接重构自旋密度矩阵 [62]。采用这种方法时，只需确定 β 末态粒子的速度 θ 和散射角，

无论这些粒子是否发生衰变，都可以采用这种方法。它尤其适用于分析涉及稳定粒子的系统中的量子关联性质。

B. 纠缠

量子纠缠是指两个子系统无法彼此独立地得到完整描述的现象 [90, 91]。对于双量子比特系统，可用并发度来量化其纠缠 [92]

$$\mathcal{C} = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}\,, \tag{4}$$

其中 λ_i 是辅助矩阵 R的特征值，按从大到小的顺序排列

$$R \equiv \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}\,, \qquad \tilde{\rho} \equiv (\sigma_2 \otimes \sigma_2)\rho^*(\sigma_2 \otimes \sigma_2). \tag{5}$$

此处 ρ^* 表示在计算基下取复共轭。并发度满足$0 \leq \mathcal{C} \leq 1$，对于 $\mathcal{C} = 0$ 可分离态，并且对于 $\mathcal{C} = 1$ 最大纠缠贝尔态。如式（5）所示，在自旋旋转下，并发度与基底选择无关。

C. 贝尔非定域性

另一种量子关联是贝尔非定域性，违反贝尔不等式 [51]的态便可体现这一性质。对于双量子比特系统，该不等式由CHSH不等式给出，即 [52]

$$|\langle \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle| \leq 2, \tag{6}$$

其中 $\vec{a}_1$ 和 $\vec{a}_2$ 指定一个量子比特的“探测器设置”或自旋轴，$\vec{b}_1$ 和 $\vec{b}_2$指定另一个量子比特的“探测器设置”或自旋轴。

贝尔变量 $\mathcal{B}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$测量CHSH不等式的左侧：

$$\mathcal{B}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2) = |\langle \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_2 \cdot \vec{\sigma} \rangle|. \tag{7}$$

$\mathcal{B}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ 的值取决于自旋轴的四种选择。使 $\mathcal{B}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ 最大化的最佳选择组合，所得值为 [53, 93]

$$\mathcal{B} = 2\sqrt{m_1 + m_2}, \tag{8}$$

其中 m_1 和 m_2 是矩阵 C^TC的两个最大特征值，其中 C 是式（3）中的自旋关联矩阵。对于贝尔局域态，有 $\mathcal{B} \leq 2$，而 $\mathcal{B} > 2$ 则表明某个态是贝尔非定域的。量子力学系统可达到的贝尔变量最大值为 $2\sqrt{2}$ [57, 94]。

–

D. 魔性

与以比特运算的经典计算机不同，量子计算机以量子比特运算。在某些情况下，量子计算机解决问题的速度远快于经典计算机。这种加速源自量子关联。然而，更多类似贝尔态的量子关联并不一定会让量子计算机获得优势。例如，可分离态和贝尔态都可以通过经典模拟高效处理 [58]。

量子计算机所获得优势的一个更直接体现是“魔性”。魔性很强的态无法通过经典模拟高效处理。另一方面，能够通过经典模拟高效处理的态称为稳定子态。稳定子态定义为通过对该态施加泡利串算符而得到的态 $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \ldots \otimes |0\rangle$。 n 个量子比特的泡利串定义如下：

$$\mathcal{P}_n = P_1 \otimes P_2 \otimes \ldots \otimes P_n \ , \qquad P_a \in \{\sigma_1^{(a)}, \sigma_2^{(a)}, \sigma_3^{(a)}, \mathbb{I}_2^{(a)}\} \ . \tag{9}$$

根据戈特斯曼-克尼尔定理 [58], ，对于只含稳定子态的量子系统，存在一台效率与量子计算机相当的经典计算机。

态的魔性刻画了该态与稳定子态之间的差距。稳定子 Rényi 熵（SRE）量化纯态的魔性 [95],

$$\mathcal{M}_q = \frac{1}{1-q} \log_2(\zeta_q) \ , \qquad \zeta_q \equiv \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \frac{\langle\psi|P|\psi\rangle^{2q}}{2^n}, \tag{10}$$

其中整数为 $q \geq 2$。对于我们的双量子比特系统（$n = 2$），我们关注 $q = 2$ 的情况，并将其记为第二稳定子 Rényi 熵（SSRE） $\mathcal{M}_2$。对于混合态 ρ，我们采用文献 [95], 中提出的混合态推广形式

$$\mathcal{M}_2 = -\log_2 \frac{\sum_{P \in \mathcal{P}_n} \mathrm{Tr}(\rho P)^4}{\sum_{P \in \mathcal{P}_n} \mathrm{Tr}(\rho P)^2}. \tag{11}$$

用 Fano 系数（$B_i^{\pm}$ ， C_{ij}）表示时， $\mathcal{M}_2$ 是 15 个量子层析参数的非线性泛函：

$$\mathcal{M}_2 = -\log_2 \frac{1 + \sum_i (B_i^+)^4 + \sum_j (B_j^-)^4 + \sum_{ij} (C_{ij})^4}{1 + \sum_i (B_i^+)^2 + \sum_j (B_j^-)^2 + \sum_{ij} (C_{ij})^2}. \tag{12}$$

稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$ 已被证明对于 $t\bar{t}$ 大型强子对撞机上的系统 [59] 很有用，并且已由 CMS 合作组测量 [96]。

最小 SSRE 值为 $\mathcal{M}_2 = 0$，对应于一个稳定子态。在法诺-布洛赫表示中，只有当所有法诺系数（$B_i^{\pm}$，C_{ij}）均被限制为三个离散值 $\{-1, 0, +1\}$ 时，才能实现这一零魔性条件（$\mathcal{M}_2 = 0$）。这一约束定义了稳定子扇区。相比之下，当系数最大程度地偏离这些极值时，魔性达到最大。双量子比特系统的纯态所能达到的最大 SSRE 值为 [97]

$$\max\left[\mathcal{M}_2(|\psi\rangle)\right] = \log_2 \frac{16}{7} \approx 1.192. \tag{13}$$

需要注意的是，文献中给出的最大值 [97] 为 $\log(16/7) \approx 0.827$，其中使用的是自然对数。在本文中，我们改用以 2 为底的对数 $\log_2$，这是量子信息理论中的标准归一化约定。

纠缠和魔性是不同的量子资源。例如，最大纠缠的贝尔态表现出强烈的非经典关联，但它们是魔性为零的稳定子态（$\mathcal{M}_2 = 0$），并且可以在稳定子形式体系内进行高效的经典模拟。相反，即使纠缠很小或消失，也可能产生非零魔性，这反映了超越双粒子非局域关联的非稳定子结构。我们将在第 IIID节再次阐述这些观点。

III. 纵向束流极化下 ff 末态的量子行为

在束流完全极化的条件下，散射过程的初态 $|\psi_{\rm in}\rangle$ 是一个自旋构型固定且定义明确的纯态。相应的初态密度矩阵就是投影算符：

$$\rho_{\rm in} = |\psi_{\rm in}\rangle \langle\psi_{\rm in}| . \tag{14}$$

跃迁算符 T 源自 S-矩阵分解 $S = 1 + iT$，它将初态映射为出射态

$$|\psi_{\rm out}\rangle = \frac{T|\psi_{\rm in}\rangle}{\sqrt{\langle\psi_{\rm in}| T^\dagger T |\psi_{\rm in}\rangle}}, \tag{15}$$

其中，分母确保态的归一化。因此，末态密度矩阵为

$$\rho_{\text{out}} = \frac{T\,|\psi_{\text{in}}\rangle\,\langle\psi_{\text{in}}|\,T^{\dagger}}{\langle\psi_{\text{in}}|\,T^{\dagger}T\,|\psi_{\text{in}}\rangle}. \tag{16}$$

对撞束流的完全极化确保该跃迁涉及振幅的相干叠加，而非经典混合。量子相干性的这种保持保证所得末态密度矩阵仍为纯态。

对于非极化或部分极化束流，初态是不同螺旋度组态的非相干统计混合，从而得到混合态的密度矩阵。该混合态可表示为四种螺旋度组态 LR、 RL、LL 和 RR 的混合，

$$\rho_{\text{unpolarized}} = \rho_{LR} + \rho_{RL} + \rho_{LL} + \rho_{RR}, \tag{17}$$

其中 L 表示左手性、 R 表示右手性纵向束流极化。对于纵向极化束流，每一束流都可用单粒子自旋密度矩阵来描述，

$$\rho_{e^-} = \frac{1}{2}(1 + P_{e^-}\sigma_z), \qquad \rho_{e^+} = \frac{1}{2}(1 + P_{e^+}\sigma_z), \tag{18}$$

其中 $P_{e^\pm} \in [-1, 1]$ 表示纵向极化度的百分比， σ_z 是沿束流轴的泡利矩阵，且 $P_{e^\pm} = +1$ （-1）对应于纯右手性（左手性）束流。

组合后的初态自旋密度矩阵由其张量积给出 ,

$$\rho_{\text{in}} = \rho_{e^-} \otimes \rho_{e^+} = \frac{1}{4}\big(1 + P_{e^-}\sigma_z\big) \otimes \big(1 + P_{e^+}\sigma_z\big). \tag{19}$$

最常见的三种极限情况是:

非极化: $$P_{e^-} = P_{e^+} = 0 \;\Rightarrow\; \rho_{\text{in}} = \tfrac{1}{4}\,\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2, \tag{20}$$

fully polarized $(e_L^- e_R^+)$: $$(P_{e^-}, P_{e^+}) = (-1, +1) \;\Rightarrow\; \rho_{\text{in}} = |LR\rangle\,\langle LR|\,, \tag{21}$$

fully polarized $(e_R^- e_L^+)$: $$(P_{e^-}, P_{e^+}) = (+1, -1) \;\Rightarrow\; \rho_{\text{in}} = |RL\rangle\,\langle RL|\,. \tag{22}$$

具体而言， ρ_{in} 可写成四种螺旋度组态的非相干混合态$\alpha \in \{LR, RL, LL, RR\}$。根据式（19）中混合态的形式，我们有

$$w_{LR} = \frac{(1 - P_{e^-})(1 + P_{e^+})}{4}, \qquad w_{RL} = \frac{(1 + P_{e^-})(1 - P_{e^+})}{4},$$
$$w_{LL} = \frac{(1 - P_{e^-})(1 - P_{e^+})}{4}, \qquad w_{RR} = \frac{(1 + P_{e^-})(1 + P_{e^+})}{4}.$$

对于完全极化束流， $\rho_{\rm in}$ 投影到单一的初始螺旋度，从而在进行任何相空间平均之前产生纯态。

令 $\mathcal{M}_{\lambda_i\to\lambda_f}$ 表示式（ $e^-e^+\to ff$17）中的螺旋度振幅，其中 $\lambda_i=(\lambda_{e^-},\lambda_{e^+})$ 和 $\lambda_f=(\lambda_f,\lambda_{\bar f})$。系统 ff 产生时的自旋密度矩阵，可通过按照矩阵元 $\rho_{\rm in}$ 演化初始系综 $\mathcal{M}$ 得到：

$$\rho_{f\bar f}\;=\;\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{\lambda_i,\lambda_i'}\mathcal{M}_{\lambda_i\to\lambda_f}\,\rho_{\rm in}(\lambda_i,\lambda_i')\,\mathcal{M}^{\dagger}_{\lambda_i'\to\lambda_f'}\,,\qquad \mathcal{N}=\mathrm{Tr}\left[\sum_{\lambda_i,\lambda_i'}\mathcal{M}\,\rho_{\rm in}\,\mathcal{M}^{\dagger}\right]. \tag{23}$$

在式（20）的非极化极限下，式（23）化简为对初始螺旋度求和的熟知形式，且各项权重相等。附录A中给出了 $e^-e^+\to ff$ 的树级计算细节A。

我们采用共同的自旋量子化轴 $k\equiv\vec{p}_f/|\vec{p}_f|$，同时用于费米子 f 和反费米子 f。在此约定下，我们记

$$|\uparrow\rangle_f\equiv|f_R\rangle,\qquad |\downarrow\rangle_f\equiv|f_L\rangle,\qquad |\uparrow\rangle_{\bar f}\equiv|\bar f_L\rangle,\qquad |\downarrow\rangle_{\bar f}\equiv|\bar f_R\rangle, \tag{24}$$

其中， f 的指派是因为 f 沿着 $-k$运动。

对于完全极化的初始配置 LR ($e_L^-e_R^+$) 或 RL ($e_R^-e_L^+$)，总角动量沿 z 轴方向，末态 $|ff\rangle$ 是一个纯双量子比特态。两个量子比特的一般纯态 $|\psi\rangle$ 可写为

$$|\psi\rangle=a\,|\uparrow\uparrow\rangle+b\,|\downarrow\downarrow\rangle+c\,|\uparrow\downarrow\rangle+d\,|\downarrow\uparrow\rangle\,, \tag{25}$$

其中 a、 b、 c 和 d 是满足 $|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2=1$的复系数。对于一般的双量子比特纯态，可分性的充要条件是 $ab=cd$，这确保 $|\psi\rangle$ 可写成乘积态 $|\phi_1\rangle\otimes|\phi_2\rangle$。当 $ab\neq cd$ 时，该态为纠缠态。在对撞机情境中，有两种特殊情况尤为相关 [98]： （1） $c=d=0$。

系数 a 和 b 分别表征分量 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$，对应于末态的螺旋度组态 f_Rf_L 和 f_Lf_R。对于矢量/轴矢量规范相互作用，在超相对论极限 $m_f^2\ll s$下螺旋度守恒，因此产生的态主要处于子空间 $\{|\uparrow\uparrow\rangle,|\downarrow\downarrow\rangle\}$中。在特定散射角下可达到贝尔极限 $|a|=|b|$ ，从而得到 $|\Phi^{\pm}\rangle=(|\uparrow\uparrow\rangle\pm|\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$。因此， a 和 b系数占主导，表明存在自旋 1 规范玻色子的 s道交换。具体而言，

量子电动力学通常通过这些螺旋度守恒振幅的相干叠加产生 $|\Phi^{\pm}\rangle$ 态。

(2) $a = b = 0$.

系数 c和 d 分别对应态 $|\uparrow\downarrow\rangle$和 $|\downarrow\uparrow\rangle$，其螺旋度组态为$\bar{f}_R f_R$ 和 $f_L \bar{f}_L$。它们也可以构成与$|c| = |d|$最大程度纠缠的贝尔态。然而，这类相同螺旋度的末态需要发生手征翻转；对于无质量费米子的规范相互作用而言，这是不允许的，却是标量或赝标量相互作用的特征。反对称组合 $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ 对应总自旋为 $S_z = 0$ 的单重态。汤川相互作用会自然地产生这种态，例如标准模型希格斯玻色子与左手和右手费米子的耦合是对称的。对称组合 $|\Psi^+\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ 对应自旋三重态的 $S_z = 0$分量。这种态源于赝标量流（例如，CP奇希格斯玻色子 A^0），其中手征耦合之间的相对符号会在自旋基中引入相移。在高能区观测到非零的 c或 d 项，将意味着标量扇区中存在具有显著质量插入效应的新物理；这与由 $|\Phi^{\pm}\rangle$表征的保持手征的规范相互作用截然不同。

纯态下 $B_i^{\pm}$与 C_{ij}关于 a、b、c、d的表达式由式（25）给出

$$B_i^+ = \begin{pmatrix} da^* + cb^* + bc^* + ad^* \\ -i\,da^* + i\,cb^* - i\,bc^* + i\,ad^* \\ aa^* - bb^* + cc^* - dd^* \end{pmatrix}, \quad B_j^- = \begin{pmatrix} ca^* + db^* + ac^* + bd^* \\ -i\,ca^* + i\,db^* + i\,ac^* - i\,bd^* \\ aa^* - bb^* - cc^* + dd^* \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} ba^* + ab^* + dc^* + cd^* & -i\,ba^* + i\,ab^* + i\,dc^* - i\,cd^* & da^* - cb^* - bc^* + ad^* \\ -i\,ba^* + i\,ab^* - i\,dc^* + i\,cd^* & -ba^* - ab^* + dc^* + cd^* & -i\,da^* - i\,cb^* + i\,bc^* + i\,ad^* \\ ca^* - db^* + ac^* - bd^* & -i\,ca^* - i\,db^* + i\,ac^* + i\,bd^* & aa^* + bb^* - cc^* - dd^* \end{pmatrix}. \tag{27}$$

对于过程 $e^-_{R/L}e^+_{L/R} \to \gamma^*,\ Z^* \to f\bar{f}$，系数 a，b，c，d在式（25）中具有如下形式

$$a = e^2\left(f_V^{R/L} + f_A^{R/L}\beta\right)(1 \pm \cos\theta), \tag{28a}$$

$$b = e^2\left(f_V^{R/L} - f_A^{R/L}\beta\right)(1 \mp \cos\theta), \tag{28b}$$

$$c = d = \mp e^2 f_V^{R/L}\sqrt{1-\beta^2}\,\sin\theta, \tag{28c}$$

其中 $\beta=\sqrt{1-4m_f^2/s}$，上（下）号对应束流极化组态 RL （LR）。耦合强度为

$$f_V^L = Q_e Q_f + \frac{g_L^e(g_L^f+g_R^f)}{2c_W^2 s_W^2}\frac{s}{s-m_Z^2+is\Gamma_Z/m_Z}, \tag{29a}$$

$$f_A^L = -\frac{g_L^e(g_L^f-g_R^f)}{2c_W^2 s_W^2}\frac{s}{s-m_Z^2+is\Gamma_Z/m_Z}, \tag{29b}$$

$$f_V^R = Q_e Q_f + \frac{g_R^e(g_L^f+g_R^f)}{2c_W^2 s_W^2}\frac{s}{s-m_Z^2+is\Gamma_Z/m_Z}, \tag{29c}$$

$$f_A^R = -\frac{g_R^e(g_L^f-g_R^f)}{2c_W^2 s_W^2}\frac{s}{s-m_Z^2+is\Gamma_Z/m_Z}, \tag{29d}$$

where Γ_Z 是 Z 玻色子在 Z极点处的宽度，费米子手征耦合为

$$g_L^f = I_f^3 - Q_f s_W^2 \quad \text{and} \quad g_R^f = -Q_f s_W^2. \tag{30}$$

Q_f 是费米子 f ($Q_e=-1$) 的电荷，而 $I_{e,\ f}^3$ 是弱同位旋的第三分量。

非极化过程 $e^+e^-\to f\bar{f}$ 中 A附录给出了 s道的自旋关联矩阵 C_{ij} 和量子比特 $B_i^{\pm}$ 的净极化的完整表达式。¯对于 s道， C_{ij} 自旋关联矩阵 $e^+e^-\to ff$ 由有效矢量与轴矢耦合（f_V， f_A）参数化，并明显依赖于对撞能量$\beta=\sqrt{1-4m_f^2/s}$ 和散射角 θ。极化纯态下 C_{ij} 的完整结构为

$$C_{ij}=\frac{1}{\mathcal{D}}\begin{pmatrix} s_\theta^2\left(f_V^2(2-\beta^2)-f_A^2\beta^2\right) & 0 & -2(f_V^2c_\theta \pm f_Vf_A\beta)s_\theta\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 & (f_A^2-f_V^2)\beta^2s_\theta^2 & 0 \\ -2(f_V^2c_\theta \pm f_Vf_A\beta)s_\theta\sqrt{1-\beta^2} & 0 & f_V^2(2c_\theta^2+\beta^2s_\theta^2)+f_A^2\beta^2(1+c_\theta^2)\pm 4f_Vf_A\beta \end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中 $s_\theta=\sin\theta$， $c_\theta=\cos\theta$，分母为 $\mathcal{D}=f_V^2(2-\beta^2s_\theta^2)\pm 4\beta f_Vf_Ac_\theta+\beta^2f_A^2(1+c_\theta^2)$。上（下）号分别对应 RL (LR)束流极化构型，耦合 $f_{V,\ A}$取值为 $f_{V,\ A}^R(f_{V,\ A}^L)$。对于完全偏振过程，纯态的并发度 $\mathcal{C}$ 可简化并进行解析参数化

$$\mathcal{C}=\frac{\beta^2s_\theta^2(f_V^2-f_A^2)}{\mathcal{D}}, \tag{32}$$

贝尔变量由下式给出

$$\mathcal{B}=2\sqrt{1+\mathcal{C}^2}. \tag{33}$$

$\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 之间的这一简单关系不仅适用于纯态，也适用于在不变转动子集中形成的某些混合态，例如在 $(|\uparrow\uparrow\rangle,\ \langle\downarrow\downarrow|)$ 或 $(|\uparrow\downarrow\rangle,\ \langle\downarrow\uparrow|)$ 中。

纠缠在运动学阈值附近 $\beta \to 0$以及前向/后向区域 $\theta \to 0$ 和 π消失。 RL/LR 极化下的最大纠缠达到

$$\mathcal{C}_{\rm Max} = \frac{\beta^2(f_V^2 - f_A^2)}{f_V^2(2-\beta^2) - \beta^2 f_A^2} \tag{34}$$

at

$$\cos\theta = \mp\beta\,\frac{f_A}{f_V}. \tag{35}$$

在无质量极限 $\beta \to 1$下，横向极化分量消失 $B^{\pm}_{r,\ n} = 0$，而纵向极化$B^{\pm}_k$ 的形式为

$$B^{\pm}_k = \frac{2(f_V \pm f_A c_\theta)(f_A \pm f_V c_\theta)}{(f_V^2 + f_A^2)(1+c_\theta^2) \pm 4 f_V f_A c_\theta}, \tag{36}$$

自旋关联矩阵简化为对角形式

$$C_{ij} = \frac{1}{(f_V^2 + f_A^2)(1+c_\theta^2) \pm 4 f_V f_A c_\theta} \times \tag{37}$$
$$\begin{pmatrix} (f_V^2 - f_A^2)\, s_\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & (f_A^2 - f_V^2) s_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & (f_V^2 + f_A^2)(1+c_\theta^2) \pm 4 f_A f_V \end{pmatrix}.$$

并发度 $\mathcal{C}$ 在式（32）中随即简化为

$$\mathcal{C} = \frac{(f_V^2 - f_A^2) s_\theta^2}{(f_V^2 + f_A^2)(1+c_\theta^2) \pm 4 f_V f_A c_\theta}\ , \tag{38}$$

在 $\cos\theta = \mp f_A/f_V$ 处达到最大值 $\mathcal{C} \to \bar{1}$, $\mathcal{B} \to 2\sqrt{2}$。这些表达式适用于 s 道产生中的一般极化过程$^-$ $e^+e^- \to f\bar{f}$；对于 $t\bar{t}$，代入$Q_t = 2/3$ 和 $I_t^3 = 1/2$即可。

A. 顶夸克对产生

$^-$1. $t\bar{t}$的 *Quantum* 量子态

一个 $t\bar{t}$ 态通过 s道的 Z/γ 交换产生。在高能极限 $\beta \to 1$下，手征与螺旋度一致。考虑沿着

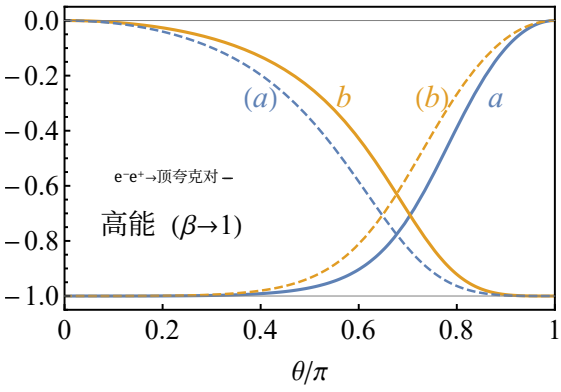


图 2. 系数 a 和 b 式 (25) 中 $t\bar{t}$ 系统在 $RL(LR)$ 束流极化下量子态的系数随散射角 θ 和速度 $\beta \to 1$的变化。

束流轴（分别对应 $e_R^- e_L^+$ 和 $e_L^- e_R^+$），根据角动量守恒，末态 $t\bar{t}$自旋排列为 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$, 分别对应于 $c = d = 0$ 在方程（25）中的情况。对于固定螺旋度，初态 态产生的 态可表示为

$$e_R^- e_L^+ : \quad |\psi\rangle \propto (f_V^R + f_A^R) d^1_{1,1}(\theta)\,|\uparrow\uparrow\rangle + (f_V^R - f_A^R) d^1_{-1,1}(\theta)\,|\downarrow\downarrow\rangle\,, \tag{39a}$$

$$e_L^- e_R^+ : \quad |\psi\rangle \propto (f_V^L + f_A^L) d^1_{1,-1}(\theta)\,|\uparrow\uparrow\rangle + (f_V^L - f_A^L) d^1_{-1,-1}(\theta)\,|\downarrow\downarrow\rangle\,, \tag{39b}$$

其中 $d^j_{m',\ m}$ 是维格纳 d-函数。该表述明确显示，基态的相对权重取决于散射角 θ 和初始角动量m。值得注意的是，在前向或后向极限（$\theta \to 0$ 或 π）下， d-函数的性质意味着其中一项会消失。因此，无论初始配置如何，态 $|\psi_{RL}\rangle$ ($|\psi_{LR}\rangle$)都会变为可分离态，纠缠随之消失。如式 (28)所示，当振幅满足$|a| = |b|$时，纠缠达到最大，此时在散射角 $\theta_{\rm Max} \simeq 0.7\pi$ (0.65π) 下，RL (LR) 极化对应一个贝尔态。图 2展示了高能极限下完全偏振过程中 $t\bar{t}$ 态的角依赖。该图阐明了哪些角度区域会使态趋向类贝尔三重态，哪些区域则趋向类稳定子构型，从而预示了之后纠缠、贝尔与魔性可观测量中观察到的行为。上述结果同样适用于具有手征耦合的其他 s-道无质量费米子产生过程。

在产生阈值附近 $\beta \to 0$， $t\bar{t}$ 对主要以轨道角动量可忽略的 $^3S_1$态产生。在固定束流基中，对于完全极化的初态， $t\bar{t}$ 系统在 RL (LR)极化下为 $|\downarrow\downarrow\rangle$ ($|\uparrow\uparrow\rangle$)。在这种情况下，

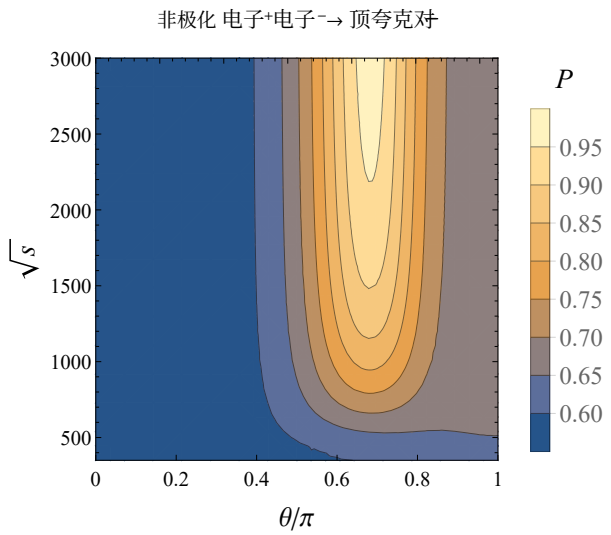


图 3. $t\bar{t}$末态纯度的等高线图，展示在对撞机 e^+e^- 的散射角 θ 与质心能量 $\sqrt{s}$（吉电子伏特）构成的运动学平面上。

相应的自旋构型是可分离的，$\rho_{t\bar{t}} \approx \rho_t \otimes \rho_{\bar{t}}$，因此并发度为零。然而，对于非极化束流，观测到的态是此类极化分量的统计混合态，因此所得末态量子态是混合态。如图3所示，系统的纯度在 $\theta \approx 2.1$附近的角区域达到 1，此处末态趋近于类贝尔构型。这些区域与并发度和贝尔非定域性的最大值重合，表明该系统在局部等价于纯纠缠态。相比之下，在前向和后向的散射极限（$\theta \to 0$ 和 π）下，纯度下降，反映出系统跃迁至混合态，该混合态对应于可分离构型 LR 和 RL的统计混合态。在产生阈值处，非极化末态同样成为由两种偏振模式产生的可分态的混合态。

2. $t\bar{t}$的并发度、贝尔非局域性与 *Quantum* 量子层析

量子纠缠可用并发度进行定量测量 $\mathcal{C}$，而贝尔非定域性的潜力则用贝尔变量测量 $\mathcal{B}$。图中展示了 $\mathcal{C}$ （左图）和$\mathcal{B}$ （右图），见图4，对应的对撞机能量为 $\sqrt{s} = 360$ 吉电子伏特（接近 $t\bar{t}$ 产生阈值）和 1 TeV，并采用不同的束流极化 $e_L^- e_R^+$ 和 $e_R^- e_L^+$ 。我们还在图5中展示了它们随能量的变化，所取极化为 $e_L^- e_R^+$，位于$\theta - \sqrt{s}$ 平面内。我们看到，纠缠

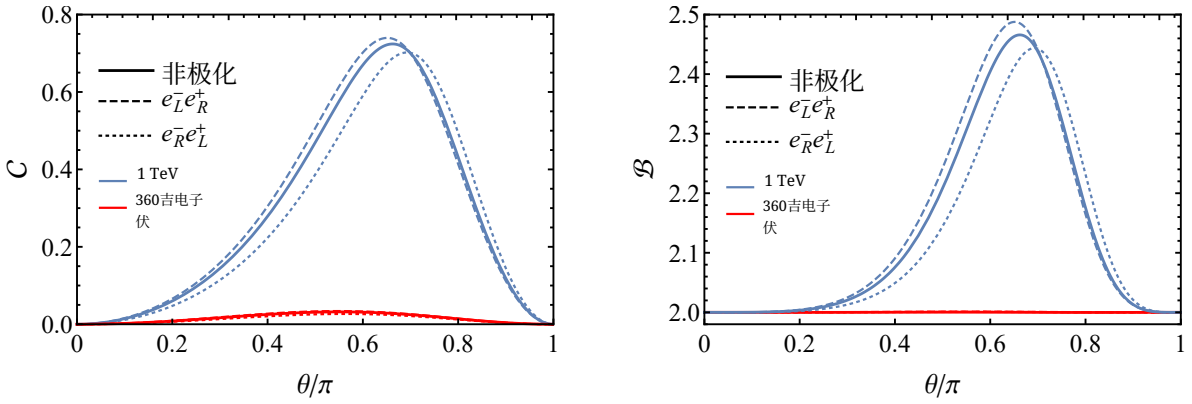


图 4. 在 $\sqrt{s} = 360$ 吉电子伏特（红色）和 1 TeV（蓝色）下，$e^+e^- \to t\bar{t}$ 的并发度 $\mathcal{C}$（左）和贝尔变量 $\mathcal{B}_-$（右）随散射角 θ 的变化，不同束流极化情形分别为：非极化（实线）、完全极化 $e_L^- e_R^+$（虚线）和 $e_R^- e_L^+$（点线）。

¯的 tt 系统在阈值区和高能区呈现出定性上不同的行为。在产生阈值附近（$\beta \to 0$），末态自旋构型是可分离的，在这一极限下不存在纠缠。然而，在更高能量下（$\beta \to 1$），$t\bar{t}$ 变为纠缠态且呈现贝尔非定域性，并在式（34）所示的特殊散射角处达到式（35）给出的最大值。

束流极化会使分布峰值移至特定散射角处，但不会改变其定性特征。这可由C_{ij} 的手征结构理解，如方程（29）和（31）所示。束流极化的影响由有效耦合 f^L、$_{V\,A}^{R}$、决定。类似的行为源于轴矢量耦合与矢量耦合之比具有近似对称性；该比值从阈值到 1 TeV 仅略有变化，其中 $f_A^R/f_V^R \approx 0.6$ 且 $f_A^L/f_V^L \approx -0.5$。因此，在图 5及后文中，除非另有说明，我们仅展示一种束流极化 $e_L^- e_R^+$ 作为示例。

现在，我们用法诺系数对 $e^+e^- \to t\bar{t}$ 进行量子层析：自旋关联矩阵 C_{ij} 和极化矢量 $B_i^{\pm}$。图6以$\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特为例，展示了它们的角依赖。非极化曲线是对极化构型进行非相干平均得到的，权重为相应矩阵元的平方。我们发现，关联矩阵 C_{ij} 对束流极化的依赖较弱，而单粒子偏振 $B_i^{\pm}$ 则强烈依赖于极化。图$\theta - \sqrt{s}$ 中展示了平面 C_{rr}上的二维等高线，适用于 C_{nn}、 C_{kk}和 C_{nk} ，且束流为非极化。对于极化矢量$B_r^{\pm}$ ，$_k$ 图8中，我们

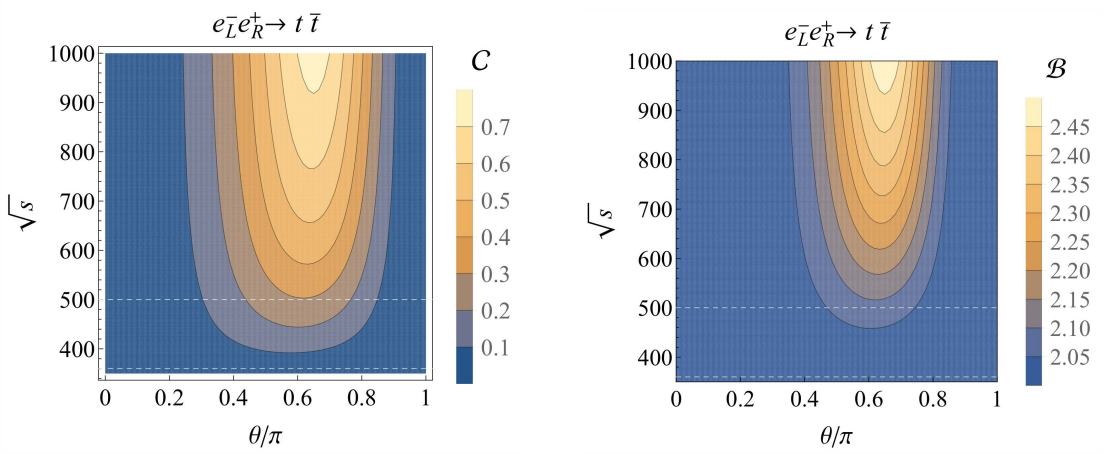


图 5. $e_L^- e_R^+ \to t\bar{t}$ 下， $\theta - \sqrt{s}$(吉电子伏特)平面中并发度（左）和贝尔变量（右）的等高线图。

展示了非极化和 LR 情形的结果，而 RL配置产生的分布相似，但符号相反（见图6）。正如预期，顶夸克在$B_k^{\pm}$ 中的纵向极化$e_R^- e_L^+$ （$e_L^- e_R^+$ ）碰撞在 $\theta = 0$ （$\theta = \pi$）处达到峰值，而横向极化 $B_r^{\pm}$在 $\theta \approx 0.65\pi$附近达到峰值，而 $B_n^{\pm} = 0$。

我们进一步扫描 P_{e^-}, P_{e^+} 极化平面，并在 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特下于图 9 中提取最大并发度 $\mathcal{C}_{\text{Max}}$ （左图）以及对应的最优角 θ_{Max} （右图）。在相同的运动学范围内，贝尔变量 $\mathcal{B}$ 呈现出类似的依赖关系，而由于宇称破坏电弱耦合， θ_{Max} 和 LR 的最优角 RL 有所不同。具体而言， $|f_A^R/f_V^R|$略大于 $|f_A^L/f_V^L|$，这表明在 $e_R^- e_L^+ \to t\bar{t}$ 过程中，电弱相互作用使结果进一步偏离量子电动力学极限。

这也解释了为何 LR 比 $\pi/2$更倾向于量子电动力学特有的对称分布，而 RL则不然；这一点此前已见于图 6。这种角不对称性也进一步解释了两种极化配置之间 $\mathcal{B}$ 最大值的差异。在 θ_{Max}^{LR} 和 θ_{Max}^{RL}处，贝尔非定域性达到峰值，此时该 tt 系统的量子态可表示为

$$|\psi\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right) + \epsilon\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \quad \text{with} \quad \epsilon \propto \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sin\theta_{\text{Max}}}. \tag{40}$$

在高能极限 $\epsilon \to 0$，即无质量近似下， tt 对形成贝尔三重态，纠缠达到理论最大值。随着 $|\epsilon|$增大，量子纠缠和贝尔非定域性均会减弱。由于 $|\sin\,\theta_{\text{Max}}^{LR}| >$

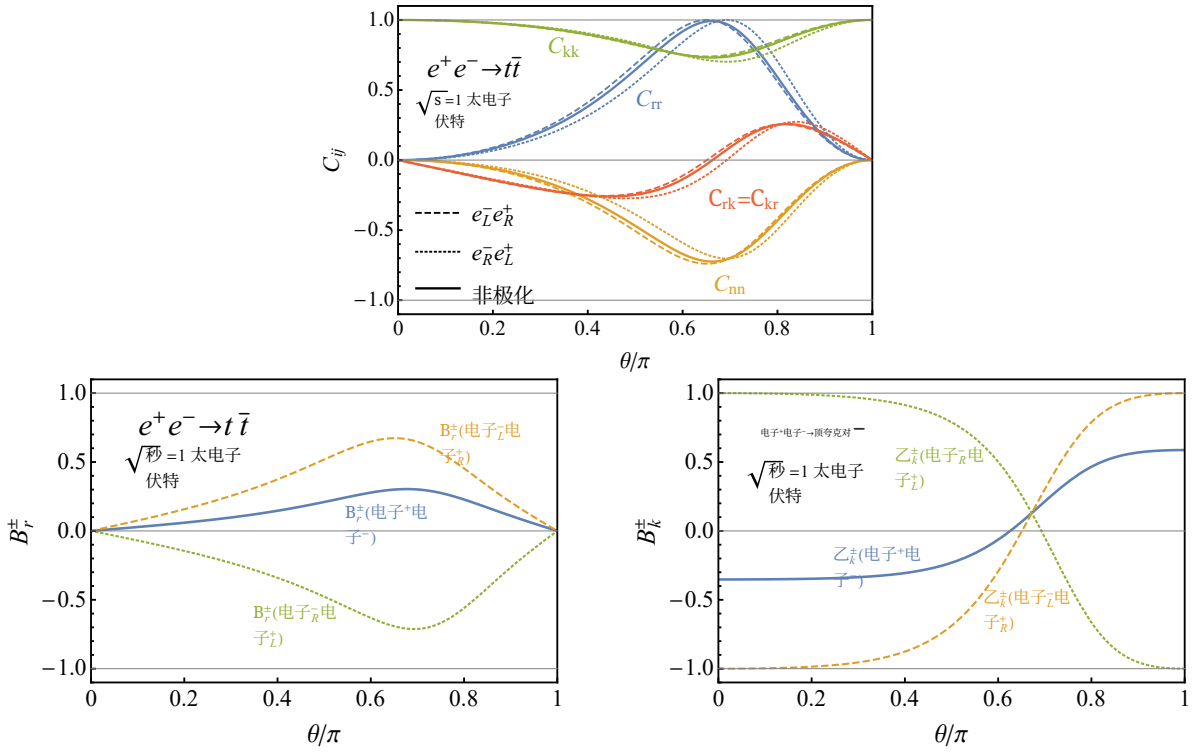


图 6. C_{ij} （上图）、 $B_r^{\pm}$（左下图）和 $B_k^{\pm}$ （右下图）的法诺系数随 θ 散射角的变化，适用于 $e^+e^- \to t\bar{t}$ ，能量为 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特。上图中，蓝线、绿线和黄线分别对应 C_{nn}、 C_{kk} 和 C_{rr}，红线则表示 C_{nk} 和 C_{kn}。所有图中，实线、虚线和点线分别表示非极化、 LR 极化和 RL极化构型。

$|\sin\theta_{\rm Max}^{RL}|$，可得 $|\epsilon_{LR}| < |\epsilon_{RL}|$，这使得 LR极化的 $\mathcal{B}$最大值更大。并发度也体现出相同趋势。

3. 顶夸克对的第二稳定器 *Rényi* 熵 $t\bar{t}$

稳定子 Rényi 熵魔性（$\mathcal{M}_2$）量化了量子态相对于稳定子态集合的偏离，可作为非克利福德量子模拟所需资源的度量。我们展示 $\mathcal{M}_2$ 在 $t\bar{t}$ 系统上的角依赖，见图10 左图中阈值附近（360吉电子伏）和高能（1 TeV）的结果，以及束流极化对 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特的影响（右图）。完整的角度和能量依赖性绘制在 $\theta - \sqrt{s}$ 平面上，见图 11。我们仅展示 LR 极化，因为 RL情形呈现出定性相似的分布。

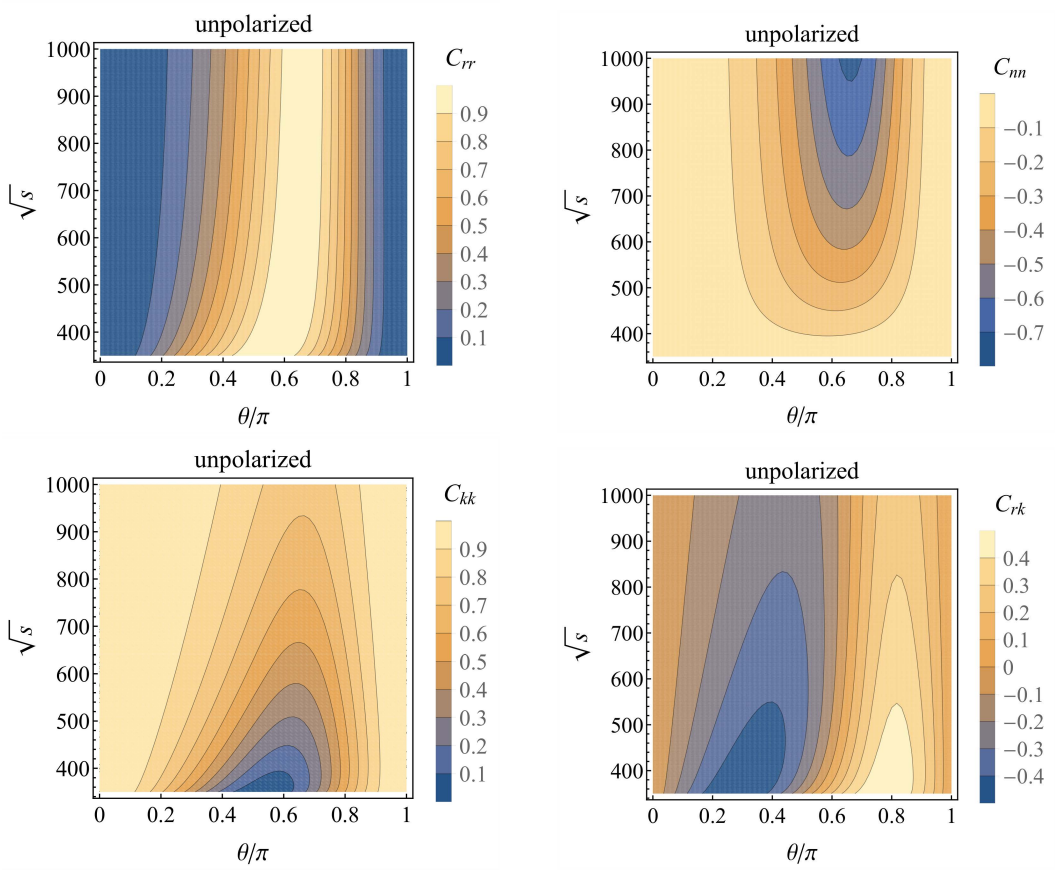


图 7. 非极化 $e^+e^- \to t\bar{t}$ 的 $\theta - \sqrt{s}$(吉电子伏特) 平面上法诺系数 C_{rr}、C_{nn}、C_{kk} 和 C_{nk} 的等高线图。

魔性分布的一个显著特征是，其在角度分布中呈“双峰”结构，两峰夹着中央谷。在 tt 阈值附近，该分布关于 $\theta = \pi/2$对称，这反映出宇称守恒的量子电动力学贡献占主导地位。随着 $\sqrt{s}$的增大，来自 Z 玻色子交换的干涉引入了宇称破坏，从而打破该对称性并移动大魔性区域。比较非极化与完全极化情形可知，束流极化会显著增强魔性的大小。值得注意的是，在纠缠可忽略的阈值附近前向/后向散射中，显著的魔性仍然存在。相反，魔性在前向与后向极限中消失。对这些情形的详细物理解释——特别是为何可分态可以具有魔性，而最大纠缠态却可能没有——见第IIID节。

最后，图12 通过绘图探究了生成魔性资源的最优条件

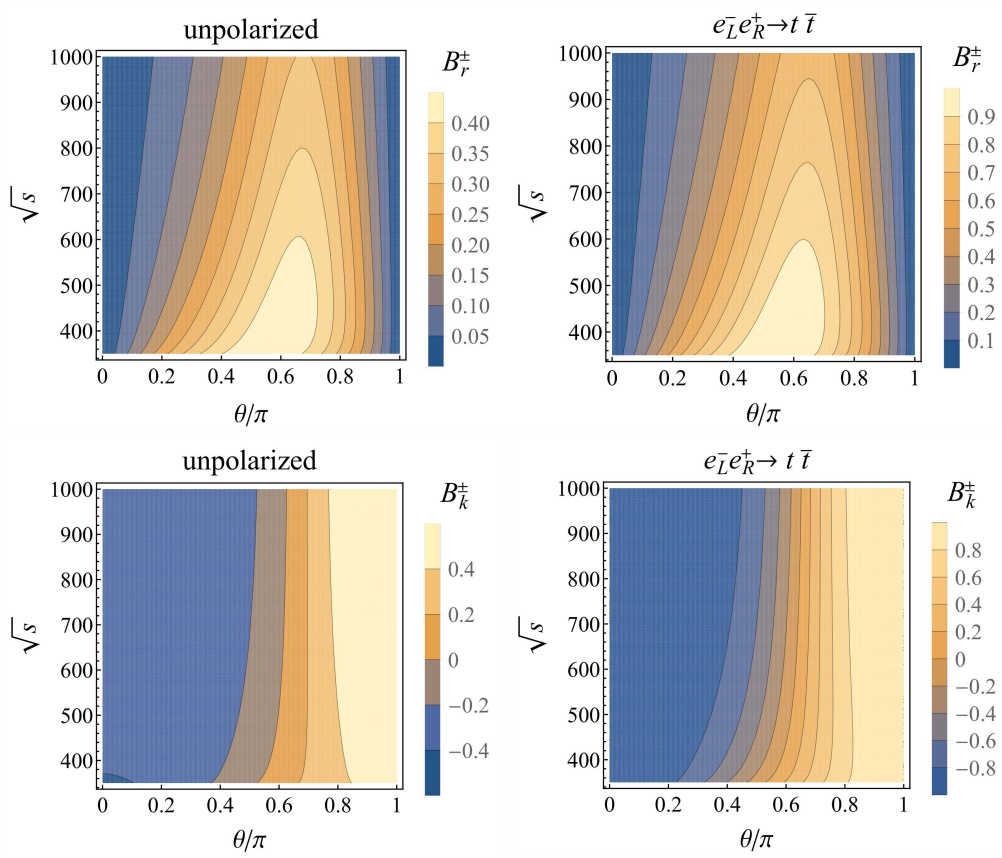


图 8. 非极化（左侧面板）和 LR 极化（右侧面板）$e^+e^- \to t\bar{t}$情况下，$\theta - \sqrt{s}$ （吉电子伏特）平面上的 Fano 极化系数等高线图： $B_r^{\pm}$（上排）和 $B_k^{\pm}$ （下排）。

在 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特下，分别针对左右两个峰（上图）绘制了 (P_{e^-}, P_{e^+}) 极化平面上 $\mathcal{M}_2$ 的最大值，以及对应的角度（下图）。随着束流趋近于完全极化，最大 $\mathcal{M}_2$ 单调增加。这一行为与纠缠和贝尔非定域性形成对比，后两者由于取决于 C_{ij}，在很大程度上不受极化影响。相反，魔性对局域极化矢量 $B_i^{\pm}$ 表现出强烈依赖，因此成为高能碰撞中一种可高度调控极化的量子资源。

B. 轻子对产生

$\mu^+\mu^-$ 与 $\tau^+\tau^-$ 系统在 e^+e^- 碰撞中形成的量子态表现出定性的相似性，这种相似性由轻子普适性所决定。主要差异源于

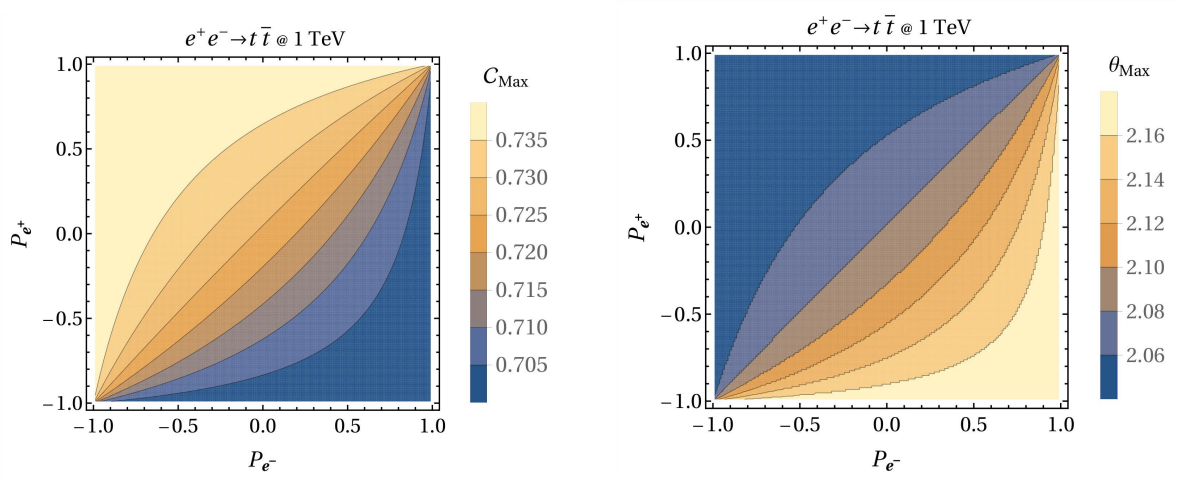


图 9. 在 $\sqrt{s}=1$ 太电子伏时，对 e^- 和e^+ 束流的极化进行评估，得到最大并发度 $\mathcal{C}_{\rm Max}$ （左）及其对应的散射角 $\theta_{\rm Max}$ （右）的等高线图，适用于 $e^+e^-\to t\bar{t}$ 。

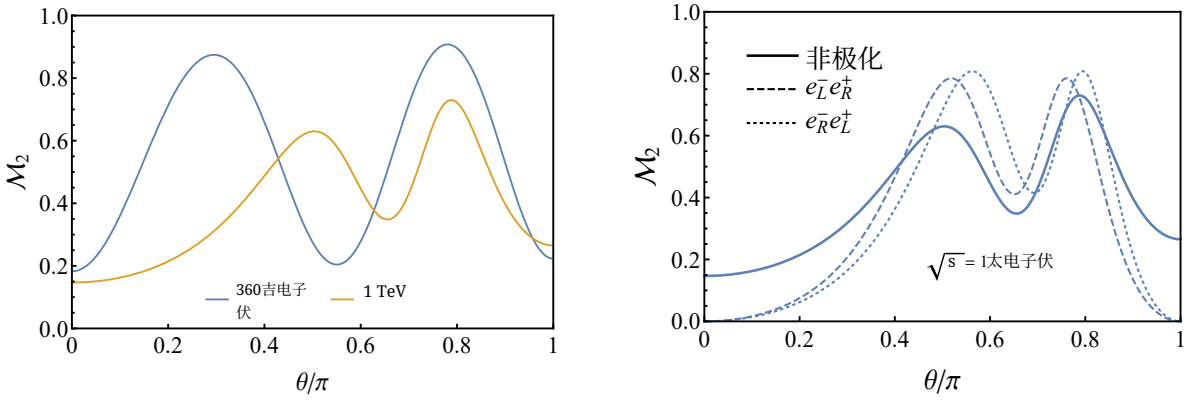


图 10. $e^+e^-\to t\bar{t}$ 的稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$ 随散射角 θ的变化。左： $\sqrt{s}=360$吉电子伏（蓝色）和 1 TeV（橙色）下的非极化结果。右： $\sqrt{s}=1$ 太电子伏下，非极化（实线）、LR （虚线）和 RL （点线）束流极化的结果。

不同质量导致的运动学阈值效应。 $\tau^+\tau^-$过程已在文献 [35]中详细讨论。本文关注 $\mu^+\mu^-$系统中的极化效应，并在高能区将其视为一个有效无质量的双粒子量子系统。

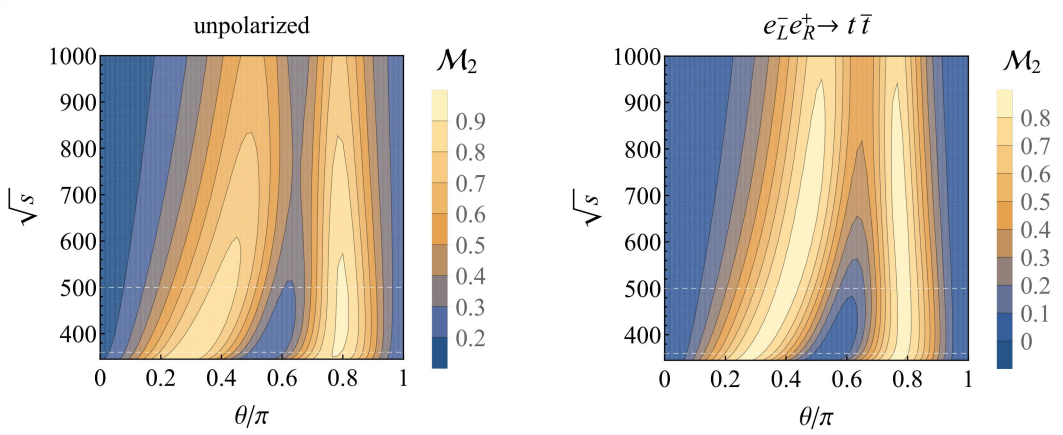


图 11. 非极化（左）和 LR （右）极化 $e^+e^- \to t\bar{t}$ 过程在 $\theta - \sqrt{s}$ （吉电子伏特）平面上的稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$ 等高线图。

1. $\mu^+\mu^-$的 *Quantum* 量子态

在无质量极限下， $m_\mu = 0$手征与螺旋度重合。因此，方程（ c 25）中的系数 d 和 a 消失，而 b 和 $\beta = 1$由方程（28）给出。。

图 13 展示了在 Z 极点（$\sqrt{s} = m_Z = 91.2$ 吉电子伏特）和 $\sqrt{s} = 250$吉电子伏特处， LR 和RL 配置的系数 a 和 b 的角依赖。在 Z 共振附近，该过程由 s道 Z 交换主导，传播子主要受其虚部 $is\Gamma_Z/m_Z$控制。在这一范围内，光子贡献较小，因此 γ–Z 干涉仅在归一化系数中引入微小的相对相位，而手征结构完全由 Z 耦合 g_L 和 g_R决定。由于共振项的大小远超干涉项的实部， LR 和 RL配置之间的相对相位受到抑制。如图 13（左）所示，在两种极化道中，系数 a 和 b 的大小相近，其对 θ的依赖仅由角因子（$1 \pm \cos\theta$）决定。因此，纠缠源于这些自旋构型的相干叠加。

相比之下，在远高于 Z 极点的能量下（$\sqrt{s} \gg m_Z$），γ 与 Z 振幅之间的干涉变得显著。束流极化构型 RL （LR）对应的系数 a和 b可简化为

$$a \propto \left(1 + \frac{f_A^{R/L}}{f_V^{R/L}}\right)(1 \pm \cos\theta), \quad b \propto \left(1 - \frac{f_A^{R/L}}{f_V^{R/L}}\right)(1 \mp \cos\theta), \tag{41}$$

在高能区，其数值为 $f_A^R/f_V^R \approx 0.36$和 $f_A^L/f_V^L \approx -0.32$。与

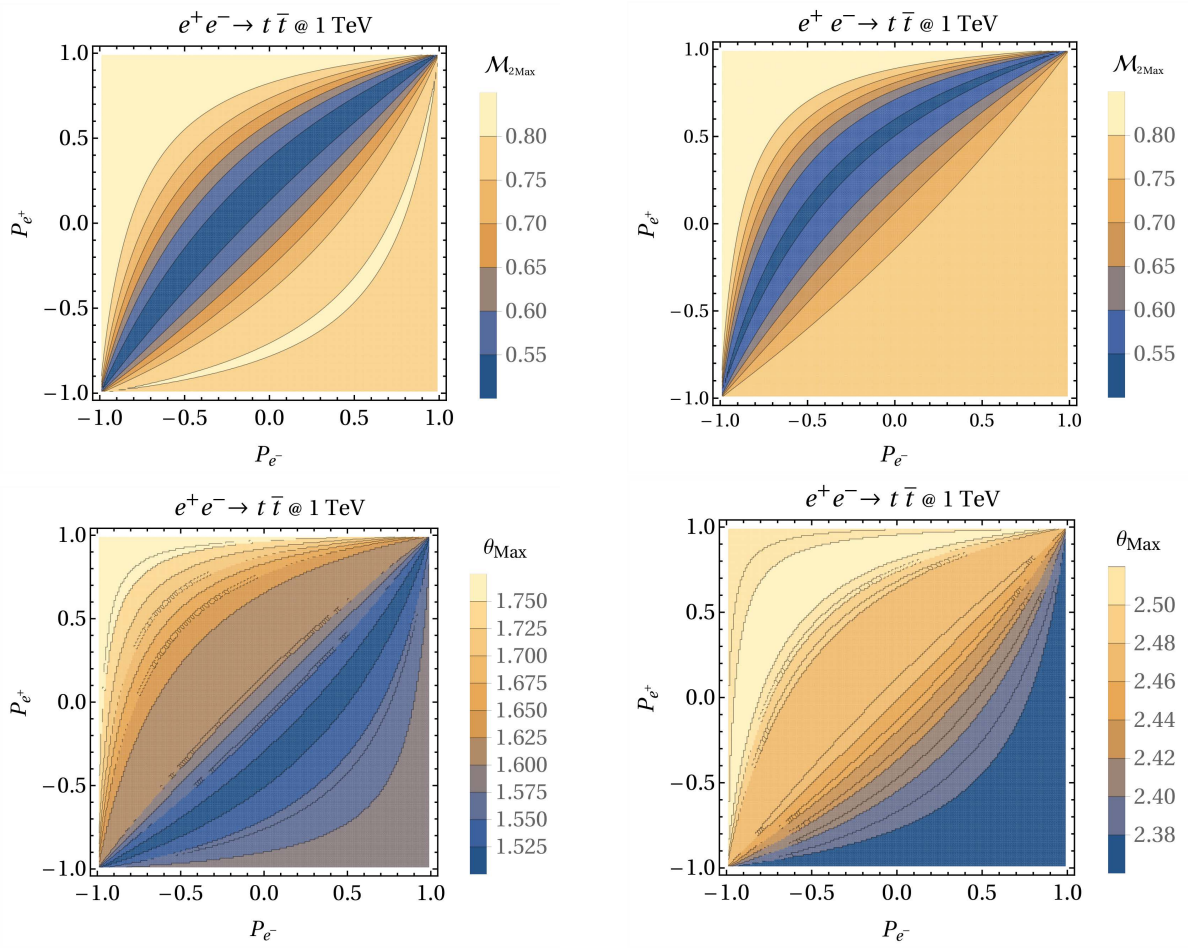


图 12. 最大稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$ （上图）及其对应的散射角 θ （下图），针对$e^+e^- \to t\bar{t}$ 在 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特时，对 e^- 和 e^+ 束流的极化进行评估。左（右）图对应图10和11中双峰结构的左（右）峰。

共振区不同，此处归一化系数对 $\cos\theta$十分敏感。由于 $f_A/f_V \neq 0$，系数 a 和 b 表现出显著的前后不对称性。因此，对应于最大纠缠贝尔态的条件 $|a| = |b|$偏离了对称点 $\theta = \pi/2$，体现了其内在的宇称破坏。

对于非极化或部分极化束流，系统由密度矩阵描述。在无质量极限下，对角基得以保持，混合态的形式为

$$\rho_{\text{mixed}} = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow} & 0 & 0 & \rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{\downarrow\downarrow,\uparrow\uparrow} & 0 & 0 & \rho_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

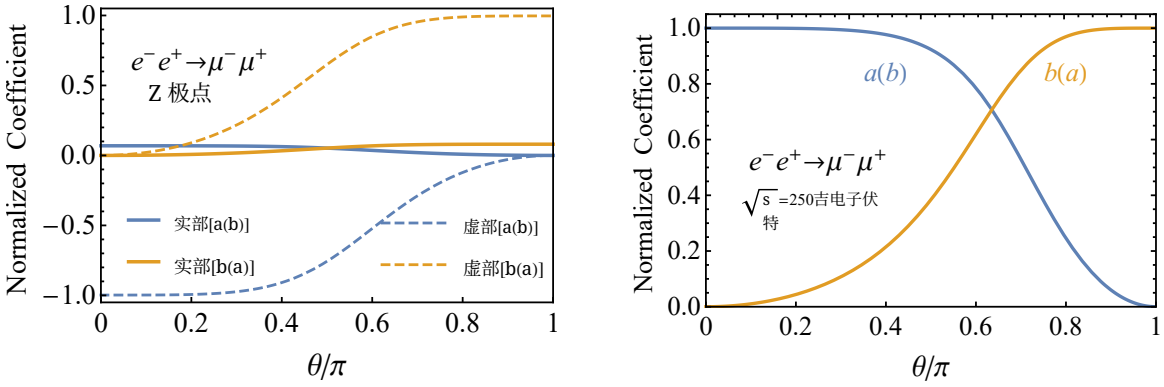


图 13. 系数 a 和 b在公式（25）中，表示 $\mu^+\mu^-$ 系统的量子态，其中 LR （RL）束流极化随散射角 θ 变化，取值为 $\sqrt{s}=m_Z$ （左）和 250 GeV（右）。

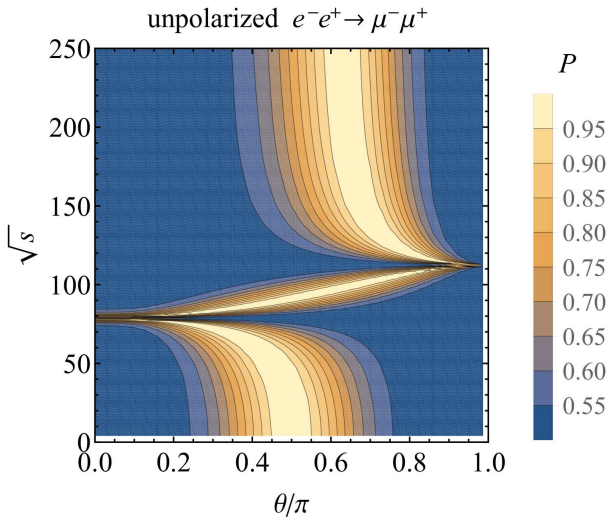


图 14. 在运动学平面上展示的 $\mu^+\mu^-$ 末态纯度等高线图，该平面由散射角 θ 和质心能量 $\sqrt{s}$（单位：吉电子伏特）构成，适用于 e^+e^- 对撞机。

其中 $\rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow}$、 $\rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow}$、 $\rho_{\downarrow\downarrow,\uparrow\uparrow}$和$\rho_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow}$ 表示密度矩阵中非零的元素。完全极化碰撞产生纯态，而非极化情形则产生纯度为 $P<1$的混合态。我们根据公式（2）计算纯度，如图14所示。此处及下文中，等高线图均显示至$\sqrt{s}=250$ 吉电子伏特，因为在更高能标下，量子态的结构保持不变。与图 tt 中的态（图3）相比，主要差异源于 Z 极点共振以及质量效应 $\beta_t<1$。

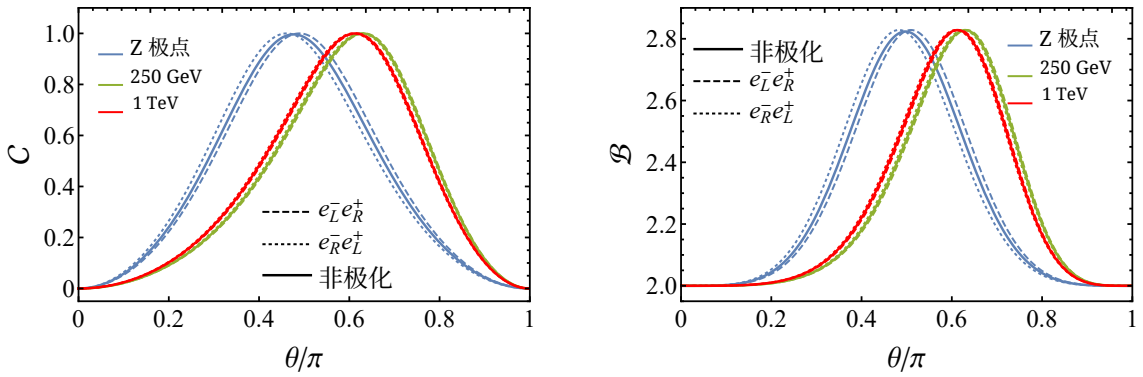


图 15. 三种代表性能量下，m_Z（蓝色）、250 GeV（绿色）和 1 TeV（红色）时，$\mu^+\mu^-$ 态的并发度 $\mathcal{C}$（左）和贝尔非定域性 $\mathcal{B}$（右）随散射角 θ 的变化。实线、虚线和点线分别表示非极化、完全极化的 $e_L^- e_R^+$ 和 $e_R^- e_L^+$ 配置。

2. $\mu^+\mu^-$的并发度、贝尔非定域性和量子层析

我们评估 $\mathcal{C}$ 并计算贝尔非定域性 $\mathcal{B}$ 对于 $\mu^+\mu^-$ 系统在三种代表性能量下的表现：希格斯 Z 共振峰（$\sqrt{s} = m_Z = 91.2$ GeV）、希格斯工厂的能量（250 GeV）以及更高能量前沿（1 TeV），如图15所示。对于完全极化碰撞，末态为纯态，并发度会在由耦合比 $f^{L}_{,\ A}{}^{R}/f^{L,\ V}{}^{R}$决定的特定散射角处达到 1。在 Z共振峰处，最大纠缠出现在对称点 $\theta \approx 0.5\pi$附近。相比之下，在远高于Z 共振峰的能量下，最优角移至 $\theta \approx 0.63\pi$。在 LR 和 RL极化配置之间切换虽会使这些峰值略有偏移，但分布的整体特征仍然相似。

为阐明运动学依赖性，我们给出了 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 在 θ–$\sqrt{s}$平面上的等高线，所对应的极化$^-$构型为 $e_L^- e_R^+ \to \mu^-\mu^+$，见图 16。其行为可分为三个不同的运动学区域：

- **低能区域** $\sqrt{s} \ll m_Z$**：** 该过程由量子电动力学 s-道光子交换主导。当 $f_A \sim s/m_Z^2$ 时，宇称近似守恒，因此分布关于 $\theta = \pi/2$ 对称，其中 $\mu^-\mu^+$ 态构成自旋三重态。

- Z**-极点区域** $\sqrt{s} \approx \bar{m}_Z$**：** 共振增强使 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{B}$达到最大值，从而使 $\mu^+\mu^-$ 系统在很大的角范围内接近贝尔态。

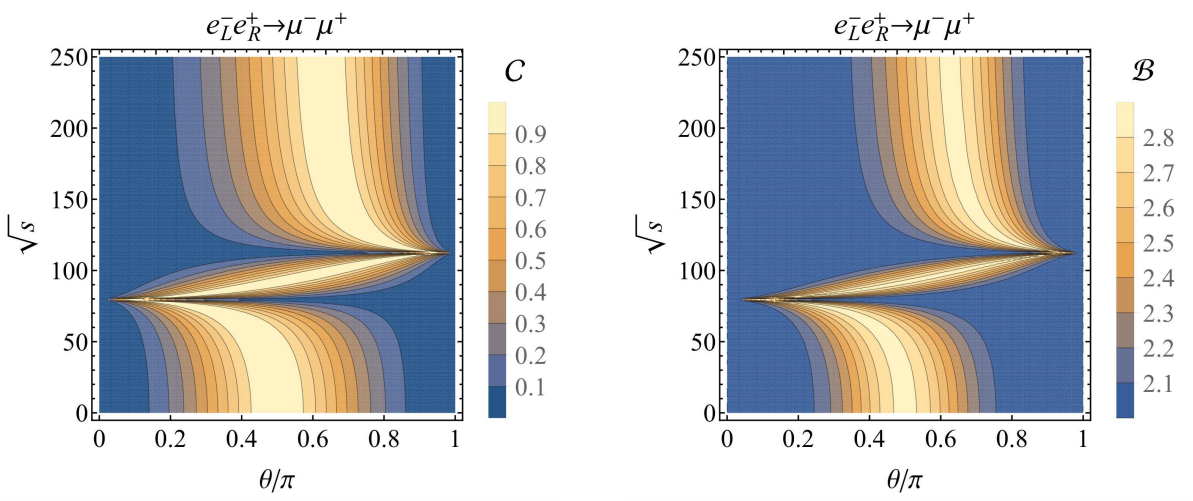


图16. 完全极化过程 $e_L^- e_R^+ \to \mu^- \mu^+$在 $\theta - \sqrt{s}$（吉电子伏特）平面内的并发度（左）与贝尔非定域性（右）等高线图。

- **高能区** $\sqrt{s} \gg m_Z$**：** 量子电动力学与电弱振幅之间的干涉变得显著。系统趋近于一种稳定的渐近构型，此时量子关联对能量变化不那么敏感。然而，增强的宇称破坏效应使最大纠缠角 θ_{Max} 向后向区域偏移（$\cos\theta < 0$）。

从量子层析的角度来看， $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{B}$ 依赖于自旋关联矩阵 C_{ij}。图17展示了束流极化对法诺系数C_{ij} 与 $B_k^{\pm}$ 的影响，其作为散射角 θ 在 Z 极点及250 GeV处的函数。一个显著特征是，尽管极化矢量$B_k^{\pm}$ 会随LR/RL 束流组态而变号或消失，自旋关联矩阵 C_{ij} 却保持极为稳定。一个类似特征曾见于 tt 情形，见图6。此外，矢量流与轴矢量流之比满足近似对称性$\left|f_A^L/f_V^L\right| \simeq \left|f_A^R/f_V^R\right|$。这一机制确保由 C_{ij}支配的纠缠结构在很大程度上独立于初始束流极化，从而使 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{B}$ 对极化不敏感。

在无质量 $\mu^+\mu^-$ 系统中，运动学约束要求 $C_{kk} = 1$ 和$B_{r,\ n}^{\pm} = 0$。其余非平凡动力学由 C_{rr}， C_{nn} （$= -C_{rr}$）以及 $B_k^{\pm}$ 描述。由于 C_{ij}分量对束流极化基本不敏感，我们仅展示非极化情形下 C_{rr} 的等高线，见图18（左图）。相比之下，纵向极化矢量 $B_k^{\pm}$ 对束流极化非常敏感。 LR 和 RL 配置

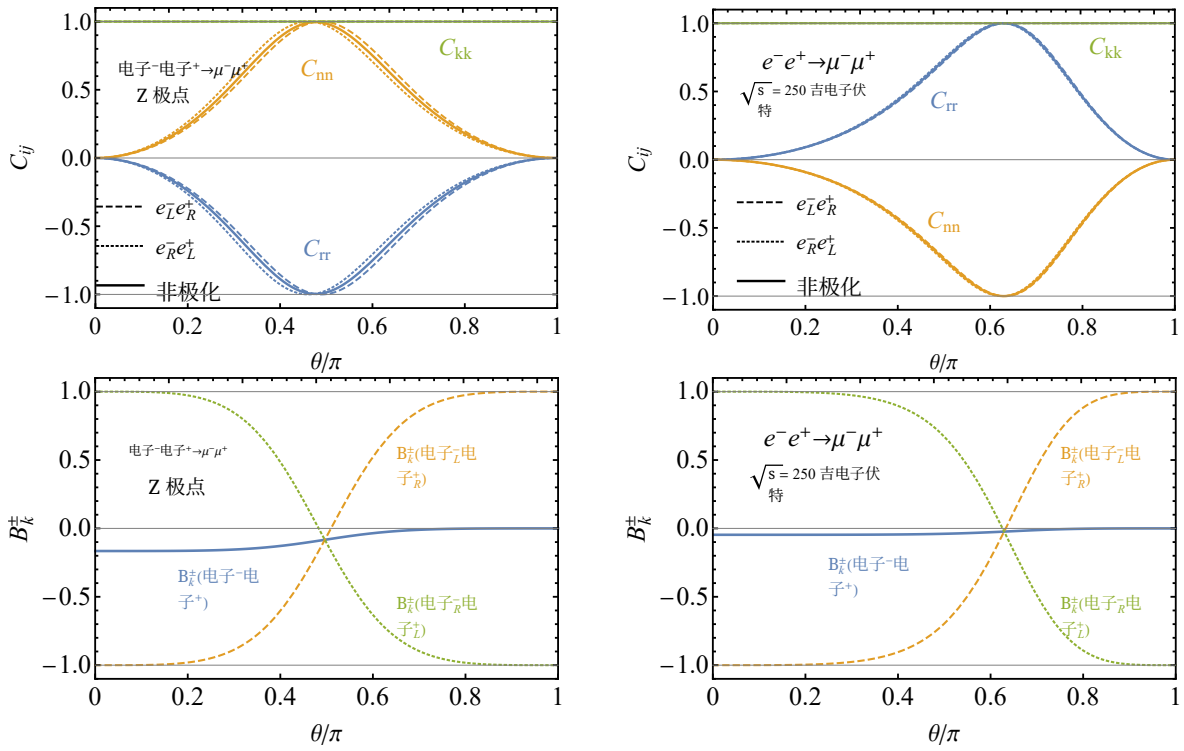


图 17. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 在$\sqrt{s} = m_Z$ （左）和 250 GeV（右）时的 Fano 系数 $C_{ij}^{\mp}$ （顶部）和 $B_k^{\pm}$ （底部）。在 C_{ij} 面板中，蓝色、绿色和黄色线分别对应 C_{nn}、 C_{kk} 和 C_{rr}。在所有面板中，实线、虚线和点线分别表示非极化、 LR-和RL-极化配置。

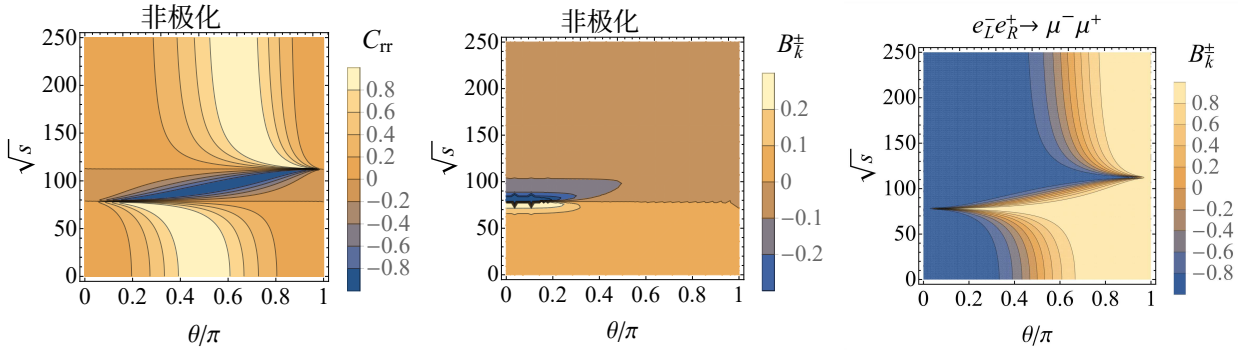


图 18. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 在 $\theta - \sqrt{s}$ 平面中的 Fano 系数等高线图。各面板分别显示非极化 C_{rr} （左）和 $B_k^{\pm}$ （中），以及 LR-极化 $B_k^{\pm}$ （右）。

产生的分布在定性上相似，但符号相反。因此，我们分别在图$B_k^{\pm}$ 18 的中图和右图展示非极化情形和 LR 情形下的18等高线。

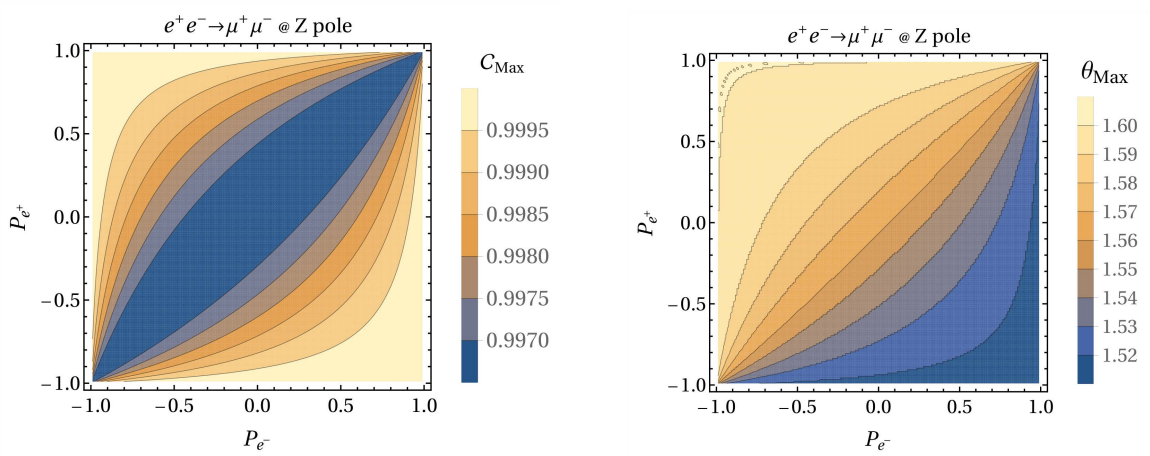


图 19. 在 e^- 和 e^+ 束流的极化范围内，计算得到的 $\mu^+\mu^-$ 系统在 Z 极点处的最大并发度 $\mathcal{C}_{\rm Max}$（左）及其对应的 $\theta_{\rm Max}$（右）的等高线图。

具体而言，在相空间中满足 $f_A/f_V = \pm 1$ 的点上，自旋构型变为可分离态（纯粹的 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 或 $|\downarrow\downarrow\rangle$），这意味着 $\mathcal{C} = 0$，且贝尔变量$\mathcal{B} = 2$达到饱和的最小值。相反，在中间区域，态趋近于叠加态（$|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle$）$/\sqrt{2}$，此时会出现最大纠缠。

并发度的最大值 $\mathcal{C}_{\rm Max}$ 对于 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 在 Z 极点处，在（P_{e^-}，P_{e^+}）极化平面内的分布，以及对应的最优角 $\theta_{\rm Max}$，详见图19。在 Z 极点之外的能量下，最大并发度值的分布总体上仍与图19相同，不过 $\theta_{\rm Max}$ 会略有偏移。贝尔非定域性也表现出类似的行为 $\mathcal{B}$。

3. $\mu^+\mu^-$ 的第二稳定器 *Rényi* 熵

遵循 $t\bar{t}$的示例，我们考察 $\mu^+\mu^-$ 量子态的“非稳定子性”，即通过计算第二稳定子Rényi熵或魔性（$\mathcal{M}_2$）。非极化以及 LR、 RL 完全极化 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程在 Z 极点与 $\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特下的魔性结果如图20所示。 $\mu^+\mu^-$ 系统的魔性等高线图如图21所示。我们仅展示 LR 极化，因为 RL情形呈现出定性相似的分布。这些图样类似于纠缠或贝尔非定域性的图样，不同之处在于最大纠缠区域对应于魔性消失的稳定子态。在 $\mu^+\mu^-$ 过程中，系统在前向/后向

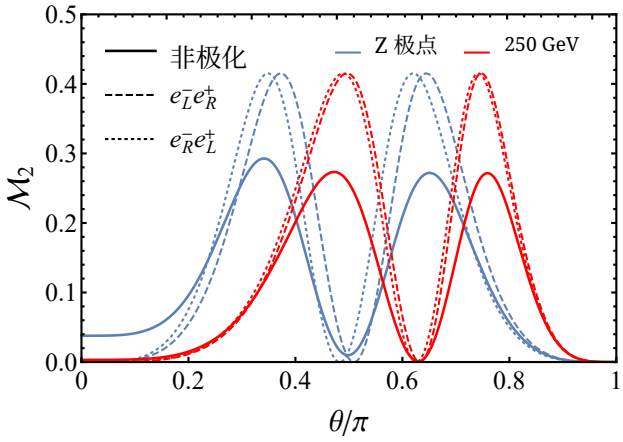


图 20. 对于 $\mu^+\mu^-$ 系统， $\mathcal{M}_2$ 稳定子 Rényi 熵随散射角 θ 的变化；能量分别为 $\sqrt{s} = m_Z$ （蓝色）和 250 GeV（红色），束流极化配置为非极化（实线）、 LR （虚线）和 RL （点线）。

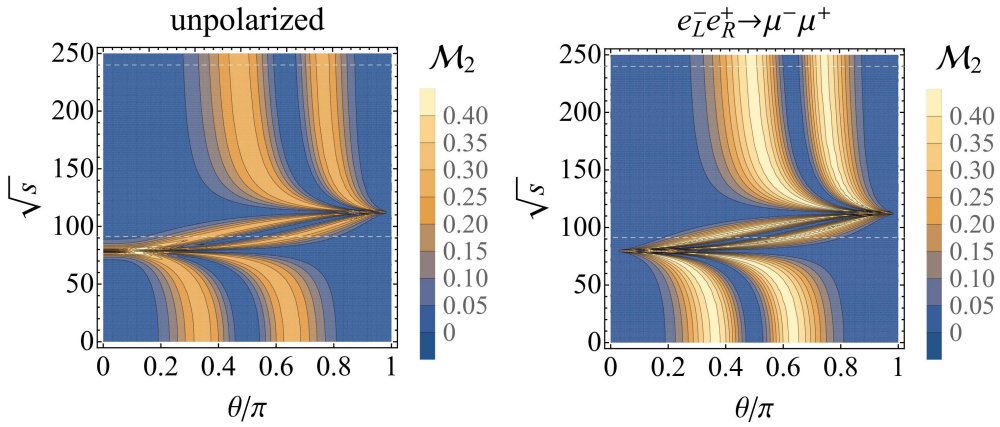


图 21. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 极化过程的 $\mathcal{M}_2$ 稳定子 Rényi 熵在 $\theta - \sqrt{s}$ （GeV）平面上的等高线图：非极化（左）和 LR （右）。

极限（$\theta \to 0,\ \pi$），以及 $f_V \approx \pm f_A$附近的点。与此同时，系统在最大纠缠散射角 θ_{Max} 处趋于贝尔态。我们发现$\mathcal{M}_2 \to 0$ 在零纠缠区域和最大纠缠区域中均出现。非零魔性出现在这两个区域之间的跃迁区域，从而自然形成图20 和图21中观察到的“双峰”结构。我们表明，魔性的“谷”与 $\theta - \sqrt{s}$ 平面上最大纠缠和贝尔非定域性的“脊”精确重合。我们在第IIID节重申上述结果。

–

我们分析了生成魔性资源的最优条件。图 22 展示了

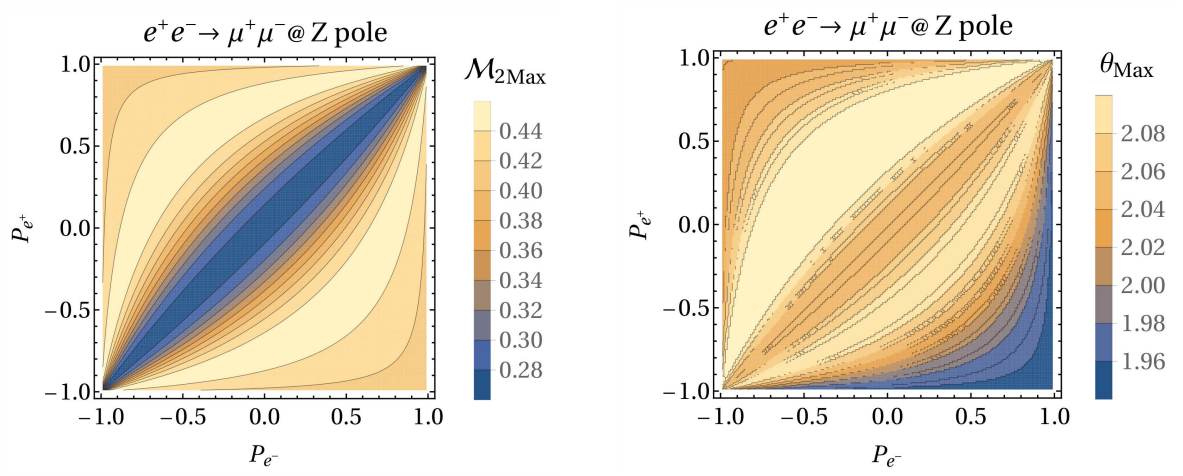


图 22. 最大值的等高线图 $\mathcal{M}_2$ （左）及相应的 θ_{Max} （右），针对 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 在 Z 极点处的极化空间上计算得出。图中对应于图20和21中双峰之一（角度较大者）。

在 $\mathcal{M}_{2\mathrm{Max}}$ 极点处，束流极化平面（P_{e^-}， P_{e^+}）上的最大值。鉴于图 21和 22 中的双峰在最大值 $\mathcal{M}_{2\mathrm{Max}}$的分布上相似，我们在图 22 中仅展示右侧峰值。其他能量下没有显著差异。值得注意的是，魔性的全局最大值（$\mathcal{M}_{2\mathrm{Max}} \simeq 0.43$）并非出现在完全极化的极限（$P = \pm 1$）。相反，最优工作点位于部分极化区域内，范围大致延伸至（0.4， -0.5）和（-0.5， 0.4）。这表明，对于需要魔性的量子信息任务而言，中等程度的束流极化可能优于完全极化。这一发现强调，魔性与纠缠是彼此不同的资源。纠缠在纯度和完全极化时达到最大，而魔性则依赖于有别于直积态和贝尔态的复杂叠加结构。

C. 巴巴散射

$e^+e^- \to e^+e^-$ 的巴巴散射具有独特的量子结构，这与 $\mu^+\mu^-$和 $\tau^+\tau^-$产生的情况不同，原因在于额外的 t道交换贡献。与 $\mu^+\mu^-$和 $\tau^+\tau^-$产生过程中的情况相同， s道交换能够产生量子纠缠；而 t道贡献则倾向于抑制纠缠，因为它在前向区域占主导地位，并稀释自旋关联。因此，纠缠

结构在巴巴散射中源于 s道与 t道振幅的相互作用，其复杂程度远高于纯粹的 s道过程。束流极化提供了一种可通过实验控制的手段，用于改变两个道的相对权重，从而有针对性地增强 e^+e^- 末态中的纠缠。接下来，我们将详细分析纠缠如何在 s道和 t道动力学的共同作用下产生并演化。

1. e^+e^-的 *Quantum* 量子态

在无质量极限下，过程 $e^+e^- \to e^+e^-$ 包含六种非零螺旋度配置。其振幅自然分为三类：纯 s道贡献、纯 t道贡献，以及同时包含 s道和 t道振幅的配置。自旋螺旋度因子（$1 \pm \cos\theta$）$/2$ 源于角动量守恒，而 $1/t$ 行为则源于众所周知的 t道光子传播子的共线增强。将 $\mathcal{M}$（$e^-e^+ \to e^-e^+$）的螺旋度振幅表示为曼德尔斯塔姆变量 s、 t和 u的函数很有用，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(RL,\uparrow\uparrow) = 2u\left[\frac{1+f_1(s)}{s} + \frac{1+f_1(t)}{t}\right],\ \mathcal{M}(LR,\downarrow\downarrow) = 2u\left[\frac{1+f_2(s)}{s} + \frac{1+f_2(t)}{t}\right],\\
&\mathcal{M}(RL,\downarrow\downarrow) = \mathcal{M}(LR,\uparrow\uparrow) = -\frac{2t}{s}[1+f_3(s)]\,, \qquad (43a)\\
&\mathcal{M}(LL,\downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(RR,\uparrow\downarrow) = -\frac{2s}{t}[1+f_3(t)]\,,
\end{aligned}$$

其中电弱形状因子为

$$f_1(x) = \frac{x}{x - m_Z^2 + is\Gamma_Z/m_Z}\,\frac{g_R^e g_R^e}{\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W}, \qquad (44a)$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x - m_Z^2 + is\Gamma_Z/m_Z}\,\frac{g_L^e g_L^e}{\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W}, \qquad (44b)$$

$$f_3(x) = \frac{x}{x - m_Z^2 + is\Gamma_Z/m_Z}\,\frac{g_L^e g_R^e}{\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W}. \qquad (44c)$$

其中 $g_L^e = I_e^3 - Q_e s_W^2 = -1/2 + s_W^2$和 $g_R^e = -Q_e s_W^2 = s_W^2$。

F从这些振幅中可以立即辨认出道结构：

- $\mathcal{M}(LR,\ \uparrow\uparrow)$ 和 $\mathcal{M}(RL,\ \downarrow\downarrow)$ 的贡献完全来自 s-道，与 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$（第 III B节）中的相同。

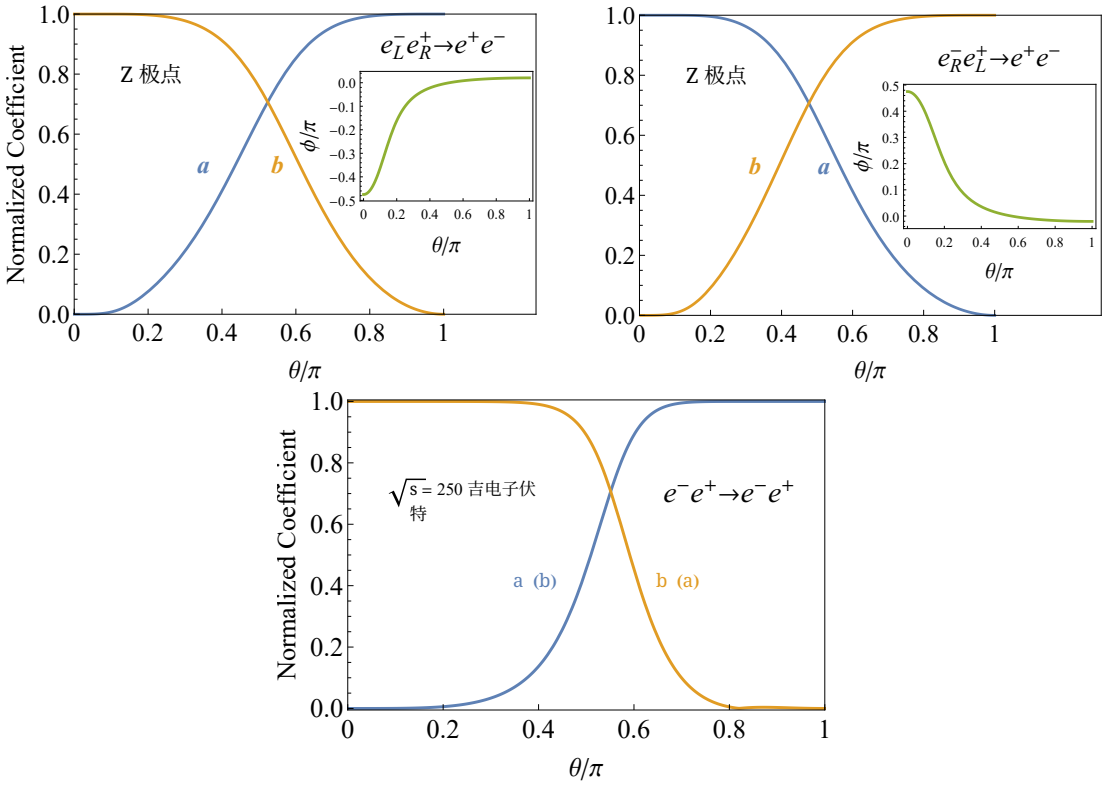


图 23. 系数 a 和 b 在方程 (25) 中随散射角变化的巴巴散射结果θ。上图：在 Z 极点处，分别对应 LR （左）和 RL（右）极化。插图展示了由 Z 玻色子传播子的虚部引起的相位差。下图：在 $\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特下，对应于 LR (RL) 配置的系数。

–

- $\mathcal{M}(LL,\ \downarrow\uparrow)$ 和 $\mathcal{M}(RR,\ \uparrow\downarrow)$ 纯粹源自 t-道；它们只产生单一的螺旋度构型，从而形成可分离态，因此无法产生纠缠。

- $\mathcal{M}(LR,\ \downarrow\downarrow)$ 和 $\mathcal{M}(RL,\ \uparrow\uparrow)$ 同时包含来自 s 通道和 t 通道的贡献，并体现了两者之间的干涉。

这种仅由 t 通道产生的结构以及 s–t 干涉模式，在 $\mu^-\mu^+$ 或 $t\bar{t}$ 产生过程中并不存在，因此在轻子对产生的纠缠研究中，巴巴散射是一个性质截然不同的情况。

基于一般双量子比特态，见式（25），螺旋度基下的最终纯态

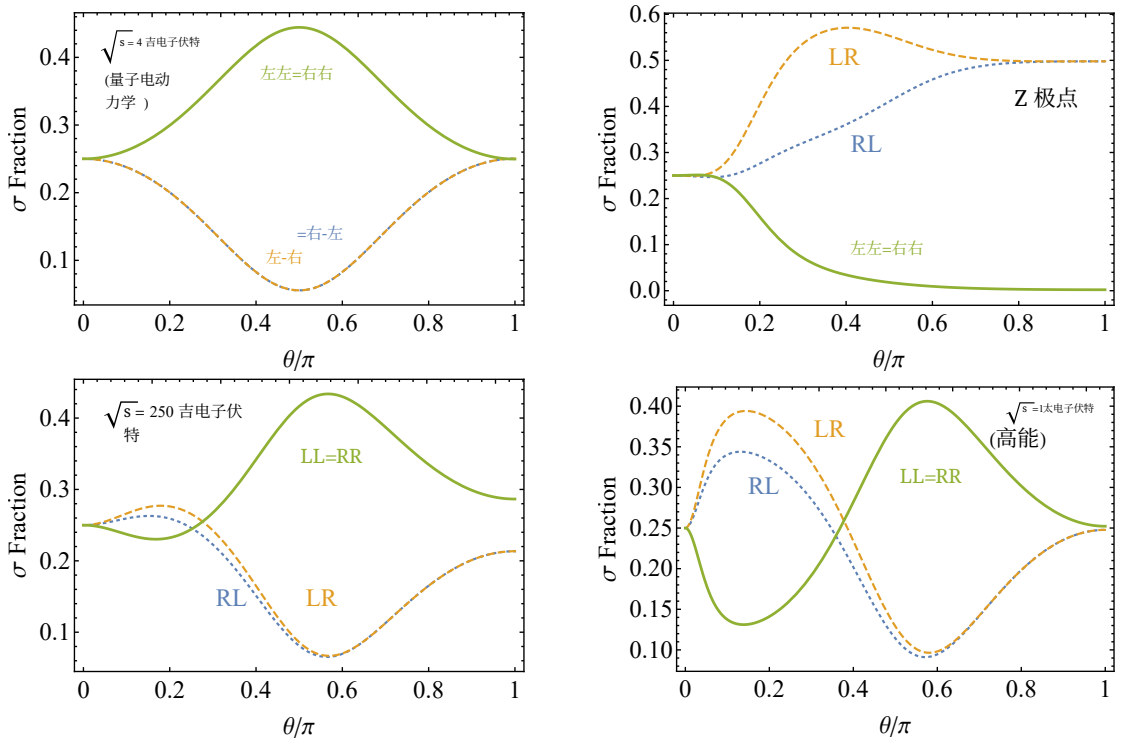


图 24. 非极化 $e^-e^+ \to e^-e^+$ 过程的螺旋度分量占比随散射角 θ 的变化，展示了四种具有代表性的能量：低能量子电动力学区域（$\sqrt{s} = 4$ 吉电子伏特）、 Z 极点、 $\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特和 1 TeV。

对于 $e^-e^+ \to e^-e^+$ 可以写为

$$|\psi_{RL}\rangle = a_{RL}\,|\uparrow\uparrow\rangle + b_{RL}\,|\downarrow\downarrow\rangle\,, \tag{45a}$$

$$|\psi_{LR}\rangle = a_{LR}\,|\uparrow\uparrow\rangle + b_{LR}\,|\downarrow\downarrow\rangle\,, \tag{45b}$$

$$|\psi_{RR}\rangle = c_{RR}\,|\uparrow\downarrow\rangle\,, \quad |\psi_{LL}\rangle = d_{LL}\,|\downarrow\uparrow\rangle\,, \tag{45c}$$

with

$$a_{RL} = \mathcal{M}(RL,\uparrow\uparrow), \qquad b_{RL} = \mathcal{M}(RL,\downarrow\downarrow), \tag{46a}$$

$$a_{LR} = \mathcal{M}(LR,\uparrow\uparrow), \qquad b_{LR} = \mathcal{M}(LR,\downarrow\downarrow), \tag{46b}$$

$$c_{RR} = \mathcal{M}(RR,\uparrow\downarrow), \qquad d_{LL} = \mathcal{M}(LL,\downarrow\uparrow). \tag{46c}$$

只有束流极化构型 LR 和 RL 包含末态 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$的相干叠加，因此能够产生纠缠。 LL 和RR 振幅仅生成可分离态。纠缠态的系数 a 和 b

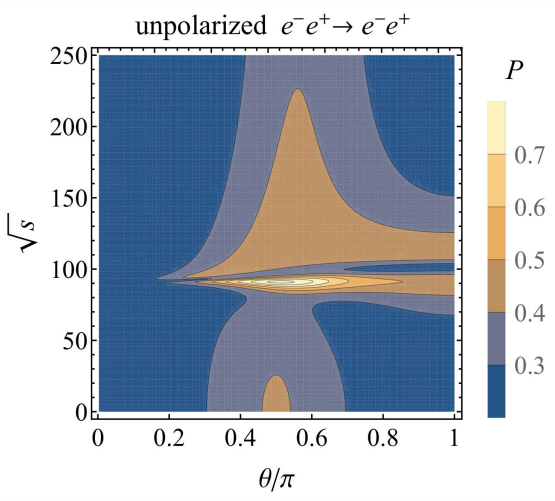


图 25. 过程 $e^-e^+ \to e^-e^+$ 的纯度 P 等高线图，展示于散射角 θ 和以吉电子伏特为单位的$\sqrt{s}$构成的运动学平面中。

分量如图 23 所示，适用于 $\sqrt{s} = m_Z$ 和 250 GeV。和 b均非零时对应的角度范围在 Z 极点处显著更宽，使得该区域中的纠缠更易于通过实验探测。在 Z 极点附近，传播子的虚部在两个螺旋度分量之间引入相位差，从而得到如下态

$$|\psi\rangle = a\,|\uparrow\uparrow\rangle + b\,e^{i\Delta\phi}\,|\downarrow\downarrow\rangle\,.$$

这种效应在 $\mu^+\mu^-$ 产生中不存在，它由虚s道与实 t道振幅之间的干涉驱动，使 $\Delta\phi$能够达到高达 $\pi/2$的数值。[2] 在更高能量下，传播子变为实数，相位差迅速消失。值得注意的是，根据方程（43）和（44），系数满足以下关系$a_{LR} = b_{RL}$ 和 $b_{LR} \approx a_{RL}$。

非极化过程对应于式（19）中给出的四个初始螺旋度扇区的非相干混合态。在无质量极限下，非极化过程的一般密度矩阵

[2] Fano 系数 C_{12} 将由 $\Delta\phi$诱导，但只有在 $a \approx b$ 和 $\Delta\phi \approx \pi/2$时才会显著。图23 表明，该效应在e^+e^- 系统中可以忽略不计。

化的 e^+e^- 系统是

$$\rho_{\text{mixed}} = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow} & 0 & 0 & \rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \\ 0 & \rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow} & 0 \\ \rho_{\downarrow\downarrow,\uparrow\uparrow} & 0 & 0 & \rho_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

其中，符号 $\rho_{\uparrow\uparrow,\ \uparrow\uparrow}$, $\rho_{\uparrow\uparrow,\ \downarrow\downarrow}$, $\rho_{\uparrow\downarrow,\ \uparrow\downarrow}$, $\rho_{\downarrow\uparrow,\ \downarrow\uparrow}$, $\rho_{\downarrow\downarrow,\ \uparrow\uparrow}$ 和 $\rho_{\downarrow\downarrow,\ \downarrow\downarrow}$ 表示密度矩阵中的非零元素。

图 24 展示了不同初始极化状态下各项贡献的角依赖。曲线显示了纠缠产生通道 ρ_{LR} 和 ρ_{RL}的贡献，以及由可分离的 t通道主导的分量 $\rho_{LL} = \rho_{RR}$。在低能量下，t通道的光子交换几乎在整个角范围内占主导。在$\theta = \pi/2$处，我们发现 $\sigma_{LL} \simeq \sigma_{RR} \simeq 8\,\sigma_{LR} \simeq 8\,\sigma_{RL}$，这表明非极化系综由可分离的 t通道分量主导。在 Z 极点附近，s通道的贡献增强了中间角度区域内的 ρ_{LR} 和 ρ_{RL} 比例；在该区域，t通道的前向增强不存在，且干涉导致的后向抑制减弱。$\rho_{RL/LR}$ 内 s通道贡献的比例在 $\cos\theta = \pm f_A/f_V$处达到最大，这与观测到的 $\mu^+\mu^-$ 产生模式一致。在更高能量下，对于 $\theta \to \pi$，t通道再次占主导，而纠缠态 LR/RL 贡献在前向区域（$\theta \lesssim \pi/3$）变得越来越重要。

最后，图 25所示的非极化态纯度，反映了纠缠态 LR/RL 分量与可分离 LL/RR 分量在 $\theta - \sqrt{s}$平面上的相对强度。在 Z 极点附近观察到的高纯度至关重要。该区域对应于通过 s-道贡献占主导 Z/γ 的交换，这增强了纠缠态 LR/RL道，同时抑制了可分离 t-道分量。该区域的纯度趋近于 1（$P \to 1$），证实该态在局域上等价于一个近乎纯的贝尔态。这确定了产生最大纠缠的最佳区域。

2. e^+e^-的并发度、贝尔非定域性与量子层析

对于巴巴散射 $e^-e^+ \to e^-e^+$，Fano 系数呈现出简单的结构，遵循方程（36）和（37）

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{kk} \end{pmatrix}, \qquad B_i^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_k \end{pmatrix}, \tag{48}$$

其中 $C_{nn} = -C_{rr}$。非零的 Fano 系数 C_{rr}， C_{kk}和 B_k 由式（46）中量子比特态的系数定义

$$C_{rr} = \frac{2|a_{LR}b_{LR}^* + a_{RL}b_{RL}^*|}{\tilde{A}}, \tag{49a}$$

$$C_{kk} = \frac{a_{LR}^2 + b_{LR}^2 + a_{RL}^2 + b_{RL}^2 - (c_{LL}^2 + d_{RR}^2)}{\tilde{A}}, \tag{49b}$$

$$B_k = \frac{(a_{RL}^2 - b_{RL}^2) + (a_{LR}^2 - b_{LR}^2)}{\tilde{A}}, \tag{49c}$$

其中 $\tilde{A} = a_{LR}^2 + b_{LR}^2 + a_{RL}^2 + b_{RL}^2 + c_{LL}^2 + d_{RR}^2$ 是归一化因子。

已知自旋关联矩阵 C_{ij} 的对角形式及极化矢量，末态的并发度 $\mathcal{C}$ 可简化为：

$$\mathcal{C} = \max\left\{0, C_{rr} + \frac{1}{2}C_{kk} - \frac{1}{2}\right\} \tag{50}$$

贝尔非定域性为

$$\mathcal{B} = \begin{cases} 2\sqrt{C_{rr}^2 + C_{kk}^2}, & \text{if } |C_{kk}| > |C_{rr}|, \\ 2\sqrt{2}|C_{rr}|, & \text{if } |C_{kk}| < |C_{rr}|. \end{cases} \tag{51}$$

我们计算了并发度 $\mathcal{C}$ 和贝尔非定域性 $\mathcal{B}$，针对 e^+e^- 系统在 Z极点处以及$\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特下的情况，并纳入束流极化的影响，如图26所示。为展示能量依赖性，我们在图$\theta - \sqrt{s}$ 平面中给出了非极化 e^+e^- 的分布，如图27所示。非极化过程在 Z极点处的纠缠性质与高能下的情况明显不同。可以看到，在非极化情形下，系统仅在 Z 共振附近处于纠缠态；而在高能下，整个角范围内均不存在纠缠态，如图27上面板所示。然而，对于完全极化构型（LR 或 RL），并发度和贝尔非定域性均恢复了丰富的物理图样，如图27下面板所示。总体特征

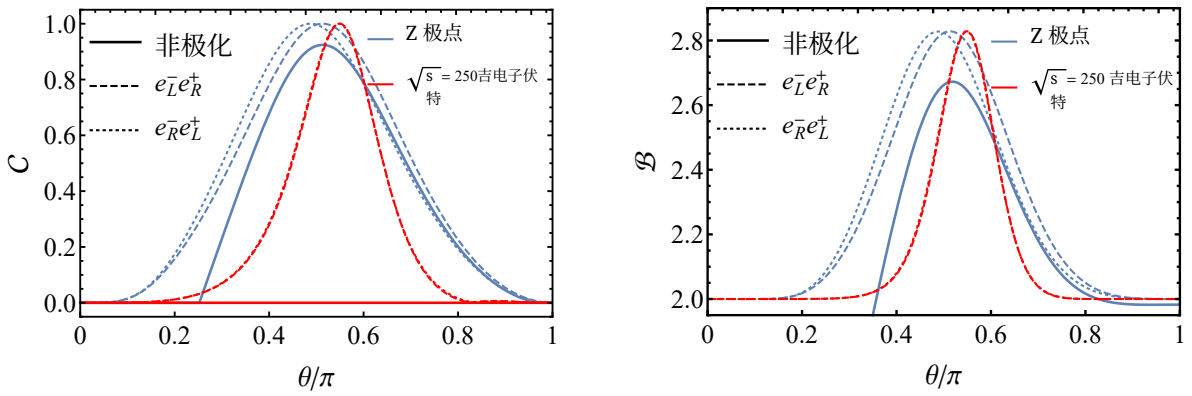


图 26。未来对撞机在两个运行点下 $e^-e^+ \to e^-e^+$ 态的并发度 $\mathcal{C}$ （左）和贝尔非定域性 $\mathcal{B}$ （右）： Z 极点（蓝色）和 250 GeV（红色），以及三种束流极化构型：非极化（实线）、完全极化 $e_L^- e_R^+$ （虚线）和 $e_R^- e_L^+$ （点线）。

在 LR 和 RL 极化下的分布仍然相似。因此，我们将展示一种极化$e_L^- e_R^+$ 作为示例。理论最大值出现在满足条件 $|a| = |b|$时。具体而言，在$\sqrt{s} = m_Z$ 的 Z 极点处（$\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特），对于 LR，最大值出现在角度 $\theta_{\text{Max}} \approx 0.513\pi$ （0.549π）；对于 RL，最大值出现在角度 0.487π （0.548π）。

图 28 比较了在 Z 极点（左图）和 $\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特（右图）处，非极化与完全极化（LR 和 RL）配置下的法诺系数 C_{ij} （上图）和 $B_k^{\pm}$ （下图）。如先前在 $e^{\pm}e^- \to t\bar{t}$ （图 6）和 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$（图 17）中所见，束流极化对末态极化参数 $B_k^{\pm}$ 有显著影响，但对 C_{ij} 影响不大。然而，与那些纯粹由 s 道主导的过程不同，巴巴散射在自旋关联矩阵 C_{ij} 中表现出显著的极化依赖性。这是因为束流极化改变了 LR/RL 中 s/t 道干涉的相对权重，以及由 LL/RR 求和得到的密度矩阵。至关重要的是，纵向极化重新加权了 s 道与 t 道振幅的相对重要性，并能在 $e_L^- e_L^+$ 和 $e_R^- e_R^+$ 极化中选择性地抑制由 t 道主导的过程。由于这些分量主要贡献可分离自旋态，对其抑制会降低系综中的非相干可分离背景，并增强可观测的纠缠。这一机制在系数 C_{kk} 中得到明确体现。可分离的 t 道贡献对 C_{kk} 给出负贡献。因此，根据图 24 所示螺旋度分量的比例，可以理解图 28 中的对比：

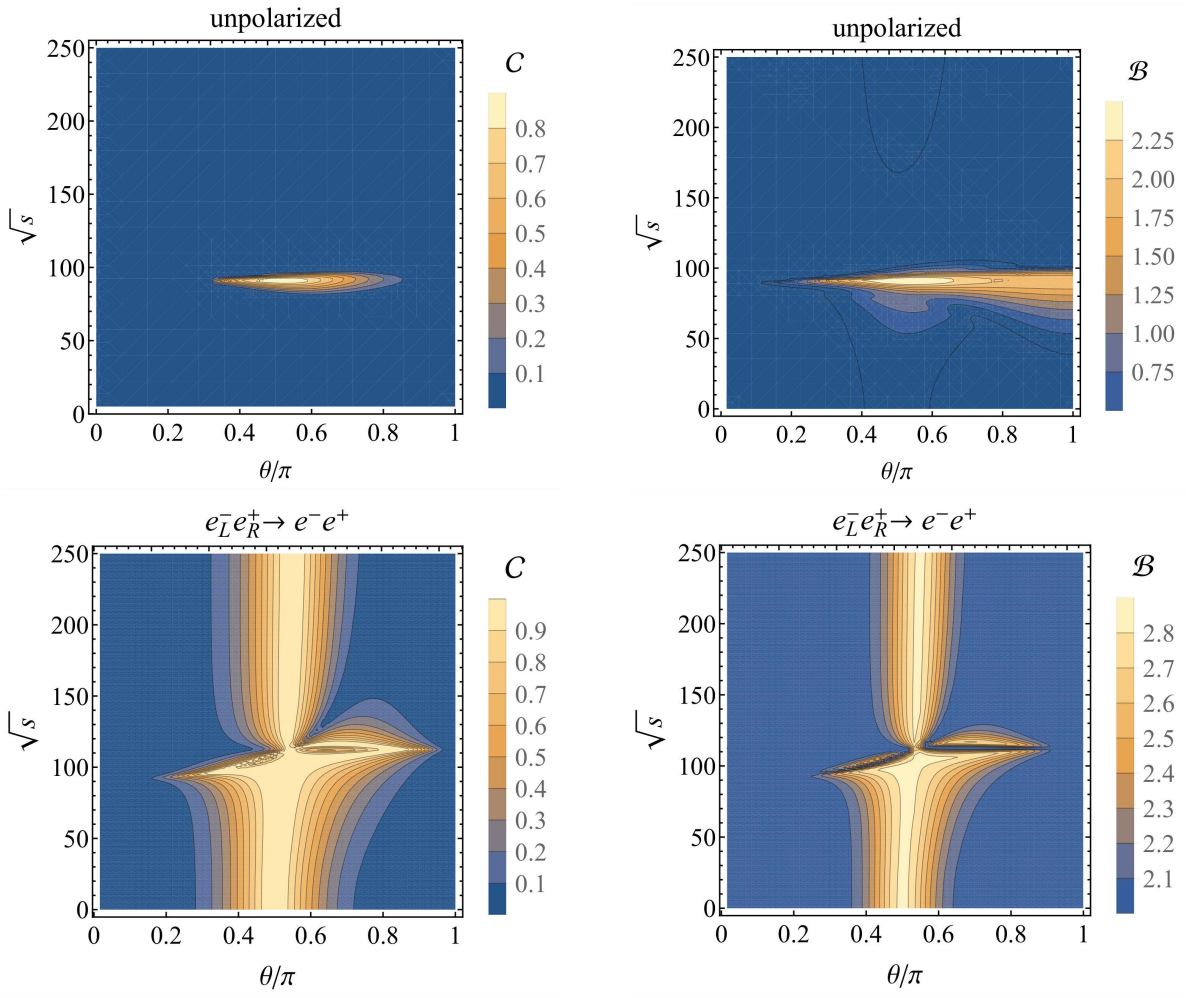


图27. 非极化过程 $e^-e^+ \to e^-e^+$（上方面板）和完全极化过程$e_L^- e_R^+ \to e^-e^+$（下方面板）在 $\theta - \sqrt{s}$（吉电子伏特）平面上的并发度 $\mathcal{C}$（左）与贝尔变量 $\mathcal{B}$（右）的等高线图。

在 Z 极点处， s 道在整个角分布中占主导，从而维持较高的关联；在更高能量下，非极化态被 t 道贡献所淹没（导致 C_{kk} 偏低或为负），而极化态 LR 和 RL 则成功抑制了这种经典噪声，使 $C_{kk} \approx 1$ 在所有角度上得以维持。

在无质量极限下，运动学约束迫使横向极化为零$B_{r,\ n}^{\pm} = 0$。对于完全极化过程（$e_R^- e_L^+$， $e_L^- e_R^+$），$C_{kk} = 1$。因此，非平凡动力学由 C_{rr}（其中 $C_{nn} = -C_{rr}$）和$B_k^{\pm}$ 描述；在非极化情形下，还包括 C_{kk}。图29 展示了非极化巴巴散射（上图）中 C_{rr}、C_{kk} 和 $B_k^{\pm}$ 的等高线。对于极化散射， C_{rr} 配置下 LR 和 RL 配置的分布

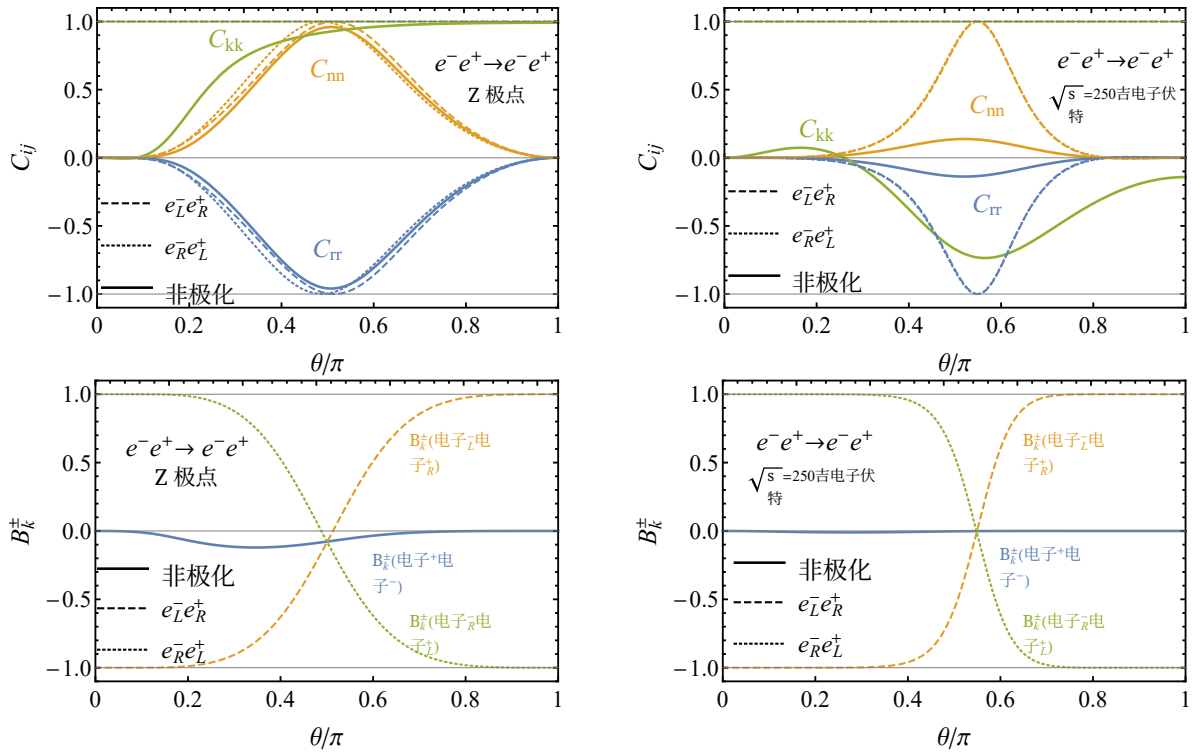


图 28. 在 Z 极点（左）和$\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特（右）处， $e^-e^+ \to e^-e^+$ 的 Fano 系数 C_{ij}（上）和 $B_k^\pm$ （下）。在 C_{ij} 面板中，蓝色、黄色和绿色曲线分别对应 C_{rr}、 C_{nn}和C_{kk}。对于所有面板，实线、虚线和点线分别表示非极化、 LR和 RL极化配置。

几乎完全相同，而纵向极化矢量$B_k^\pm$ 在两者之间变号。因此，我们在图 C_{rr} 和$B_k^\pm$ 中展示代表性配置 LR 下的结果。图29（下图）。

在 Z 极点处与更高能量下的纠缠性质存在显著差异，这是由螺旋度道的相对权重决定的。在 Z 共振附近，纠缠产生通道（$e_L^- e_R^+ \to e^-e^+$ 和 $e_R^- e_L^+ \to e^-e^+$）显著增强，并主导截面，从而产生最大纠缠。相比之下，在量子电动力学主导的区域（低能区或远离峰值的高能区），可分离道（$e_L^- e_L^+$ 和 $e_R^- e_R^+$）通常主导总速率，这些通道完全源自 t道图的贡献。尽管在高能区的 LR/RL 中仍可实现纠缠，但可分离 LL/RR 道占据压倒性优势，使整体态高度混合，因此对于非极化束流而言变为可分离态。

继对完全极化和非极化巴巴散射进行分析后，我们现在

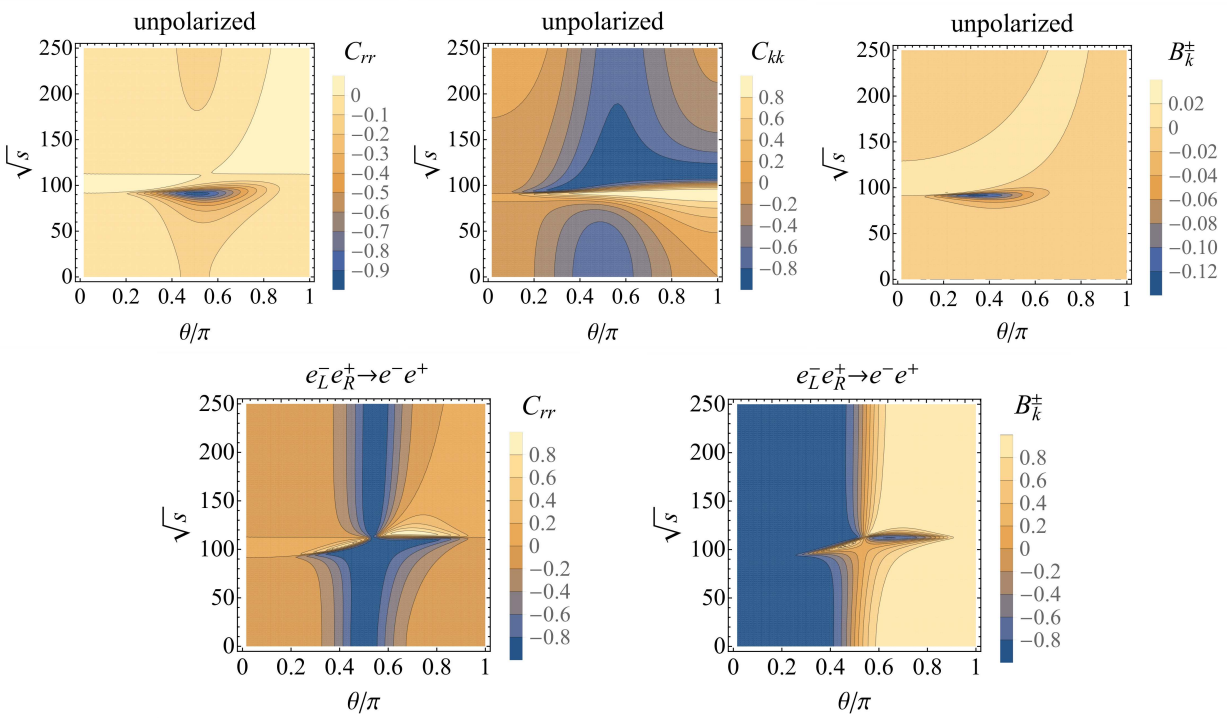


图 29. 非极化过程 $e^-e^+ \to e^-e^+$ （上图）中， C_{rr}、 C_{kk}和 $B_k^{\pm}$的 Fano 系数随 $\theta - \sqrt{s}$（吉电子伏特）变化的等高线图；以及 $e_L^- e_R^+ \to e^-e^+$ 的极化构型下， C_{rr} （左）和 $B_k^{\pm}$ （右）的等高线图（下图）。

讨论一个与实验相关的问题：如何在现实的束流极化条件下实现纠缠，并确定最优的极化配置。为此，我们考察最大并发度的分布 $\mathcal{C}_{\text{Max}}$ （对散射角 θ进行最大化），以及其对应的最优角 θ_{Max}在束流极化平面（P_{e^-}， P_{e^+}）上的分布，见图 30。最大贝尔参数$\mathcal{B}_{\text{Max}}$也呈现出类似的行为。

在 Z 共振极点处，我们发现很容易实现纠缠，几乎覆盖整个极化空间，包括非极化点（0，0），且大多数构型都能达到$\mathcal{C}_{\text{Max}} > 0$。相比之下，在高能区（例如，1 TeV），尽管完全极化构型（LR 或 RL）仍可达到最大纠缠，但（P_{e^-}， P_{e^+}）平面上的绝大多数区域都无法产生纠缠，因为 $\mathcal{C}_{\text{Max}}$ 和 $\mathcal{B}_{\text{Max}}$ 都低于各自的阈值（$\mathcal{C} = 0$）。图 $\mathcal{C} = 0$ 30 中以白色等高线标示的边界，清晰地划定了纠缠得以维持的狭窄区域。

高能区的巴巴散射纠缠只能在

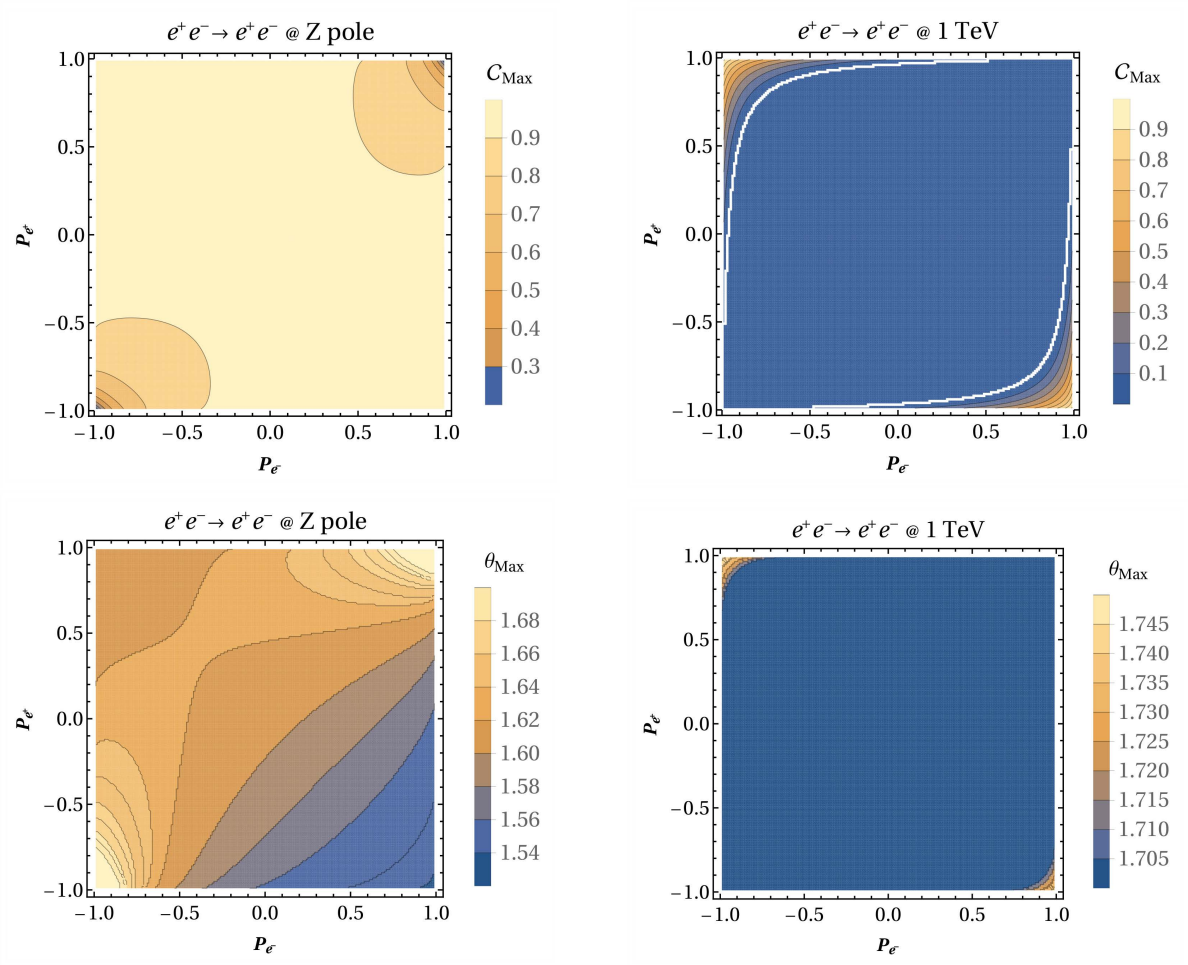


图30. 在初始束流极化参数 $(P_{e^-},\ P_{e^+})$ 范围内计算的 e^+e^- 系统的最大并发度 $\mathcal{C}_{\mathrm{Max}}$ （上图）及相应的最优散射角 θ_{Max} （下图）的等高线图。左侧（右侧）图展示了在 Z 极点（$\sqrt{s}=1$ 太电子伏特）处的结果，白色等高线明确标示了 $\mathcal{C}_{\mathrm{Max}}=0$ 边界。

–

极其狭窄的束流极化范围内产生。这一必要性促使我们严肃考虑，未来 e^+e^- 对撞机所能实现的极化配置是否足以测量高能区巴巴散射中的纠缠。根据拟议设施的技术设计报告，国际直线对撞机的基线设计提供 $P_{e^-}/P_{e^+}=80\%/30\%$ 的纵向电子/正电子极化，并可能进一步升级至 $80\%/60\%$ [77]。同样，紧凑型直线对撞机的基线加速器设计为电子束提供 80% 的纵向极化，但不提供正电子极化 [78]。因此，我们采用配置 $(P_{e^-},P_{e^+})=(\pm 0.8, \mp 0.6)$ 作为未来 e^+e^- 对撞机可实现的高度优化极化方案的代表性示例。如图所示

图30中，这个有代表性的点落在 $\mathcal{C}_{\mathrm{Max}} = 0$ 1 TeV 下的区域。这清楚地表明，要实现纠缠，需要较高的束流极化。

3. 电子与正电子的第二稳定子 *Rényi* 熵

我们通过研究巴巴散射中的 SSRE $\mathcal{M}_2$，完成对轻子扇区量子资源的分析。该过程具有一项独特特征，这是$t\bar{t}$和 $\mu^+\mu^-$ 产生中所没有的： s道与 t道之间存在显著干涉。这种干涉在塑造魔性分布方面起着关键作用，尤其是在纠缠受到抑制的区域。

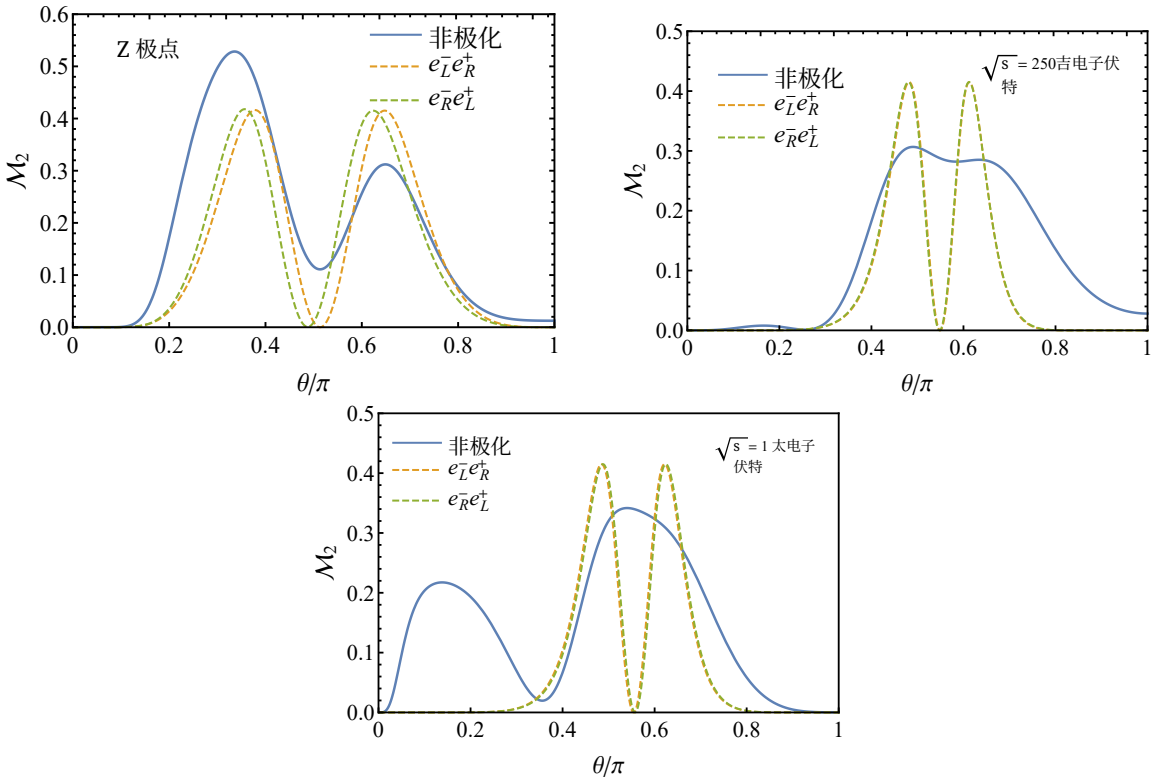


图31. 在 Z 玻色子 Z 极点（左图）、250 GeV（右图）和 1 TeV（下图）处，非极化（实线）、LR （虚线）和 RL （点线）束流极化构型下，巴巴散射的 SSRE $\mathcal{M}_2$ 随散射角 θ 的变化。

图 31 展示了以下条件下巴巴散射的稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$ ：束流能量为 $\sqrt{s} = m_Z$、250 GeV 和 1 TeV，并比较不同束流极化的影响；图32 则描绘了完整的角度和能量依赖性。与 $\mu^+\mu^-$ 和 $t\bar{t}$ 系统类似，极化的 e^+e^-

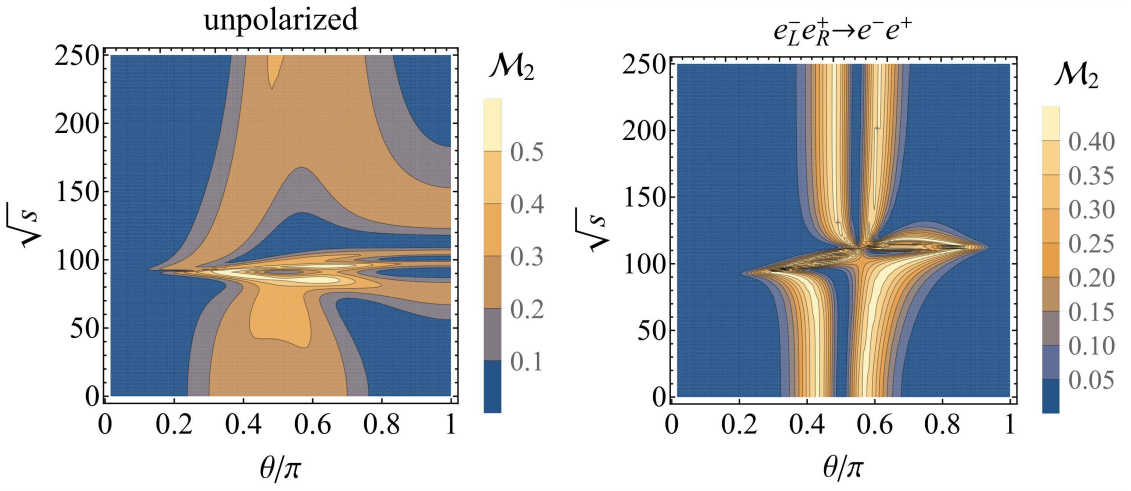


图32. 非极化（左）和LR （右）极化巴巴散射中， $\mathcal{M}_2$ 在 $\theta - \sqrt{s}$ （吉电子伏特）平面上的等高线图。

系统在 $\mathcal{M}_2$ 时呈现双峰结构，这与 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$的单峰行为形成对比。值得注意的是，在纠缠为零和最大纠缠的区域， $\mathcal{M}_2$ 都可能趋近于零。这是因为相应区域中的法诺参数趋近于稳定子极限，即 0 或 ± 1。

然而，巴巴散射对极化的响应使其独具特点。在$t\bar{t}$ 和 $\mu^+\mu^-$ 产生过程中，自旋关联矩阵 C_{ij} 对极化具有稳健性。相比之下，巴巴散射的 C_{ij} 本身具有很强的极化依赖性，因为束流配置会重新加权纠缠态 s-道和可分离 t-道的相对贡献。因此，图32 中观察到的变化由两个极化矢量 $B_k^{\pm}$ 以及关联矩阵 C_{ij}的共同变化所决定。

巴巴散射中的非极化情形独具特点。在 Z 极点处， s道占主导地位， $\mathcal{M}_2$ 达到最大值，并呈现出双峰之间的谷形，类似于 $\mu^+\mu^-$ 系统。这一极小值与最大纠缠区域重合，反映出该态接近稳定子贝尔态。高能区的行为与 $t\bar{t}$ 和 $\mu^+\mu^-$ 情形有根本区别。如图27所示，非极化的 e^+e^-系统仅在 Z 极点处呈现纠缠，而在高能区， $\mathcal{C}$ 在整个角范围内均趋于零。尽管完全不存在纠缠，图31 （下图）显示，1 TeV 时非极化情形仍具有显著的非零魔性分布，其峰值出现在 $\theta \approx 0.2\pi$ 和 0.6π附近。在这一能标下，单粒子极化矢量

$B_k^{\pm}$ 可以忽略。因此，这种“无纠缠的魔性”完全由自旋关联 C_{rr}、 C_{nn}和 C_{kk}驱动。与纯粹的 s道过程（其中 C_{ij} 值很简单）不同，巴巴散射中的 s/t道干涉使这些关联呈现非平凡的取值（不同于0或 ±1的稳定子极限），从而即使在可分离态中也会产生量子魔性。

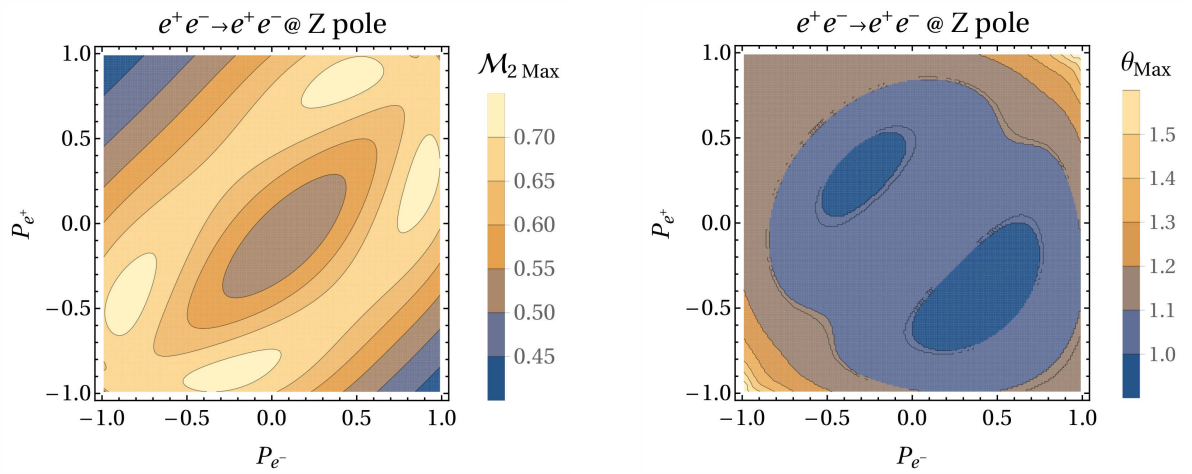


图 33. 在 Z 极点处，针对 e^+e^- 系统，在极化参数（P_{e^-}， P_{e^+}）范围内计算得到的最大稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_{2_{\mathrm{Max}}}$ （左）及其对应的最优散射角 θ_{Max} （右）的等高线图。

最后，我们讨论魔性资源的优化。图33 展示了在束流极化平面内， Z 极点处可达到的最大值 $\mathcal{M}_2$ 。 $\mathcal{M}_2$ 的最大值并不出现在完全极化的角点，而是在部分极化区域内达到全局最大值。这表明，对于依赖魔性的量子模拟任务，巴巴散射过程提供了稳健的资源，无需严格依赖技术要求很高、且为最大化纠缠所必需的完全极化束流。

D. ff 系统中的量子关联与魔性

根据由标准模型电弱规范相互作用支配的 tt 的 s 道有质量态、 $\mu^+\mu^-$ 的 s 道无质量态以及 e^+e^- 的 s/t 道无质量粒子产生的层析结果，我们现在重申纠缠和魔性这两种量子资源的若干关键特征，以及它们对束流极化和运动学的依赖。

1. 纠缠与魔性的行为

在这项工作中，我们确认了纠缠与¯魔性之间的非单调关系。正如图 10 和图 11 中 tt 的魔性双峰结构、图 20 和图 21 中 $\mu^+\mu^-$ 的双峰结构，以及图 31 和图 32 中 e^+e^- 的双峰结构所示，这两种量子资源并非简单相关。这种行为根植于稳定子形式。首先，稳定子态可由经典算法高效模拟，且魔性为零（$\mathcal{M}_2 = 0$）；其中有两类与对撞机物理相关的态：可分量子态（例如 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 或带有 $\mathcal{C} = 0$ 的 $|\downarrow\downarrow\rangle$ ），以及最大纠缠贝尔态（例如带有 $\mathcal{C} = 1$ 的 $(|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ ）。其次，必须注意极化系综与非极化系综之间的区别。完全极化束流在前向/后向极限下产生稳定子乘积态，而非极化束流则产生非相干混合态。如图 6 所示，平均极化参数 $B_k^{\pm}$ 取中间值（例如 $B_k^{\pm} \approx -0.3$）¯。这种经典混合使量子态偏离纯稳定子扇区。因此，根据纠缠与魔性的相互作用，对撞机过程的物理参数空间可分为四个不同区域：

- **可分性的稳定子极限 ($\mathcal{C} \to 0,\ \mathcal{M}_2 \to 0$)：**
  这一平凡情形对应于沿稳定子轴排列的量子态（例如，$|\uparrow\uparrow\rangle$），可通过经典方法高效模拟。在前向和后向散射极限（$\theta \to 0,\ \pi$）下，角动量守恒严格限定了螺旋度态的选择。对于完全极化束流，Fano 系数趋近于离散值（$B_k^{\pm} \to \pm 1,\ C_{kk} \to 1$，以及 $C_{nn,\ rr} \to 0$），从而使系统进入稳定子态。因此，纠缠和魔性均消失；例如，参见图4 (a) 和图10 (b)。

- **最大纠缠的稳定子极限（$\mathcal{C} \to 1,\ \mathcal{M}_2 \to 0$）：** 在散射振幅满足 $|a| \approx |b|$ 的角度区域中，通常接近 $\cos\theta \approx \pm f_A/f_V$ 的最大值时，系统趋近于贝尔态（$|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle$）$/\sqrt{2}$，或趋近于泡利算符的联合本征态。从层析重建的角度看，这对应于$C_{rr,\ kk} \to 1,\ -C_{nn} \to -1$，且局域极化为零 $B_k^{\pm} \to 0$。尽管纠缠达到最大值，该态却回归稳定子扇区，因而在峰值之间形成观测到的魔性为零的“谷”；参见例如图 17 和 20。请注意，只有无质量费米子才能达到这一极限情形 $\beta \to 1$。

- **魔性过渡区域（$0 < \mathcal{C} < 1,\ \mathcal{M}_2 > 0$）：**

  这是极化散射中普遍且常见的情形，系统同时表现出量子关联和非稳定子特征。魔性主要出现在乘积态极限与贝尔态极限之间的过渡区域。此时，Fano 系数取分数值（$0 < |C_{ij}|,\ |B_k| < 1$），这意味着存在具有非平凡相位差和权重的相干叠加态，且无法将其约化为稳定子结构。这解释了纠缠最大值两侧出现的魔性“双峰”模式，如图 10、20和31所示。

- **可分魔性区域（$\mathcal{C} = 0,\ \mathcal{M}_2 > 0$）：**

  ¯这一行为尤其出现在 tt 阈值区域以及非极化巴巴散射中；在这些情况下，重构得到的自旋态是可分离的，但并非稳定子态。这表明，可分性并不意味着接近稳定子集合。例如，在 $e^-e^+ \to t\bar{t}$ 阈值附近或前向／后向散射中，纠缠并不显著，但魔性仍非零，如图 10 和图 11 所示。这反映出，尽管该态是可分离的，却具有源于关联 $0 < |C_{ij}| < 1$ 以及极化$0 < |B_i^{\pm}| < 1$的非稳定子分量，图 7 和图 8 展示了这一点。这些非稳定子结构使魔性如式（12）所预测的那样显现，并在图 11 的 θ–$\sqrt{s}$ 平面中两条宽阔的魔性带上尤为明显。由于 $B_i^{\pm}$ 对束流极化反应强烈，而 C_{ij} 变化甚微，极化会增强魔性的大小，却不会显著改变稳定子区域的位置。对于非极化巴巴散射，我们发现纠缠仅存在于 Z 极点附近。远离该极点时，重构得到的双自旋态变为可分离态，并发度归零。然而，图 31 和图 32 表明，在 Z极点区域之外，同一态仍保有非零的 $\mathcal{M}_2$ 。这说明,_ 缺少纠缠会限制非局域量子关联，但并不排除自旋子空间中存在非稳定子特征。这一行为源于 s道与 t道振幅之间的干涉。即使整体态是可分离的，这种干涉也会改变参与密度矩阵重构的螺旋度分量的相对相位和权重。

2. 极化敏感性： C_{ij}、 B_k 和 $\mathcal{M}_2$

量子可观测量对束流极化的不同响应，源于它们各自的层析成像基础。并发度 $\mathcal{C}$ 和贝尔非定域性 $\mathcal{B}$ 主要由自旋关联矩阵 C_{ij}决定。在 s道占主导的过程中（$t\bar{t}$ 和 $\mu^+\mu^-$），C_{ij} 的结构由轴矢量耦合与矢量耦合之比 $|f_A/f_V|$支配。该比值对左手和右手费米子近似对称，因此 C_{ij}对极化变化具有稳健性。因此， $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 基本不受极化影响。

相比之下，魔性 $\mathcal{M}_2$ 同时以非线性方式取决于 C_{ij} 和局域极化矢量 $B_k^{\pm}$ ，如式（12）所示。虽然 C_{ij} 具有鲁棒性， $B_k^{\pm}$ 却对初始束流构型高度敏感，通常会在 LR 和 RL之间改变符号和大小。对于非极化束流，$B_k^{\pm}$ 会因对初始螺旋度取平均而部分减弱，但在存在宇称破坏电弱耦合时通常不会完全消失。因此，束流极化就像一个“控制旋钮”，能够开启 B_k 项，使态偏离非极化混合构型，并显著增强魔性。

3. s/t道干涉

比较巴巴散射（e^+e^-）与其他过程，可以凸显多道干涉的作用。对于 $e^+e^- \to t\bar{t}$ 和 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$，动力学主要由s道主导，因此重构自旋关联呈现普适的角依赖。然而，巴巴散射还包含额外的 t道交换，该交换在前向区域显著增强，并与 s道发生干涉，如图24所示。这种运动学重加权提高了携带较弱自旋关联的螺旋度扇区的贡献，从而减弱非极化系综中的纠缠；图26 和27对此有所体现。

因此，巴巴散射中的束流极化所做的不只是诱导出非零极化。通过重新加权底层螺旋度振幅，它改变了 s道和 t道贡献的相对重要性，从而重塑重构密度矩阵和自旋关联矩阵 C_{ij}。因此，远离 Z 极点时，纠缠会高度依赖极化，尤其是在高能区。同一种干涉机制也解释了 ($\mathcal{C} = 0$， $\mathcal{M}_2 > 0$) 对应的“可分魔性”区域，正如

上文所述。在非极化 $e^-e^+ \to e^-e^+$中，如图28 和29所示，近似的宇称对称性意味着 $B_k^{\pm} \simeq 0$，而 s/t 干涉仍可在远离 Z 极点时产生非平凡的 Fano 系数。这种自旋关联通常会使该态处于稳定子集合之外，因此即便纠缠消失，仍会产生有限的魔性，如图31和32所示。

总之，尽管高能对撞机通过手征性守恒自然地产生最大纠缠态（贝尔态），但这些态缺乏魔性。要获取量子魔性的资源，必须远离最大纠缠点运行，或利用束流极化在完整密度矩阵的非稳定子子空间中进行探索。本节确定的运动学区域和极化区域将直接指导下一节中介绍的灵敏度估算和优化研究。

IV. 未来 e^+e^- 对撞机上的量子可观测量可观测性

在考察了 $e^+e^- \to t\bar{t}$、 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$和 $e^+e^- \to e^+e^-$ 过程的理论量子结构之后，我们现在转而分析它们的实验可观测性。理论量子态与实验重构态之间存在一个根本区别。在对撞机上，每个观测到的事件都对应于对一个量子子态 $\rho(\Omega)$的一次测量，该子态定义在一个多维相空间点上。物理态的总自旋密度矩阵通过对相空间 Π求和构造，

$$\rho^{\rm phy}_{\alpha,\beta}(\Pi) = \sum_{\Omega\in\Pi} \rho(\Omega)_{\alpha,\beta}, \tag{52}$$

其中每个矩阵元都必须在同一个固定参考系中求值。然而，出于高能实验中的实际考虑，尤其是涉及逐事件旋转时，自旋测量通常采用事件依赖基底进行，例如相对于粒子动量定义的螺旋度基。通过 N 测量，在事件依赖基底中对这些子态取平均，会得到一种不同的构造，称为“虚构态”[55]:

$$\overline{\rho}^{\rm fic}_{\alpha,\beta}(\Pi) = \frac{1}{N}\sum_{\Omega\in\Pi} \rho(\Omega)_{\alpha'(\Omega),\beta'(\Omega)} = \frac{1}{N}\sum_{\Omega\in\Pi} U^{\dagger}_{\alpha\alpha'(\Omega)}\rho(\Omega)_{\alpha,\beta}U_{\beta\beta'(\Omega)}, \tag{53}$$

其中 $\alpha'(\Omega)$ 和 $\beta'(\Omega)$ 分别表示事件依赖的自旋量子化轴，而 $U(\Omega)$ 是相应的幺正变换矩阵（例如，从固定参考系变换到螺旋度基）。与真正的量子态不同，由此得到的 ρ^{fic} 具有基底依赖性。关键的是，已有研究表明，在 ρ^{fic} 中观测到的非零纠缠或贝尔非定域性，仍可作为可靠的判据，严格证明实际量子子态的一个子集中存在纠缠或贝尔非定域性 $\rho(\Omega)$ [7, 10, 35]。[3]

基于这一虚构态形式主义，我们继续估计这些量子信号的统计显著性。在本节中，我们给出基准预测，旨在比较不同道和极化策略，而不是提供完整的实验模拟。除非另有说明，我们将探测器效应、事件选择效率和残余本底合并为一个作用于提取出的 Fano 系数的有效系统不确定度 Δ_{sys}。现实的研究还应进一步纳入初态辐射/束流 strahlung、探测器接受度以及道特定本底；预计这些效应会改变最优角度窗口，但不会改变关于极化依赖性的主要定性结论。

A. $e^+e^- \to t\bar{t}$

在 e^+e^- 对撞机上，$t\bar{t}$ 信号事件可根据 W^+W^- 对的衰变模式分为三类：(i) 全轻子道（$\ell\ell$）、(ii) 半轻子道（ℓq）和 (iii) 全强子道（qq）。从观测角度来看，每个道都有其优点和缺点。全轻子道的末态中包含两个高能带电轻子，较为干净，但其分支比相当低，而且涉及两个缺失中微子，事件构造较为困难。全强子道具有最大的分支比，最多可包含 6 个可识别的喷注，但在重建 tt 运动学时可能会遇到量子色动力学本底和组合不确定性[-]。另一方面，半轻子道兼具较大的分支比以及更干净、更简单的运动学特征，其末态中包含一个带电轻子和一个中微子。因此，我们选择在数值分析中考虑半轻子模式。

轻子衰变道 $W \to \ell\nu$ 与 $\ell = e,\ \mu$ 具有总分支比$Br(W \to \ell\nu) = 21.34\%$ [99], ，而强子分支比为 $Br(W \to q\bar{q}) =$

[3] 关于虚构态魔性的讨论留待未来的工作。

67。41% [99]。因此，衰变为 ℓq 末态的半轻子顶夸克对分支比为

$$Br(t\bar{t} \to \ell + \text{jets}) \;=\; 2\,Br(W \to \ell\nu)\,Br(W \to q\bar{q}) \;=\; 28.77\%, \tag{54}$$

其中，末态 ℓq表示 $\ell^- \nu\, b\, q\bar{q}'\, b$或 $q\bar{q}'\, b\, \ell^+ \bar{\nu}\, b$，并且包含两种电荷共轭模式。

采用衰变方法 [3], ，描述 t 和 $\bar{t}$衰变产物角分布的双微分截面为

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta_{A,i}d\cos\theta_{B,j}} = \frac{1}{4}\left(1 + \kappa_A B_i^- \cos\theta_{A,i} + \kappa_B B_j^+ \cos\theta_{B,j} + \kappa_A\kappa_B C_{ij}\cos\theta_{A,i}\cos\theta_{B,j}\right). \tag{55}$$

这里 $\kappa_{A,\ B}$ 表示衰变产物的自旋分析功率。角度 $\theta_{A,\ i}$ 是 t 衰变产物在 t 静止系中相对于轴 i 的角度，该轴是自旋量子化轴。角度 $\theta_{B,\ j}$ 是 t 衰变产物在 t 静止系中相对于轴j 的角度，该轴是自旋量子化轴。每种衰变产物都有其对应的自旋分析功率 κ_A 或 κ_B。最后，系数 B_i^+， B_j^- 和 C_{ij} 与方程（3）中的 Fano 系数相同。

对式（55）中的其他角变量积分后，可由这些简单的线性关系得到 t 极化 B_i^- 和 $\bar{t}$ 极化 B_j^+ <style id='17}

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{A,i}} = \frac{1}{2}\left(1 + \kappa_A B_i^- \cos\theta_{A,i}\right), \quad \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{B,j}} = \frac{1}{2}\left(1 + \kappa_B B_j^+ \cos\theta_{B,j}\right), \tag{56}$$

以及自旋关联矩阵 C_{ij}，由

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d(\cos\theta_{A,i}\cos\theta_{B,j})} = -\frac{1}{2}\left(1 + \kappa_A\kappa_B C_{ij}\cos\theta_{A,i}\cos\theta_{B,j}\right)\log|\cos\theta_{A,i}\cos\theta_{B,j}|. \tag{57}$$

随后可通过拟合、计算不对称度或求均值，从测得的分布中轻松提取 Fano 系数。例如，采用求均值的方法，可按下式求得这些系数:

$$B_i^- = \frac{3\langle\cos\theta_{A,i}\rangle}{\kappa_A}, \qquad B_j^+ = \frac{3\langle\cos\theta_{B,j}\rangle}{\kappa_B}, \qquad C_{ij} = \frac{9\langle\cos\theta_{A,i}\cos\theta_{B,j}\rangle}{\kappa_A\kappa_B}. \tag{58}$$

或者，也可以通过计算式（56）–(57)中关于线性变量 x定义的分布不对称度来求得系数

$$A(x) = \frac{N(x>0) - N(x<0)}{N(x>0) + N(x<0)}, \tag{59}$$

其中， N（$x>0$）是具有 $x>0$的事件数，而 N（$x<0$）是具有 $x<0$的事件数。利用这些不对称度，可以确定系数：

$$B_i^- = \frac{2}{\kappa_A} A(\cos\theta_{A,i}), \qquad B_j^+ = \frac{2}{\kappa_B} A(\cos\theta_{B,j}), \qquad C_{ij} = \frac{4}{\kappa_A \kappa_B} A(\cos\theta_{A,i}\cos\theta_{B,j}). \quad (60)$$

自旋分析功率 κ 的取值范围为 0 至 ± 1。当 $\kappa = 0$ 时，表示顶夸克（或反顶夸克）的自旋与所选衰变产物的方向之间不存在关联；而当 $\kappa = \pm 1$ 时，则表示关联或反关联达到最大值。在标准模型的电弱相互作用下，顶夸克的轻子衰变和强子衰变的最佳自旋分析功率 [7, 100]分别为

$$|\kappa_{\rm lep}| = 1, \qquad |\kappa_{\rm had}| = 0.64. \quad (61)$$

根据第IIIA节的分析，我们回顾一下， $t\bar{t}$ 系统在散射角为 $\theta_c = \arccos(\beta f_A^L / f_V^L)$ 和 $\arccos(-\beta f_A^R / f_V^R)$ 时达到最大纠缠，对应于 $e_L^- e_R^+$和 $e_R^- e_L^+$ 极化，此时的量子态最接近贝尔态。因此，我们选取在中心角 θ_c附近、角度窗口大小为 $\Delta\theta$

$$\theta_c - \frac{\Delta\theta}{2} < \theta < \theta_c + \frac{\Delta\theta}{2}, \quad (62)$$

其中， θ 是在 $t\bar{t}$ 质心系的螺旋度基中定义的。可根据数据集的亮度优化 $\Delta\theta$ 的取值，以获得最佳灵敏度。较低的$\Delta\theta$ 会选出更接近贝尔态的态，但统计量较低。我们注意到，衰变方法和运动学方法可能采用不同的 $\Delta\theta$ 取值，因此为达到各自的最佳灵敏度，重建出的事件数 N也可能不同。

采用衰变方法，我们测量方程（56）–（57）所示的分布，并使用方程（62）中描述的角度选择。通过方程（ B_i^+ 、 B_j^- 和 C_{ij} ）中的不对称度提取其取值。利用不对称度测得的 Fano 系数的统计不确定度为

$$\Delta_{\rm stat}(B_i^+) = \frac{4}{\sqrt{N}}, \qquad \Delta_{\rm stat}(B_j^-) = \frac{4}{\sqrt{N}}, \qquad \Delta_{\rm stat}(C_{ij}) = \frac{4}{\sqrt{N}}, \quad (63)$$

其中， N 是分析中重建出的事件数，数值因子 4 来自方程（60）。

对于顶夸克测量，目标系统不确定度为百分之一到几个百分点。对于 $\mu^+\mu^-$ 和 e^+e^- 的轻子末态，系统误差可能

表 I. 在积分亮度为 5 ab^{-1}、能量为 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特的 $e^+e^- \to t\bar{t}$ 中，观测纠缠（$\mathcal{C}$）和贝尔非定域性（$\mathcal{B}$）的预期显著性（$\mathcal{S}$）和精度（$\mathcal{S}^{-1}$）。结果分别针对系统不确定度为 $\Delta_{\rm sys} = 1\%$ 和 2% 的情况给出，并采用三种极化配置

$(P_{e^-},\ P_{e^+})$。

$\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特		纠缠度量（$\mathcal{C}$）					贝尔非定域性（$\mathcal{B}-2$）				
$(P_{e^-},\ P_{e^+})$	$\Delta_{\rm sys}$	$\mathcal{C}$	$\Delta_{\rm tot}(\mathcal{C})$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ_c	$\Delta\theta$	$\mathcal{B}-2$	$\Delta_{\rm tot}(\mathcal{B})$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ_c	$\Delta\theta$
(0, 0)	1%	0.49	0.022	$> 5\sigma$, 4.5%	119°	92°	0.37	0.090	4.2σ	119°	37°
	2%	0.55	0.035	$> 5\sigma$, 6.4%	119°	75°	0.41	0.133	3.1σ	119°	29°
(+0.8, −0.6)	1%	0.41	0.025	$> 5\sigma$, 6.1%	124°	110°	0.34	0.10	3.3σ	124°	38°
	1%	0.41	0.032	$> 5\sigma$, 7.9%	124°	110°	0.37	0.14	2.6σ	124°	31°
(−0.8, +0.6)	1%	0.49	0.020	$> 5\sigma$, 4.2%	116°	101°	0.41	0.074	$> 5\sigma$, 18%	116°	34°
	2%	0.49	0.032	$> 5\sigma$, 6.5%	116°	101°	0.45	0.12	3.7σ	116°	25°

得到更好的控制 [101–104]。因此，我们选择展示以下系统不确定度基准值下的结果

$$\Delta_{\rm sys} = \{0.1\%,\ 0.5\%,\ 1\%,\ 2\%\}. \tag{64}$$

为简便起见，我们将 $\Delta_{\rm sys}$ 视为最终 Fano 系数测定中的整体不确定度。

并发度 $\Delta(\mathcal{C})$和贝尔非定域性$\Delta(\mathcal{B})$的统计与系统不确定度取决于 C_{ij} 和 $B_i^{\pm}$ 的不确定度。可观测量 Ω（$\mathcal{C}$、 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{M}_2$）的误差传播公式如下：

$$\Delta(\Omega) = \sqrt{\sum_{ij}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial C_{ij}}\right)^2\Delta^2(C_{ij}) + \sum_i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial B_i^+}\right)^2\Delta^2(B_i^+) + \sum_j\left(\frac{\partial\Omega}{\partial B_j^-}\right)^2\Delta^2(B_j^-)}, \tag{65}$$

这些不确定度会传播至 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$的不确定度。最终显著性$\mathcal{S}$ 计算如下：

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\Delta^2_{\rm stat}(\mathcal{C}) + \Delta^2_{\rm sys}(\mathcal{C})}}, \qquad \mathcal{S}(\mathcal{B}) = \frac{\mathcal{B}-2}{\sqrt{\Delta^2_{\rm stat}(\mathcal{B}) + \Delta^2_{\rm sys}(\mathcal{B})}}, \tag{66}$$

在适用时，我们使用简写记法 $\Delta_{\rm tot} = \sqrt{\Delta^2_{\rm stat} + \Delta^2_{\rm sys}}$。

表 II。在 $e^+e^- \to t\bar{t}$、$\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特以及积分亮度为 5 ab^{-1} 的条件下，魔性可观测量（$\mathcal{M}_2$）的预期显著性（$\mathcal{S}$）和精度（$\mathcal{S}^{-1}$）。结果分别给出了系统不确定度为 $\Delta_{sys} = 1\%$ 和 2% 时，以及三种极化配置（P_{e^-}、P_{e^+}）下的情形。表格左半部分给出中心区域的结果，右半部分给出后向区域的结果。

$\sqrt{s}=1$ 太电子伏特		中心区域					后向区域				
(P_{e^-}, P_{e^+})	Δ_{sys}	$\mathcal{M}_2$	$\Delta_{tot}(\mathcal{M}_2)$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ_c	$\Delta\theta$	$\mathcal{M}_2$	$\Delta_{tot}(\mathcal{M}_2)$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ_c	$\Delta\theta$
(0, 0)	1%	0.58	0.040	$> 5\sigma$, 2。4%	91°	48°	0.66	0.058	$> 5\sigma$, 3.0%	141°	48°
	2%	0.60	0.061	$> 5\sigma$, 3.5%	91°	35°	0.66	0.070	$> 5\sigma$, 3.7%	141°	48°
(+0.8, −0.6)	1%	0.81	0.035	$> 5\sigma$, 1.5%	99°	48°	0.78	0.067	$> 5\sigma$, 3.0%	145°	40°
	2%	0.82	0.052	$> 5\sigma$, 2.2%	99°	36°	0.78	0.077	$> 5\sigma$, 3。4%	145°	40°
(−0.8, +0.6)	1%	0.79	0.029	$> 5\sigma$, 1。3%	92°	45°	0.77	0.039	$> 5\sigma$, 1。7%	137°	40°
	2%	0.79	0.049	$> 5\sigma$, 2.1%	92°	34°	0.78	0.055	$> 5\sigma$, 2。4%	137°	37°

极化为 (0.8, −0.6)、(−0.8, 0.6) 时，$e^+e^- \to t\bar{t}$ 中显著性 $\mathcal{S}(\mathcal{C})$、$\mathcal{S}(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{S}(\mathcal{M}_2)$ 的结果，以及用于比较的非极化结果，列于表 I 和表 II。这些表中给出了能够优化相关量显著性的散射角中心值 θ_c 和用于事例筛选的角度窗口大小 $\Delta\theta$。此外，当显著性 $\mathcal{S}$ 高于 5σ 时，我们还给出了测量中可达到的预期精度，对应于 $\mathcal{S}^{-1}$。

如第IIIA节所述，在 360 吉电子伏特阈值附近无法观测到纠缠态。随着对撞能量升高，这一情况会显著改善；在 $\sqrt{s} = 1$太电子伏特、积分亮度为 $\mathcal{L} = 5\ ab^{-1}$的条件下，5σ 很容易达到显著性。此外，采用优化的角度窗口切割，可将测量精度提高至 5% 以下。并且，束流极化不会提高纠缠度量的最大值，但可以显著改变 $e^+e^- \to t\bar{t}$中的产生截面。截面的这一变化使整体测量精度得到改善。对表I 的比较表明，配置（P_{e^-}，P_{e^+}）=（-0.8，$+0.6$）能提高纠缠测量的显著性。

量子计算资源的运动学分布 $\mathcal{M}_2$ 需要在不同角度区域进行专门测量，以最大限度地提高灵敏度。如图 20所示，$\mathcal{M}_2$

通常在中心和后向散射角处表现出极值。因此，表 II 分别通过优化中心区域和后向区域的切选结果。在 $\sqrt{s} = 1$ 太电子伏特，积分亮度为 $\mathcal{L} = 5\text{ab}^{-1}$时，测得的 $\mathcal{M}_2$ 在所有极化和角度构型下的显著性均远高于 5σ 。引入纵向束流极化显著提升了测得的魔性。对于非极化情形，后向区域的魔性值略高于中心区域。此处束流极化带来的灵敏度提升更加显著：在中心散射区域，非极化过程的数值从 0.58 提升至极化过程的 0.81，增幅近 40%。最佳精度（$\mathcal{S}^{-1} \approx 1.3\%$）出现在中心区域的（$-0.8$，$+0.6$）配置下。

B. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

由于 μ 子在探测器内不会衰变，我们利用这一点，采用运动学方法 [62]估算统计灵敏度。在这种方法中，逐事件可观测量是所测散射角的函数 θ 以及质心能量 $\sqrt{s}$。随后通过样本平均值估算 Fano 系数，统计不确定度则由测量量的分布决定，并根据观测分布的方差推导得出

$$\Delta B_i^{\pm} = \frac{\sqrt{\text{Var}\left(B_i^{\pm}\right)}}{\sqrt{N}}, \quad \Delta C_{ij} = \frac{\sqrt{\text{Var}\left(C_{ij}\right)}}{\sqrt{N}} \tag{67}$$

如此高的预期积分亮度旨在开展电弱精密测量，使关键可观测量达到 $\mathcal{O}(10^{-5})$ 的精度。因此，我们采用更严格的基准系统误差 $\Delta_{\text{sys}} = 0.1\%$和 0.5%，这基于未来 e^+e^- 对撞机预期开展的精密电弱计划。

因此，针对 $\mu^+\mu^-$ 系统的散射角测量范围根据探测器接受度要求 $10^\circ \leq \theta \leq 170^\circ$ 进行评估，所有层析可观测量均在此范围内计算。这样，重构密度矩阵反映的是实验可观测系综，而非理想化的全相空间态。

我们计算了观测纠缠 $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ 和贝尔非定域性的显著性

表 III。对于在非极化和极化 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 中观测纠缠 ($\mathcal{C}$) 和贝尔非定域性 ($\mathcal{B}$) 的预期显著性 ($\mathcal{S}$) 与精度 ($\mathcal{S}^{-1}$)。结果分别给出了 $\sqrt{s} = m_Z$ 和 250 GeV、积分亮度为 50 ab^{-1} 和 5 ab^{-1} 的情况。其中包括三种极化构型 (P_{e^-}, P_{e^+}) 及其相应的基准系统不确定度 (Δ_{sys})。

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$			纠缠度量 ($\mathcal{C}$)			贝尔非定域性 ($\mathcal{B}-2$)		
$\sqrt{s}$(吉电子伏特)	(P_{e^-}, P_{e^+})	Δ_{sys}	$\mathcal{C}$	$\Delta_{\text{tot}}(\mathcal{C})$	$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{-1}$	$\mathcal{B}-2$	$\Delta_{\text{tot}}(\mathcal{B})$	$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{-1}$
m_Z	(0, 0)	0.1%	0.50	7×10^{-7}	$> 5\sigma, 1.4 \times 10^{-6}$	0.23	6×10^{-7}	$> 5\sigma, 2.6 \times 10^{-6}$
		0.5%	0.50	1.8×10^{-3}	$> 5\sigma$, 0.35%	0.23	0.009	$> 5\sigma, 4\%$
	(+0.8, −0.6)	0.1%	0.49	7×10^{-7}	$> 5\sigma, 1.4 \times 10^{-6}$	0.23	6×10^{-7}	$> 5\sigma, 3 \times 10^{-6}$
		0.5%	0.49	1.7×10^{-3}	$> 5\sigma$, 0.35%	0.23	0.009	$> 5\sigma, 4\%$
	(−0.8, +0.6)	0.1%	0.51	6×10^{-7}	$> 5\sigma, 1.1 \times 10^{-6}$	0.25	5×10^{-7}	$> 5\sigma, 2.1 \times 10^{-6}$
		0.5%	0.51	1.8×10^{-3}	$> 5\sigma$, 0.35%	0.25	0.009	$> 5\sigma, 4\%$
250	(0, 0)	1%	0.37	0.0026	$> 5\sigma$, 0.7%	0.13	0.019	$> 5\sigma$, 14%
		2%	0.37	0.0052	$> 5\sigma$, 1.4%	0.13	0.038	3.5σ
	(+0.8, −0.6)	1%	0.38	0.0027	$> 5\sigma$, 0.7%	0.14	0.019	$> 5\sigma$, 14%
		2%	0.38	0.0053	$> 5\sigma$, 1.4%	0.14	0.038	3.7σ
	(−0.8, +0.6)	1%	0.36	0.0025	$> 5\sigma$, 0.7%	0.12	0.019	$> 5\sigma$, 15%
		2%	0.36	0.0051	$> 5\sigma$, 1.4%	0.12	0.038	3.3σ

$\mathcal{S}(\mathcal{B})$ 在非极化过程中 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 以及两种极化方案，$(P_{e^-}, P_{e^+}) = (0.8, -0.6)$ 和 $(-0.8, 0.6)$，在 Z 极点处，积分亮度为 $\mathcal{L} = 50\,\text{ab}^{-1}$，在 250 GeV 下为 $\mathcal{L} = 5\,\text{ab}^{-1}$，如表 III所示。

在未来 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$对撞机的运行能量下，观测到 5σ 过程中的纠缠所预期达到的显著性为 e^+e^- 水平。并发度和贝尔非定域性的最大值均出现在 Z 极点。分析证实，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的内在量子结构依然稳健，这与 $e^+e^- \to t\bar{t}$的研究结果相似。观测到的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 数值表明，束流极化并不会增强 $\mu^+\mu^-$ 系统本身固有的量子结构。表III显示，所有极化选择在测量最大纠缠度时都具有相近的精度。尽管配置（P_{e^-}, P_{e^+}）=（-0.8, $+0.6$）产生了更大的产生率

表 IV。 $\mathcal{M}_2$ 在非极化和极化$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 、 $\sqrt{s} = m_Z$ 及 250 GeV 下的预期显著性（$\mathcal{S}$）和精度（$\mathcal{S}^{-1}$），积分亮度分别为 50 ab^{-1} 和 5 ab^{-1}。结果涵盖前向和后向散射区域，并考虑了不同的系统不确定度（Δ_{sys}）。

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$			前向或中央区域			后向区域		
√s(吉电子伏特)	$(P_{e^-},\ P_{e^+})$	Δ_{sys}	$\mathcal{M}_2$	$\Delta_{tot}(\mathcal{M}_2)$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	$\mathcal{M}_2$	$\Delta_{tot}(\mathcal{M}_2)$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$
m_Z	(0, 0)	0.1%	0.32	0.0016	$> 5\sigma, 0.5\%$	0.21	0.002	$> 5\sigma, 0.7\%$
		0.5%	0.32	0.008	$> 5\sigma, 2.4\%$	0.21	0.008	$> 5\sigma, 3.7\%$
	(+0.8, −0.6)	0.1%	0.44	0.0015	$> 5\sigma, 0.3\%$	0.32	0.001	$> 5\sigma, 0.4\%$
		0.5%	0.44	0.007	$> 5\sigma, 1.7\%$	0.32	0.007	$> 5\sigma, 2.1\%$
	(−0.8, +0.6)	0.1%	0.41	0.0014	$> 5\sigma, 0.3\%$	0.42	0.001	$> 5\sigma, 0.3\%$
		0.5%	0.41	0.007	$> 5\sigma, 1.7\%$	0.42	0.007	$> 5\sigma, 1.7\%$
250	(0, 0)	1%	0.13	0.016	$> 5\sigma$, 12.1%	0.27	0.014	$> 5\sigma, 5.1\%$
		2%	0.13	0.031	4.1σ	0.27	0.027	$> 5\sigma$, 10.3%
	(+0.8, −0.6)	1%	0.27	0.014	$> 5\sigma, 5.0\%$	0.42	0.014	$> 5\sigma, 3.3\%$
		2%	0.27	0.027	$> 5\sigma$, 10。1%	0.42	0.028	$> 5\sigma, 6.7\%$
	(−0.8, +0.6)	1%	0.23	0.014	$> 5\sigma, 6.0\%$	0.40	0.014	$> 5\sigma, 3.5\%$
		2%	0.23	0.028	$> 5\sigma$, 12。0%	0.40	0.028	$> 5\sigma, 7.1\%$

截面更大，因此统计不确定度更小；不过，在我们的研究中，整体灵敏度主要受假定的系统不确定度支配。尽管如此，鉴于截面的极化依赖性，在考虑现实中依赖于配置的系统不确定度后，选择 $(P_{e^-},\ P_{e^+}) = (-0.8,\ +0.6)$ 可能会改善该道中的纠缠测量。

与 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$相比，量子计算资源 $\mathcal{M}_2$ 对初始束流极化非常敏感，证实了其作为一种独特且可调控的量子可观测量的实用性。为了在探测器可探测的散射范围（$10^\circ \le \theta \le 170^\circ$）内优化对 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的 $\mathcal{M}_2$ 测量，我们根据对撞机能量将相空间划分为前

向（或中央）区域和后向区域。我们选择前向/中央区域，将分界设在 $\theta < 0.47\pi$ 极点处，并将其移至 $\theta < 0.6\pi$ 吉电子伏特。我们的结果见表 IV。束流极化可以显著改变 $\mathcal{M}_2$的大小。例如，在 Z 极点处，配置（$+\mathbf{0.8}$，$-\mathbf{0.6}$）使 $\mathcal{M}_2$ 相比非极化情形提高了约 **34%**；在 $\sqrt{s} = 250$ 吉电子伏特时，增强更加明显，极化结果约为非极化结果的两倍。由于散射截面更大，该配置还显著提升了可实现的测量灵敏度，在我们的基准情景中给出了最有利的预期精度。另一方面，与表 III中的结果类似， $\mathcal{M}_2$ 中的预期精度仅对极化配置表现出较弱的依赖性，这主要是由于系统不确定度占主导地位。

C. $e^+e^- \to e^+e^-$

巴巴散射 $e^+e^- \to e^+e^-$ 由于同时存在 s/t道和 γ/Z 交换所带来的固有复杂性，为量子信息研究提供了独特的平台。分析这一过程使我们能够探究产生纠缠的 s道振幅与抑制纠缠的 t道振幅之间错综复杂的相互作用。根据第IIIC节的结果，我们着重测量 Z 极点处的量子信息可观测量。采用运动学方法，我们比较非极化过程与未来对撞机上可实现的两种高度极化配置下的预期显著性（$\mathcal{S}$），即（$+\mathbf{0.8}$，$-\mathbf{0.6}$）和（$-\mathbf{0.8}$，$+\mathbf{0.6}$）。

表V 总结的结果表明，在 Z 极点处，以 $\mathcal{L} = 50$ ab^{-1}观测到纠缠和贝尔非定域性均切实可行。对于所有极化配置和所有考察的系统误差基准，预期显著性均超过 5σ 。为优化测得的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$，分析选取了以下角度窗口： $\theta \in (0.3\pi,\ 0.9\pi)$，适用于 $\mathcal{C}$；以及 $\theta \in (0.4\pi,\ 0.8\pi)$，适用于 $\mathcal{B}$。在这些选择范围内，重构得到的事件集合自旋密度矩阵处于纠缠态且具有贝尔非定域性。

巴巴散射过程显著依赖于纵向束流极化。非极化结果作为基准，得到 $\mathcal{C} = 0.56$ ，贝尔不等式违背裕度（$\mathcal{B} - 2$）为 **0.35**。施加极化可显著提升其幅度

表 V. 在 Z 极点处，以积分亮度 50 ab^{-1}进行巴巴散射实验时，观测纠缠（$\mathcal{C}$）和贝尔非定域性（$\mathcal{B}$）的预期显著性（$\mathcal{S}$）。表中给出了系统不确定度为 $\Delta_{\mathrm{sys}} = 0.1\%$ 和 0.5% 时，三种不同初始束流极化配置（P_{e^-}，P_{e^+}）下的结果。

$\sqrt{s} = m_Z$		纠缠度量 ($\mathcal{C}$)				贝尔非定域性 ($\mathcal{B}-2$)			
$(P_{e^-},\ P_{e^+})$	Δ_{sys}	$\mathcal{C}$	$\Delta_{\mathrm{tot}}(\mathcal{C})$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ	$\mathcal{B}-2$	$\Delta_{\mathrm{tot}}(\mathcal{B})$	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ
(0, 0)	0.1%	0.56	0.0006	$> 5\sigma, 0.1\%$	$(0.3\pi, 0.9\pi)$	0.35	0.0016	$> 5\sigma, 0.5\%$	$(0.4\pi, 0.8\pi)$
	0.5%	0.56	0.0031	$> 5\sigma, 0.6\%$		0.35	0.0082	$> 5\sigma, 2.3\%$	
(+0.8, −0.6)	0.1%	0.59	0.0007	$> 5\sigma, 0.1\%$		0.39	0.0017	$> 5\sigma, 0.4\%$	
	0.5%	0.59	0.0034	$> 5\sigma, 0.6\%$		0.39	0.0085	$> 5\sigma, 2.2\%$	
(−0.8, +0.6)	0.1%	0.61	0.0007	$> 5\sigma, 0.1\%$		0.45	0.0017	$> 5\sigma, 0.4\%$	
	0.5%	0.61	0.0035	$> 5\sigma, 0.6\%$		0.45	0.0085	$> 5\sigma, 1.9\%$	

可观测量及其对应测量精度。最优的（-0.8，$+0.6$）配置使纠缠、 $\mathcal{C} = 0.61$ 和 $\mathcal{B} = 2.45$达到最大。与非极化基线相比， $\mathcal{C}$提高了约 10%， $\mathcal{B}-2$则大幅提升了 28%。这些结果证实，与简单的 s道过程不同，巴巴散射对初态制备高度敏感，从而验证了极化作为隔离并增强所需量子关联信号的关键机制的作用。

巴巴散射中的魔性可观测量 $\mathcal{M}_2$ 对纵向极化高度敏感。这种敏感性源于产生纠缠的 s 道，以及抑制纠缠的 t道。束流极化是控制由此产生的量子态所必需的主要实验手段。

为使可观测信号最大化，分析在运动学优化后的角度窗口 $\theta \in (\pi/4,\ \pi/2)$ 内进行，其中 $\mathcal{M}_2$ 达到其理论最大幅度。表 VI 中的结果证实，在所有极化情形下，该可观测量在 Z 极点处均存在，其$\mathcal{L} = 50\ \mathrm{ab}^{-1}$ 显著性始终超过 5σ。

我们发现，采用部分极化配置（例如 $(-0.8,\ +0.6)$）可使相干产生的有效截面达到最大。与非极化态相比，这种优化使 $\mathcal{M}_2$ 提高了约 3%，且增幅可测。更重要的是，

表 VI. 在积分亮度为 50 ab^{-1} 的条件下，于 Z 极点处巴巴散射中 $\mathcal{M}_2$ 的预期显著性（$\mathcal{S}$）和精度（$\mathcal{S}^{-1}$），针对三种不同极化配置（P_{e^-}，P_{e^+}）并采用两种基准系统不确定度 Δ_{sys} 进行测量。

$e^+e^- \to e^+e^-$			$\mathcal{M}_2$ 测量			
$\sqrt{s}$（吉电子伏特）	$(P_{e^-},\ P_{e^+})$	Δ_{sys}	$\mathcal{M}_2$	Δ_{tot}（$\mathcal{M}_2$）	$\mathcal{S},\ \mathcal{S}^{-1}$	θ
m_Z	(0, 0)	0.1%	0.53	0.0006	$> 5\sigma, 0.1\%$	$(\pi/4, \pi/2)$
		0.5%	0.53	0.0029	$> 5\sigma, 0.5\%$	
	$(+0.8,\ -0.6)$	0.1%	0.54	0.001	$> 5\sigma, 0.2\%$	
		0.5%	0.54	0.005	$> 5\sigma, 1.0\%$	
	$(-0.8, +0.6)$	0.1%	0.54	0.001	$> 5\sigma, 0.2\%$	
		0.5%	0.54	0.005	$> 5\sigma, 1.0\%$	

纵向极化的存在从根本上增强了所生成态的非稳定子性质。这提高了测量精度，并证实了极化在制备量子计算资源中的作用。

V. 总结和结论

下一代高亮度 e^+e^- 对撞机，包括国际直线对撞机、未来环形正负电子对撞机、环形正负电子对撞机和紧凑型直线对撞机，将为开展精密物理测量以及在能量前沿测量量子信息可观测量提供前所未有的机遇。纵向束流极化提供了一个控制参数，既可提高统计灵敏度，又能重塑末态的自旋密度矩阵。

在本文中，我们首先在第 I 节全面介绍相关主题，随后在第 $e^+e^- \to f\bar{f}$ II 节将费米子对的产生机制统一建立为双量子比特系统的层析框架，重点研究三种有代表性的量子可观测量：纠缠 $\mathcal{C}$、贝尔非定域性 $\mathcal{B}$以及第二稳定子 Rényi 熵 $\mathcal{M}_2$，并将其作为自旋子空间中魔性的替代指标。该形式体系适用于其他双量子比特态，也可轻松推广到更复杂的系统和产生机制。

接下来，我们将在第III节对量子行为进行全面介绍

针对过程 $e^+e^- \to t\bar{t}$、 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$以及高能巴巴散射 $e^+e^- \to e^+e^-$。这三个过程展现了不同的特征：$t\bar{t}$ 末态中的重质量阈值行为， $\mu^+\mu^-$ 和 e^+e^- 过程中的 Z 极点共振产生，以及 e^+e^- 巴巴散射中的 s/t道相互作用。特别是，我们展示了初始束流的极化对量子信息结构的显著影响。我们的分析揭示了这些可观测量背后极化依赖性的不同机制，概述如下。

• 对于 s道过程 $t\bar{t}$ 和 $\mu^+\mu^-$ 第IIIA 节和IIIB节中研究的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 对纵向极化不太敏感，如图4 和15所示。这是因为二者主要由归一化自旋关联矩阵 C_{ij}控制，而极化对各螺旋度振幅的贡献权重重新调整后，该矩阵的结构仅受到微弱影响（P_{e^-}， P_{e^+}）。因此，在这些道中，束流极化主要起到缩放总截面的作用，而不是用来定性改变内禀自旋关联。

相比之下，魔性可观测量 $\mathcal{M}_2$ 本质上对束流极化敏感，因此可以通过控制极化进行调节。根据定义， $\mathcal{M}_2$ 取决于完整密度矩阵的非线性函数，其中包括单粒子极化矢量 $B_i^{\pm}$ 。当重构的态偏离稳定子式结构时，便会产生非零魔性；结果见图10、11、20、21、31、32 和33。纵向极化可以显著增强$\mathcal{M}_2$ ，使约化自旋态偏离稳定子结构，从而产生魔性 $\mathcal{M}_2 > 0$，如图10(b)所示。另一方面，在此参考系中，具有近最大纠缠的运动学区域趋近于稳定子贝尔态，其特征是单粒子极化消失 $B_i^{\pm}$ ，且关联矩阵 C_{ij} 近似为对角矩阵，矩阵元的绝对值接近于一。在这些区域中，我们发现 $\mathcal{M}_2 \simeq 0$，如图20所示。

• 巴巴散射中 s- 道和 t- 道贡献的相互作用， $e^+e^- \to e^+e^-$，产生了与 s- 道过程在性质上截然不同的量子信息特征。正如第 IIIC节所述，纵向极化会重新加权 s- 道和 t- 道中的相对螺旋度振幅，从而重塑重构得到的自旋密度矩阵和完整关联张量 C_{ij} (例如，图28 和29）。 t- 道的贡献在前向/后向区域显著增强，并且在远离 Z极点时主导截面。因此，由于可分离态的贡献很大，非极化系综会变得退相干。然而，对于具有 LL/RR 道与 RL/LR - 道和 s- 道干涉的极化构型，重构得到的双自旋态仍可接近最大

纠缠态类贝尔　在特定运动学区域中的 e 构型，如图26 和27所示。

关于魔性，巴巴散射呈现出在 $t\bar{t}$ 和 $\mu^+\mu^-$中观察到的总体模式，即通常在远离类贝尔（稳定子）点时获得显著的 $\mathcal{M}_2$ ，并且可以通过调节束流极化高效地实现。此外， s/t 干涉的存在形成了一个“可分离-魔性”区域，其中 $\mathcal{C} = 0$ 但 $\mathcal{M}_2 > 0$，见图 31 和32。

- 在第 IIID 节中，我们综合并阐释了 $t\bar{t}$、 $\mu^+\mu^-$以及巴巴散射中发现的关键模式，提供了一个统一图景，展示不同运动学条件和极化下的量子资源。我们明确证明，纠缠和魔性通常呈非单调变化。 $\mathcal{M}_2$ 呈现出一种特征性的双峰模式，分布在最大纠缠区域两侧；通常在远离最大纠缠点时获得，并且可以通过利用束流极化将重构密度矩阵移入非稳定子区域来高效实现。

从更广泛的视角来看，用“费米子资源理论”的语言描述，观测到的极化依赖性颇具启发性 [105–108]：极化会重新加权初始螺旋度组成，进而改变手征电弱耦合的相对重要性，使约化自旋区域偏离经典可模拟集合的程度发生显著变化。从这个意义上说， e^+e^- 碰撞可被视为作用于自旋密度矩阵的可控量子信道，将经极化制备的双量子比特态转化为末态自旋资源。我们强调，要将 $\mathcal{M}_2$ 这一联系纳入完整的费米子资源理论，还需要开展超出本研究范围的专门研究。

最后，如第IV节所述，我们评估了这些量子信息可观测量的可观测性，并发现，按照 e^+e^- 对撞机的亮度和束流极化设计指标，未来的对撞机将为探测这些量子信息可观测量提供十分理想的环境。根据对撞机当前的质心能量和亮度设计，并采用优化的散射角窗口，三个过程（$t\bar{t}$、 $\mu^+\mu^-$和 e^+e^-）均有望在上述双量子比特态的纠缠、贝尔非定域性和魔性的可观测性方面达到很高的预期统计显著性 5σ 显著性，并实现百分之几的测量精度，如表I–VI所示。

这项工作为未来轻子对撞机中的量子信息唯象学奠定了基础，并确定了能够优化对 $\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的灵敏度的极化与运动学区域。正如近期一项在电子-离子

对撞机（EIC） [109], 中所展示的，横向束流极化对于 ep 碰撞至关重要。我们当前工作的自然延伸，是研究横向束流极化在 e^+e^- 碰撞以及其他系统中的影响。

补充说明：本文稿定稿期间，arXiv 上出现了另一篇相关论文 [110]。虽然总体结果一致，但这两篇论文对物理议题的侧重点颇为不同，彼此互为补充。

致谢

作者感谢 Kun Cheng 和 Tong Arthur Wu 提供的宝贵讨论。本研究部分由美国能源部资助（项目编号：DE-SC0007914），部分由 PITT PACC 资助。YCG 还获得了中国国家留学基金委员会的资助。

¯附录 A：双量子比特 ff 系统的领先阶计算

费米子对产生通过 s道过程进行

$$e^-e^+ \to \gamma^*, Z^* \to f_a\bar{f}_b \quad (f \neq e), \tag{A1}$$

¯其中， a， b是 ff的自旋指标。我们将每个 partonic 过程的产生密度矩阵定义为

$$R^{e^-e^+}_{ab,\bar{a}\bar{b}}(s,\theta) \propto \mathcal{M}(e^-e^+ \to f_a\bar{f}_b)\mathcal{M}^*(e^-e^+ \to f_{\bar{a}}\bar{f}_{\bar{b}}), \tag{A2}$$

其中， s 是质心能量的平方， θ 是相对于 e^-束流的 f 散射角。 4×4 矩阵 R 可分解为

$$R(s,\theta) = \frac{1}{4}\left(\tilde{A}\,\mathbb{I}_2\otimes\mathbb{I}_2 + \sum_i \tilde{B}^+_i\sigma_i\otimes\mathbb{I}_2 + \sum_j \tilde{B}^-_j\mathbb{I}_2\otimes\sigma_j + \sum_{ij}\tilde{C}_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\right), \tag{A3}$$

˜自旋密度矩阵 ρ 在式（3）中按 R（s， θ）$/A$归一化。

¯对于 $e^-e^+ \to f_af_b$ ，在存在 s道 γ 和 Z 交换的情况下，并对初始 e^-e^+极化取平均后， $\tilde{A}$、 $\tilde{B}^\pm_i$ 和 $\tilde{C}_{ij}$ 系数为

$$\begin{aligned}\tilde{A} = &\Big\{Q_e^2Q_f^2\left[2-\beta^2\sin^2\theta\right] + 2Q_eQ_f\,\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right]\Big[2\beta g_A^e g_A^f\cos\theta + g_V^e g_V^f\left(2-\beta^2\sin^2\theta\right)\Big]\\ &+ \left|\chi(s)\right|^2\Big[\left(g_V^{e2}+g_A^{e2}\right)\left(2g_V^{f2}+2\beta^2g_A^{f2}-\beta^2\left(g_V^{f2}+g_A^{f2}\right)\sin^2\theta\right) + 8\beta g_V^e g_V^f g_A^e g_A^f\cos\theta\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{A4}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}^\pm_k = &-2\Big\{Q_eQ_f\,\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right]\Big[\beta g_A^f g_V^e\left(1+\cos^2\theta\right) + 2g_A^e g_V^f\cos\theta\Big]\\ &+ \left|\chi(s)\right|^2\Big[2g_A^e g_V^e\left(\beta^2 g_A^{f2}+g_V^{f2}\right)\cos\theta + \beta g_A^f g_V^f\left(g_V^{e2}+g_A^{e2}\right)\left(1+\cos^2\theta\right)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{A5}$$

$$\tilde{B}^\pm_r = -2\,\text{正弦}\,\theta\sqrt{1-\beta^2}\Big\{Q_eQ_f\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right]\left[\beta g_A^f g_V^e\text{余弦}\,\theta + 2g_A^e g_V^f\right] + \left|\chi(s)\right|^2 g_V^f\Big[\beta g_A^f\left(g_V^{e2}+g_A^{e2}\right)\cos\theta + 2g_A^e g_V^e g_V^f\Big]\Big\}, \tag{A6}$$

$$\tilde{B}^\pm_n = 0, \tag{A7}$$

$$\tilde{C}_{nn} = -\beta^2 \sin^2\theta \Big\{ Q_e^2 Q_f^2 + 2Q_e Q_f \,\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right] g_V^e g_V^f - \left|\chi(s)\right|^2 \left(g_V^{e2} + g_A^{e2}\right)\left(g_A^{f2} - g_V^{f2}\right) \Big\}, \tag{A8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{rr} = &-\sin^2\theta \Big\{ \left(\beta^2 - 2\right) Q_e^2 Q_f^2 + 2Q_e Q_f \,\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right] g_V^e g_V^f \left(\beta^2 - 2\right) \\ &+ \left|\chi(s)\right|^2 \Big[\beta^2 \left(g_A^{f2} + g_V^{f2}\right) - 2g_V^{f2}\Big]\left(g_V^{e2} + g_A^{e2}\right) \Big\},\end{aligned} \tag{A9}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{kk} = &\Big\{ Q_e^2 Q_f^2 \Big[\left(\beta^2 - 2\right)\sin^2\theta + 2\Big] \\ &+ 2Q_e Q_f \,\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right] \Big[2\beta g_A^e g_A^f \cos\theta + g_V^e g_V^f \left(\left(\beta^2 - 2\right)\sin^2\theta + 2\right)\Big] \\ &+ \left|\chi(s)\right|^2 \Big[8\beta g_A^e g_A^f g_V^e g_V^f \cos\theta + \left(g_V^{e2} + g_A^{e2}\right)\Big(2g_V^{f2}\cos^2\theta - \beta^2\left(g_A^{f2} - g_V^{f2}\right)\sin^2\theta + 2\beta^2 g_A^{f2}\Big)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{A10}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{kr} = \tilde{C}_{rk} = &-2\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}\Big\{ Q_e^2 Q_f^2 \cos\theta + Q_e Q_f \,\mathrm{Re}\left[\chi(s)\right] \Big[\beta g_A^e g_A^f + 2g_V^e g_V^f \cos\theta\Big] \\ &+ \left|\chi(s)\right|^2 \Big[2\beta g_A^e g_A^f g_V^e g_V^f + g_V^{f2}\left(g_V^{e2} + g_A^{e2}\right)\cos\theta\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{A11}$$

$$\tilde{C}_{nr} = \tilde{C}_{rn} = \tilde{C}_{nk} = \tilde{C}_{kn} = 0, \tag{A12}$$

其中 $\beta = \sqrt{1 - 4m_f^2/s}$、 $Q_\ell = -1$ 和 $Q_t = 2/3$ 是电荷，而 g_V^i 和 g_A^i 是矢量耦合和轴矢耦合，其定义如下:

$$g_V^i = \frac{1}{2}(g_L^i + g_R^i) = \frac{I_i^3}{2} - Q_i \sin^2\theta_W, \quad g_A^i = \frac{1}{2}(g_L^i - g_R^i) = \frac{I_i^3}{2}, \tag{A13}$$

其中 I_i^3 是弱同位旋第三分量：带电轻子和下型夸克为 $-1/2$，中微子和上型夸克为 $+1/2$ 。光子与 Z 交换之间的干涉中出现的传播子因子 $\chi(s)$为

$$\mathrm{Re}[\chi(s)] = \frac{s\,(s - m_Z^2)}{\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W \left[(s - m_Z^2)^2 + s^2\Gamma_Z^2/m_Z^2\right]}, \tag{A14}$$

$$|\chi(s)|^2 = \frac{s^2}{\sin^4\theta_W \cos^4\theta_W \left[(s - m_Z^2)^2 + s^2\Gamma_Z^2/m_Z^2\right]}, \tag{A15}$$

其中， θ_W 是弱混合角， m_Z 和 Γ_Z 分别表示 Z玻色子的质量和宽度。

[1] Y. Afik 等，Eur. Phys. J. Plus 140, 855 (2025)，arXiv:2504.00086 [hep-ph]。[2] A. J. Barr、M. Fabbrichesi、R. Floreanini、E. Gabrielli 和 L. Marzola，Prog. Part. Nucl. Phys. 139, 104134 (2024)，arXiv:2402.07972 [hep-ph]。[3] Y. Afik 和 J. R. M. de Nova，Eur. Phys. J. Plus 136, 907 (2021)，arXiv:2003.02280 [quant- ph]。[4] G. Aad 等（ATLAS），《自然》633, 542 (2024)，arXiv:2311.07288 [高能实验物理]。[5] A. Hayrapetyan 等（CMS），Rept. Prog. Phys. 87, 117801 (2024)，arXiv:2406.03976 [hep- ex]。[6] Z. Dong、D. Gon。calves、K. Kong 和 A. Navarro，Phys. Rev. D 109, 115023 (2024)，arXiv:2305.07075 [hep-ph]。[7] T. Han、M. Low 和 T. A. Wu，JHEP 07, 192 (2024)，arXiv:2310.17696 [hep-ph]。[8] A. Hayrapetyan 等（CMS），Phys. Rev. D 110, 112016 (2024)，arXiv:2409. 11067 [hep-ex]。[9] J. A. Aguilar-Saavedra，Phys. Rev. D 108, 076025 (2023)，arXiv:2307. 06991 [hep-ph]。[10] K. Cheng、T. Han 和 M. Low，Phys. Rev. D 109, 116005 (2024)，arXiv:2311.09166 [hep- ph]。[11] J. A. Aguilar-Saavedra，Phys. Rev. D 109, 096027 (2024)，arXiv:2401.10988 [hep-ph]。[12] K. Cheng、T. Han 和 M. Low，Phys. Rev. D 111, 033004 (2025)，arXiv:2407.01672 [hep- ph]。[13]M. Fabbrichesi、R. Floreanini 和 E. Gabrielli，Eur. Phys. J. C 83, 162 (2023)，arXiv:2208.11723 [hep-ph]。[14] Y. Zhang、B.-H. Zhou、Q.-B. Liu、T. A. Wu、S. Li、T. Han、S.-C. Hsu 和 M. Low (2025)，arXiv:2504.01496 [hep-ph]。[15] J. A. Aguilar-Saavedra、A. Bernal、J. A. Casas 和 J. M. Moreno，Phys. Rev. D 107, 016012 (2023)，arXiv:2209.13441 [hep-ph]。[16] J. A. Aguilar-Saavedra，Phys. Rev. D 107, 076016 (2023)，arXiv:2209.14033 [hep-ph]。[17] R. Ashby-Pickering、A. J. Barr 和 A. Wierzchucka，JHEP05, 020(2023)，arXiv:2209.13990[quant-ph]。[18] M. Fabbrichesi、R. Floreanini、E. Gabrielli 和 L. Marzola，Eur. Phys. J. C 83, 823 (2023)，arXiv:2302.00683 [hep-ph]。

[19] R. A. Morales, Eur. Phys. J. Plus 138, 1157 (2023), arXiv:2306.17247 [hep-ph].[20] R. Aoude, E. Madge, F. Maltoni, and L. Mantani, JHEP 12, 017 (2023), arXiv:2307.09675[hep-ph].[21] A. Bernal, P. Caban, andJ. Rembieli ´nski, Eur. Phys. J. C 83, 1050 (2023), arXiv:2307.13496[hep-ph].[22]Q. Bi, Q.-H. Cao, K. Cheng, and H. Zhang, Phys. Rev. D 109, 036022 (2024), arXiv:2307.14895 [hep-ph].[23] J. A. Aguilar-Saavedra, Phys. Rev. D 109, 113004 (2024), arXiv:2403.13942 [hep-ph].[24] A. Bernal, P. Caban, and J. Rembieli ´nski, Sci. Rep. 15, 23410 (2025), arXiv:2405.16525[hep-ph].[25] A. Subba and R. Rahaman (2024) arXiv:2404.03292 [hep-ph].[26] M. Del Gratta, F. Fabbri, P. Lamba, F. Maltoni, and D. Pagani, JHEP 09, 013 (2025), arXiv:2504.03841 [hep-ph].[27] D. Gon˛calves, A. Kaladharan, F. Krauss, and A. Navarro (2025) arXiv:2505.12125 [hep-ph].[28] A. Ruzi, Y. Wu, R. Ding, and Q. Li (2025) arXiv:2506.16077 [hep-ph].[29] D. Gon˛calves, A. Kaladharan, and A. Navarro, JHEP 11, 158 (2025), arXiv:2506.19951[hep-ph].[30] Y. Afik, Y. Kats, J. R. M. de Nova, A. Soffer, and D. Uzan, Phys. Rev. D 111, L111902 (2025), arXiv:2406.04402 [hep-ph].[31] M. M. Altakach, P. Lamba, F. Maltoni, K. Mawatari, and K. Sakurai, Phys. Rev. D 107, 093002 (2023), arXiv:2211.10513 [hep-ph].[32] K. Ma and T. Li, 《中国物理C辑》 48, 103105 (2024), arXiv:2309.08103 [hep-ph].[33] K. Ehat¨aht, M. Fabbrichesi, L. Marzola, and C. Veelken, Phys. Rev. D 109, 032005 (2024), arXiv:2311. 17555 [hep-ph].[34] P. Lo Chiatto, Phys. Rev. D 112, 015017 (2025), arXiv:2408.04553 [hep-ph].[35] T. Han, M. Low, and Y. Su, JHEP 10, 217 (2025), arXiv:2501.04801 [hep-ph].[36] F. Maltoni, C. Severi, S. Tentori, and E. Vryonidou, JHEP 09, 001 (2024), arXiv:2404.08049[hep-ph].[37] A. Ruzi, L. Gao, Q. Li, C. Zhou, L. Chen, X. Zhang, Z. Sun, and Q. Li, 《物理学杂志G辑》 52, 075002 (2025), arXiv:2411.12518 [hep-ph].[38] A. Ruzi, Y. Wu, R. Ding, S. Qian, A. M. Levin, and Q. Li, JHEP 10, 211 (2024),

arXiv:2408.05429 [hep-ph].[39] Y. Wu, R. Jiang, A. Ruzi, Y. Ban, X. Yan, and Q. Li, Phys. Rev. D 111, 036008 (2025), arXiv:2410.17025 [hep-ph].[40] R. Ding, A. Ruzi, S. Qian, A. Levin, Y. Wu, and Q. Li (2025) arXiv:2504.09832 [hep-ph].[41]S. Wu, C. Qian, Q. Wang, and X.-R. Zhou, Phys. Rev. D 110, 054012 (2024), arXiv:2406.16298 [hep-ph].[42] E. Gabrielli and L. Marzola, Symmetry 16, 1036 (2024), arXiv:2408.05010 [hep-ph].[43] J. Pei, X. Hao, X. Wang, and T. Li (2025) arXiv:2505.09931 [hep-ph].[44] J. Pei, T. Li, L. Wu, X. Hao, and X. Wang (2025) arXiv:2510.08031 [hep-ph].[45] Q.-H. Cao, G. Li, X.-K. Wen, and B. Yan (2025) arXiv:2509.18276 [hep-ph].[46] K. Cheng, T. Han, M. Low, and T. A. Wu (2025) arXiv:2507.12513 [hep-ph].[47] K. Cheng and B. Yan, 《物理评论快报》 135, 011902 (2025), arXiv:2501.03321 [hep-ph].[48] Y. Shi and J.-C. Yang, Phys. Rev. D 98, 075019 (2018), arXiv:1612.07628 [hep-ph].[49] Y. Shi and J.-C. Yang, Eur. Phys. J. C 80, 861 (2020), arXiv:1909.10626 [hep-ph].[50] Y. Shi and J.-C. Yang, Eur. Phys. J. C 80, 116 (2020), arXiv:1912.04111 [hep-ph].[51] J. S. Bell, Physics Physique Fizika 1, 195 (1964).[52] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, 《物理评论快报》 23, 880 (1969).[53] M. Fabbrichesi, R. Floreanini, and G. Panizzo, 《物理评论快报》 127, 161801 (2021), arXiv:2102.11883 [hep-ph].[54] C. Severi, C. D. E. Boschi, F. Maltoni, and M. Sioli, Eur. Phys. J. C 82, 285 (2022), arXiv:2110.10112 [hep-ph].[55] Y. Afik and J. R. M. de Nova, Quantum 6, 820 (2022), arXiv:2203.05582 [quant-ph].[56] S. A. Abel, M. Dittmar, and H. K. Dreiner, 《物理学快报B》 280, 304 (1992).[57] M. Low, Phys. Rev. D 112, 096008 (2025), arXiv:2508.10979 [hep-ph].[58] D. Gottesman, 载于《物理学中群论方法国际学术讨论会》第22届会议（1998），第32–43页，arXiv:quant-ph/9807006。[59] C. D. White and M. J. White, Phys. Rev. D 110, 116016 (2024), arXiv:2406.07321 [hep-ph].[60] M. Fabbrichesi, M. Low, and L.Marzola, Phys. Rev.D 112,013003 (2025),arXiv:2501.03311

[hep-ph].

[61] R. Aoude、H. Banks、C.D. White 和 M.J.White（2025） arXiv:2505.12522 [hep-ph]。[62] K. Cheng、T. Han 和 M. Low，《物理学快报B》 **868，139675（2025）**， arXiv:2410.08303 [hep-

ph]。[63]C. P. Burgess、T. Colas、R. Holman 和 G. Kaplanek，JHEP 02，204（2025），arXiv:2411.09000 [高能理论物理]。[64] R. Aoude、A. J. Barr、F. Maltoni 和 L. Satrioni（2025）arXiv:2504.07030 [量子物理]。[65] J. Gu、S.-J. Lin、D. Y. Shao、L.-T. Wang 和 S.-X. Yang（2025）arXiv:2510.13951 [hep-ph]。[66] M. Fabbrichesi、R. Floreanini、E. Gabrielli 和 L. Marzola，Phys. Rev. D 112，033005（2025），arXiv:2504.12382 [hep-ph]。[67] Y. Afik 和 J. R. M. de Nova，《物理评论快报》130，221801（2023），arXiv:2209.03969 [量子物理]。[68] T. Han、M. Low、N. McGinnis 和 S. Su，JHEP 05，081（2025），arXiv:2412.21158 [hep-ph]。[69] S. Rai 和 J. Kumar（2025）arXiv:2505.12004 [hep-ph]。[70] A. J. Barr（2025）arXiv:2511.10197 [hep-ph]。[71] Y. Fang、C. Gao、Y.-Y. Li、J. Shu、Y. Wu、H. Xing、B. Xu、L. Xu 和 C. Zhou，中国科学：物理学 力学 天文学 68，260301（2025），arXiv:2411.11294 [hep-ph]。[72] M. Fabbrichesi 和 L. Marzola，Phys. Rev. D 110，076004（2024），arXiv:2405.09201 [hep-ph]。[73] H. Cheng 等（环形正负电子对撞机物理研究组），收录于 Snowmass 2021（2022）arXiv:2205.08553

[hep-ph].

[74] S. P. Adhya等（CEPC研究组）（2025）arXiv:2510.05260 [高能实验物理]。[75] X. Ai等（2025）arXiv:2505.24810 [高能实验物理]。[76]A. Aryshev等（国际直线对撞机国际发展团队）（2022年）arXiv:2203.07622[加速器物理]。[77] 德国电子同步加速器（2013年）arXiv:1306.6327 [加速器物理]。[78] 紧凑型直线对撞机（2018年）arXiv:1812.07986 [高能实验物理]。[79] R. Franceschini等（2018年）arXiv:1812.02093 [hep-ph]。[80] G. Moortgat-Pick等，物理报告460, 131（2008年），arXiv:hep-ph/0507011。[81] A. Vauth和J. List，国际现代物理杂志会议系列40, 1660003（2016年）。[82]R. Karl和J. List，见未来直线对撞机国际研讨会（2017年）arXiv:1703.00214 [高能实验物理]。[83] A. Blondel等（2019年）arXiv:1909.12245 [加速器物理]。[84] J. List（直线对撞机），PoS ICHEP2020, 691（2021），arXiv:2012.11267 [高能实验物理]。[85] S. Nikitin，国际现代物理杂志A 35, 2041001（2020年）。

[86] Z. Duan等，JACoW IPAC2023, MOPL078（2023年）。[87] Z. Duan、T. Chen、J. Gao、D. Ji、X. Li、D. Wang、J. Wang、Y. Wang和W. Xia，JACoW eeFACT2022, 97（2023年）。[88] W. Abdallah等（CEPC研究组），《辐射探测技术与方法》8, 1（2024），[勘误：《辐射探测技术与方法》9, 184–192（2025）],arXiv:2312.14363 [加速器物理]。[89] U. Fano，《现代物理评论》55, 855（1983年）。[90] A. Einstein、B. Podolsky和N. Rosen，《物理评论》47, 777（1935年）。[91] R. Horodecki、P. Horodecki、M. Horodecki和K. Horodecki，《现代物理评论》81, 865（2009年），arXiv:quant-ph/0702225。[92] W. K. Wootters，《物理评论快报》80, 2245（1998年），arXiv:quant-ph/9709029。[93] R. Horodecki、P. Horodecki和M. Horodecki，《物理快报A》200, 340（1995年）。[94] B. S. Cirelson，《数学物理快报》4, 93（1980年）。[95]L. Leone、S. F. E. Oliviero和A. Hamma，《物理评论快报》128, 050402（2022年），arXiv:2106.12587 [量子物理]。[96] CMS, CMS-PAS-TOP-25-001（2025）。[97] Q. Liu、I. Low和Z. Yin（2025）arXiv:2502.17550 [量子物理]。[98] M. A. Nielsen和I. L. Chuang，《量子计算与量子信息：十周年纪念版》（剑桥大学出版社，2010年）。[99] S. Navas等（粒子数据组），Phys. Rev. D 110, 030001（2024）。[100] B. Tweedie，Phys. Rev. D 90, 094010（2014年），arXiv:1401.3021 [hep-ph]。[101] 国际直线对撞机（2013年）arXiv:1306.6352 [hep-ph]。[102]T. K. Charles等（CLICdp、紧凑型直线对撞机），《CERN黄色报告专著》2, 1（2018年），arXiv:1812.06018 [加速器物理]。[103] M. Dong等（CEPC研究组）（2018年）arXiv:1811.10545 [高能实验物理]。[104] A. Abada等（未来环形对撞机），《欧洲物理杂志专题》228, 755（2019年）。[105] P. Sierant、P. Stornati和X. Turkeshi，PRX Quantum 7, 010302（2026年），arXiv:2506.00116

[量子物理]。

[106] L. Leone 和 L. Bittel，《物理评论 A》**110**，L040403（2024），arXiv:2404.11652 [量子物理]。[107] E. Chitambar 和 G. Gour，Rev.Mod. Phys.**91**，025001（2019年），arXiv:1806.06107 [量子物理]。[108] J. Emerson、D. Gottesman、S. A. H. Mousavian 和 V. Veitch，《新物理学杂志》**16**，013009

(2014年)，arXiv:1307.7171 [量子物理]。[109] K. Cheng、T. Han和S.Trifinopoulos (2025) arXiv:2510.23773 [hep-ph]。[110] M. M.Altakach、P. Lamba、F.Maltoni和K.Sakurai(2026年) arXiv:2601.09558 [hep-ph]。