arXiv:2602.02723v1 [math.DG] 2 Feb 2026

LO本质共形齐性洛伦兹空间

THOMAS LEISTNER、LILIA MEHIDI 和 ABDELGHANI ZEGHIB

Abstract. 我们研究维数至少为 3、具有本质局部共形变换伪群的局部共形齐性洛伦兹流形。我们推广 Alekseevsky 和 Galaev 的一项近期结果，证明任何此类流形 $(M,\ g)$要么是共形平坦的，要么局部共形等价于齐性平面波。当流形不是共形平坦时，我们证明存在一种余维为一的海森堡型类光叶状结构，由此得到平面波结构。我们的方法依赖于格罗莫夫刚性变换理论中的工具。最后，我们观察到，共形类中的平面波度量与沿某条零测地线的彭罗斯极限一致。$(M,\ g)$

Contents

1. 引言 1 2. 术语 3 3. 平面波 4 4. 各向同性群与约化 7 5. 构建 Killing 向量场的海森堡代数 14 6. 定理1.1 的证明 19 7. 关于彭罗斯极限 20 附录 A. 刚性变换群概述 22 参考文献 26

1. Introduction

共形几何中的一个基本问题是对具有本质的 共形变换的共形流形进行分类，也就是说，对那些不保持共形类中某个度量的全局共形变换进行分类。对于黎曼共形流形，情况非常刚性：在共形等价意义下，只有圆球面和欧几里得空间具有本质的共形变换。Lichnerowicz 于 20 世纪 60 年代提出了这一猜想，随后 Ferrand 和 Obata 在一系列论文中证明了它（[23], [26], [9], 并有 [1] 的贡献）。

对于不定度量，情况要灵活得多：存在并非共形平坦、却具有本质共形变换的伪黎曼度量，这种情况既出现在非紧致流形上，也如 [11], 所示，出现在号差不同于洛伦兹号差的紧致流形上。洛伦兹号差下的非紧致例子由平面波构成。

这些流形的度量在维数 $n+2$ 时局部可表示为

$$g = 2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v + \boldsymbol{x}^\top Q(t)\boldsymbol{x}\;\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}^\top \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $Q(t)$ 是一个依赖于 t 的对称 $n \times n$ 矩阵。若 Q 不是标量矩阵，则该度量不是共形平坦的。例如，当该度量在整个 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上都有定义时，平面波存在具有不动点的非等距位似。因此，这些位似是本质的（关于这一推论，可参见例如 [22,命题 2.5]）。

最近，Alekseevsky 和 Galaev 在 [2]中获得了关于共形齐性情形下本质的洛伦兹共形结构的一项重要刚性结果。他们证明，若流形是单连通的，且存在一个由本质全局共形变换组成的传递群，则该流形要么是共形平坦的，要么其共形类包含一个等距齐性且测地完备的平面波度量。本文将从以下意义上推广这一结果：我们不再要求流形是单连通的，只假设流形是局部共形齐性的，即局部共形变换传递作用。我们将证明以下结果。

定理1.1。设 (M, g) 是维数至少为3 的洛伦兹流形，且$\mathbf{P}$ 是其局部共形变换伪群，即 M的开子集之间所有共形微分同胚的集合。我们假设 M 局部共形齐性，即 M 是$\mathbf{P}$的一个轨道。那么以下情况之一成立：

(1) $\mathbf{P}$保持 g共形类中的一个洛伦兹度量。*(2)* (M, g) 是共形平坦的。*(3)* (M, g) 局部共形等价于一个等距局部齐性的平面波。更确切地说，存在一个齐性平面波 X，使得$(M, [g])$ 由 $(\mathrm{Conf}(X), X)$建模。

当伪群 $\mathbf{P}$ 不保持 g-共形类中的任何度量时，我们称 (M, g) 是弱本质的，这一概念在第 2 节中引入。相比本质性，这是一种较弱的条件。我们的证明与 [2] 中的证明起初类似：注意到弱本质性意味着各向同性群中存在一个不属于 $\mathrm{SO}(T_pM)$的元素。在 [2],中，单连通性和整体共形齐性保证了各向同性群是连通的，进而可在其李代数中找到一个特定元素（该元素不属于等距代数）。然而，在我们的情形下，无法直接得出存在这样一个元素。因此，我们采用不同的方法。我们只研究局部共形变换的局部迷向，但借助格罗莫夫刚性变换理论（见附录 A）以及代数群中的有力工具，将问题化归到李代数层面（见第 4 节），尤其是得到一个不属于 $\mathfrak{so}(T_pM)$ 的各向同性代数中的双曲元。由于我们只假设局部齐性，因此可以转至万有覆盖，而弱本质性在万有覆盖上仍然成立。此外，在单连通实解析流形上，局部共形向量场可以延拓为全局向量场。因此，我们可以在万有覆盖上研究共形向量场李代数

。宽泛地说，将齐性假设弱化为局部齐性，使我们得以克服单连通性这一假设。接着，在第 5 节中，我们利用双曲元所诱导的共形向量场李代数分解，推导出存在一种海森堡型的余维一类光叶状结构，即海森堡代数具有传递作用。我们的方法结合第 3.2 节中得到的平面波新刻画，不仅导出了定理1.1中的推广，也为 [2] 中的单连通全局齐性情形提供了更具概念性的处理方式，并简化了证明。

在最后一节中，我们考察本文结果对局部共形齐性洛伦兹流形的**彭罗斯极限**的影响。彭罗斯极限是引力物理中的一种著名构造，它表明任何洛伦兹流形都可以通过沿任意类光测地线取极限而得到一个平面波时空（例如参见 [4] ）。如定理1.1所示，维数为 $\geqslant 3$ 的弱本质的局部共形齐性洛伦兹流形，要么是共形平坦的，要么局部共形等价于一个齐性平面波。于是，一个自然的问题是，这个平面波是否与该洛伦兹流形沿某条类光测地线的彭罗斯极限相同。先验地说，彭罗斯极限是与度量相关联的平面波，而非与共形结构相关联。由此引出的根本问题是：两个共形相关的度量沿某条类光测地线所得的彭罗斯极限是否共形等价（注意，共形相关的度量具有相同的无参数类光测地线）。事实证明，答案是肯定的，因此彭罗斯极限是一个共形不变量，如命题 7.1 所示。由此我们得到，弱本质的局部共形齐性洛伦兹流形 $(M,\ g)$ 的共形类中的平面波度量（如定理1.1的第（3）项所述），与 $(M,\ g)$ 沿某条零测地线的彭罗斯极限相同。

推论 1.2。设 (M, g) 是一个维数至少为 3 的局部共形齐性非共形平坦洛伦兹流形。假设 $(M,\ g)$ 是弱本质的。那么，(M, g) 局部共形等价于沿某条零测地线取其彭罗斯极限所得的空间。

这引出了一个问题：能否找到直接证明这一事实的方法？我们计划在未来的工作中对此进行研究。

2. Terminology

在本小节中，我们将明确流形上作用的术语。我们始终假设流形 M 是连通的。半黎曼流形 $(M,\ g)$ 若其共形变换群具有传递性，则称为共形齐性；若局部共形变换伪群具有传递性，则称为局部共形齐性。后者意味着，对于任意 $p,\ q \in M$，存在 p 的邻域 V_p 和 q 的邻域 V_q，以及一个共形微分同胚 $\phi\colon V_p \to V_q$，将 p 映到 q。

若 $\mathfrak{g}$ 是定义在 (M, g) 上的共形向量场李代数，且 $p \in M$，则 $\mathfrak{g}$-*orbit of* p 是 M 中可通过对来自 $\mathfrak{g}$ 的向量场施加迭代流而到达 p 的点的集合。若 M 是唯一的 $\mathfrak{g}$-轨道，则李代数 $\mathfrak{g}$ 传递地作用。这等价于

对于任意 $p \in M$，求值映射 $X \in \mathfrak{g} \mapsto X(p) \in T_pM$ 是满射。事实上，若求值映射在每一点处都是满射，则每个 $\mathfrak{g}$-轨道都是开集；又因假设 M 连通，它必与 M 相等。结果表明，若 (M, g) 局部共形齐性且单连通，则任意局部共形向量场都可在 M 上延拓为全局共形向量场，从而得到 M 上的全局共形向量场李代数。在这种情况下，局部共形齐性等价于 $\mathfrak{g}$ 传递地作用（附录 A 和命题 4.8 中对此有回顾）。

最后，如果 $\mathfrak{g}$ 的作用在（ p处）是局部传递的，则称之为局部传递地作用，即 p的 $\mathfrak{g}$-轨道是开集，换言之， p 处的求值映射是满射。

遵循通常的术语用法，例如在 [10], $(M,$ 若存在共形类 g 中的度量 g'，使其在所有共形变换下保持不变，则称 $g)$ 为非本质的；否则称为本质的。就我们的目的而言，需要对这一定义作局部化处理。若存在共形类 g 中的度量 g'，使其在所有局部共形变换下保持不变，则称 $(M,\ g)$为强非本质的；否则称为弱本质的。若共形向量场的李代数 $\mathfrak{g}$ 中不存在任何度量，使得来自 $\mathfrak{g}$ 的向量场是 Killing 向量场，则称 $\mathfrak{g}$ 为本质的。正如正文中将要回顾的，在局部共形齐性的结构这一语境下，弱本质等价于万有覆盖上的全局共形向量场李代数 $\mathfrak{g}$ 是本质的。

3. Plane waves

3.1. 平面波的基本性质。平面波是一种非平坦洛伦兹流形$(M,\ g)$ 它存在一个向量场 ξ 满足

$$\nabla\xi = 0, \quad g(\xi,\xi) = 0, \quad R(X,Y) = 0, \quad \nabla_X R = 0 \quad \text{for all } X, Y \in \xi^{\perp}, \tag{2}$$

其中，∇ 是 $(M,\ g)$的 Levi-Civita 联络和曲率张量。由于平面波存在平行零向量场 ξ，其切丛可过滤为一个零直线丛以及由退化（零）超平面构成的丛 $\xi^{\perp}$，$\langle\xi\rangle \subset \xi^{\perp} \subset TM$；二者均为平行的，因而给出 M的全测地叶状结构。

局部地，维数为 $n+2$ 的平面波度量可表示为

$$g = 2\mathrm{d}t\mathrm{d}v + \boldsymbol{x}^{\top}Q(t)\boldsymbol{x}\ \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\top}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x^1,\ \ldots\ldots,\ x^n)^{\top} \in \mathbb{R}^n$，$Q(t)$ 是依赖于 t 的对称 $n \times n$ 矩阵，且 $\xi = \partial_v$。

众所周知（例如参见 [5]），形如 (3) 的平面波具有一个由 Killing 向量场构成的 $(2n+1)$ 维海森堡代数 $\mathfrak{heis}$，这些向量场张成超平面分布 $\xi^{\perp}$。它们由中心元素 $\xi = \partial_v$ 和

$$\boldsymbol{u}^{\top}\partial_{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{u}}^{\top}\boldsymbol{x}\,\partial_v = \sum_{i=1}^{n} u^i\partial_{x^i} - (\sum_{i=1}^{n}\dot{u}^i x^i)\xi,$$

其中 $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ 是常微分方程 $\ddot{\boldsymbol{u}} = Q\boldsymbol{u}$的一个解，例如参见 [15, 第 4.3]小节。此外（例如参见 [5]），与 $\xi^{\perp}$ 相切的完整 Killing 向量场代数是一个扩张$\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{heis}$，其中 $\mathfrak{k}$ 是某个紧李群的李代数，并且由包含于某一点的各向同性代数中的 Killing 向量场组成。

文献 [5] 已证明，度量（3）具有一个横截于 $\xi^{\perp}$的 Killing向量场，即它具有传递的 Killing 向量场代数，当且仅当

$$Q(t) = \mathrm{e}^{tF} S \mathrm{e}^{-tF} \quad \text{or} \quad Q(t) = \tfrac{1}{t^2} \mathrm{e}^{\log(t)F} S \mathrm{e}^{-\log(t)F},$$

其中 S 是一个对称矩阵， F 是一个反对称矩阵，二者均为常矩阵，阶数为 $n \times n$。第一种情形称为正则 , 第二种则称为奇异。在奇异情形下，度量仅定义在 $t > 0$ 上。这些情形下额外的 Killing 向量场为

$$\partial_t + \boldsymbol{x}^{\top} F \partial_{\boldsymbol{x}} \quad \text{or} \quad t\partial_t + \boldsymbol{x}^{\top} F \partial_{\boldsymbol{x}} - v\partial_v,$$

分别。因此，若 Killing 向量场代数传递作用，则其中包含$\mathbb{R} \ltimes (\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{heis})$。如果平面波不是平坦的，这就是 Killing 场的完整代数。现在，根据[17, 命题 5.1], , 该代数同构于

$$\mathfrak{g}_0 \cong (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{heis}.$$

值得指出的是，正则情形和奇异情形所得到的度量并非局部等距；然而，它们是共形等价的，甚至在全局上也是如此，只要正则度量 (3) 定义在 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上，而奇异度量定义在 $\{t > 0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ 上，参见例如 [19] 或 [2]。

度量 (3) 还存在一个相似向量场

$$2v\partial_v + \boldsymbol{x}^{\top} \partial_{\boldsymbol{x}},$$

与 $\mathfrak{k}$ 及额外的 Killing向量场对易。对于定义在 $I \times \mathbb{R}^{n+1}$ 上的非共形平坦平面波度量，其中 I 是一个区间，共形向量场李代数已在 [19, 定理 2、推论 2] 中确定（未假设局部共形齐性）。如果该度量是局部共形齐性的，则由 [19,定理 2] 可知，若共形向量场李代数具有传递性作用，那么在共形类中存在一个平面波度量，使其 Killing 向量场李代数也具有传递性作用。在这种情况下，共形向量场李代数包含

$$\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{heis} = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{r},$$

其中 $\mathfrak{r} := (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{heis}$ 包含于 $\mathfrak{g}$ 的可解根基中。此外，他们证明，对于共形类中的这个平面波度量，完整的共形向量场李代数是相似变换的，并且与 $\mathfrak{g}$ 重合。

3.2. 由其 Killing 向量场确定平面波。事实上，平面波的特征正是由上述 Killing 向量场的特定排列所决定的，以下结果说明了这一点。该结果是对 [15, 定理 3], 的推广，其中假设 Killing 向量场彼此对易。我们将这一推广表述为任意签名的不定度量情形。其洛伦兹版本将用于定理1.1的证明中。

命题3.1. 设 (M, g) 是一个维数为 $m = n + 2$ 、黎曼曲率张量为 R的半黎曼流形。假设存在 *Killing* 向量场 $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$，它们张成 $\xi_0^{\perp}$ 并满足

$$[\xi_0, \xi_i] = 0, \qquad [\xi_i, \xi_j] \in \langle \xi_0 \rangle, \qquad \textit{for all } i, j = 1, \ldots n.$$

那么 ξ_0 是平行的，并且对所有 $X, Y \in \xi_0^{\perp}$，有 $R(X,Y) = 0$ 和 $\nabla_X R = 0$。特别地，如果 (M, g) 是洛伦兹的，则它是一个平面波。

证明。令 $g_{ab} := g(\xi_a, \xi_b)$ 对 $a, b = 0 \ldots, n.$ 由于 $[\xi_a, \xi_b] \in \Gamma(\langle \xi_0 \rangle)$ 且 $\xi_a \in \xi_0^{\perp}$，我们有

$$g([\xi_a, \xi_b], \xi_c) = 0$$

因此

$$0 = \mathcal{L}_{\xi_a} g(\xi_b, \xi_c) = \xi_a(g_{bc}),$$

因为 ξ_a 是 Killing。因此，Koszul公式给出

$$2g(\nabla_{\xi_a} \xi_b, \xi_c) = 0,$$

对所有 $a, b, c = 0, \ldots n$，从而 $\nabla_{\xi_a} \xi_b \in \Gamma(\langle \xi_0 \rangle)$。还要注意， $[[\xi_a, \xi_b], \xi_c] = 0$。

首先证明 ξ_0 是平行的。

任取一个 $p \in M$，我们将证明 $\nabla \xi_0|_p = 0$。设 Z 是 p 附近的局部零向量场，使得 $g(Z, \xi_0) = 1$, $g(Z, \xi_i) = 0$，对 $i = 1, \ldots, n$ 成立。在 Z 的定义域上，假设意味着

$$0 = \mathcal{L}_{\xi_a} g(Z, \xi_b) = -g([\xi_a, Z], \xi_b) - g([\xi_a, \xi_b], Z). \tag{4}$$

对于 $a = 0$ 或 $b = 0$，这意味着

$$0 = \mathcal{L}_{\xi_a} g(Z, \xi_b) = g([\xi_a, Z], \xi_0), \qquad 0 = \mathcal{L}_{\xi_0} g(Z, \xi_a) = g([\xi_0, Z], \xi_a),$$

从而Koszul公式给出

$$g(\nabla_{\xi_a} \xi_0, Z) = 0, \qquad g(\nabla_Z \xi_0, \xi_a) = 0,$$

因而 $\nabla_{\xi_a} \xi_0 = 0$ 与 $\nabla_Z \xi_0 \in \rangle \xi_0 \langle$。最后，由于 ξ_0 是Killing $g(\nabla_Z \xi_0,\ Z) = 0$，故 ξ_0在 Z 的定义域上平行，从而处处平行。注意，由于 $[\xi_a,\ \xi_b] = c_{ab} \xi_0$，其中常数为 c_{ab}，这也意味着

$$\nabla [\xi_a, \xi_b] = 0,$$

并且我们还有 $[Z,\ \xi_0] = 0$。

接下来，我们需要证明 $R(\xi_a,\ \xi_b) = 0$，其中 $R \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(TM)$ 是黎曼曲率张量。这等价于 $R(\xi_a,\ \xi_b)\xi_c = 0$，因此我们需要确定 $\nabla_{\xi_a} \xi_b$。由(4)和Koszul公式，我们得到

$$2g(\nabla_{\xi_a} \xi_b, Z) = -Z(g_{ab}) + g([\xi_a, \xi_b], Z),$$

从而

$$\nabla_{\xi_a} \xi_b = \tfrac{1}{2} \left(g([\xi_a, \xi_b], Z) - Z(g_{ab}) \right) \xi_0.$$

根据 $g([Z,\ \xi_a],\ \xi_0) = 0$，有 $[Z,\ \xi_a] \in \xi_0^{\perp}$，因此

$$[Z, \xi_a](g_{bc}) = 0$$

因此 $\xi_a(Z(g_{bc}) = 0$。由于 ξ_0 平行，这意味着

$$\nabla_{\xi_a} \nabla_{\xi_b} \xi_c = \tfrac{1}{2} \xi_a \left(g([\xi_b, \xi_c], Z) \right) \xi_0 = \tfrac{1}{2} \left(g([\xi_a, [\xi_b, \xi_c]], Z) \right) \xi_0 = 0,$$

因为 $g([\xi_b,\xi_c],[\xi_a,Z])=0$。此外，由于 $[\xi_a,\xi_b]$ 平行，我们有

$$g(\nabla_{[\xi_a,\xi_b]}\xi_c,Z)=g([[\xi_a,\xi_b],\xi_c],Z)=0,$$

因此 $R(\xi_a,\ \xi_b)\xi_c=0$ 符合要求。

最后，我们需要证明 $\nabla_{\xi_a}R=0$。这可由 Killing 向量场 ξ 的著名可积性条件得到:

$$\nabla_\xi R=(\nabla\xi)\cdot R,$$

其中，点号表示 $\mathfrak{so}(TM)$ 对曲率张量的作用。然而，上述计算表明，$\nabla\xi|_{\xi_0^\perp}$ 的值域是 $\xi_0^\perp\otimes\langle\xi_0\rangle$ 的一个小节。此外，由于

$$g(\nabla_Z\xi_a,\xi_0)=-g(\nabla_{\xi_0}\xi_a,Z)=0,$$

我们有 $\nabla_Z\xi_a$ 是 $\xi_0^\perp$ 的一个小节。于是 $R(\xi_a,\ \xi_b)=0$ 意味着 $\nabla_{\xi_a}R=0$，从而对所有 $X\in\xi_0^\perp$，都有 $\nabla_X R=0$。特别地，若 g 是洛伦兹的，则 $(M,\ g)$ 是一个平面波。□

为了证明定理1.1，在本文余下部分，我们将在适当的假设下推导出命题3.1中所述 Killing 向量场的存在性。

4. Isotropy group and reductions

本节将研究局部共形齐性流形的各向同性子群及其与弱本质性的关系。设 $(M,\ g)$ 是一个维数为 $n+2\geqslant 3$ 的局部共形齐性洛伦兹流形。

4.1. 各向同性子群。固定 p，并令 H_p 为固定 p 的局部共形变换（芽）群。这里，“芽”是指将局部共形微分同胚f_1和 f_2、f_i: $U_p^i\to V_p^i$视为相同，只要它们在某个 $W_p\subset U_p^1\cap U_p^2$上重合，其中 U_p^i，V_p^i，W_p是 p的邻域。对于 H_p，我们有导数表示，或各向同性表示 $\rho_p:\ f\in H_p\to \mathsf{d}f_p\in \mathsf{GL}(T_pM)$。显然，$\rho_p$ 的像包含于 $\mathsf{CO}(T_pM)\simeq \mathsf{CO}(1,\ n+1)=\mathbb{R}^*\times\mathsf{O}(1,\ n+1)$中。以下观察对我们的方法至关重要。

Prop命题 4.1. 若 (M,g) 是局部共形齐性的，则以下结论成立:

(1) (M,g) 是弱本质的，当且仅当 ρ_p 的像不包含于 $\mathsf{O}(T_pM,g_p)$。*(2)* 若 $\rho_p(H_p)$ 包含满足 $\lambda\neq 0$ 的 $e^\lambda\mathbf{1}$，则 $(M,[g]))$ 是共形平坦的。*(3)* 若 ρ_p 不是单射，则 (M,g) 是共形平坦的。*(4)* $\rho_p(H_p)$ 包含其在 $\mathsf{GL}(T_pM)\simeq\mathsf{GL}(n+2$ 中的扎里斯基闭包的单位连通分支，$\mathbb{R})$，且包含于 $\mathsf{CO}(1,n+1)$。

证明。(1) 若 $\rho_p(H_p)\subset\mathsf{O}(T_pM)$，则可如下定义一个度量。由局部齐性，对任意 $q\in M$，存在一个局部共形变换 $\phi:\ V_p\to V_q$，它定义在 p 与 q 的开邻域之间，且满足 $\phi(p)=q$。于是我们定义 $\hat{}g_q(\mathsf{d}\phi_p(X),\mathsf{d}\phi_pY):=g_p(X,Y)$，其中 X 和 Y 属于 T_pM。由于 $\rho_p(H_p)\subset\mathsf{O}(T_pM)$，这一

定义与 ϕ 的选择无关，因此确定了 M 上一个良定义的度量 $\hat{g}$。根据构造， $\hat{g}$ 在所有局部共形变换下保持不变。反向结论显然：若 $f \in H_p$ 是共形类中某个 $\hat{g}$ 的等距变换，且满足 $f(p) = p$，则 $(f^*g)_p = g_p$，因此 $\mathrm{d}f_p \in \mathsf{O}(T_pM, g_p)$。

(2) 若 $f \in H_p$ 满足 $df_p = e^{\lambda}\mathbf{1}$，则对于 $(1,\ 3)$ 外尔张量，我们有 $W_p = f^*W_p = e^{2\lambda}W_p$，因此 $W_p = 0$ 当 $\lambda \neq 0$时。结论由共形局部齐性得出。

(3) 各向同性群 H_p 是代数的。这是 Gromov 刚性变换群理论的推论，详见附录 A。由于 $\ker \rho_p$ 是 H_p的闭子群，它也是代数的。特别地，它只有有限个连通分支。如果该核是有限群，那么它必定是平凡的。事实上，有限群保持某个黎曼度量不变；因此，核中的任一元素都是可线性化的，也就是说，可通过指数映射共轭到其导数。因此，除非该元素本身是平凡的，否则它在 p处不可能具有平凡导数。由此可知，如果 ρ_p 不是单射，那么单位连通分支 $(\ker \rho_p)^0$ 非平凡。设 $\phi^t \in (\ker\ \rho_p)^0$ 是一个非平凡单参数子群，满足 $\rho_p(\phi^t) = \mathbf{1}$。那么，集合 $\{d_p\phi^t\}$ 在 $\mathsf{CO}(T_pM)$中相对紧。根据 $[14,\ 定理\ 1.4]$, ，该定理适用于维数$\geqslant 3$，此流要么是非本质的，要么该度量是共形平坦的。然而，由于 ϕ^t具有平凡导数，它必定是本质的。因此，该度量是共形平坦的。

(4) 在局部齐性情形下，对于任意 $p \in M$ ，各向同性群 H_p 可视为某个 $\mathsf{GL}(m, \mathbb{R})$ 的代数子群 H ，而导数表示可视为一个从 H 到 $\mathsf{GL}(T_pM) \simeq \mathsf{GL}(n+2, \mathbb{R})$ 的代数同态（见附录 A）。因此，下面的引理 4.2 表明， $\rho_p(H_p)$ 包含其在 $\mathsf{GL}(n+2, \mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包的单位连通分支；该闭包包含于 $\mathsf{CO}(1, n+1)$，因为后者在 $\mathsf{GL}(n+2, \mathbb{R})$ 中是扎里斯基闭的。

□

引理 4.2。 设 H 是 $\mathsf{GL}(m, \mathbb{R})$ 的代数子群，且 $\rho\colon H \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的代数同态。那么， $\rho(H)$ 在其于 $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包里具有有限指数。换言之，它们的单位连通分支相同。

证明。 给定子群 $G \subset \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$，我们用 G^0 表示其单位连通分支，用 $\mathsf{Lie}(G)$表示其李代数，并用 $G^{\mathbb{C}}$ 表示其在 $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$中的扎里斯基闭包。若 G 是 $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$的代数子群，则根据 $[8,\ 第\ 285]$ 页的注记，有

$$G^0 = G^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})^0, \tag{5}$$

其中 $G^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) = G^{\mathbb{C}} \cap \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$。此外，

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}). \tag{6}$$

同态 ρ 延拓为 $\mathbb{R}$上的代数同态，

$$\rho_{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}} \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}).$$

其微分 $d\rho$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性映射，经复化后延拓为一个 $\mathbb{C}$-线性映射。由于 H 是代数的，根据 (5)，其单位连通分支满足 $H^0 = H^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})^0$。由于复代数群在代数同态下的像是扎里斯基闭的（例如参见 [20, 第 7.4 段，命题 B]或 [29, 命题 1.2.5，第 11] 页），可得$G := \rho_{\mathbb{C}}(H^{\mathbb{C}})$ 是 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ 的代数子群。事实上， $G = \rho_{\mathbb{C}}(H^{\mathbb{C}}) = \rho(H)^{\mathbb{C}}$。设 R 为 $\rho(H)$ 在 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包。那么 R 是一个代数群，其在 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ 中的扎里斯基闭包等于 $\rho(H)$ 在 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ 中的扎里斯基闭包，因而等于 G。因此，由 (5) 可得 $R^0 = G(\mathbb{R})^0$。现在，由 (6) 得 $\mathsf{Lie}(\rho(H)) = \mathrm{d}\rho(\mathsf{Lie}(H)) = \mathrm{d}\rho(\mathsf{Lie}(H^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$，且 $\mathsf{Lie}(R) = \mathsf{Lie}(G(\mathbb{R})) = \mathsf{Lie}(\rho_{\mathbb{C}}(H^{\mathbb{C}})) \cap \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$。由于 ρ 定义在 $\mathbb{R}$上，映射$d\rho_{\mathbb{C}}$ 与复共轭交换，因此 $\mathrm{d}\rho_{\mathbb{C}}(\mathsf{Lie}(H^{\mathbb{C}})) \cap \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{d}\rho(\mathsf{Lie}(H^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$。由此可得 $\rho(\mathrm{H}) = \mathsf{Lie}(R)$，因此 $\rho(H)$ 和 R 具有相同的单位连通分支。□

H_p 在 ρ_p 下的像包含其在 $\mathsf{CO}(1$ 中的扎里斯基闭包的单位连通分支，$n+1)$ 这意味着它的李代数是 $\mathsf{CO}(1$ 中某个代数子群的李代数，$n+1)$。这一观察对下文至关重要。原因在于，我们可以运用代数群理论中的以下事实，并将其表述为关于 $\mathsf{CO}(1$ 的子群的命题，$n+1)$。证明可参见 $[20,$ 定理 15.3，第 $99],$ 页，或 $[29,$ 定理 3.1.6，第 $30]$ 页。

引理 4.3（代数群中的若尔当分解）。 设 $\mathbf{H} \subset \mathsf{CO}(1,n+1)$ 是一个代数群，其李代数为 $\mathfrak{h}$ 。

(1) 设 $B \in \mathbf{H}$。那么存在（唯一的）交换元素 $B_s, B_u \in \mathbf{H}$ 使得$B = B_sB_u$，其中 B_s 是半单的（即在 $\mathbb{C}$上可对角化），而 B_u 是幂零的。特别地， $B_u \in \mathbf{H} \cap \mathsf{O}(1,n+1)$。（这称为 B 在$\mathbf{H}$中的若尔当分解）。*(2)* 设 $X \in \mathfrak{h}$。那么存在唯一的元素 $X_s, X_u \in \mathfrak{h}$ 使得 $X = X_s + X_u$，且$e^{tX} = e^{tX_s}e^{tX_u}$ 是 e^{tX} 在$\mathbf{H}$中的若尔当分解。

此外，存在交换元素 $B_h, B_e \in \mathbf{H}$ 使得 $B_s = B_hB_e$，其中 B_h 是双曲型（即可对角化，且只有实特征值），而 B_e 是椭圆型（即所有特征值都位于 $\mathbb{S}^1$上）。特别地， $B_e \in \mathbf{H} \cap \mathsf{O}(1, n+1)$。

将此结果应用于线性各向同性表示的像 $\mathbf{H}^p$ ，可得以下结论。

推论 4.4。 假设 (M,g) 是弱本质的且局部共形齐性。那么

(1) H_p 的像 $\mathbf{H}^p := \rho_p(H_p) \subset \mathsf{CO}(T_pM, g_p)$ 包含其在 $\mathsf{CO}(T_pM) \simeq \mathsf{CO}(1,n+1)$ 中的扎里斯基闭包的单位连通分支，且不包含于 $\mathsf{O}(T_pM, g_p)$。*(2)*$\mathbf{H}^p$ 有有限个连通分支。特别地，其李代数 $\mathfrak{h}_p \subset \mathfrak{co}(T_pM) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(T_pM, g_p) \subset \mathfrak{gl}(T_pM)$ 非平凡，且不包含于$\mathfrak{so}(T_pM, g_p)$。*(3)* $\mathbf{H}^p$ 包含一个单参数子群 $B^t \in \mathsf{CO}(T_pM, g_p)$ ，其形式为 $B^t = \mathrm{e}^{t\alpha}\mathrm{e}^{tA}$，其中 $\alpha > 0$，且 $A \in \mathfrak{so}(T_pM, g_p)$ 是一个无穷小（非平凡） *boost*，即 A

是双曲型的，特征值为 ± 1 和0。将基重新排列后， A =diag$(1,-1,0,\ldots,0)$，从而 $B^t = e^{t\alpha}\,\mathrm{diag}\,(e^t, e^{-t}, 1,\ldots,1)$。

证明。 (1) 这是命题 4.1 的推论。

(2) 由于 H_p 是代数群（见附录 A），它只有有限个连通分支；这是代数群的一般性质（例如，见 [20,命题 7.3，第 53] 页，或 [29, 命题 1.2.1，第 10]页）。因此，其像 $\mathrm{H}_p = \rho(H_p)$也具有同样的性质。此外，由 (1) 可知，H^p 不包含于 $\mathsf{O}(T_pM, g_p)$，因而不是有限群。因此，它的李代数非平凡。现在，取一个不属于 $\mathsf{O}(T_pM, g_p)$的元素 $f \in \mathrm{H}^p$ 。由于 H^p 只有有限个连通分支，某个迭代 f^k 属于 H^p的单位连通分支 H_p^0 ，并且仍满足 $f^k \notin \mathsf{O}(T_pM, g_p)$。因此，单位连通分支 H_p^0不包含于 $\mathsf{O}(T_pM, g_p)$，这意味着它的李代数 $\mathfrak{h}_p$ 不包含于$\mathfrak{so}(T_pM, g_p)$。(3) 根据 (2)， $\mathfrak{h}_p$ 不包含于 $\mathfrak{so}(T_pM, g_p)$。因此，存在一个不包含于 $\mathsf{O}(T_pM, g_p)$的单参数子群 B^t 。于是， B^t 的给定形式是引理 4.3 的推论。

□

注 4.5. 从动力学观点来看，固定p 且由 $\alpha\mathbf{1} + A$ 生成的共形单参数群在 $\alpha > 1$时是扩张的，在$\alpha = 1$时有一个维数为 1 的中心流形，在 $\alpha < 1$时则是双曲型的，并具有一个维数为 1 的稳定流形。不过，我们将统一处理这些情形，证明它们会导出平面波结构或共形平坦性。

4.2. **约化至抛物型各向同性子群**。回顾一下， $\mathfrak{so}(1, n+1)$ 是一个 $|1|$-分次李代数，将其按 ad_A的特征子空间分解，其中 A 是分次对合$A = \mathsf{diag}\ (1, -1, 0, \ldots, 0)$,

$$\mathfrak{so}(1, n+1) = \mathfrak{s}^{-1} \oplus \mathfrak{s}^0 \oplus \mathfrak{s}^1, \quad \text{with } \mathfrak{s}^0 = \mathfrak{co}(n) = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{so}(n), \tag{7}$$

并通过 $\mathfrak{so}(1, n+1)$的 Killing 型与 $(\mathfrak{s}^1)^* \simeq \mathfrak{s}^{-1}$ 对应；二者作为 $\mathfrak{co}(n)$-模均同构于 $\mathbb{R}^n$。我们还将 $\mathbb{R}^{1,n+1}$ 分解为 A的特征子空间：

$$\mathbb{R}^{1,n+1} = V^{-1} \oplus V^0 \oplus V^1,$$

使得 $\mathfrak{s}^\mu(V^\nu) \subset V^{\mu+\nu}$，其中我们约定，当 $V^\mu = \{0\}$if $\mu \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$时。极大抛物子代数

$$\mathfrak{p}^\pm = \mathfrak{s}^0 \ltimes \mathfrak{s}^\pm$$

分别是零直线 $V^{\pm 1}$的稳定化子。在 $\mathfrak{s}^\mu$， $A^t := \mathsf{e}^{tA} = \mathsf{diag}\ (\mathsf{e}^t,\ \mathsf{e}^{-t},\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)$的作用为

$$\mathsf{Ad}_{A^t} : \mathfrak{so}(1, n+1) \ni X \longmapsto A^t X A^{-t} \in \mathfrak{so}(1, n+1),$$

其特征值为 $\mathsf{e}^{\pm t}$ 和 1。现在我们有如下结果。

引理 4.6。 设 $\mathbf{H} \subset \mathsf{CO}(1,n+1)$ 是一个代数子群，其李代数为 $\mathfrak{h}$，并假设 $\mathfrak{h}$ 不包含于 $\mathfrak{so}(1,n+1)$中。那么，或者 $\mathfrak{h}$ 包含单位元，或者 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{R}^{1,n+1}$中稳定一条零直线。

证明。令 $W \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$ 为 $\mathbb{R}^{1,n+1}$ 中在 $\mathfrak{h}$ 作用下不变的最大正定子空间的正交补。若 W 是 1 维的，则 $\mathfrak{h}$ 包含于 $\mathbb{R}\mathbf{1}\oplus\mathfrak{so}(n+1)$ 中。由于假设 $\mathbf{H}$ 是代数的，引理 4.3 蕴含 $\mathbf{1}\in\mathfrak{h}$。否则，$W$ 同构于闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{1,k}$，其中 $1 \leqslant k \leqslant n+1$，且不存在任何非退化的$\mathfrak{h}$-不变真子空间。令 $\check{}\,\mathfrak{h} \subset \mathfrak{co}(W) \simeq \mathfrak{co}(1,k)$ 表示 $\mathfrak{h}$ 在 W 上的限制，并令 $\check{}\,\mathfrak{h}_0$ 表示其在 $\mathfrak{so}(W) \simeq \mathfrak{so}(1,k)$ 上的投影。由于 $\check{}\,\mathfrak{h}_0$ 与 $\check{}\,\mathfrak{h}$ 具有相同的不变子空间，因此，要么 $\mathfrak{h}_0$ 在 W 中存在不变零直线，此时 $\mathfrak{h}$ 因而 $\mathfrak{h}$ 也存在不变零直线，结论得证；要么 $\check{}\,\mathfrak{h}_0$ 不可约，因此根据 [7]，等于 $\mathfrak{so}(1,k)$。在后一种情况下，$\check{}\,\mathfrak{h}$ 包含 $\mathfrak{so}(1,k)$ 的分次元 A。事实上，由于 $\check{}\,\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{so}(1,k)$，存在 $v_\pm \in \mathfrak{s}^\pm \subset \mathfrak{so}(1,k)$，使得 $[v_+,v_-] = A$ 且 $a_\pm \in \mathbb{R}$，从而 $w_\pm = a_\pm\mathbf{1} + v_\pm \in \check{}\,\mathfrak{h}$。于是，且 $[w_+,w_-] = A \in \check{}\,\mathfrak{h}$。这意味着 $A + X \in \mathfrak{h}$，其中 $X \in \mathfrak{so}(n+1-k)$ 与 A 对易，因此 $\exp(A)\exp(X) \in \mathbf{H}$。由引理 4.3 可得 $\exp(A) \in \mathbf{H}$，故 $A \in \mathfrak{h}$。

最后，由于 $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{so}(1,n)$，它包含 $\alpha\mathbf{1} + C$，其中 $C \in \mathfrak{so}(1,n+1)$；但再次根据 $\mathbf{H}$ 为代数的这一假设以及引理 4.3，C 必须是分次元的倍数，而我们已经证明该分次元包含在 $\mathfrak{h}$中。因此，$\mathbf{1} \in \mathfrak{h}$。□

推论 4.7. 假设 (M,g) 是弱本质的且局部共形齐性的，其在 $p \in M$处的各向同性子群为 $\mathbf{H}^p$。那么，要么 (M,g) 是共形平坦的，要么$\mathbf{H}^p$ 的李代数 $\mathfrak{h}_p$ 包含于 $\mathfrak{co}(T_pM)$ 中某条零直线的稳定化子内，即包含于 $\mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathfrak{p}^\pm$中。

证明。 根据命题 4.1，$\mathbf{H}^p$ 的李代数是 $\mathsf{CO}(1,n+1)$的某个代数子群的李代数。此外，根据推论 4.4，它不包含于 $\mathfrak{so}(1,n+1)$中。因此，引理 4.6 适用，我们得出结论：要么 $\mathfrak{h}_p$ 包含单位元，要么它稳定一条零直线。在前一种情况下，命题 4.1 意味着 (M,g) 是共形平坦的。□

4.3. **单连通情形**。 注意到 $(M,\ g)$ 及其万有覆盖具有相同的局部共形变换。此外，在局部共形齐性的情形下，命题 4.1 中对弱本质性的刻画表明，$(M,\ g)$ 是弱本质的，当且仅当其万有覆盖是弱本质的。因此，在假设弱本质性和局部共形齐性的情况下，我们可以假设 M 是单连通的。在此假设下，我们有以下性质。

命题 4.8。 设 (M,g) 是一个局部共形齐性的伪黎曼流形，且 M 单连通。令$\mathbf{H}^p$ 表示如前所述的各向同性表示的像。则

(1) 在 M 的开子集上定义的任意共形向量场都可以延拓为 M 上全局定义的共形向量场。
(2) 设 $\mathfrak{g}$ 为 M 上全局共形向量场的李代数。则 $\mathfrak{g}$ 在 M 上传递作用；也就是说，对任意 $p \in M$，求值映射 $X \in \mathfrak{g} \mapsto X(p) \in T_pM$ 都是满射。

(3) 假设 M 不是共形平坦的。设 $\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} \mid X(p) = 0\}$ 为 p 的稳定子代数。它通过映射 $\mathfrak{h}_p$ *(*$\mathbf{H}^p$ 的李代数*)* 被自然地识别为$\mathfrak{g}_p \ni X \mapsto \nabla X|_p \subset \mathfrak{co}(T_pM)$，其中 ∇ 是 g 的 *Levi-Civita* 联络。证明。(1) 在假设 (M, g) 是解析的条件下，这一点已在 [21, 引理 3] 中证明。由于局部共形齐性，这一假设成立。(2) 参见附录 A，“伪群作用与局部 Killing 向量场”一段。(3) 根据附录 A“通过伪群作用得到局部迷向”一段，$\mathfrak{g}_p$ 被识别为 H_p 的李代数；而根据命题 4.1 的第 (3) 项，后者又被识别为 $\mathfrak{h}_p$，即$\mathbf{H}^p$ 的李代数。

□

该命题使我们在下文中可以在经过万有覆盖之后，处理全局共形向量场的（本质且传递的）李代数 $\mathfrak{g}$。

4.4. 关于 B^t对 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用。 我们假设 (M, g) 是弱本质的。根据推论 4.4，$\mathbf{H}^p$ 包含一个单参数子群 $B^t = \mathsf{e}^{t\alpha}\mathsf{e}^{tA}$，其中 $\alpha > 0$ 且 A 是 $\mathfrak{so}(1, n+1)$的分次元。我们希望理解 $B^t = \mathsf{e}^{t\alpha}\mathsf{e}^{tA}$ 对 (M, g)的全局共形向量场李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用。我们进一步假设各向同性表示 ρ_p 是单射的；根据命题 4.1，当流形不是共形平坦时，该条件成立。在此假设下，各向同性代数 $\mathfrak{g}_p$ 与其像 $\mathfrak{h}_p$相同（见命题 4.8 的第三点）。为简化记号，我们设 $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_p$。于是，作为向量空间，$\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}),$，其中 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 自然地与 T_pM相同。

至于 B^t-伴随作用，可以如下描述：

- 由于 Ad_{B^t} 保持 $\mathfrak{h}$不变，它作用于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$。其在此处的作用与 B^t 在T_pM上的作用一致，即
$$B^t = e^{t\alpha}\,\mathrm{diag}\,(e^t, e^{-t}, 1, \ldots, 1) = \mathrm{diag}\,(e^{(\alpha+1)t}, e^{(\alpha-1)t}, e^{\alpha}, \ldots, e^{\alpha}).$$
- 在 $\mathfrak{h}$上，B^t可视为 $\mathsf{CO}(T_pM) = \mathbb{R}^* \times \mathsf{O}(T_pM, g_p)$中的一个单参数子群，而 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{co}(T_pM) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(T_pM, g_p)$的一个李子代数。因此，$\mathsf{Ad}_{B^t}$在 $\mathfrak{h}$上的作用只不过是其在 $\mathfrak{co}(T_pM)$上的 Ad-作用的限制，
$$\mathsf{Ad}_{B^t} : \mathfrak{co}(T_pM) \to \mathfrak{co}(T_pM), \quad X \mapsto B^t X B^{-t}.$$
由于 B^t 作用于 T_pM 时是可对角化的，伴随作用 Ad_{B^t} 在 $\mathfrak{co}(T_pM)$ 上也可对角化，其特征值为 $e^{\pm t}$ 和 1。因此，Ad_{B^t}在 $\mathfrak{h}$ 上的作用是可对角化的，其特征值构成 Ad_{B^t} 在 $\mathfrak{co}(T_pM)$ 上的特征值的一个子集。

注意，伴随作用 Ad_{B^t} 在 $\mathfrak{g}$ 上不一定可对角化，因为它可能无法保持一个与 $\mathfrak{h}$ 互补且同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong T_pM$的子空间不变。然而，在这种情况下，我们有如下结论。

引理 4.9. 存在一个由可对角化自同构构成的单参数群 $\mathcal{B}_t$，其作用与 Ad_{B^t} 在 $\mathfrak{h}$和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的作用一致（也就是说，在一个与 $\mathfrak{h}$ 互补的不变子空间上）。

证明. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的一个代数子群（因为它由 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中保持括号运算的元素组成）。因此，将 $\mathrm{Ad}_{B^t} = S_t U_t$ 分解为其半单部分和幺幂部分时， S_t 和 U_t 都是 $\mathfrak{g}$ 的自同构。于是， S_t 就是所需的由对角自同构构成的单参数群，它在 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上具有与 Ad_{B^t} 相同的特征值。□

4.5. **典范 $\mathfrak{g}$不变类光分布**。在推论 4.7 中，我们已经看到，如果 (M, g) 是弱本质的且非共形平坦，那么 p处的各向同性代数在 ρ_p 下的像包含于 T_pM中某条零直线的稳定化子内，因此保持这条零直线不变。首先，我们将针对任意不变子空间更一般地描述这一情形。

设 $\mathfrak{g}$ 为 (M, g)的共形向量场李代数。我们有一个从 $\mathfrak{g}$到 M, $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{X}(M)$的向量场的嵌入。设 $\mathbf{G}$ 为李代数是 $\mathfrak{g}$的连通单连通李群。存在 $\mathbf{G}$ 在 M 上的局部作用，使得 $X \in \mathfrak{g}$ 与和 X相关联的基本向量场 $q \in M \mapsto \widetilde{X}(q) := \mathrm{d}\,\mathrm{d}t\big(\exp(tX)(q)\big)|_{t=0}$ 一致（见 [27, 第二章, 定理 XI 及其推论]）。

若 $q \in M$，则我们用 $\mathfrak{g}|_q$ 表示在 p 处的求值映射的像

$$\mathfrak{g}|_q := \{X(q) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

对于在 M上局部作用的 $\psi \in \mathbf{G}$，其中 $\psi^* g = f^2 g$，我们有

$$\psi_* \widetilde{X} = \widetilde{\mathrm{Ad}_\psi(X)}. \tag{8}$$

因此，我们通过以下方式将 $\psi(p)$ 处的度量与 p 处的度量联系起来

$$g(\widetilde{X}, \widetilde{Y})_{|\psi(p)} = f^{-2}(\psi(p)) g_p\big(\widetilde{\mathrm{Ad}_{\psi^{-1}}(X)}_p, \widetilde{\mathrm{Ad}_{\psi^{-1}}(Y)}_p\big).$$

命题 4.10. 设 $\mathfrak{g}$ 为 M的共形向量场代数，并假设 $\mathfrak{g}$在 M上传递作用。固定一个点 $p \in M$，设 $\mathfrak{g}_p$为 p处的各向同性子代数，其在各向同性表示 ρ_p下的像为 $\mathfrak{h}_p$ 。设 V_p 为在 $\mathfrak{h}_p \subset \mathfrak{co}(T_pM)$作用下不变的 T_pM 的子空间。则

(1) 存在一个向量分布 V，其在 p 处的纤维为 V_p，且在 $\mathfrak{g}$ 下不变；也就是说，对于所有局部作用于 M 的局部共形变换 $\psi \in G$，均有 $d\psi_p(V_p) = V_{\psi(p)}$ 。*(2)* 若存在一个李代数 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$，其稳定子代数为 $\mathfrak{l}_p$，并且同构$T_pM \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$ 限制后仍为同构 $V_p \simeq \mathfrak{l}/\mathfrak{l}_p$,，则 V 是对合的，其在 $\psi(p)$ 处的纤维由 $Ad_\psi(\mathfrak{l})|_{\psi(p)}$ 张成，其中 $\psi \in G$ 局部作用于 M。特别地，若 $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则对于每个 $q \in M$， V_q 由 $\mathfrak{l}|_q$ 张成。*(3)* 若 L 是与 $\mathfrak{l}$ 对应的李群，则经过 $q = \psi(p)$ 的叶由 q 在 $\psi L \psi^{-1}$ 下的轨道给出。特别地，若 $\mathfrak{l}$ 是理想，则经过 q 的积分流形是 q 在 L 下的轨道。证明。*(1)* 由 $\mathfrak{g}$-传递性，可将 V_p 输运到任意点：对于 $q = \psi(p)$，取 $\psi \in G$，定义 $V_q := d\psi_p(V_p)$。由于 $\mathfrak{h}_p$ 保持 V_p 不变，这一定义是良定的。由此定义了一个向量分布 V，它在 $\mathfrak{g}$ 的作用下不变。*(2)* 由方程 *(8)* 可得 $V_q = d\psi_p(V_p) = d\psi_p(\mathfrak{l}|_p) = (\psi_* \mathfrak{l})|_q = Ad_\psi(\mathfrak{l})|_q$。由于 $\mathfrak{l}$ 是李代数， V 是对合的。

(3) 令 L 为 p 在连通李群$\mathbf{L}$ 的（局部）作用下的轨道，其中~的李代数为 $\mathfrak{l}$。则 $T_pL = \mathfrak{l}|_p = \{X(p) \mid V \in \mathfrak{l}\}$。根据 $\mathfrak{l}$的条件，我们还有 $T_pL = V_p$，因此 L 在 p 处与 N_p相切。此外， L 是经过 p的 V 的积分流形。事实上，对于任意满足 $\psi \in \mathbf{L}$ 的 $q = \psi(p) \in L$ ，都有 $V_q = \mathrm{d}\psi_p(V_p) = \mathrm{d}\psi_p(T_pL) = T_qL$，即 N 在 L 上处处与 L 相切。最后，由$\mathbf{G}$的局部传递性， V 与 L在局部共形变换下的像相切。特别地，若 $q = \psi(p)$，则经过 q 的 V 的积分流形是共轭群 $\psi\mathbf{L}\psi^{-1}$ 的轨道。

□

现在我们回到所讨论的情形。设 $B = \mathrm{diag}\ (\alpha+1, \alpha-1, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathfrak{h}_p$，并用$V^\mu$ 表示 B 在 T_pM 中对应于特征值 μ的特征子空间。则

$$T_pM = V^{\alpha+1} \oplus V^{\alpha-1} \oplus V^\alpha,$$

其中 $V^{\alpha\pm1}$ 为零直线，而 V^α 为欧几里得空间。注意

$$\mathfrak{s}^\mu(V^\nu) = V^{\mu+\nu},$$

其中 $\mathfrak{s}^\mu$ 如(7)所定义。特别地，抛物子代数

$$\mathfrak{p}^\pm = \mathfrak{s}^0 \ltimes \mathfrak{s}^\pm = \mathfrak{stab}_{\mathfrak{so}(1,n+1)}(V^{\alpha\pm1})$$

恰好分别是零直线 $V^{\alpha\pm1}$的稳定子。

由推论 4.7，若 (M, g) 是弱本质的，则它或者共形平坦，或者 $\mathfrak{h}_p$ 包含于 $\mathfrak{co}(1, n+1)$ 中某条零直线的稳定化子中。因此，命题 4.10 的第一点给出如下结论。

推论 4.11. 设 (M, g) 为具有由共形向量场构成的本质的传递李代数 $\mathfrak{g}$ 的洛伦兹流形。则或者 (M, g) 共形平坦，或者它容许一个零直线分布 N，从而容许一个零超平面分布 $N^\perp$，二者在 $\mathfrak{g}$的作用下不变，且 $N_p^\perp = V^\alpha \oplus V^{\alpha\pm1}$。

5. Towards a Heisenberg algebra of Killing vector fields

从现在起，我们假设各向同性表示 ρ_p 是单射，因此各向同性代数 $\mathfrak{g}_p$ 可通过 ρ_p与其像 $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_p$ 相对应，而 $\mathfrak{g}$ 作为向量空间与 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$同构。我们还假设 $\mathfrak{h}$ 包含于 $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{p}^+$ 或 $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{p}^-$中。对于 $\mathfrak{h} \subset \mathbb{R} \oplus \mathfrak{p}^\pm$，$\mathrm{ad}_B$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的作用分别具有特征值 0 和 ±1。如第 4.4 小节所述，ad_B 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的诱导作用与 B 在切空间上的作用一致，即其特征值为 $(1 \pm \alpha)$ 和 α。因此，ad_B 在 $\mathfrak{g}$ 上的广义特征值集合为

$$\sigma_B := \{\pm1, 0, \alpha-1, \alpha, \alpha+1\}.$$

现在，令 $\mathcal{B} = B_s \in \mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$ 为 ad_B 的半单部分，如引理 4.9 所述。于是 $\mathcal{B}$ 可对角化，其特征值包含于 σ_B 中。将相应的

特征子空间记为

$$\mathfrak{g} = \sum_{\mu \in \sigma_B} \mathfrak{g}^{\mu}.$$

由于 $\mathcal{B}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的导子，特征子空间分解满足

$$[\mathfrak{g}^{\mu}, \mathfrak{g}^{\nu}] \subset \mathfrak{g}^{\mu+\nu}, \tag{9}$$

按照惯例，若 $\mu \notin \sigma_B$，则 $\mathfrak{g}^{\mu} = \{0\}$。我们得到如下分解

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{\pm 1}) + (\mathfrak{g}^{\alpha-1} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}), \quad \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{\pm 1},$$

其中，中间的和 $+$ 不一定是直和。

定义 $\mathfrak{h}^{00} := \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{h} \cap \mathfrak{so}(1, n+1) \subset \mathfrak{so}(n)$。我们还假设 $\mathfrak{g}^0 = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{h}^{00}$；否则，$\mathfrak{h}$ 将包含相似对角单参数群 $\mathrm{diag}\,(e^{\alpha t}, \ldots, e^{\alpha t})$，且度量将是共形平坦的。

记号：给定一个子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$，我们记作 $\mathfrak{k}_p := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}_p$，其中 $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{h}$ 表示 $p \in M$ 处的稳定子代数。

由于根据假设 $\alpha \neq 0$，必要时可用 $-B$ 替换 B，从而进一步假设 $\alpha > 0$。固定 α 的符号后，我们必须考虑 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^+$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ 两种情况。本节的目标是证明以下命题。

命题5.1。设 (M, g) 是一个维数为 $n+2$的洛伦兹流形，具有一个由共形向量场组成的传递李代数 $\mathfrak{g}$，以及 $p \in M$处的稳定子代数 $\mathfrak{h}$。假设$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{\pm 1}$且 $\mathfrak{g}^0 = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{h}^{00}$满足 $B = \mathrm{diag}(\alpha+1, \alpha-1, \alpha, \ldots, \alpha)$。那么，在 g 的共形类中存在一个度量$\hat{}g$，以及一个关于$\hat{}g$ 的 *Killing* 向量场代数 $\mathfrak{g}_1$，它在 p处局部传递地作用。此外，

(1) 如果$\alpha \notin \{\frac{1}{2}$、1、$2\}$,，那么 $(M$、$g)$是共形平坦的。*(2)* 如果$\alpha \in \{\frac{1}{2}$、1、$2\}$且 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$，那么在 M上存在一个余维一类光叶状结构$\mathcal{F}$，使得逐叶保持$\mathcal{F}$ 的共形向量场理想 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ 满足：(a) 存在一个海森堡型子代数 $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{l}$，其中心包含 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$，并在 $\mathcal{F}$的叶上局部传递地作用；(b) 零直线丛 $\mathcal{F}^{\perp}$ 由一维子空间 $\mathfrak{g}^{\alpha+1} \subset \mathfrak{f}$定义，并且(c) $\mathfrak{f}$ 包含于 $\mathfrak{g}_1$中，即它通过度量$\hat{}g$ 的*Killing*场作用，其中该度量属于共形类。*(3)* 如果 $\alpha \in \{\frac{1}{2}$、1、$2\}$且 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{-1}$，则在 p的某个邻域内存在具有相同性质的此类叶状结构。

–

引理 5.2。若 $\alpha \notin \{\frac{1}{2}1, 2\}$且 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{\pm 1}$，则 $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^{\alpha-1} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$是一个在 M上局部单传递作用的阿贝尔子代数。此外，共形类中存在一个度量，使得 $\mathfrak{m}$ 以 *Killing* 向量场的形式作用。特别地，该度量是共形平坦的。

证明。 $\mathfrak{m}$是阿贝尔的，这由式 (9) 可立即得出；随后，引理由 $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ 以及命题 4.1 的第一条得证。□

从现在起，我们假设 $\alpha \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$。这些情形更为复杂。

5.1. 情形 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}^0\oplus\mathfrak{g}^1$。当 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}^0\oplus\mathfrak{g}^1$ 时，第4.5节中定义的典范分布 $N^\perp$ 是可积的，并定义了 M 上的余维一类光叶状结构 $\mathcal{F}^+$，且该叶状结构在 $\mathfrak{g}$ 的作用下保持不变。事实上，定义

$$\mathfrak{n}^+:=\mathfrak{g}^\alpha\oplus\mathfrak{g}^{\alpha+1}.$$

设 $\mathfrak{n}$ 表示由 $\mathfrak{n}^+$生成的代数。由于 $[\mathfrak{n}^+,\mathfrak{n}^+]\subset\mathfrak{n}^++\mathfrak{h}$，我们有 $\mathfrak{n}|_p=\mathfrak{n}^+|_p=V^\alpha\oplus V^{\alpha+1}=N_p^\perp$，从而 $N_p^\perp\simeq\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_p$。该断言随后由命题 4.10得出。

设 ξ为经过 p且横截于 $\mathcal{F}^+$的局部曲线。由于 $\mathcal{F}^+$是 $\mathfrak{g}$-不变的， $\mathfrak{g}$在 ξ上诱导一个作用。设 $\mathfrak{X}(\xi)$ 表示 ξ上向量场的（无穷维）李代数。于是我们有一个李代数表示

$$\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(\xi), \tag{10}$$

其核恰好由在 p的某个邻域内与 $\mathcal{F}^+$ 相切的共形向量场组成。

通过研究 $\mathfrak{g}$ 横截于$\mathcal{F}^+$的作用，即在 ξ上的作用，我们将证明由 $\mathfrak{n}^+$ 生成的子代数分别保持 $\mathcal{F}^+$ 的每一片叶，并且该作用在每一片叶上局部可递。事实上，在此情形下，该代数将是海森堡型的，从而给出命题5.1中所述的所需叶状结构 $\mathcal{F}:=\mathcal{F}^+$ 。

引理 5.3. 在 p 的某个邻域内， $\mathfrak{n}^+$ 的作用保持 $\mathcal{F}^+$ 的所有叶不变，并逐叶作用（等价地，该邻域内的子空间 $\mathfrak{n}^+|_q\subset T_qM$ 均与 $\mathcal{F}^+$ 相切）。此外， $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 是 1 维的，且在 $\mathfrak{g}$ 的作用下不变，因此生成零直线丛 $\mathcal{F}^{+\perp}$。

证明。 **情形** $\boldsymbol{\alpha\in\{1,\ 2\}}$。在此情形下， $\mathfrak{n}^+$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想。因此，根据命题5.1中的 (3)，在 p 处与 $\mathfrak{n}^+|_p$ 相切的 $\mathfrak{g}$ 不变叶状结构，即 $\mathcal{F}^+$，处处与分布 $q\mapsto\mathfrak{n}^+|_q$ 相切。此外， $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 在 $\mathfrak{g}$ 的作用下不变，因此处处与 $\mathcal{F}^+$ 相切。

情形 $\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{2}}$。在此情形下， $\mathfrak{g}^0=\mathbb{R}B\oplus\mathfrak{h}^{00}$，且 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0\oplus\mathfrak{g}^1=\mathbb{R}B\oplus\mathfrak{h}^{00}\oplus\mathfrak{g}^1$。我们将证明 $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)=0$。设 U 是 $\mathfrak{g}^{\alpha-1}$ 的生成元，并设 $X\in\mathfrak{g}^\alpha$。那么

$$[B,U]=-\tfrac{1}{2}U,\quad [B,X]=\tfrac{1}{2}X,\quad [X,U]\subset\mathbb{R}B\oplus\mathfrak{h}^{00}.$$

由于 U 在 p的一个邻域内横截于 $\mathcal{F}$ ，它在 ρ 下的像非零。此外，$[\rho(B),\ \rho(U)]=-\frac{1}{2}\rho(U)$，因此 $\rho(B)$ 也非零且不与 $\rho(U)$共线。下述观察将被多次使用：给定 $\varphi\in\mathfrak{h}^{00}$，元素 $\rho(\varphi)$ 对任意 $a\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$都不能等于 $a\rho(B)$，因为 $\rho(B)$ 在 $\mathfrak{g}^{\alpha-1}$上非平凡地作用，而 $\mathfrak{h}^{00}$ 在其上平凡地作用。 $\mathbb{R}$上向量场的有限维李代数具有最大维数3。可以验证，若对某个 $X\in\mathfrak{g}^\alpha$有 $\rho(X)\neq0$ ，则 $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)\subset\mathbb{R}\rho(X)$。因此， $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)$ 的维数至多为一。于是，在$\dim(\mathfrak{g}^\alpha)=n$下，至少存在 $(n-1)$ 个线性无关的共形向量场 e_1，……， $e_{n-1}\in\mathfrak{g}^\alpha$，使得对所有 $i=1$，……， $n-1$成立 $\rho(e_i)=0$。由于 $[\mathfrak{g}^\alpha,\ \mathfrak{g}^{\alpha-1}]\subset\mathfrak{h}^0=\mathbb{R}B\oplus\mathfrak{h}^{00}$，这一点连同上述观察蕴含：对所有$i=1$，……， $n-1$，有 $[e_i,\ U]\in\mathfrak{h}^{00}$。设 V为 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$的一个生成元，并令 $W:=[V,\ U]\in\mathfrak{h}^1$。雅可比恒等式给出 $[W,\ X]=\frac{3}{2}\lambda_XV$，其中 $\lambda_X\in\mathbb{R}$由条件 $[X,\ U]-\lambda_XB\in\mathfrak{h}^{00}$定义。特别地，对所有 $i=1$，……， $n-1$有 $[W,\ e_i]=0$。因此，要么 $W=0$，要么 $[W,\ \mathfrak{g}^{\alpha-1}]=\mathbb{R}e_n$，其中$e_n\in\mathfrak{g}^\alpha$ 非零且满足 $[W,\ e_n]\neq0$。假设我们处于后一种情形。则

将雅可比恒等式应用于三元组 (e_n, U, W) 会得出一个矛盾，从而推出$W = 0$。因此， $[e_n, U] \in \mathfrak{h}^{00}$。若 $[\rho(e_n), \rho(U)] = 0$，则 $\rho(e_n) = 0$，论证即告完成。事实上，由于 $\rho(U)$ 在 $\xi(p)$ 附近自由地作用于 ξ ，且 $\rho(e_n)$ 在 $\xi(p)$处为零，交换关系蕴含 $\rho(e_n)$ 在 $\xi(p)$的一个邻域内为零；等价地，$\rho(e_n)$在 p附近切于 $\mathcal{F}^+$。现在假设 $[\rho(e_n), \rho(U)] \neq 0$。特别地，$\rho(e_n) \neq 0$。由于 $\rho(\mathfrak{g})$ 是最大维数为3的向量场李代数，对某个 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$必有$[\rho(e_n), \rho(U)] = a\rho(B)$。然而，这与上述观察相矛盾。因此， $\rho(e_n) = 0$，从而 $\rho(\mathfrak{g}^\alpha) = 0$。最后， $\mathfrak{g}^\alpha$ 在 p的一个邻域内切于 $\mathcal{F}^+$ 。此外，我们还证明了

$$[\mathfrak{g}^{\alpha-1}, \mathfrak{g}^\alpha] \subset \mathfrak{h}^{00}. \tag{11}$$

还需证明 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 对 $\mathfrak{g}$ 不变。我们只需证明 $[\mathfrak{g}^{\alpha-1},\ \mathfrak{g}^{\alpha+1}] = 0$。由于 $[\mathfrak{g}^{\alpha-1},\ \mathfrak{g}^\alpha] \subset \mathfrak{h}^{00}$，将雅可比恒等式应用于三元组 $(\mathfrak{g}^{\alpha-1},\ \mathfrak{g}^\alpha,\ \mathfrak{g}^{\alpha+1})$ ，可得

$$[\mathfrak{g}^{\alpha-1}, \mathfrak{g}^{\alpha+1}] = 0. \tag{12}$$

□

推论 5.4。叶状结构 $\mathcal{F}^+$ 由分布 E 确定，其中 E 由 $q \mapsto E(q) = \mathfrak{l}|_q$ 给出，而 $\mathfrak{l}$ 是由 $\mathfrak{n}^+$ 生成的 $\mathfrak{g}$ 的理想。

证明。由于 $\mathcal{F}^+$ 对 $\mathfrak{g}$ 不变，由在 p 的某个邻域内与 $\mathcal{F}^+$ 相切的共形向量场组成的子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个理想。我们已证明， $\mathfrak{n}^+$ 中的共形向量场在 p 的某个邻域内与 $\mathcal{F}^+$ 相切；等价地， $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{k}$。因此，由 $\mathfrak{n}^+$ 生成的理想 $\mathfrak{l}$ 包含于 $\mathfrak{k}$，故 $\mathcal{F}^+$ 在 p 的某个邻域内与分布 E 相切。因此，在 p 处与 $\mathfrak{l}|_p$ 相切的 $\mathfrak{g}$ 不变叶状结构（它与 $\mathcal{F}^+$ 一致）处处与分布 E 相切。□

引理 5.5。在 $\mathfrak{g}$ 中， $\mathfrak{n}^+$ 是海森堡型子代数，在 $\mathcal{F}^+$ 的每个叶上局部传递地作用，并且包含 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 于其中心。此外，共形类中存在一个度量，其 *Killing* 向量场代数局部传递地作用，并包含 $\mathfrak{n}^+$。最后，零直线丛 $\mathcal{F}^{+\perp}$ 处处由 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 张成。

证明。**情形 $\boldsymbol{\alpha = 2}$**。在这种情形下， $\mathfrak{n}^+$ 是一个阿贝尔理想，在 $\mathcal{F}^+$ 的每个叶上传递地作用。令 $\mathfrak{m} := \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{g}^{\alpha-1}$。那么 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想，且 $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}^+ \subset \mathfrak{so}(T_pM)$，而 $\mathfrak{m}|_p$ 张成 T_pM。因此， $\mathfrak{m}$ 在 M 上传递地作用，并且共形类中存在一个度量，使得 $\mathfrak{m}$ 是 Killing 向量场代数。

情形 $\boldsymbol{\alpha = 1}$。在这种情形下， $\mathfrak{n}^+$ 是一个二步幂零理想，在 $\mathcal{F}^+$ 的每个叶上传递地作用。令 $\mathfrak{c}$ 为 $\mathfrak{g}^{\alpha-1}$ 中 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\alpha-1}$ 的补空间，并定义 $\mathfrak{m} := \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{c}$。由于 $\mathfrak{c}$ 的维数为 1，$\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个子代数。根据构造， $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}^+ \subset \mathfrak{so}(T_pM)$ 且 $\mathfrak{m}|_p$ 张成 T_pM。因此，$\mathfrak{m}$ 是共形类中某个度量的 Killing 代数，在 M 上局部传递地作用。

情形 $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}^{\circ}}$ 由推论 5.4 可知，叶状结构 $\mathcal{F}^+$处处与由 $\mathfrak{n}^+$生成的子代数相切，即与幂零代数 $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{c}$相切，其中 $\mathfrak{c} := [\mathfrak{g}^\alpha,\ \mathfrak{g}^\alpha] \subset \mathfrak{g}^1$是阿贝尔的，并且在 $\mathcal{F}^+$的每个叶上局部传递地作用。我们将通过证明 $[\mathfrak{g}^\alpha,\ \mathfrak{g}^\alpha] = 0$来说明 $\mathfrak{n}$ 是阿贝尔的；换言之，我们将证明 $\mathfrak{n}^+$ 本身已经是阿贝尔子代数。

对于任意子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$，用 $\mathfrak{k}$ 表示它在 $\mathfrak{g}:= \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{\alpha+1}$中的投影。由引理 5.3，$\mathcal{F}^+$-叶上有与 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$相切的根式叶状结构。对于每个点 $q \in M$，定义商空间 T_q（取决于 q）：将经过 q 的 $\mathcal{F}$-叶限制在 q的一个邻域内，再对根式叶状结构取商。于是 T_q 是一个共形黎曼流形，在 $\mathfrak{n}$的作用下是齐性的。用 $\mathfrak{i}_q \subset \mathfrak{n}$ 表示 q处的各向同性子代数。我们将证明，$\mathfrak{i}_q$恰好由 $\mathfrak{n}$ 中在 T_q上作用平凡的元素组成。对于 $q = p$，有 $\mathfrak{i}_p = \mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}^1$。由于 $[\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^1] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+1}$，可得$[\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^1] = 0$，这说明 $\mathfrak{i}_p = c \subset \mathfrak{g}^1$ 在整个T_p上都消失，因此在 T_p上作用平凡。对于 $q \neq p$，各向同性子群 $\mathfrak{i}_q$ 与 $\mathfrak{i}_p$ 经 $\mathfrak{g}$中的某个元素共轭，因此也在 T_q上作用平凡。这说明对于任意 q，$\mathfrak{i}_q$ 实际上是 $\mathfrak{n}$的一个理想。此外，商代数 $\mathfrak{n}/\mathfrak{i}_q$ 在 T_q上忠实作用。接下来注意到，由于 e^{tB} 的作用，T_p 上的度量是共形平坦的：事实上，$B(p) = 0$，且 ad_B 在 p 处的 T_p 的切空间上的作用为 αI_{n-2}。因此，对于任意 q，T_q 也具有同样的性质。在维数 $n-2 \geqslant 3$时，这意味着 $\mathfrak{n}/\mathfrak{i}_q$嵌入为 $\mathfrak{o}(1, n-1)$ 中的一个幂零子代数。然而，$\mathfrak{o}(1, n-1)$ 的每个幂零子代数都是阿贝尔的，因此 $\mathfrak{n}/\mathfrak{i}_q$必为阿贝尔的。若 $n-2 = 2$，代数 $\mathfrak{n}/\mathfrak{i}_q$是二维幂零代数，因而也是阿贝尔的。现在假设存在 $x, y \in \mathfrak{g}^\alpha$，使得 $z := [x, y] \in \mathfrak{g}^1$ 非零。那么存在一点$q \in M$ 使得 $z(q) \neq 0$；否则 z 将属于 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$。因此，z 在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{i}_q$, 上的投影非零，从而导致矛盾。最后，$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 是 $\mathfrak{g}$的阿贝尔子代数，并在 $\mathcal{F}$的每个叶上局部单传递地作用。

令 $\mathfrak{m} := \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha-1} = \mathfrak{g}^{\alpha-1} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$。由上述讨论以及 (11)- (12) 可知，$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{g}^{\alpha-1}, \mathfrak{g}^\alpha] \subset \mathfrak{h}^{00}$。因此，由 $\mathfrak{m}$ 生成的理想 $\mathfrak{k}$ 满足 $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(T_pM)$。此外，$\mathfrak{k}|_p$ 张成 T_pM。于是，$\mathfrak{k}$ 在 M上具有传递作用，并且共形类中存在一个度量，使得 $\mathfrak{k}$是一个 Killing 向量场代数。□

5.2. **情形** $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{-1}$。在这种情形下，我们将采取不同于前一种情形的方法。我们将在 $p \in M$ 的一个邻域内定义一个叶状结构，该叶状结构不一定在所有局部共形变换下保持不变。虽然可以考察这一叶状结构是否能全局延拓，但这并非我们的目的所必需。因此，我们的策略是寻找：

(1) 一个子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$，使得 $\mathfrak{k}$ 局部传递地作用，且稳定子 $\mathfrak{k}_p$ 包含于 $\mathfrak{so}(T_pM)$ 中。这与前面一样，确保共形类中存在一个度量，使得 $\mathfrak{k}$ 是一个 Killing 向量场代数；(2) 一个 $\mathfrak{k}$ 的理想 $\mathfrak{n}$，它属于海森堡型，其中心包含一个一维子空间 $\mathfrak{z}$，使得 $\mathfrak{z}.p$ 是零的，且 $\mathfrak{n}.p = (\mathfrak{z}.p)^\perp$。这确保 $q \mapsto \mathfrak{n}|_q$ 定义了一个（在 p的邻域内）分布，该分布可积，并与一个 $\mathfrak{k}$不变的叶状结构 $\mathcal{G}$相切。因此，该叶状结构处处为类光，且 $\mathfrak{n}$在其叶上局部传递地作用。

引理 5.6. 假设 $\alpha \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{-1}$，并令 $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$。则分布 $q \mapsto \mathfrak{n}|_q$ 定义了一个余维一类光叶状结构 $\mathcal{G}$。此外，

(1) $\mathfrak{n}$ 为海森堡型，*(2)* 零直线丛 $\mathcal{G}^\perp$ 与中心一维子空间 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$相切，且$(\mathfrak{g}^{\alpha+1}|_p)^\perp = \mathfrak{n}|_p$。

(3) 共形类中存在一个度量，其 *Killing* 向量场代数局部传递地作用，并包含 $\mathfrak{n}$。

证明。**情形** $\boldsymbol{\alpha = 2}$。定义 $\mathfrak{l} := \mathfrak{g}^{\alpha-1} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$。这是一个局部单传递子代数，并且 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{l}$中的阿贝尔理想。
情形 $\boldsymbol{\alpha = 1}$。这里，$\mathfrak{l} := \mathfrak{g}^{\alpha-1} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 是一个局部单传递子代数，并且 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{l}$中的二步幂零理想，其中心为 $\mathfrak{g}^{\alpha+1}$。**情形** $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}}$。在这种情况下，我们有 $[\mathfrak{g}^{\alpha},\ \mathfrak{g}^{\alpha-1}] \subset \mathfrak{g}^{0}$。利用雅可比恒等式可以证明，实际上 $[\mathfrak{g}^{\alpha},\ \mathfrak{g}^{\alpha-1}] \subset \mathfrak{h}^{00}$。因此，由 $\mathfrak{g}^{\alpha-1} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha+1}$ 生成的代数 $\mathfrak{k}$ 是局部传递的，并满足 $\mathfrak{k}_p \subset \mathfrak{so}(T_pM)$。此外，$\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{k}$中的阿贝尔理想。

因此，所有情况下，均可直接得出该引理。 □

5.3. **命题5.1的证明**。第（1）项由引理 5.2 得出，第（2）项由推论 5.4 和引理 5.5 得出，第（3）项由引理 5.6 得出。

6. Proof of Theorem 1.1

假设 $(M,\ g)$ 是局部共形齐性且弱本质的，即局部共形变换伪群在 M 上传递作用，且不保持 g的共形类中的洛伦兹度量。那么，各向同性表示的像 $\mathbf{H}^p$ 在 $p \in M$ 处包含一个单参数子群 B^t，如推论 4.4 所述。万有覆盖 (M上的$\widetilde{\ }$情形也相同，$\tilde{g}$)；它具有相同的局部共形变换伪群，且全局共形向量场的李代数 $\mathfrak{g}$ 在其上作传递作用。根据推论 4.7，或者 $(M,\ g)$ 是共形平坦的，或者$\mathbf{H}^{\tilde{p}}$ 在$\sim$ $\sim\tilde{p} \in M$ 处的李代数 $\mathfrak{h}$ 稳定$T_{\tilde{p}}M$ 中的一条零直线。根据命题 4.1，我们可以假设各向同性表示是单射。因此，我们可以对 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$应用命题5.1，从而得到：或者该度量是共形平坦的，或者局部存在一个海森堡型余维一类光叶状结构。在后一种情况下，命题3.1表明该度量局部共形于一个平面波。此外，命题5.1所给出的局部传递 Killing 向量场代数的存在性，保证了这个平面波是等距局部齐性的。

为证明定理1.1的最后一项，我们需要以下结果。

命题 6.1. 假设 $(M, [g])$ 不是共形平坦的。如果 $(M, [g])$ 在局部共形意义下是平面波，则存在一个齐性平面波 X，使得 $(M, [g])$ 以 $(\mathrm{Conf}(X), X)$为模型。

一般而言，给定一个局部共形齐性伪黎曼流形 $(M,\ [g])$，并不一定存在一个齐性模型，使得 $(M,\ [g])$ 与之局部共形。取一点 $p \in M$，令 $\mathfrak{g}$ 为 p邻域内局部共形向量场的李代数，$\mathfrak{h}$ 为其中在 p处消失的向量场所成的子代数。令 G 为李代数 $\mathfrak{g}$所对应的唯一连通单连通李群，令 H 为由 $\mathfrak{h}$生成的连通子群。那么，根据 [25], ，流形 $(M,\ [g])$ 存在齐性模型

当且仅当 H 在 G中是闭的。在这种情况下， M 与齐性空间G/H局部共形。

在我们的情形中，当 $(M,\ [g])$ 是局部共形于平面波的非共形平坦洛伦兹流形时，由 [19]（见第3.1节）可知， $\mathfrak{g}$ 是Killing 向量场代数的一个 $\mathbb{R}$-扩张

$$\mathfrak{g}_0 \cong (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{heis},$$

其中 $\mathfrak{k}$ 是包含在各向同性子群 $\mathfrak{h}$中的一个子代数。更精确地说，

$$\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{heis}.$$

设 G 为以 $\mathfrak{g}$为李代数的连通单连通李群。我们有$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{r}$，其中$\mathfrak{r} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{heis}$ 是一个可解理想。于是存在一个分解$G \cong K \ltimes R$，其中 $K \leqslant G$ 是以 $\mathfrak{k}$ 为李代数的连通子群，$R \leqslant G$ 是以 $\mathfrak{r}$为李代数的连通子群。注意， R 是可解且单连通的。现在，由于 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$，我们有 $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}_1$， $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$。设 $H \leqslant G$ 表示以 $\mathfrak{h}$为李代数的连通子群。则 $H = K \ltimes H_1 \subset K \ltimes R$，其中 $H_1 \leqslant R$ 是以 $\mathfrak{h}_1$为李代数的连通子群。根据一个经典事实，单连通可解李群的每一个连通李子群都是闭的 [24, 推论，第 186], [18, 页引理 2]。因此 H_1 在 R中是闭的，从而 H 是 G的一个闭子群。因此，商空间 $X = G/H$ 是良定义的，并且流形 M 局部模型于 $(G,\ X)$。

7. On Penrose limits

7.1. 彭罗斯极限：一个共形不变量。 本段旨在说明，与洛伦兹度量相关联的彭罗斯极限是一个共形不变量。

设 g 为一个洛伦兹度量， γ 为一条零测地线。为定义 g 沿γ 的彭罗斯极限（见 [4]），我们首先在适配于 γ的坐标中写出该度量。存在局部坐标(u, v, x) 使得：

• 曲线 γ 由 $u \mapsto (u, 0, 0)$给出，且 u 是 γ的仿射（测地线）参数；• 在这些坐标下，度量写为

$$g = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + a(u, v, x)\mathrm{d}v^2 + \sum_i 2b_i(u, v, x)\mathrm{d}v\mathrm{d}x_i + \sum_{i,j} c_{ij}(u, v, x)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{13}$$

在形如（13）的坐标中，对于任意常数v_0 和 x_0，曲线 $u \mapsto (u, v_0, x_0)$ 都是零测地线。

于是， g 沿 γ 的彭罗斯极限定义如下。对于 $\epsilon > 0$，令

$$\Phi_\epsilon(u, v, x) = (u, \epsilon^2 v, \epsilon x), \quad g_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^2}\Phi_\epsilon^* g.$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，度量 g_ϵ 收敛到一个平面波度量（采用罗森坐标）

$$\mathrm{PL}_g := 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \sum_{i,j} \overline{c}_{ij}(u)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j, \tag{14}$$

其中

$$\overline{c}_{ij}(u) := c_{ij}(u, 0, 0).$$

We 现在将证明，彭罗斯极限在以下意义下是共形不变的 .

命题 7.1. 设 g 为洛伦兹度量， γ 为一条零测地线。设 $g_\sigma := e^\sigma g$为 g 的共形变换（重新参数化后， γ 也是 g_σ的一条零测地线）。令PL_g （分别为PL_{g_σ}）表示沿 γ的 g （分别为 g_σ）的彭罗斯极限。那么存在一个共形微分同胚$\mathrm{PL}_g \to \mathrm{PL}_{g_\sigma}$.

证明. 设 $g_\sigma = e^\sigma g$，并令 $K := e^\sigma$。为了计算沿 γ的 g_σ 的彭罗斯极限，我们首先在适配于 γ 的坐标中写出度量。为此，考虑映射

$$F : (u, v, x) \mapsto (f(u, v, x), v, x),$$

其中 f 是满足以下条件的光滑函数

$$\frac{\partial f}{\partial u} = K. \tag{15}$$

那么 F 是一个微分同胚。其逆映射

$$G : (u, v, x) \mapsto (h(u, v, x), v, x)$$

满足

$$f(h(u, v, x), v, x) = u, \qquad (K \circ G)\,\frac{\partial h}{\partial u} = 1.$$

那么，拉回度量 $G^* g_\sigma$ 具有如下形式

$$G^* g_\sigma = 2\,du\,dv + A(u, v, x)\,dv^2 + \sum_i 2B_i(u, v, x)\,dv\,dx_i + \sum_{i,j} C_{ij}(u, v, x)\,dx_i\,dx_j,$$

其中， A、 B_i和 C_{ij} 是光滑函数，并且

$$C_{ij} := (K \circ G)\,(c_{ij} \circ G).$$

γ 沿 g_σ 的彭罗斯极限由下式给出:

$$\mathrm{PL}_{g_\sigma} = 2\,du\,dv + \overline{C}_{ij}(u)\,dx_i\,dx_j,$$

其中

$$\overline{C}_{ij}(u) = C_{ij}(u, 0, 0) = (K \circ G(u, 0, 0))\,(c_{ij} \circ G(u, 0, 0)).$$

现在，考虑微分同胚

$$\phi : (u, v, x) \mapsto (f(u, 0, 0), v, x).$$

利用（15），我们计算得

$$\phi^*(\mathrm{PL}_{g_\sigma}) = K(u, 0, 0)(2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + c_{ij}(u, 0, 0)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j) = K(u, 0, 0)\mathrm{PL}_g.$$

因此， ϕ: $\mathrm{PL}_g \to \mathrm{PL}_{g_\sigma}$ 是一个共形微分同胚。 □

注 7.2. 由上面的证明可知， $e^\sigma g$ 沿着 g的零测地线 γ的彭罗斯极限由 $e^\sigma \mathrm{PL}_g$给出，其中 $\sigma(u) := \sigma(u, 0, 0)$ 是 σ 在 γ上的限制，而PL_g 是 g 沿着 γ的彭罗斯极限。

7.2. 平面波的彭罗斯极限。 给定一个维数为 $n+2$、带有平行零向量场 ξ的平面波 (M,g)，沿着与 ξ 相切的零测地线取彭罗斯极限，得到平直的闵可夫斯基空间。另一方面，若将平面波写成罗森坐标（14），则沿着零测地线 $(u,\mathbf{0},0)$取彭罗斯极限（该测地线与 ξ横截），所得结果与原平面波度量重合。

设 $p\in M$，并令 $C_p\subset T_pM$ 表示 p 处的零锥。则各向同性群 H_p 固定零向量 ξ_p，并在 $C_p\smallsetminus\mathbb{R}\xi_p$ 上传递作用。因此，在等距变换意义下，与 (M,p) 相关的彭罗斯极限（芽）恰有两种:

- 沿与 ξ_p 相切的零测地线取彭罗斯极限。在这种情况下，所得极限是平坦的闵可夫斯基空间。
- 沿与 ξ_p 横截的零测地线取彭罗斯极限。在这种情况下，所得极限是在 p 某个邻域内的平面波度量（该邻域可能取决于所选测地线）。因此，它是嵌入原平面波中的一个平面波。

如果平面波是局部齐性的，彭罗斯极限不依赖于基点 p。因此，在等距变换意义下，与 M 相关的彭罗斯极限（芽）恰有两种。

推论 7.3. 设 (M,g) 是一个维数至少为3 且局部共形齐性的非共形平坦洛伦兹流形。假设 (M,g) 是弱本质的。那么，(M,g) 局部共形等价于沿某条零测地线取其彭罗斯极限所得的流形。

请注意，定理1.1的证明揭示了比本推论所述更多的细节。该假设意味着存在一个在局部共形向量场作用下保持不变的零直线丛，它由平面波的平行向量场张成；并且 $(M,\ g)$ 局部共形等价于沿所有与该零直线丛相交 的零测地线取其彭罗斯极限所得的流形。

Appendix A. Account on rigid transformations groups

参考文献可参见格罗莫夫的奠基性著作 [16], 、D'Ambra 和格罗莫夫的讲义 [6],以及 Ballmann 的讲义 [3]。

A.1. Gromov 刚性变换群理论。 在 Gromov 刚性变换群理论中，会遇到以下基本构造。设 σ 是流形 M上的刚性几何结构。对于任意点 $p\in M$，记 $\mathrm{Iso}_p^{\mathrm{Loc}}$为固定 p 并保持 σ的局部微分同胚芽群，记 Iso_p^k 为 p处的 k 阶无穷小等距群。

由于一切都是局部的，我们可以通过假设 $M=\mathbb{R}^n$ 与 $p=0$来简化记号。设$\mathcal{D}_n^k$ 表示0处微分同胚芽的 k-射流群。若两个微分同胚在0处的泰勒展开直至 k 阶（在任意坐标系中）一致，则将它们视为同一。因此， $\mathcal{D}_n^k$ 的元素可视为在0处为零、次数为 $\leqslant k$ 的多项式映射 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，其复合由截断至 k阶的多项式复合给出。对于 $k=1$，$\mathcal{D}_n^1=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$。

设 $\mathcal{U}^k \subset \mathcal{D}_n^k$ 表示由在0处的一阶导数为单位元的元素组成的子群。该子群是幂零的，并且有半直积分解$\mathcal{D}_n^k = \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathcal{U}^k$。设 E为在0处为零、次数为 $\leqslant k$的多项式映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$所构成的向量空间。群 $\mathcal{D}_n^k$ 通过复合自然地右作用于 E：

$$\mathcal{D}_n^k \times E \to E, \quad (f, P) \mapsto P \circ f.$$

此作用定义了 $\mathcal{D}_n^k$ 在 E上的忠实表示，其形式为

$$f \mapsto M_f^\top \in \mathsf{End}(E), \quad M_f(P) = P \circ f.$$

映射 $f \mapsto M_f^\top$是一个群同态，因为 $M_{f_1 \circ f_2} = M_{f_2} \circ M_{f_1}$。经过共轭后，该表示将幂零子群 $\mathcal{U}^k$ 映入上三角幂零矩阵群；特别地，其像包含于 $\mathsf{GL}(E)$ 中。相对于分解 $\mathcal{D}_n^k = \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathcal{U}^k$，将元素 $f \in \mathcal{D}_n^k$ 写成$f = (A_f,\ f^u)$，我们可以将 f分解为$f = f_1 \circ f_2$，$f_1 := (\mathbf{1},\ f^u)$，$f_2 := (A_f,\ 1)$。由于 $A_f \in \mathsf{GL}(n,\ \mathbb{R})$，映射 f_2是可逆的，因此 M_{f_2}也是可逆的。由此可知，在上述表示下，$\mathcal{D}_n^k$ 的像包含于 $\mathsf{GL}(E)$ 中，因此 $\mathcal{D}_n^k$ 嵌入为 $\mathsf{GL}(E)$ 的一个子群。此外，该子群由 $\mathsf{GL}(E)$ 的矩阵元素满足的多项式方程确定，因而是一个代数子群。最后，通过这一嵌入，可以自然地定义 $\mathcal{D}_n^k$ 的代数结构。

无穷小等距变换。我们也可以类似地定义几何结构 σ的 k-阶喷流。称 0 附近的局部微分同胚 ϕ 为 $(k+1)$-阶无穷小等距变换，若其拉回 $\phi^*\sigma$与 σ 在 0 处具有相同的 k-阶喷流。为明确起见，假设 σ 是一个伪黎曼度量。那么 σ 可以写作 $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\sigma_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$。 ϕ 是一个$(k+1)$-阶无穷小等距变换这一条件，意味着 $\phi^*\sigma - \sigma$ 在 k阶以内消失，也就是说，它们在 0 处的泰勒展开在该阶以内相同。这个条件只取决于 ϕ的 $(k+1)$-阶喷流，因此定义了一个子群

$$\mathsf{Iso}_0^{k+1} \subset \mathcal{D}_n^{k+1},$$

由以下多项式映射 ϕ_{k+1} 构成：它们是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 中次数为 $\leqslant k+1$ 且在 0 处消失的映射，并满足 $\phi_{k+1}^*\sigma - \sigma$ 在 k阶以内消失。此外，请注意，这里只涉及 σ 的 k-阶喷流。显然， $\phi_{k+1}^*\sigma = \sigma$ 在 k 阶以内消失这一条件是代数的，因为它是 $\mathcal{D}_n^{k+1}$上有限个多项式的零点集。因此，Iso_0^{k+1}是 $\mathcal{D}_n^{k+1}$的一个代数子群。

对于由度量 g确定的共形结构， $(k+1)$-无穷小等距变换定义为要求 g 和 ϕ^*g 在 k阶上共形，即它们的 k-泰勒展开（作为向量值多项式映射）成比例。等价地，对于所有指标 i、j、l、m， $(\phi^*g)_{ij}g_{lm} - (\phi^*g)_{lm}g_{ij}$在 k阶上消失。

Gromov 定理。 回到流形 M，存在自然的态射 s

$$\mathsf{Iso}_p^{\mathrm{Loc}} \to \mathsf{Iso}_p^k. \tag{16}$$

Gromov 理论断言，存在一个整数 k，其取决于几何结构的阶数以及 dim M，使得对于 M 中的 p generic，这些态射是双射（参见[16], 第 0.3.A 段，第 68 页，以及第 1.6.F 定理，第 86 页）。换言之，对于充分大的 k 和一般的 p，每个 k-无穷小等距变换都是真正的局部等距变换的 k-jet。

对于这样的 p 和 k，导数表示

$$\rho : \mathsf{Iso}_p^{\mathrm{Loc}} \to \mathsf{GL}(T_pM)$$

与自然投影$\mathcal{D}_n^k = \mathsf{GL}(n,\ \mathbb{R}) \ltimes \mathcal{U}^k \to \mathsf{GL}(n,\ \mathbb{R})$在代数子群 Iso_p^k of $\mathcal{D}_n^k$ 上的限制相重合。因此，它是一个代数同态。设 $p \in M$和 k 使得 (16) 是一个同构。那么，根据引理 4.2，导数表示的像包含其在 $\mathsf{GL}(n,\ \mathbb{R})$中的扎里斯基闭包（关于豪斯多夫拓扑）的单位连通分支。在局部齐性情形下，这对每个点都成立。

此外，所有这些局部群或无穷小群都带有自然的李群结构，它们之间的双射态射都是李群同构。因此，$\mathsf{Iso}_p^{\mathrm{Loc}}$及其在导数表示下的像都具有有限个连通分支。

A.2. **Singer定理**。 Singer定理涉及黎曼度量，并指出无穷小齐性蕴含局部齐性。

设 $(N,\ h)$ 为一个曲率张量为 R 的黎曼流形。若 $(N,\ h)$ 在所有点处的k及其协变导数 ∇R、.....、$\nabla^k R$ 都相同，则称其为k-无穷小齐性。也就是说，对于任意 $p,\ q \in N$，都存在一个线性同构 A_{pq}： $T_pN \to T_qN$，将 $R_p,\ \nabla R_p,\ .....,\ \nabla^k R_p$ 映到 $R_q,\ \nabla R_q,\ .....,\ \nabla^k R_q$。Singer定理断言，存在一个整数 $k = k(\dim\ N)$，使得若 $(N,\ h)$ 是 k-无穷小齐性的，则 $(N,\ h)$ 是局部齐性的。此外，这样一个 A_{pq} 是将 p映到 q 的局部等距变换的导数。特别地，局部各向同性群在导数表示下的像，

$$\mathsf{Iso}_p^{\mathrm{Loc}} \to \mathsf{GL}(T_pN),$$

恰好是保持这些张量不变的 $\mathsf{GL}(T_pN)$ 子群

$$R_p, \nabla R_p, \ldots, \nabla^k R_p,$$

因此是一个代数子群。

Ballmann 的讲义 [3] 中有一小节，根据 Gromov 理论，将 Singer定理推广到一般的刚性几何结构。在局部齐性情形下，该定理清楚地表明局部迷向是代数的。

A.3. **嘉当联络方法**。 Pecastaing 的文章 [28]为由嘉当联络给出的几何结构提供了 Gromov 理论的一种简化方法。这尤其涵盖共形伪黎曼结构。特别是，文中包含一个适用于嘉当几何的 Singer 局部齐性定理的类似版本（[28,定理 1.1]）。

ˆ 简言之，以 G/P 为模型的嘉当几何由一个 P-主丛 $M \to M$构成，并配备一个称为嘉当联络的 1-形式

$$\omega : T\hat{M} \to \mathfrak{g},$$

其取值在 $\mathfrak{g}$ 的李代数 G中。该嘉当联络诱导出如下平行结构：给定 $\mathfrak{g}$的一组基 $(X_1,\ .....,\ X_r)$，则 $(\omega^{-1}(X_1),\ .....,\ \omega^{-1}(X_r))$ 构成 $T\hat{}M$上的平行结构，ˆ ˆ将 TM与 $M \times \mathfrak{g}$等同。该平行结构具有 P-等变性，并与沿竖直方向的 P 左不变平行结构一致。

ω的曲率，

$$K = d\omega - [\omega, \omega],$$

$\hat{}$是平行向量场在 M 上构成与 $\mathfrak{g}$ 同构的李代数的障碍。借助平行结构， K 可视为一个 P-等变向量值映射

$$\kappa : \hat{M} \to \mathsf{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),$$

称为曲率映射。事实证明， κ 的取值落在一个较小的 P-不变子空间 $\mathcal{W}^0 \subset \mathsf{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g},\ \mathfrak{g})$ 中。现在我们可以对 κ 求导，得到映射 $D\kappa : T\hat{}M \to \mathcal{W}^0$。类似地，平行结构使我们能够将 $D\kappa$ 表示为向量值映射 $D\kappa : \hat{}M \to \mathcal{W}^1$，其中 $\mathcal{W}^1 :=\mathsf{Hom}(\mathfrak{g},\ \mathcal{W}^0)$。对迭代导数也可以进行同样的处理，并为 $i \geqslant 0$ 定义向量值映射

$$\kappa^i : \hat{M} \to \mathcal{W}^i, \qquad \kappa^0 := \kappa, \qquad \kappa^i := D\kappa^{i-1}, \quad \mathcal{W}^i := \mathsf{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{W}^{i-1}).$$

这些 $\mathcal{W}^i$ 带有自然的线性 P 作用，而相对于此作用， κ^i 是 P-等变的。

$\hat{}M$ 中位于点 $x \in M$ 上方的一个点记作 $\hat{}x$。由 P-等变性， κ^i 将 $\hat{}M \to M$ 在 $x \in M$ 上方的一个 P-纤维映到一个 P-轨道 $C^i_x = \kappa^i(P \cdot \hat{}x) \subset \mathcal{W}^i$。因此， k-无穷小齐性意味着，对于所有 $i \leqslant k$， C^i_x 不依赖于 $x \in M$，即对于所有 $x \in M$， $\kappa^i(P \cdot \hat{} x) = C^i_x = C^i$。

为了将所有这些曲率汇总起来，对任意 l，考虑

$$\kappa_l = (\kappa^0, \kappa^1, \ldots, \kappa^l) : \hat{M} \to \mathcal{Y}^l := \mathcal{W}^0 \times \mathcal{W}^1 \times \ldots \times \mathcal{W}^l.$$

$\hat{}$伪群作用与局部 Killing 向量场。以下， M 表示与共形伪黎曼流形 M相关联的嘉当丛。令 $\mathbf{P}$ 表示 M的局部共形变换伪群 $\hat{}$。它通过保持 P-纤维化，自然地作用于 M 上（事实上，该作用是自由且适当的）。此外，该作用保持所有映射 κ_l；也就是说，$\mathbf{P}$-$\hat{}\hat{}$轨道在 M 中包含于 κ_l-水平集。嘉当丛 M 的局部 ω-Killing 向量场也有定义。局部 ω-Killing 向量场是 M 上的局部向量场，且保持嘉当联络ω。$\hat{}x \in \hat{}M$ 的 ω-Killing 轨道，是指M 中可由 x 经由有限个局部 ω-Killing 向量场的流到达的点所构成的集合。

M 的局部共形向量场与 M的 ω-$\hat{}\hat{}$ Killing 向量场之间存在一一对应关系。 ω-Killing 向量场 X 的局部流保持 κ_l，这意味着$\hat{}\hat{}X$ 在 X 有定义的每个点$\hat{}x$ 处都属于 $\ker(D_{\hat{x}}\kappa_l)$ ，且对任意 $l \geqslant 0$均成立。若 M 是局部共形齐性流形，即若$\mathbf{P}$ 在 M上传递作用，则对任意阶数 l，它都是 l-无穷小齐性的，并且映射 κ_l 具有常秩。因此，其水平集是 M中的光滑子流形，并向 M满射投影。特别地， P-不变向量子空间 $\ker(D_{\hat{x}}\kappa_l) \subset T_{\hat{x}}\,\hat{}M$ 满射投影到 T_xM上。

$\hat{}\hat{}$ V. Pecastaing [28] 所证明的点是：在一个 P-不变的稠密开子集 $\Omega \subset M$ 上，并且当 m 足够大（取决于维数）时，对于 $l \geqslant m$， κ_l-水平与 Ω 中的 $\hat{}\mathbf{P}$-轨道重合。

此外， [28] 还证明了， ω-Killing 向量场的取值生成了 $\hat{}\Omega$ 中 $\mathbf{P}$-轨道的整个切空间。事实上，[28] 中给出的可积性定理（另见 [13, 定理 2.2 和附录 A]）得出如下结论：当 m 足够大时，任意向量 $\hat{}v \in \ker(D_{\hat{x}}\kappa_l)$， $\hat{}x \in \hat{}\Omega$，都是

某个实际局部 ω-Killing 场在 $\hat{x}$ 附近的取值。因此， ω-Kill^{loc}-轨道 $\hat{}$of M 恰好是 $\mathbf{P}$-轨道的连通分支（因为它们具有相同的切空间 $\hat{}\hat{}$）。当 M 局部共形齐性时，此集合 Ω 就是整个 M。

因此，若 M 是局部共形齐性的，对于任意向量 $v \in T_xM$及提升 $\hat{v} \in \hat{}\hat{}\hat{}\ker(D_{\hat{x}}\kappa_l) \subset T_{\hat{x}}M$，都存在一个 ω-Killing场 V，使得 $V(\hat{x}) = \hat{v}$。该 V投影为 M上的一个Killing场 V，并满足 $V(x) = v$。由此可知，当 $\mathbf{P}$ 在 M上具有传递性时，局部共形向量场的伪代数也在 M上具有传递性；也就是说，对于任意 $p \in M$，局部共形向量场的求值映射在 T_pM上是满射。

$\hat{}$通过伪群作用得到的局部迷向。 由于 $\mathbf{P}$在 M 上诱导的作用保持该 P-纤维化，若 $f \in \mathbf{P}$ 将某个 P-纤维上的一点映到同一 P-纤维上的另一点，则 f 保持该 P-纤维不变。类似地，若某个局部Killing向量场在某处与一个 P-纤维相切，则它处处都与之相切。

由于 $\mathbf{P}$在 M上的自$\hat{}$作用，因此对任意位于 x上方的$\hat{x} \in M$，都可以将点 $x \in M\hat{}$的局部各向同性群 Iso$_x^{Loc}$与 $O \cdot \hat{x}$等同，其中

$$O \cdot \hat{x} = (\mathbf{P} \cdot \hat{x}) \cap (P \cdot \hat{x}),$$

也就是说，$\hat{x}$ 的$\mathbf{P}$-轨道与其 P-纤维的交集。但这也是$P \cdot \hat{x}$ 与$\hat{x}$的 κ_m-水平集的交集。对此可以作如下描述。考虑

$$\kappa_m^x : P \cdot \hat{x} \to \mathcal{Y}^m,$$

κ_m在 x上方的 P-纤维上的限制。这是一个 P-等变映射，其像是P-轨道 $C^m = P \cdot \kappa_m(\hat{x})$。令 $R \subset P$表示 $\kappa_m(\hat{x})$的稳定化子。于是， $P \cdot \hat{x}$ 中$\hat{x}$的 κ_m^x-水平集为

$$(\kappa_m^x)^{-1}(\kappa_m(\hat{x})) = R \cdot \hat{x}.$$

因此，局部各向同性群 Iso$_x^{\mathrm{Loc}}$可与子群 $R \subset P$等同。作为 $\mathcal{Y}^m$中点 $\kappa_m(\hat{x})$的稳定化子，R 是 P的代数子群（对于共形伪黎曼结构， P 是代数群）。根据前述结论，局部 Killing 向量场生成$\mathbf{P}$-轨道的切空间，因此 Iso$_x^{Loc}$的李代数恰由在 x处消失的局部 Killing 向量场组成。

注 A.1. 如上所述，对于局部齐性黎曼度量，Singer定理将 p 处的局部各向同性群明确描述为保持曲率张量及其协变导数的 GL(T_pM) 子群。在共形情形下，局部迷向自然地属于微分同胚的2阶射流群，这使得相关操作颇为棘手。不过，可以考虑 Iso$_p^{Loc}$在导数表示下的像，从而得到 GL(T_pM)的一个子群$\mathbf{H_P}$。如何类似于Singer定理的情形刻画$\mathbf{H_P}$，是一个值得研究的问题。外尔张量自然是其中不可或缺的，但高阶共形不变张量并不容易定义。

References

[1]D. V. Alekseevskiĭ. 黎曼空间的共形变换群。 *Mat. Sb. (N.S.)*, 89(131):280–296, 356, 1972。

[2] D. V. Alekseevsky 和 A. S. Galaev. 共形齐性洛伦兹空间。 *Communications inContemporary Mathematics*, 0(0):2550082, 2025 年。[3]W. Ballmann，几何结构，讲义可见 https://people.mpim-bonn.mpg.de/hwbllmnn/archiv/geostr00.pdf[4] Blau, M. (2011). 平面波与彭罗斯极限。国际理论物理中心弦论与场论数学暑期学校讲义（2003年6月2日至13日）。[5] M. Blau 和 M. O'Loughlin. 齐性平面波。 *Nuclear Phys. B*, 654(1-2):135–176, 2003。[6] G. d'Ambra 和 M. Gromov，《变换群讲义：几何与动力系统》，J. Differential Geom. Suppl. 1 (1991), 19 -111。[7] A. J. Di Scala 和 C. Olmos, *The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space*，Math. Z. 237 (2001), no. 1, 199–209。[8] Eberlein, P. 和 Jablonski, M., 2009。半单群作用的闭轨道与实 Hilbert-Mumford 函数。《当代数学》，491, p.283。[9] J. Ferrand. 共形变换在黎曼流形上的作用。 *Math. Ann.*, 304(2):277– 291, 1996。[10] C. Frances. 黎曼几何与洛伦兹几何中的本质共形结构。载于 *Recent develop-ments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI 数学物理讲义，页码 231–260。欧洲数学学会，苏黎世，2008。[11] C. Frances. 关于伪黎曼李希纳罗维奇猜想。 *Transform. Groups*, 20(4):1015–1022, 2015。[12]C. Frances. 伪黎曼共形变换的局部退化，Ann. I nst. Fourier 62 (2012), no. 5, 1627-1669。[13] C. Frances，《格罗莫夫开稠轨道定理的变奏》。Bulletin de la Soci´et´e math´ematique de France 146.4 (2018): 713-744。[14] C. Frances 和 K. Melnick，伪黎曼共形场的标准形式，Bull. Soc. Math. France 141 (2013), no. 3, 377-421。[15] W. Globke 和 T. Leistner. 局部齐性pp波。 *J. Geom. Phys.*, 108:83–101, 2016。[16] M. Gromov. 刚性变换群。载于《微分几何》（巴黎，1986），《Travaux en Cours》第33卷，页码 65 -139。埃尔曼出版社，巴黎，1988。[17] M. Hanounah、L. Mehidi 和 A. Zeghib. 关于齐性平面波。《数学物理杂志》，第66卷（2025年）。[18] Harish-Chandra.《李群的忠实表示》。Proceedings of the American Mathematical Society 1, no. 2 (1950): 205–10. https://doi.org/10.2307/2031923。[19] J. Holland 和 G. Sparling. 萨克斯方程与平面波 II：等距变换与共形等距变换。arXiv 预印本 arXiv:2405.12748, 2024。[20] Humphreys, James E. 线性代数群。第21卷。施普林格科学与商业媒体，2012。[21] A. J. Ledger 和 M. Obata. 具有本质共形变换群的紧致黎曼流形。*Trans. Amer. Math. Soc.*, 150:645–651, 1970。[22] T. Leistner 和 S. Teisseire. 卡昂–沃拉赫空间的共形变换。 *Ann. Inst. Fourier(Grenoble)*, 75(5):2147–2187, 2025。[23] J. Lelong-Ferrand. 紧致黎曼流形的共形与拟共形变换（A. Lichnerowicz 猜想的证明）。 *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8(2)*, 39(5):44, 1971。[24] A. Malcev，《关于大范围李群理论》，Sb. Math., 58:2 (1945)[25] George D. Mostow：局部李变换群及曲面上的群的可扩张性。Ann. of Math., 52:606–636, 1950。[26] M. Obata. 关于黎曼流形共形变换的猜想。 *J. Differential Ge-ometry*, 6:247–258, 1971。

[27] Palais, Richard S. 变换群李理论的整体表述。美国数学会回忆录，（22），1957年。[28] V. Pecastaing, 《关于几何结构局部自同构的两个定理》，第66卷，第1期（2016年），第175—208页。[29] Perrin, N. 线性代数群。豪斯多夫数学中心，波恩大学（2015年）。
School of Mathematical Sciences, Adelaide University, SA 5005, Australia*Email address*: thomas.leistner@adelaide.edu.auLMBA, CNRS, Université de Bretagne Occidentale, France*Email address*: lilia.mehidi@univ-brest.fr UMPA, CNRS, École Normale Supérieure de Lyon, France*Email address*: abdelghani.zeghib@ens-lyon.fr