arXiv:2602.02764v1 [math.FA] 2 Feb 2026

Beurling代数双对偶的根基在两种 Arens乘积下可能不同

JARED T. WHITE

开放大学

摘要。令 rad 表示巴拿赫代数的雅各布森根，并令 $\square$ 和 $\diamond$ 表示其双对偶上的两种 Arens 乘积。我们给出一个 Beurling代数 $\mathcal{A}$ 的例子，使得 $\mathrm{rad}\,(\mathcal{A}^{**},\ \square) \neq \mathrm{rad}\,(\mathcal{A}^{**},\ \diamond)$，从而回答了 Dales 和 Lau 提出的问题。我们例子中的底层群是由三个生成元生成的自由群。

1. 引言

巴拿赫代数理论中的一个基本构造是 Arens乘积，它是在巴拿赫代数的双对偶上定义的一种乘法，并将原有乘法扩展到双对偶上。实际上，这样做有两种方式，因此巴拿赫代数的双对偶上有两种（可能不同的）乘法，二者都称为 Arens乘积，在此分别记为 $\square$ 和 $\diamond$。

Arens乘积有许多重要应用。首先，它们提供了一种方法，可以将关于巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中有界左/右近似单位的论证，转化为关于实际左/右单位元的论证。它们还被用于研究群的可 amen 性及相关性质。例如， [10] 中的 Arens乘积论证最终成为 Caprace 和 Monod 解决关于闭子群 [3]可 amen 性的 Reiter 问题的重要组成部分。近年来，Arens乘积还被直接用于构造群 [4]上的共轭不变均值。另一个应用见于组合学：半群紧化中与 Arens乘积对应的类似结构，在拉姆齐理论 [12]中发挥着重要作用；例如， [7, 8, 9]探讨了半群 Arens乘积与巴拿赫代数 Arens乘积之间的关系。

Arens乘积还提供了一种有用的工具，用于区分算子代数与其他类型的巴拿赫代数。事实上，对于算子代数，两个 Arens乘积总是相同的，因此 Arens乘积不相同的巴拿赫代数不可能与算子代数同构。例如， [13] 利用这一方法证明某些 Beurling代数不可能与算子代数同构；同样， [11]也考察了贝urling-傅里叶代数。

如果两个 Arens 乘积相同，那么这个巴拿赫代数就称为阿伦斯正则。如前所述，算子代数总是阿伦斯正则的。另一方面，对于一个群G，情况则处于完全相反的极端：这两个乘积（请记住，它们扩展了 $\ell^1(G)$ 上的乘积）仅在 $\ell^1(G)$ 本身上相同。Dales 和 Lau 曾思考是否存在中间情形，这一想法促成了他们的回忆录 [6]，在其中他们探讨了阿伦斯乘积可能呈现的各种不同表现，

日期：2026。2020 数学学科分类。 43A20（主要）；16N20，20E05（次要）。关键词和短语。 巴拿赫代数，Beurling代数，Arens乘积，Jacobson根，自由群，词长。

他们的例子主要取自群上加权 ℓ^1-代数这一类，而我们称这类代数为 Beurling 代数。

巴拿赫代数的一个基本结构不变量是其雅各布森根。它定义为完全由准幂零元构成的最大左理想（或等价地，右理想）。根是一个双边理想，对于理解巴拿赫代数十分重要，因为它可以刻画为那些无法通过表示论轻易理解的元素所构成的集合（确切地说，它等于湮灭每个单左模的元素集合）。鉴于 Arens 正则性（或其缺失）在二重对偶技巧的应用中十分重要，自然会想到一个问题：对应于每个 Arens乘积的雅各布森根可能有多大差异？Dales 和 Lau 在他们的专著中提出了以下问题 [6,第 3 题，第 14]章。

问题 1.1. 是否存在一个局部紧群 G 及其上的权 ω，使得 G 中 $(L^1(G、\ \omega)^{**}、\ \square)$ 以及 $(L^1(G、\ \omega)^{**}、\ \diamond)$ 的根基互不相同?

本文旨在构造一个例子，以肯定地解决这个问题。

一个简单的论证（见下文引理3.1）表明，若 $\mathcal{A}$ 是交换巴拿赫代数，则 $\operatorname{rad}(\mathcal{A}^{**}, \square) = \operatorname{rad}(A^{**}, \diamond)$。因此，我们不得不为这个例子选择一个非阿贝尔群。

另一方面，Dales 和 Lau 已知存在这样的巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，使得 $\operatorname{rad}(\mathcal{A}^{**}, \square) \neq \operatorname{rad}(\mathcal{A}^{**}, \diamond)$。例如，[6, 例6.2]表明，紧算子 $\mathcal{K}(c_0)$ 代数满足 $\operatorname{rad}(\mathcal{K}(c_0)^{**}, \square) = \{0\}$，但 $\operatorname{rad}(\mathcal{K}(c_0)^{**}, \diamond) \neq \{0\}$。此外，[6, 例6.3] 给出了一个 Banach *-代数的例子，其二重对偶的两个根基互不相同。我们的例子是首个以群为基础定义的巴拿赫代数例子。

在我们的例子中，取群 $G = \mathbb{F}_3$为由三个生成元生成的自由群。我们的权取如下形式。给定离散幺半群 $\mathcal{M}$ 的一个生成集 T，映射 $\omega(x) = \exp(|x|_T)$ $(x \in \mathcal{M})$（其中 $|\cdot|_T$表示关于 T的词长）总能定义 $\mathcal{M}$上的一个权，这是由于 $|\cdot|_T$的次可加性。我们的方法是精心定义一个特定的无限集 X，使其作为幺半群生成 $\mathbb{F}_3$，从而相应的权定义出具有所需性质的 Beurling代数。

为了获得有趣的性质而使用有限生成群的无限生成集来定义权，这一想法至少可以追溯到 [6, 例 9.17], ，该成果的作者将其归功于 Joel Feinstein。此后，本文作者进一步发展了这一技巧，以构造更多例子 [15, 16]。这些例子都出现在 $\mathbb{Z}$上。本工作相较于以往研究的一项创新，是将这一技巧应用于非阿贝尔群。因此，词长计算复杂得多。

我们注意到，我们的权 ω 并非对称的，因此 $\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)$ 不是 Banach *-代数。对于群上的对称权，问题 1.1 仍有待解答。

本文结构如下。第 2 节介绍群论和巴拿赫代数的必要背景。第 3 节概述主要定理的证明。第 4 节和第 5 节致力于证明，$\mathbb{F}_3$ 中的某些元素相对于我们的非标准生成集 X具有特定的词长。主要定理的证明见第 6 节。主要关注巴拿赫代数、并愿意相信下文（3.1）和（3.2）中的词长计算的读者，可以放心跳过第 4 节和第 5 节。证明中关于巴拿赫代数的部分全部包含在第 6 节中。

2. 背景与记号

2.1. 群与基本记号。 我们将 $\mathbb{F}_3 = \langle a、\ b、\ c\rangle$ 记作由三个生成元生成的自由群。我们将 a、b、c、a^{-1}、b^{-1}、c^{-1} 称为字母。所谓字，是指由有限个字母组成的字符串；如果在一个字中 a和 a^{-1} 从不相邻出现，且 b 和 b^{-1}、c和 c^{-1}也不相邻出现，则称该字为既约 字。我们用 1 表示空字，并认为它是既约的。通过依次删除 aa^{-1}、$a^{-1}a$、bb^{-1} 等实例，每个字都可以"约化"为唯一的既约字（尽管删除的顺序并不唯一）。自由群 $\mathbb{F}_3$ 由既约字组成，其群运算定义为先进行拼接，再将所得的字约化。单位元是空字 1。

若 u_1，u_2，$\ldots u_n \in \mathbb{F}_3$，我们有时用"$u_1u_2\ldots u_3$（既约）"表示乘积中相邻项所属的字母之间不存在消去 u_i。给定两个约化字 u，$v \in \mathbb{F}_3$，我们写作 $u|v$，表示 u 是 v 的子字。

设 G 是一个群，且 $T \subseteq G$。若 $t \in T$ 蕴含 $t^{-1} \in T$，则称 T 是对称的。若每个 $g \in G\backslash\{1\}$ 都可以写成由 T 中元素构成的乘积，则称 T 生成 G。注意，我们不假设 T 是对称的，因此本文中的"T 生成 G"始终表示"T 作为幺半群生成 G"（而不是作为群生成）。若 T 是 G 的生成集，我们将 $g \in G$ 的-词长 T定义为

$$|g|_T = \min\{n \in \mathbb{N} : g = t_1t_2\cdots t_n,\ \text{for some } t_1,\ldots,t_n \in T\}.$$

若 $t_1, t_2\ldots, t_n \in T$具有这样的性质： $g = t_1t_2\cdots t_n$无法用少于n 个 T的元素表示（即若 $n = |g|_T$），则称表达式 $t_1t_2\ldots t_n$是 T-极小的。

我们用 $S = \{a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$ 表示 $\mathbb{F}_3$的标准生成集。为简便起见，对于 $|u|_S$（其中 $u \in \mathbb{F}_3$），我们只写作 $|u|$；类似地，我们将 $|u|$ 简称为 $u \in \mathbb{F}_3$的词长，而不称其为 S-词长。

由于我们将处理许多由 $\mathbb{F}_3$ 的元素构成的长乘积，因此引入以下记号会很方便：给定 d_1，$\ldots, d_k \in S$，我们记作 $d = d_1d_2\cdots d_k$。有时我们会遇到许多需要用索引标记的乘积。在这种情况下，我们将它们写作 $d_1,\ldots,d_n$，其中 $d_i = d_{i,1}d_{i,2}\cdots d_{i,p_i}$，其中 $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{N}$，并且对所有 i, j，都有$d_{ij} \in \overline{S}$。注意，此时乘积是对第二个指标取的。通常我们会省略表示每个乘积中元素个数的记号 p_i。我们将群元素的空积定义为 1。

有时，给定一个序列 d_1、.....、$d_k \in S$，以及 $1 < l < k$，我们可能想在 l 处分割该序列，以得到两个乘积；例如，我们可以写作 $d'_i = d_i$ (i =1、.....、$l-1$) 和 $d''_i = d_{i-1+l}$ (i = 1、.....、$k-l+1$)，使得 $d = d'd''$（既约）。为方便读者，我们通常会通过乘积隐式地定义序列 d' 和 d'' 中的元素，而不是像上面那样给出 d'_i和 d''_i的公式，例如写作"令 $d'' = d_ld_{l+1}\cdots d_k$"。

我们固定以下记号，用于表示从自由群 $\mathbb{F}_3$ 到整数的特定同态。令 $\theta\colon \mathbb{F}_3 \to \mathbb{Z}$ 为由 $\theta(a) = \theta(b) = 1$定义的同态，且 $\theta(c) = 0$。令$\varphi_a\colon \mathbb{F}_3 \to \mathbb{Z}$ 为由 $\varphi_a(a) = 1$，$\varphi_a(b) = \varphi_a(c) = 0$定义的同态，并类似地定义 φ_b和 φ_c。事实上 $\theta = \varphi_a + \varphi_b$。

2.2. 巴拿赫代数。设 $\mathcal{A}$ 为一个巴拿赫代数。 $\mathcal{A}$**上的两个 Arens 乘积记作 $\square$ 和 $\diamond$，其定义分为三个步骤：首先定义 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}$*上的作用；接着为 $\lambda \in \mathcal{A}$* 和 $\Phi, \Psi \in \mathcal{A}$**定义 $\Phi\cdot\lambda$ 和 $\lambda\cdot\Psi$；最后定义 $\Phi\square\Psi$ 和 $\Phi\diamond\Psi$。

公式如下:

$$\langle \lambda \cdot a, b\rangle = \langle \lambda, ab\rangle, \qquad \langle a \cdot \lambda, b\rangle = \langle \lambda, ba\rangle,$$
$$\langle \Phi \cdot \lambda, a\rangle = \langle \Phi, \lambda \cdot a\rangle, \qquad \langle \lambda \cdot \Psi, a\rangle = \langle \Psi, a \cdot \lambda\rangle,$$
$$\langle \Psi \square \Phi, \lambda\rangle = \langle \Psi, \Phi \cdot \lambda\rangle, \qquad \langle \Psi \diamond \Phi, \lambda\rangle = \langle \Phi, \lambda \cdot \Psi\rangle,$$

对于 Φ、$\Psi \in \mathcal{A}^{**}$、$\lambda \in \mathcal{A}^{*}$、$a$、$b \in \mathcal{A}$。这两个乘积都扩展了 $\mathcal{A}$ 上的乘法。$\square$ 乘积在右侧关于弱*拓扑连续，而 $\diamond$ 乘积在左侧关于弱*拓扑连续。这一事实为我们提供了以重复弱*极限表示阿伦斯乘积的公式：令Φ、$\Psi \in \mathcal{A}^{**}$，并令 (a_α) 和 (b_β) 为 $\mathcal{A}$ 中的网，分别弱*收敛于 Φ 和 Ψ。则

$$\Phi \square \Psi = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} a_\alpha b_\beta, \qquad \Phi \diamond \Psi = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} a_\alpha b_\beta, \tag{2.1}$$

其中两个极限均取在弱*拓扑中。

阿伦斯乘积由 Arens 于 [1, 2]引入。有关阿伦斯乘积的更多信息，[14, 第 1 章4]对其基本性质作了非常易读的介绍，而 [6] 则给出了详细的介绍和背景。

设 G为一个单位元为 1 的群。若函数 $\omega\colon G \to (0、\infty)$ 满足$\omega(1) = 1$ 且 $\omega(st) \leqslant \omega(s)\omega(t)$ (s、$t \in G$)，则称其为 G 上的权。我们定义

$$\ell^1(G, \omega) = \{f\colon G \to \mathbb{C} : \sum_{t\in G} |f(t)|\omega(t) < \infty\}.$$

这是一个范数为 $\|f\|_\omega = \sum_{t\in G} |f(t)|\omega(t)$ 的巴拿赫空间。给定 f，$g \in \ell^1(G,\ \omega)$我们将 f 与 g 的卷积定义为

$$(f * g)(t) = \sum_{s\in G} f(s)g(s^{-1}t) \quad (t \in G).$$

可以验证，$f * g$ 仍属于 $\ell^1(G,\ \omega)$，且 $\|f * g\|_\omega \leqslant \|f\|_\omega \|g\|_\omega$，因此 $\ell^1(G,\ \omega)$ 在卷积运算下构成一个巴拿赫代数。我们将这种形式的巴拿赫代数称为***Beurling***代数。其对偶空间可与.....等同

$$\ell^1(G, \omega)^* = \ell^\infty(G, 1/\omega) = \{\lambda\colon G \to \mathbb{C} : \lambda/\omega \in \ell^\infty(G)\}.$$

给定一个群 G 及其生成集 T，我们可以通过公式在 G 上定义一个权 ω

$$\omega(g) = \exp(|g|_T) \quad (g \in G).$$

这是次乘性的事实可由 $|\cdot|_T$ 的次可加性推出。我们将在主要例子中使用 $\mathbb{F}_3$ 上这种形式的权。

设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺代数，并用 $\sigma(a)$ 表示元素 $a \in \mathcal{A}$ 的谱。若 $a \in \mathcal{A}$ 满足 $\sigma(a) = \{0\}$，则称其为准幂零；根据谱半径公式，这等价于要求 $\lim_{n\to 0} \|a^n\|^{1/n} = 0$。幂零元都是准幂零元。$\mathcal{A}$ 的雅各布森根，下文记作 $\operatorname{rad}\mathcal{A}$，定义为由准幂零元构成的最大左理想，即

$$\operatorname{rad}\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : \sigma(ba) = \{0\}\ (b \in \mathcal{A})\}.$$

Jacobson根始终是 $\mathcal{A}$ 的一个闭双边理想，同时也是由准幂零元组成的最大右理想:

$$\operatorname{rad}\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : \sigma(ab) = \{0\}\ (b \in \mathcal{A})\}.$$

特别地，任何满足 $\mathcal{A}a$ 为幂零元的 $a \in \mathcal{A}$ 都属于 $\operatorname{rad}\mathcal{A}$；在第 6 节中，我们将利用这一事实来检验所构造的元素确实属于根。

2.3. **网与子网**。有向集 是一个集合 Λ，带有关系 $\leqslant$，该关系定义在 Λ 上，且具有自反性和传递性，并且任意两个元素都有一个共同的上界。设 X 是一个拓扑空间。那么， X 中的一个网 是定义在有向集上的函数，其取值属于 X；我们通常将定义在有向集 Λ 上的网记作 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$，或简单记作 (x_α)。若给定 x的一个开邻域 U，存在 $\alpha_0 \in \Lambda$，使得对所有 $\alpha \geqslant \alpha_0$都有 $x_\alpha \in U$，则网 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$收敛到点 $x \in X$。我们按照 Willard 的用法使用“子网”一词；请注意，“子网”还有其他（彼此不等价的）定义正在使用。准确地说，若 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X中的一个网，那么对我们而言，$(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 的一个子网 是 X中的另一个网 $(y_\beta)_{\beta\in M}$，并且伴有一个保序函数 $h\colon M \to \Lambda$，满足以下性质：

(1) 对所有 $\beta \in M$，$y_\beta = x_{h(\beta)}$；(2) h 是共尾的，这意味着对于每个 $\alpha \in \Lambda$，都存在 $\beta \in M$，使得 $h(\beta) \geqslant \alpha$。

我们通常将序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的一个子网记作 $(x_{h(\beta)})_{\beta\in M}$，其中 h 是一个从有向集 M 到 $\mathbb{N}$ 的未指定函数，且保持序并且共尾。一个标准结果是，拓扑空间 X 紧致，当且仅当每个网都有一个收敛子网。

2.4. **Stone–Čech紧化**。给定集合 X，我们用 βX 表示 X的 Stone–Čech 紧化。事实上，$\ell^1(X)^{**}$ 可与 $M(\beta X)$等距同一，其中 $M(\beta X)$是定义在 βX上的复正则博雷尔测度所构成的巴拿赫空间。若 G 是一个群（或更一般地说，是一个半群），将 βG 与 $M(\beta G)$ 中的点质量集合等同后，βG 在任一种 Arens乘积下都成为一个半群。

设 G 是一个群，ω 是 G 上的一个权。即使在加权情形下，Stone–Čech 紧致化也会成为 $\ell^1(G,\omega)^{**}$ 的重要特殊子集，下面我们将对此作出解释。按照 Dales 和 Dedania [5], ，我们将 βG_ω 定义为 $\ell^1(G,\omega)^{**}$ 中归一化点质量集合 $\{\frac{1}{\omega(g)}\delta_g$ 的弱*闭包：$g \in G\}$。线性映射 $L_\omega\colon \ell^1(G) \to \ell^1(G,\omega)$ 由$L_\omega(f) = f/\omega$给出，是一个满射等距映射，而映射 $L_\omega^{**}|_{\beta G}\colon \beta G \to \beta G_\omega$ 是一个同胚。不过请注意，L_ω 通常不保持卷积，而且除非 $\omega = 1$，βG_ω 并不是一个自然的半群。我们主要例子中的泛函将属于 $(\beta\mathbb{F}_3)_\omega$，我们将在注 6.6 中对此作进一步说明。

3. 证明概要

我们的目标是构造一个权 ω，使得 $\mathbb{F}_3$ 上的根基 $\ell^1(\mathbb{F}_3,\ \omega)^{**}$ 对于两个 Arens乘积而言彼此不同。我们的方法是定义某个无限集 X，它作为幺半群生成 $\mathbb{F}_3$，然后将我们的权定义为 $\omega(t) = \exp(|t|_X)$ $(t \in \mathbb{F}_3)$。

我们如下定义生成集 X。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，令

$$X_j = \{v b^{5^{2j-1}} v^{-1} a^{5^{2j}} b^{5^{2j}} : v \in \mathbb{F}_3,\ |v| \leqslant 5^j\}$$

并令

$$X_\infty = \bigcup_{j=2}^{\infty} X_j.$$

最后，我们的生成集为

$$X = X_\infty \cup S.$$

我们用 $|u|_X$ 表示相对于新生成集 X而言 $u \in \mathbb{F}_3$ 的词长。当然，对于任意 $u \in \mathbb{F}_3$，我们总有 $|u|_X \leqslant |u|$。给定满足 $|v| \leqslant 5^j$的 $j \in \mathbb{N}$ 和 $v \in \mathbb{F}_3$，我们记作 $x(v,\ j) = vb^{5^{2j-1}}v^{-1}a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}$，使得 $X_j = \{x(v,\ j) : |v| \leqslant 5^j\}$。

因此，我们的策略是定义满足以下性质的元素 $\Phi_0, \Psi_0 \in \ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}$：

(1) 设 $I = \ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}\square\Phi_0$，则有 $I^{\square 2} = \{0\}$，这意味着

$$\Phi_0 \in \operatorname{rad}(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \square);$$

(2) $\Phi_0 \diamond \Psi_0$ 不是准幂零的，因此

$$\Phi_0 \notin \operatorname{rad}(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \diamond).$$

泛函 Φ_0 将定义为序列的一个弱*聚点

$$\frac{1}{\omega(a^{5^{2n}}b^{5^{2n}})}\delta_{a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

为了证明它满足上述条件 (1)，我们需要证明以下关键的词长估计：

$$|a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}|_X = 5^{2n-1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.1}$$

这将在命题 5.5(i) 中完成。证明$|a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}|_X \leqslant 5^{2n-1} + 1$ 只需一行（只需注意 $a^{5^{2n}}b^{5^{2n}} = (b^{-1})^{5^{2n-1}}x(1,\ n)$），但证明反向不等式则需要相当多的工作。类似地，$\Psi_0$ 将定义为该序列的一个弱*聚点

$$\frac{1}{\omega(c^n)}\delta_{c^n} = \delta_{c^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

为了证明上面的条件 (2) 成立，关键计算如下：

$$\left|a^{5^{2n_1}}b^{5^{2n_1}}c^{k_1}\cdots a^{5^{2n_r}}b^{5^{2n_r}}c^{k_r}\right|_X = \sum_{i=1}^{r}(5^{2n_i-1}+1) + \sum_{i=1}^{r}k_i, \tag{3.2}$$

对所有 $k_{i-1} > 3 \cdot 5^{n_i}$ $(i = 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ r)$ 均成立。结合等式 (3.1) 和下面的引理 4.1，即可推出

$$\left|a^{5^{2n_1}}b^{5^{2n_1}}c^{k_1}\cdots a^{5^{2n_r}}b^{5^{2n_r}}c^{k_r}\right|_X = \sum_{i=1}^{r}|a^{5^{2n_i}}b^{5^{2n_i}}|_X + \sum_{i=1}^{r}|c^{k_i}|_X \tag{3.3}$$

对所有 $k_{i-1} > 3 \cdot 5^{n_i}$ $(i = 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ r)$ 均成立。同样，证明 (3.2) 的左端不大于右端是直接的，真正需要费力的是证明反向不等式。

第 4 节和第 5 节将用于证明 (3.1) 和 (3.2)。具体而言，(3.1) 可由命题 5.5(i) 得出，而 (3.2) 就是命题 5.6。随后，在第 6 节中，将正式引入 Φ_0 和 Ψ_0，并证明条件 (1) 和 (2)。由此将确立我们的主要结果（定理 6.5）。

现在我们简要说明，为何在主要示例中选择了特定的群和权。首先，以下引理表明，我们必须在非阿贝尔群中寻找示例。

引理3.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个交换巴拿赫代数。那么根 $(\mathcal{A}^{**}, \square) =$ 根 $(\mathcal{A}^{**}, \diamond)$。

证明。令 $\Phi \in \operatorname{rad}(\mathcal{A}^{**}, \square)$。那么 $\Phi\square\mathcal{A}^{**}$ 由准幂零元组成。令$\Psi \in \mathcal{A}^{**}$，注意到，由于 $\mathcal{A}$ 是交换的，$\diamond$ 是 $\square$ 的相反乘积（由 (2.1) 可见），因此 $\|(\Psi\diamond\Phi)^{\diamond n}\|^{1/n} = \|(\Phi\square\Psi)^{\square n}\|^{1/n} \to 0$, 如 $n \to \infty$。我们有

证明了 $\mathcal{A}^{**}\diamond\Phi$由准幂零元组成，因此 Φ 关于 $\diamond$是根。这证明了 $\mathrm{rad}\,(\mathcal{A}^{**},\square) \subseteq \mathrm{rad}\,(\mathcal{A}^{**},\diamond)$，反向包含关系可用类似方法证明。□

对于某个群 G，$\ell^1(G)^{**}$的两个根基是否可以是互不相同的集合，这仍然是一个未决问题。然而，在撰写本文时，构造 $\ell^1(G)^{**}$ 的根元素的唯一已知方法是利用 G 及其子群上的不变均值，而由此得到的元素对于两种阿伦斯乘积始终都是根。$\ell^1(\mathbb{F}_n)^{**}$ $(n \geqslant 2)$ 是否具有非零根（对于任一Arens乘积）是一个长期存在的未解决问题。鉴于这些因素，我们决定在非常非阿贝尔群上的非平凡权中寻找例子，最终得到了本文的主要例子。

尽管问题1.1对 $\omega = 1$仍然未解决，但我们的根元素具有一个有趣的性质，而无权情形中的根元素不可能具有该性质：它属于 $(\beta\mathbb{F}_3)_\omega$。详见注 6.6。

4. 计算字长的基本引理

本节将介绍一些基本引理，它们将成为计算第 5 节中 X-字长（进而计算 ω 的值）的重要工具。注意，X 中元素的一般乘积具有形式 $d_1x_1d_2\cdots d_nx_nd_{n+1}$，其中 $x_i \in X_\infty$ $(i = 1,\ldots,n)$，且 $d_{ij} \in S$ $(i \equiv 1,\ldots,n+1,\ j = 1,\ldots,p_i)$；我们允许某些乘积 d_i 为空。本节及下一节中，我们将把一种将 $\mathbb{F}_3$ 的元素写成 X 中元素乘积的特定方式称为 X 上的表达式，有时也称为 X-字。注意，由于 $S \subseteq X$，若表达式 $d_1x_1d_2\cdots d_nx_nd_{n+1}$ 是 X-极小的，则对每个 $i = 1,\ldots,n+1$，$d_{i,1}d_{i,2}\cdots d_{i,p_i}$ 都是约化字。

本节的第一个引理很简单。

引理 4.1. 设 $k \in \mathbb{N}$。那么 $|c^k|_X = k$。

证明。显然 $|c^k|_X \leqslant k$。若 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ 且 $x_1x_2\cdots x_n = c^k$，那么注意到 $\varphi_c(x_i) \leqslant 1$ 对每个 i都成立，可得 $k = \varphi_c(c^k) = \sum_{i=1}^n \varphi_c(x_i) \leqslant n$. 结论得证。□

下一个引理将成为下一节计算字长的有用工具

引理 4.2. 设 $u \in \mathbb{F}_3$。那么 $|u| \geqslant |\varphi_a(u)| + |\varphi_b(u)| + |\varphi_c(u)|$.

证明。设 α_+ 表示 u 作为约化字时其中正 a 项的个数，并设 α_-表示其中负 a 项的个数。类似地，定义 β_+ 和 β_- 分别表示 b项的个数，并定义 γ_+和 γ_- 分别表示 c项的个数。那么

$$|u| = \alpha_+ + \alpha_- + \beta_+ + \beta_- + \gamma_+ + \gamma_- \tag{4.1}$$

and

$$\varphi_a(u) = \alpha_+ - \alpha_-, \qquad \varphi_b(u) = \beta_+ - \beta, \qquad \varphi_c(u) = \gamma_+ - \gamma_-.$$

由此可得 $\alpha_+ \geqslant \alpha_+ - \alpha_- = \varphi_a(u)$，同样地有 $\alpha_- \geqslant -\varphi_a(u)$，因此 $\alpha_+ + \alpha_- \geqslant |\varphi_a(u)|$。类似地，我们可以证明 $\beta_+ + \beta_- \geqslant |\varphi_b(u)|$，以及 $\gamma_+ + \gamma_- \geqslant |\varphi_c(u)|$.。结论现由（4.1）得出。□

下面的引理是一个著名结果的变体，其推论告诉我们如何将生成元从 X_∞ 写成约化字。

引理 4.3. 设 $k \in \mathbb{N}$ 且令 $v \in \mathbb{F}_3$ 满足 $|v| \leqslant k$。则 $vb^k v^{-1} = wb^k w^{-1}$，其中 w 是一个以 $a^{\pm 1}$ 或 $c^{\pm 1}$ 结尾的约化字，且 $|w| \leqslant k$。w、w^{-1} 与 b^k 之间不会再发生消去。

证明。情形 $v = 1$是显然的。否则，我们可以写成 $v = wb^j$，其中 $j \in \mathbb{Z}$，且 w 以 $a^{\pm 1}$ 或 $c^{\pm 1}$结尾。于是 $v^{-1} = b^{-j}w^{-1}$，其中 w^{-1} 以 $a^{\pm 1}$ 或 $c^{\pm 1}$开头，因此在 $b^k w^{-1}$中不会发生消去。于是我们有

$$vb^k v^{-1} = wb^j b^k b^{-j} w^{-1} = wb^k w^{-1},$$

最后的表达式是约化的。 □

设 $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$，并设 $v \in \mathbb{F}_3$ 满足 $|v| \leqslant 5^j$。从现在起，当我们考虑生成元 $x(v, j) \in X_\infty$时，不失一般性地假设 $vb^{5^{2j-1}}v^{-1}$ 是约化的，因为取前一引理中的 w，我们有 $x(v, j) = x(w, j)$。如果需要将整个 $x(v, j)$ 写成约化字的公式，则有如下结果。

推论 4.4. 设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $v \in \mathbb{F}_3$ 满足 $|v| \leqslant 5^n$。作为一个既约字，$x(v,\ n)$ 具有形式 $a^k w b^{5^{2n-1}} w^{-1} a^{5^{2n}-k} b^{5^{2n}}$，且 $w \in \mathbb{F}_3$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $|w| + k \leqslant 5^n$。

证明. 由前一个引理立即可得。 □

以下是 X-极小表达式的一条初等但关键的性质，我们将反复用到它。

引理 4.5. 设 $j \in \mathbb{N}$，并设 $v \in \mathbb{F}_3$ 满足 $|v| \leqslant 5^j$。假设

$$\underline{d}x(v, j)\underline{e} \tag{4.2}$$

是 X-极小的，其中 $d_i,\ e_i \in S$。那么，$x(v,\ j)$（作为一个既约字）中的字母，少于一半被 d 和 e 抵消。

证明. 反设不然。写作 $d = d_1 d_2 \cdots d_l d_{l+1} \cdots d_{l+p}$ 和 $e = e_1 e_2 \cdots e_m e_{m+1} \cdots e_{m+q}$，其中 $d_{l+1}, \ldots, d_{l+p}, e_1, \ldots, e_m$ 是被抵消的字母，而 $d_1, \ldots, d_l, e_{m+1}, \ldots e_{m+q}$ 不被抵消。那么 (4.2) 含有来自 X 的 $p+q+m+l+1$ 个符号，并且根据假设 $p+m \geqslant \frac{1}{2}|x(v, j)|$。写作

$$\underline{d}' = d_{l+1} d_{l+2} \cdots d_{l+q}, \qquad \underline{e}' = e_1 e_2 \cdots e_m.$$

那么，由于至少有一半的字母被消去，$d'x(v,\ j)e' = t_1 t_2 \cdots t_n$ 对于某些 $n < \frac{1}{2}|x(v,\ j)|$，以及 $t_1,\ \ldots\ldots,\ t_n \in S$。我们得到

$$\underline{d}x(v, j)\underline{e} = d_1 d_2 \cdots d_l\, t_1 t_2 \cdots t_n\, e_{m+1} e_{m+2} \cdots e_{m+q},$$

而后一个表达式包含来自X的 $l + q + n \leqslant l + q + \frac{1}{2}|x(v,\ j)| \leqslant l + q + p + m$ 个符号，少于原表达式 (4.2) 中的符号数，这与它是X-极小的假设矛盾。□

引理 4.6. 设 $j \in \mathbb{N}$，并设 $v \in \mathbb{F}_3$ 满足 $|v| \leqslant 5^j$。假设 $dx(v, j)$ 是 X-极小的，其中$d_1,\ \ldots\ldots,\ d_p \in S.$。将 $vb^{5^{2j-1}}v^{-1} = wb^{5^{2j-1}}w^{-1}$ 写成约化字，如引理 *4.3* 中所示。假设 d 消去了 $wb^{5^{2j-1}}$。那么，我们可以将 $\underline{d}x(v, j)$ 改写为 $ex(1, j)$，其中 $e_1,\ \ldots\ldots,\ e_q \in S$，且不增加该表达式中来自 X 的符号数。

证明。我们可以将 $d = yz$ 写成（既约），其中 $z = [wb^{5^{2j-1}}]^{-1}$，且 $|z| = |w| + 5^{2j-1}$，并且 $|d| = |y| + |z|$。我们有

$$\underline{d}x(v, j) = yw^{-1}a^{5^{2j}}b^{5^{2j}} = yw^{-1}b^{-5^{2j-1}}x(1, j).$$

设 e_1、……、e_q 是作为约化字出现在 $yw^{-1}b^{-5^{2j-1}}$ 中的字母，使得 $e = yw^{-1}b^{-5^{2j-1}}$。那么 $ex(1, j) = dx(u, j)$ 并且

$$|e| \leqslant |y| + |w^{-1}| + 5^{2j-1} = |y| + |z| = |d|.$$

因此，表达式 $ex(1, j)$ 中来自 X 的符号数量（即 $1 + |e|$）至多为 $1 + |d|$，由此得证。□

设 $n \in \mathbb{N}$，令 $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$，并令 $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}_3$，其中 $|v_i| \leqslant 5^{k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$。我们称一个表达式

$$d_1 x(v_1, k_1) \cdots d_n x(v_n, k_n) d_{n+1},$$

其中 $d_{ij} \in S$，是超 X-极小的，如果

(1) 对每个 $i = 1, \ldots, n$，$v_i b^{5^{2k_i-1}} v_i^{-1}$ 都是既约的；

(2) 每当某个 d_i 与 $v_i b^{5^{2k_i-1}}$ 抵消时，我们有 $v_i = 1$。

由引理 4.3 和引理 4.6 可知，每个 X-极小表达式都等价于一个超 X-极小表达式。若改用推论 4.4 中的形式来写

$$x(v_i, k_i) = a^{\nu_i} w_i b^{5^{2k_i-1}} w_i^{-1} a^{5^{2k_i} - \nu_i} b^{5^{2k_i}} (\text{reduced}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

对于某些 ν_1、……、$\nu_n \in \mathbb{N}$ 和 w_1、……、$w_n \in \mathbb{F}_3$，那么上述条件 (2) 等价于：每当某个 d_i 与 $a^{\nu_i} w_i b^{5^{2k_i-1}}$ 相消时，我们就有 $w_i = 1$ 和 $\nu_i = 0$。第 5 节中的大多数结果都假设 X- 字是超 X-极小的。我们猜想，即使不作此假设，大多数结果仍然成立，但加入此假设可以减少需要检验的情形数目。

5. 关键字长度结果的证明

本节证明等式（3.1）和（3.2）——关于 X-字长度的两个关键结果，我们将在主要结果中用到它们。这两个结果分别是命题 5.5(i) 和命题 5.6。我们先介绍一个简短的技术引理，在引理 5.2 的证明中，情形 4 会用到它。

引理 5.1. 设 $j \in \mathbb{N}$，并设 $v \in \mathbb{F}_3$ 满足 $|v| \leqslant 5^j$。将 $x(v, j) = s_1 s_2 \cdots s_m$ 写成约化字，其中 $m = |x(v, j)|$ 且 $s_1, \ldots, s_m \in S$。假设 z 是这些字母的初始块，而 y 是其余部分（因此特别有 $x(v, j) = zy$）。进一步假设 $|z| < \frac{1}{2}|x(v, j)|$。则 $\theta(y) \geqslant |z|$。

证明. 事实上，我们将证明 $\theta(y) \geqslant \frac{1}{2}|x(v, j)|$，这立即给出结论。由推论 4.4，作为一个约化字

$$x(v, j) = a^k w b^{5^{2j-1}} w^{-1} a^{5^{2j} - k} b^{5^{2j}},$$

其中 $|w| + k \leqslant 5^j$。需要考虑两种情况。首先，假设 $y | a^{5^{2j}-k} b^{5^{2j}}$。那么事实上 $\theta(y) = |y|$，根据假设，这至少为 $\frac{1}{2}|x(v, j)|$。

唯一的另一种可能是，y 以 $a^{5^{2j}-k} b^{5^{2j}}$ 结尾，但也包含一些较早的项。$\theta(y)$ 的负贡献只能来自 w 和 w^{-1}，因此我们得到的粗略下界为

$$\begin{aligned} \theta(y) &\geqslant \theta(a^{5^{2j}-k} b^{5^{2j}}) - 2|w| = 2 \cdot 5^{2j} - k - 2|w| \\ &\geqslant 2 \cdot 5^{2j} - 2 \cdot 5^j \geqslant 5^{2j} + 5^{2j-1} + 5^j \geqslant \tfrac{1}{2}|x(v, j)|, \end{aligned}$$

如所要求。 □

引理 5.2。 设 $n \in \mathbb{N}$ 且设 $x_1, \dots, x_n \in X_\infty$。假设该表达式

$$\underline{d}_1 x_1 \underline{d}_2 \cdots \underline{d}_n x_n \tag{5.1}$$

是超 X-极小的，其中 $x_i \in X_\infty$ 和 $d_{ij} \in S$ 对所有 i, j成立。记

$$x_i = a^{\nu_i} w_i b^{5^{2k_i-1}} w_i^{-1} a^{5^{2k_i}-\nu_i} b^{5^{2k_i}} \ \textit{(reduced)} \quad (i = 1, \dots, n),$$

如推论 *4.4* 中所示，其中 $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}_0$, $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{F}_3$，以及 $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$。固定一个将表达式 (5.1) 化简的消去序列。于是，若 $a^{5^{2k_n}-\nu_n}$中的任何项被消去，它们必定是由来自 d_n的字母消去的。

证明。 假设 $a^{5^{2k_n}-\nu_n}$ 中的字母有 r 个被消去。那么，在字符串末尾必定存在一个连续字母块

$$\underline{d}_1 x_1 \underline{d}_2 \cdots x_{n-1} \underline{d}_n \, a^{\nu_n} w_n b^{5^{2k_n-1}} w_n^{-1} \tag{5.2}$$

它可化简为 a^{-r}。我们的证明将按该块可能所在的位置分情形进行。只有情形 1 和最后的子情形 4C 不会导致矛盾。

情形 1。该块完全来自 $d_n a^{\nu_n} w_n b^{5^{2k_n-1}} \underline{w}_n^{-1}$。

在这种情况下，我们看到 $\underline{d}_n$ 必须消去 $b^{5^{2k_n-1}}$，因此（由于 (5.1) 是超 X-极小的）$w_n = 1$ 和 $\nu_n = 0$。于是显然， $d_n = y a^{-r} b^{-5^{2k_n-1}}$ （既约），其中某个 $y \in \mathbb{F}_3$，尤其是，所有消去都来自 d_n 中的 a^{-1}。

情形 2。块在某个 $m < n$ 的 d_m 内部某处结束。

在这种情况下，将序列 d_m 分成初始部分 d'_m 和其余部分 d''_m，使得 d''_m 是 d_m 中属于该块的部分。我们有

$$a^{-r} = \underline{d}''_m x_m \underline{d}_{m+1} \cdots x_{n-1} \underline{d}_n \, a^{\nu_n} w_n b^{5^{2k_n-1}} w_n^{-1}.$$

对两边取 φ_a，并注意到对于所有 i， $\varphi_a(x_i) > 1$，我们得到

$$\begin{aligned} -r &= \varphi_a(\underline{d}''_m) + \sum_{i=m+1}^{n} \varphi_a(\underline{d}_i) + \sum_{i=m}^{n-1} \varphi_a(x_i) + \nu_n \\ &> \varphi_a(\underline{d}''_m) + \sum_{i=m+1}^{n} \varphi_a(\underline{d}_i) + (n-m) + \nu_n, \end{aligned}$$

这意味着

$$-\varphi_a(\underline{d}''_m) - \sum_{i=m+1}^{n} \varphi_a(\underline{d}_i) > r + (n-m) + \nu_n.$$

同理

$$-\varphi_b(\underline{d}''_m) - \sum_{i=m+1}^{n} \varphi_b(\underline{d}_i) > (n-m) + 5^{2k_n-1}.$$

根据引理 4.2，这最后两个方程共同推出

$$\begin{aligned} |\underline{d}''_m| + \sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| &\geqslant |\varphi_a(\underline{d}''_m)| + |\varphi_b(\underline{d}''_m)| + \sum_{i=m+1}^{n} |\varphi_a(\underline{d}_i)| + \sum_{i=m+1}^{n} |\varphi_b(\underline{d}_i)| \\ &\geqslant r + \nu_n + 5^{2k_n-1} + 2(n-m) > r + \nu_n + 5^{2k_n-1} + 1. \end{aligned}$$

X-字

$$\underline{d}''_m x_m \underline{d}_{m+1} \cdots \underline{d}_n x_n$$

作为约化字等于 $a^{5^{2k_n}-r-\nu_n} b^{5^{2k_n}}$，并且包含

$$(n-m) + |\underline{d}''_m| + \sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| \geqslant 2 + |\underline{d}''_m| + \sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| > r + \nu_n + 5^{2k_n-1} + 3$$

许多来自 X 的符号，因此将（5.1）中的此字符串替换为

$$(a^{-1})^{r+\nu_n} (b^{-1})^{5^{2k_n-1}} x(1, k_n)$$

将使我们能够在使用较少 X 中元素的同时表示 $\mathbb{F}_3$ 中的同一元素，这就产生了矛盾。

情形 3。该块的结尾要么位于 x_{m-1} 与 d_m 之间，要么位于 d_m 与 $\underline{x}_m$ 之间，其中 $m < n$。在这种情形下，分别对 $d''_m = d_m$ 与 $d'_m = 1$，或 $d''_m = 1$ 与 $d'_m = d_m$，重复情形 2 的论证。

情形 4。对于某个 $m < n$，该块在 x_m 的中途结束。

写作

$$x_m = z_1 z_2 \cdots z_R \, y_1 y_2 \cdots y_Q \text{ (reduced)},$$

对于某个 $Q, R \in \mathbb{N}$，使得 $y_1 y_2 \cdots y_Q$ 属于该块，而 $z_1 z_2 \cdots z_R$ 不属于。表达式 $x_m d_{m+1} \cdots d_n x_n$ 含有来自 X 的 $n - m + 1 \pm \sum_{i=m+1}^{n} |d_i|$ 个符号，并且作为 $\mathbb{F}_3$ 的一个元素，等于 $z a^{5^{2k_n}-r-\nu_n} b^{5^{2k_n}}$。

我们有

$$\underline{y}\, \underline{d}_{m+1} x_{m+1} \cdots \underline{d}_n \, w_n b^{5^{2k_n-1}} w_n^{-1} = a^{-r-\nu_n}.$$

将 φ_a 应用于两边，得到

$$\varphi_a(\underline{y}) + \sum_{i=m+1}^{n} \varphi_a(\underline{d}_i) + \sum_{i=m+1}^{n-1} \varphi_a(x_i) = -r - \nu_n,$$

因此

$$\sum_{i=m+1}^{n} \varphi_a(\underline{d}_i) = -r - \nu_n - \varphi_a(\underline{y}) - \sum_{i=m+1}^{n-1} \varphi_a(x_i) \leqslant -r - \nu_n - \varphi_a(\underline{y}). \tag{5.3}$$

类似地

$$\sum_{i=m+1}^{n} \varphi_b(\underline{d}_i) \leqslant -5^{2k_n-1} - \varphi_b(\underline{y}). \tag{5.4}$$

利用引理 4.2，并注意到 $\varphi_a(y),\ \varphi_b(y) \geqslant 0$，方程 (5.3) 和 (5.4) 一起推出

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| \geqslant \varphi_a(\underline{y}) + \varphi_b(\underline{y}) + r + \nu_n + 5^{2k_n-1} = \theta(\underline{y}) + r + \nu_n + 5^{2k_n-1}. \tag{5.5}$$

现在根据 $|y| \leqslant \frac{1}{2}|x_m|$ 是否成立，将其分为若干子情形。

子情形 4A. $|\underline{y}| > \frac{1}{2}|x_m|$。

在这种情况下，引理 5.1 告诉我们 $\theta(\underline{y}) \geqslant |\underline{z}|$，因此 (5.5) 表明

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| \geqslant |\underline{z}| + 5^{2k_n-1} + r + \nu_n = R + r + \nu_n + 5^{2k_n-1},$$

因此表达式 $x_m d_{m+1} \cdots d_n \underline{x}_n$ 至少有

$$2 + \sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| \geqslant 2 + R + r + \nu_n + 5^{2k_n-1}$$

个来自 X 的符号。另一方面，表达式

$$z_1 z_2 \cdots z_R \, (a^{-1})^{r+\nu_n} (b^{-1})^{5^{2k_n-1}} x(1, k_n)$$

也等于 $z\underline{a}^{5^{2k_n}-r-\nu_n} b^{5^{2k_n}}$，但只有 $1 + R + r + \nu_n + 5^{2k_n-1}$ 个来自 X 的符号，这与之矛盾。

子情形 4B。$|\underline{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x_m|$ 和 $m < n-1$。

这意味着 $y|\underline{a}^{5^{2k_m}-\nu_m} b^{5^{2k_m}}$，因此 $\theta(y) = |y|$。因此，根据 (5.5)，

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\underline{d}_i| \geqslant |\underline{y}| + r + \nu_n + 5^{2k_n-1} = Q + r + \nu_n + 5^{2k_n-1},$$

并且由此可知，表达式 $x_m d_{m-1} \cdots d_n x_n$ 至少包含

$$n - m + 1 + \sum_{i=m-1}^{n} |\underline{d}_i| \geqslant 3 + Q + r + \nu_n + 5^{2k_n-1}$$

个来自 X 的符号。因此，表达式

$$x_m y_Q^{-1} \cdots y_2^{-1} y_1^{-1} (a^{-1})^{r+\nu_n} (b^{-1})^{5^{2k_n-1}} x(1, k_n)$$

来自 X 的符号少于 $x_m d_{m+1} \cdots d_n \underline{x}_n$，但表示同一个群元素。这就产生了矛盾。

子情形 4C。$|\underline{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x_m|$ 和 $m = n-1$。

这意味着我们的块是 $y d_n a^{\nu_n} \underline{w}_n b^{5^{2k_n-1}} w_n^{-1}$，其中又有 $y|\underline{a}^{5^{2k_m}-\nu_m} b^{5^{2k_m}}$。我们有

$$\underline{y}\underline{d}_n a^{\nu_n} w_n b^{5^{2k_n-1}} w_n^{-1} = a^{-r}$$

并且要使这个乘积等于 a^{-r}，就必须消去某些项 y。如果来自 w 的项与 y 消去，那么它们必须先与 d_n 消去，这意味着没有可用于与 $b^{5^{2k_n-1}}$ 消去的项。因此，消去必定来自 d_n，我们可以写成 $d_n = d'_n d''_n$（既约），其中 $d'_n = y_Q^{-1} \cdots y_2^{-1} y_1^{-1}$。于是 $d''_n a^{\nu_n} w_n b^{5^{2k_n-1}} w_n^{-1} = a^{-r}$。现在我们可以像情形 1 中那样论证，从而得到所需结论。□

引理 5.3. 设 $n \in \mathbb{N}$，并假设

$$\underline{d}_1 x_1 \cdots \underline{d}_n x_n \underline{d}_{n+1} \tag{5.6}$$

是超 X-极小的，其中 $x_1, \ldots, x_n \in X_\infty$ 和 $d_{ij} \in S$。此外，记

$$x_n = a^k w b^{5^{2j-1}} w^{-1} a^{5^{2j}-k} b^{5^{2j}} \ \textit{(reduced)},$$

如推论 *4.4* 所示，对于某些 j、$k \in \mathbb{N}$ 和 $w \in \mathbb{F}_3$，其中 $k + |w| \leqslant 5^j$，并令 p 表示 d_{n+1} 中字母的数量。固定一个将(5.6)约化的消去序列。于是，并非所有

$a^{5^{2j}}$ 中的项都被消去，因此乘积(5.6) 以既约字，$_{p'}\cdots d_{n+1,\ p}$结尾，其中 $1\leqslant p'\leqslant p$、$m_1>0$ 和 $m_2\geqslant 0$。

证明。 根据引理 5.2，来自 $a^{5^{2j}-k}$ 的项只能由来自 d_n 和 d_{n+1} 的项消去。要发生这种消去，要么必须从右侧消去 $b^{5^{2j}}$，要么必须从左侧消去全部 $a^k w b^{5^{2j-1}} w^{-1}$。

假设从右侧消去 $b^{5^{2j}}$。根据引理 4.5 d_n， d_{n+1} 合在一起最多只能消去 $\frac{1}{2}|x(v,\ j)|=|w|+\frac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}+5^{2j}$ 个来自 $x(v,\ j)$ 的字母。如果 d_{n+1} 消去 $b^{5^{2j}}$，这意味着 d_n 和 d_{n+1} 最多还可以进行 $\frac{1}{2}|x(v,\ j)|-5^{2j}=|w|+\frac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}$ 次消去。这意味着至少

$$5^{2j}-k-|w|-\tfrac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}\geqslant 5^{2j}-5^j-\tfrac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}>0$$

来自 $a^{5^{2j}-k}$ 的字母仍然保留。

如果改为从左侧消去 $a^k w b^{5^{2j-1}} w^{-1}$，也可以进行类似的计算。在这种情况下， d_n 必须消去 $k+2|w|+5^{2j-1}$ 个字母，最多还剩下

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}|x(v,j)|-(k+2|w|+5^{2j-1}) &= (|w|+\tfrac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}+5^{2j})-(k+2|w|+5^{2j-1})\\ &= 5^{2j}-k-|w|-\tfrac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}\end{aligned}$$

次进一步消去的机会。因此，至少有

$$5^{2j}-k-(5^{2j}-k-|w|-\tfrac{1}{2}\cdot 5^{2j-1})=\tfrac{1}{2}\cdot 5^{2j-1}+|w|>0$$

来自 $a^{5^{2j}-k}$ 的字母仍然保留。证明完毕。 □

引理 5.4. 设 $n\in\mathbb{N}$，其中 $n\geqslant 2$。则 $|a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}|_X\leqslant 5^{2n-1}+1$。

证明。 只需注意， $a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}=(b^{-1})^{5^{2n-1}}x(1,\ n)$. □

下一个命题的 (i) 部分连同 $k=0$ 证明了 (3.1)，这是我们主要结果所需的两个关键词长估计之一。(ii) 部分则为命题 5.6 中第二个估计提供了基例。

命题 5.5. 设 $k,k_1,k_2,n\in\mathbb{N}_0$ 满足 $n\geqslant 2$ 和 $k_2\geqslant 1$。那么

(i) $|c^k a^{5^{2n}} b^{5^{2n}}|_X = k+5^{2n-1}+1$;

(ii) $|c^{k_1}a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}c^{k_2}|_X = k_1+5^{2n-1}+1+k_2$.

证明. 我们先证明 (i)。显然，表示 $c^k a^{5^{2n}} b^{5^{2n}}$ 的一个 X-极小表达式必须涉及 X_∞ 中至少一个元素。因此，设我们有 $d_1,\dots,d_l\in S$, $x_1,\dots,x_q\in X$，以及满足 $|v|\leqslant 5^j$ 的 $j\in\mathbb{N}$ 和 $v\in\mathbb{F}_3$，使得

$$x_1\cdots x_q\, x(v,j)\,\underline{d}=c^k a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}, \tag{5.7}$$

并且 $q+l+1$ 是极小的。由引理 5.5 可得

$$q+l+1\leqslant k+5^{2n-1}+1, \tag{5.8}$$

我们将在本证明中证明反向不等式。不失一般性，我们可以假设 (5.7) 左端的表达式是超 X-极小的。

根据引理 5.3，作为约化字，(5.7) 的左端以 $a^{m_1}b^{m_2}d_{l'+1}\cdots d_l$ 结尾，其中$m_1>0$、 $m_2\geqslant 0$ 以及 d_1，……，$d_{l'}$ 是来自 d 、与 $a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}$ 相消的项。我们将考虑 d_1，……，d_l 的各种可能情形。注意，比较 (5.7) 的左端与右边， a^{m_1} 必须是 $a^{5^{2n}}$ 的一部分。因此 d_1，……，$d_l\in\{a^{\pm 1},\ b^{\pm 1}\}$。

注意到，对所有 $x \in X_\infty$ 以及 $i = 1, \ldots\ldots, l$，均有 $\varphi_c(x) = \varphi_c(d_i) = 0$。我们有

$$k = \varphi_c(x_1 \cdots x_q \, x(v,j) \, \underline{d}) = \sum_{i=1}^{q} \varphi_c(x_i), \tag{5.9}$$

这意味着符号 x_1、……、x_q 中至少有 k 个等于 c。

我们断言 m_2 不可能为零。事实上，这将意味着 d_1、d_2、……、$d_{5^{2j}} = b^{-1}$，然后与（5.7）的右边进行比较可得 $d_{l''} = d_{l''+1} = \cdots = d_l = b$，其中 $l - l'' = 5^{2n}$。总之，这使我们得到至少 5^{2n} b 个'加上 k c 个'，也就是说 $q + l \geqslant k + 5^{2n} > k + 5^{2n-1}$。这与（5.8）矛盾。因此，$m_2 \neq 0$，正如所断言的那样，而我们还剩下三种可能性。我们将证明实际发生的是第三种情况。

情形 1。$d_1 = d_2 = \cdots = d_l = b^{-1}$，且 $l = l' < 5^{2j}$。

在这种情况下，(5.7) 的左端以 $a^{m_1} b^{5^{2j} - l}$ 结尾；与右边比较可知 $5^{2j} - l = 5^{2n}$，因此必有 $j > n$。于是

$$l = 5^{2j} - 5^{2n} \geqslant 5^{2n+2} - 5^{2n} = 120 \cdot 5^{2n-1} > 5^{2n-1} + 1.$$

由 (5.9) 还有 $q \geqslant k$，因此 $q + l > k + 5^{2n-1}$，这与 (5.8) 矛盾。

情形 2。 $d_1 = d_2 = \cdots = d_l = b$，且 $l > 0$。

在这种情况下，(5.7) 的左端以 $a^{m_1} b^{5^{2j} + l}$ 结尾；这一次必有 $5^{2j} + l = 5^{2n}$，其中 $j < n$。于是

$$l = 5^{2n} - 5^{2j} \geqslant 5^{2n} - 5^{2n-2} = \tfrac{26}{5} \cdot 5^{2n-1} > 5^{2n-1} + 1,$$

因此，与情形 1 中一样， $q + l > k + 5^{2n-1}$，这与 (5.8) 矛盾。

情形 3。 $d = 1$ （空积）。

在这种情况下，（5.7）的左端以 $a^{m_1} b^{5^{2j}}$结尾，与右边比较，我们得到 $j = n$。因此方程（5.7）变为

$$x_1 x_2 \cdots x_q \, v b^{5^{2n-1}} v^{-1} a^{5^{2n}} b^{5^{2n}} = c^k a^{5^{2n}} b^{5^{2n}},$$

这意味着

$$x_1 x_2 \cdots x_q = c^k v b^{-5^{2n-1}} v^{-1}. \tag{5.10}$$

设 $\psi = \varphi_b - \varphi_c$，它是满足 $\psi(x) \geqslant -1$ $(x \in X)$的同态 $\mathbb{F}_3 \to \mathbb{Z}$。将 ψ 应用于（5.10）的两边，我们得到

$$-k - 5^{2n-1} = \psi(x_1 x_2 \cdots x_q) = \sum_{i=1}^{q} \psi(x_i) \geqslant -q,$$

这意味着 $q \geqslant k + 5^{2n-1}$。在这种情形下 $l = 0$，从而 $q + l + 1 \geqslant k + 5^{2n-1} + 1$，这就证明了（i）。

为证明（ii），我们将其归结为（i）。假设 $d_1, \ldots, d_l \in S$， $x_1, \ldots x_q \in X$，以及满足 $|v| \leqslant 5^j$的 $j \in \mathbb{N}$和$v \in \mathbb{F}_3$，给出

$$x_1 \cdots x_q \, x(v,j) \, \underline{d} = c^{k_1} a^{5^{2n}} b^{5^{2n}} c^{k_2}, \tag{5.11}$$

且使 $q + l + 1$ 取最小可能值。于是，如已指出的，由引理 5.3，(5.11) 的左端以 $a^{m_1} b^{m_2} d_{l'+1} \cdots d_l$结尾，对某个 $1 \leqslant l' \leqslant r$，并且由于 $m_1 > 0$ 该项

a^{m_1}必须构成$a^{5^{2n}}$的一部分。因此， c^{k_2}只能在 $d_{l'+1}\cdots d_l$内表示，从而迫使$d_l=\cdots=d_{l-k_2+1}=c$。记 $d'_i=d_i$ $(i=1,\dots,l-k_2)$。于是 (5.11) 现在变为

$$x_1\cdots x_q\,x(v,j)\,\underline{d'}=c^{k_1}a^{5^{2n}}b^{5^{2n}}$$

并由 (i) 得 $q+|\underline{d'}|+1=q+l-k_2+1=k_1+5^{2n-1}+1$，因此 $q+l+1=k_1+5^{2n-1}+1+k_2$. 这就证明了 (ii)。□

最后，我们证明两个主要词长计算中的第二个。

命题 5.6。 设 $r\in\mathbb{N}$，且 $n_1,\dots,n_r\geqslant 2$和 $k_1,\dots,k_r$为满足以下条件的自然数

$$k_{i-1}>3\cdot 5^{2n_i}\quad(i=2,3,\dots,r).$$

Then

$$\left|a^{5^{2n_1}}b^{5^{2n_1}}c^{k_1}\cdots a^{5^{2n_r}}b^{5^{2n_r}}c^{k_r}\right|_X=\sum_{i=1}^{r}k_i+\sum_{i=1}^{r}(5^{2n_i-1}+1). \tag{5.12}$$

证明。 由引理 5.4 可知，(5.12) 的左端不大于右边。我们将证明反向不等式。我们对 r 使用归纳法。基例由命题 5.5(ii) 给出。

假设方程

$$\underline{d}_1x_1\underline{d}_2\cdots\underline{d}_qx_q\underline{e}=a^{5^{2n_1}}b^{5^{2n_1}}c^{k_1}\cdots a^{5^{2n_r}}b^{5^{2n_r}}c^{k_r}, \tag{5.13}$$

其中 $d_{i,\ j}\in S$, e_1、……、 $e_l\in S$，以及 x_1、……、 $x_q\in X_\infty$ 满足左边的表达式是 X-极小的。不失一般性，我们可以假设它也是超X-极小的。我们将证明

$$q+l+\sum_{i=1}^{q}|\underline{d}_i|\geqslant\sum_{i=1}^{r}k_i+\sum_{i=1}^{r}(5^{2n_i-1}+1).$$

由引理 5.3，(5.13) 左端的乘积以

$$a^{m_1}b^{m_2}e_{l'}\cdots e_l$$

一个约化字结束，其中 $m_1>0$、 $m_2\geqslant 0$和 $1\leqslant l'\leqslant l$。因此，与 (5.13) 右边比较可知，必有 $e_l=e_{l-1}=\cdots=e_{l-k_r+1}=c$。令 $d_{q+1,\ i}=e_i$ $(i=1$、……、 $l-k_r)$，并将 (5.13) 两边的 c^{k_r} 公因子消去，得到

$$\underline{d}_1x_1\underline{d}_2\cdots\underline{d}_qx_q\underline{d}_{q+1}=a^{5^{2n_1}}b^{5^{2n_1}}c^{k_1}\cdots c^{k_{r-1}}a^{5^{2n_r}}b^{5^{2n_r}}. \tag{5.14}$$

在证明余下部分中，我们固定一个将 (5.14) 左端约化的消去序列。对于这个固定的消去序列，我们断言，(5.14) 右边来自 $c^{k_{r-1}}$ 的 c 中，至少有一个必定源自左端某个 d_i 内部。为证明这一点，我们先简要分析左端。 −

从右向左读，在 (5.14) 的左端，必定存在一个约化为 $b^{5^{2n_r}}$ 的连续字母块，其后是一个约化为 $a^{5^{2n_r}}$ 的块，再其后是一个约化为 $c^{k_{r-1}}$ 的块。我们分别称它们为 b-块、 a-块和 c-块；它们并不唯一（因为边界处可能存在完全抵消的子块），但我们为证明的其余部分固定一种选择。我们的选择使得 c-块尽可能短。这三个块合在一起构成一个约化为$c^{k_{r-1}}a^{5^{2n_r}}b^{5^{2n_r}}$.的单一超块

为得出矛盾，假设 $c^{k_{r-1}}$ 中的诸 c均不起源于某个 d_i 之内。那么它们必定全都起源于各个 x_i 之内。注意，由“最短”这一假设， c-块的端点必定是 c，因此（从左向右读） c-块始于譬如 x_Q 之内，并终于 x_{Q+R}之内（对某个 $R \geqslant 0$）。记 $x_{Q+i} = x(v_i, \tau_i)$ $(i = 0, \ldots, R)$, 并将 x_Q 拆分为$x_Q = zy$ （既约），其中 y 属于 c-块，而 z 不属于。由此可得

$$x_Q \underline{d}_{Q+1} \cdots \underline{d}_q x_q \underline{d}_{n+1} = z c^{k_{r-1}} a^{5^{2n_r}} b^{5^{2n_r}}. \tag{5.15}$$

此外，由于 c-块必须以包含在 v_0 或 v_0^{-1}中的字母开头，因此我们有$z|v_0 b^{5^{2\tau_0-1}} v_0^{-1}$，这意味着

$$|z| \leqslant 2 \cdot 5^{\tau_0} + 5^{2\tau_0 - 1}. \tag{5.16}$$

假设我们有 γ_i 个字母 c 位于 x_{Q+i} $(i = 0,$ ……, $R)$ 之内，并且在执行固定的消去序列后仍未被消去。根据我们的假设

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_R = k_{r-1}. \tag{5.17}$$

对于每个 $i = 0,$ ……, R，我们有

$$\gamma_i \leqslant 2|v_i| \leqslant 2 \cdot 5^{\tau_i},$$

因为 c 中的撇号必须来自 x_{Q+i} 或 v_i 。由此可得

$$2\gamma_i < 5^{2\tau_i} \quad (i = 0, \ldots, R), \tag{5.18}$$

并且还可得

$$2\gamma_0 + 2 \cdot (5^{2\tau_0 - 1} + 2 \cdot 5^{\tau_0}) < 5^{2\tau_0}. \tag{5.19}$$

现在我们将 φ_a 应用于 (5.15) 的两边，得到

$$\varphi_a(x_Q \underline{d}_{Q+1} \cdots x_n \underline{d}_{q+1}) = \varphi_a(z) + 5^{2n_r}$$

展开左端后，便得到

$$\sum_{i=Q+1}^{q+1} \varphi_a(\underline{d}_i) + 5^{2\tau_0} + \sum_{i=1}^{R} 5^{2\tau_i} + \sum_{i=R+1}^{q} \varphi_a(x_i) = \varphi_a(z) + 5^{2n_r},$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{i=Q+1}^{q+1} \varphi_a(\underline{d}_i) &= \varphi_a(z) + 5^{2n_r} - 5^{2\tau_0} - \sum_{i=1}^{R} 5^{2\tau_i} - \sum_{i=R+1}^{q} \varphi_a(x_i) \\
&\leqslant |z| + 5^{2n_r} - 5^{2\tau_0} - \sum_{i=1}^{R} 5^{2\tau_i} \\
&\leqslant |z| + 5^{2n_r} - 5^{2\tau_0} - 2\sum_{i=1}^{R} \gamma_i \qquad \text{(by (5.18))} \\
&\leqslant |z| + 5^{2n_r} - (2\gamma_0 + 2 \cdot (5^{2\tau_0 - 1} + 2 \cdot 5^{\tau_0})) - 2\sum_{i=1}^{R} \gamma_i \qquad \text{(by (5.19))} \\
&= (|z| - 5^{2\tau_0 - 1} - 2 \cdot 5^{\tau_0}) + 5^{2n_r} - (5^{2\tau_0 - 1} + 2 \cdot 5^{\tau_0}) - 2k_{r-1} \qquad \text{(by (5.17))} \\
&\leqslant 5^{2n_r} - (5^{2\tau_0 - 1} + 2 \cdot 5^{\tau_0}) - 2k_{r-1} \qquad \text{(by (5.16))} \\
&< -2 \cdot 5^{2n_r} - k_{r-1} - (5^{2\tau_0 - 1} + 2 \cdot 5^{\tau_0}) \qquad \text{(because } k_{r-1} > 3 \cdot 5^{2n_r}\text{)}.
\end{aligned}$$

利用引理 4.2，可得

$$\sum_{i=Q+1}^{q+1} |\underline{d}_k| \geqslant \left| \sum_{i=Q+1}^{q+1} \varphi_a(\underline{d}_i) \right| > 2 \cdot 5^{2n_r} + k_{r-1} + (5^{2\tau_0 - 1} + 2 \cdot 5^{\tau_0})$$
$$\geqslant 2 \cdot 5^{2n_r} + k_{r-1} + |z| \geqslant |z c^{k_{r-1}} a^{5^{2n_r}} b^{5^{2n_r}}|.$$

然而，最后这个不等式意味着，用由 S 中的字母写成的 $z c^{k_{r-1}} \underline{a}^{5^{2n_r}} b^{5^{2n_r}}$ 替换 $x_Q d_{Q+1} \cdots x_q d_{q+1}$，会减少（5.14）左端的符号数量（同时保持其等于右边），这与（5.14）是 X-最小的相矛盾。这证明了我们的断言：右边（5.14）中至少有一个来自 $c^{k_{r-1}}$ 的 c，源自左端 d_i 中的某一个。

因此，存在 $Q \in \{1, \ldots\ldots, q\}$ 和 $j \in \{1, \ldots\ldots, \lfloor d_Q \rfloor\}$，使得 $d_{Q,\, j}$ 是一个未被约去的 c，并且构成右边（5.14）中 $c^{k_{r-1}}$ 的一部分。令 p_Q 表示序列 d_Q 中字母的数量，并记

$$\underline{d}'_Q = d_{Q,1} d_{Q,2} \cdots d_{Q,j-1} \qquad \text{and} \qquad \underline{d}''_Q = d_{Q,j} d_{Q,j+1} \cdots d_{Q,p_Q}.$$

我们有

$$\underline{d}''_Q x_Q \cdots \underline{d}_q x_q \underline{d}_{q+1} = c^{\nu} a^{5^{2n_r}} b^{5^{2n_r}} \tag{5.20}$$

and

$$\underline{d}_1 x_1 \underline{d}_2 \cdots \underline{d}_{Q-1} x_{Q-1} \underline{d}'_Q = a^{5^{2n_1}} b^{5^{2n_1}} c^{k_1} \cdots a^{5^{2n_{r-1}}} b^{5^{2n_{r-1}}} c^{k_{r-1} - \nu}, \tag{5.21}$$

对于某些 $\nu \in \{1, \ldots, k_{r-1}\}$。由命题 5.5(i) 应用于 (5.20)

$$q + 1 - Q + |\underline{d}''_Q| + \sum_{i=Q+1}^{q+1} |\underline{d}_i| \geqslant \nu + 5^{2n_r - 1}$$

并由归纳假设应用于 (5.21)

$$Q - 1 + \sum_{i=1}^{Q-1} |\underline{d}_i| + |\underline{d}'_Q| \geqslant k_{r-1} - \nu + \sum_{i=1}^{r-2} k_i + \sum_{i=1}^{r-1} (5^{2n_i - 1} + 1).$$

将这些不等式相加，得到

$$q + \sum_{i=1}^{q+1} |\underline{d}_i| \geqslant \sum_{i=1}^{r-1} k_i + \sum_{i=1}^{r} (5^{2n_i - 1} + 1).$$

现在回到证明的开头，并回忆 $l\,(= |e|) = l - k_r + k_r = |d_{q+1}| + k_r$.因此，将 k_r 加到上述不等式两边，得到

$$q + l + \sum_{i=1}^{q} |\underline{d}_i| \geqslant \sum_{i=1}^{r} k_i + \sum_{i=1}^{r} (5^{2n_i - 1} + 1),$$

如所要求。 □

6. 主要结果的证明

我们定义 ω 上的一个权 $\mathbb{F}_3$，其定义为 $\omega(t) = \exp(|t|_X)$ $(t \in \mathbb{F}_3)$。本节旨在证明本文的主要结果——定理 6.5，该定理指出，$\ell^1(\mathbb{F}_3,\ \omega)$**的两个根基并不相同。给定 $u \in \mathbb{F}_3$，我们令 $\widetilde{\delta}_u = \frac{1}{\omega(u)}\delta_u$。

引理 6.1. 令 $j \in \mathbb{N}$和 $u \in \mathbb{F}_3$。那么存在 $N = N(j,u) \in \mathbb{N}$，使得对所有$k \geqslant N$

$$\|\widetilde{\delta}_{a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}} * \widetilde{\delta}_u * \widetilde{\delta}_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}\|_\omega \leqslant \exp(-1-5^{2j-1}).$$

证明. 选取 $N \in \mathbb{N}$，使得 $5^N \geqslant |u|$ 和 $N > j+1$。对于所有 $k \geqslant N$，我们有

$$\begin{aligned} a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}ua^{5^{2k}}b^{5^{2k}} &= (a^{5^{2j}}b^{5^{2j}-5^{2k-1}}u)\cdot(u^{-1}b^{5^{2k-1}}ua^{5^{2k}}b^{5^{2k}}) = \\ &= (a^{5^{2j}}b^{5^{2j}-5^{2k-1}}u)\cdot x(u^{-1},k). \end{aligned}$$

根据 N的选取，我们有 $x(u^{-1},\ k) \in X$，并且 $5^{2j}-5^{2k-1} < 0$。因此我们有

$$\begin{aligned} |a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}ua^{5^{2k}}b^{5^{2k}}|_X &\leqslant |a^{5^{2j}}b^{5^{2j}-5^{2k-1}}|_X + |u|_X + |x(u^{-1},k)|_X \\ &\leqslant 5^{2j} + 5^{2k-1} - 5^{2j} + |u|_X + 1 = 5^{2k-1} + |u|_X + 1. \end{aligned}$$

由此可得，在第三行使用 (3.1) 后，

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\delta}_{a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}} * \widetilde{\delta}_u * \widetilde{\delta}_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}\|_\omega &= \frac{\omega(a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}ua^{5^{2k}}b^{5^{2k}})}{\omega(a^{5^{2j}}b^{5^{2j}})\omega(u)\omega(a^{5^{2k}}b^{5^{2k}})} \\ &= \exp\left(|a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}ua^{5^{2k}}b^{5^{2k}}|_X - |a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}|_X - |u|_X - |a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}|_X\right) \\ &\leqslant \exp\left(5^{2k-1} + |u|_X + 1 - (5^{2j-1}+1) - |u|_X - (5^{2k-1}+1)\right) \\ &= \exp(-1-5^{2j-1}), \end{aligned}$$

如所述。 □

引理 6.2. 设 $f \in \ell^1(\mathbb{F}_3,\omega)$ 为有限支撑，且满足 $\|f\|_\omega \leqslant 1$。则存在 $N(j,f) \in \mathbb{N}$，使得

$$\|\widetilde{\delta}_{a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}} * f * \widetilde{\delta}_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}\|_\omega < \exp(-1-5^{2j-1}) \qquad (k \geqslant N(j,f)).$$

证明。设 $N(j,u)$ 如引理 6.1 中所述。记 $F = \operatorname{supp} f$，并令 $N(j,f) = \max\{N(j,u) : u \in F\}$。。注意到

$$f = \sum f(u)\delta_u = \sum_{u\in F} f(u)\omega(u)\widetilde{\delta}_u,$$

并且 $\sum_{u\in F}|f(u)|\omega(u) \leqslant 1$.。给定$f \geqslant R$ 和 $k \geqslant N(j,f)$，我们有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\delta}_{a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}} * f * \widetilde{\delta}_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}\|_\omega &= \left\|\sum_{u\in F} f(u)\omega(u)\widetilde{\delta}_{a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}} * \widetilde{\delta}_u * \widetilde{\delta}_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}\right\|_\omega \\ &\leqslant \sum_{u\in F}|f(u)|\omega(u)\|\widetilde{\delta}_{a^{5^{2j}}b^{5^{2j}}} * \widetilde{\delta}_u * \widetilde{\delta}_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}\|_\omega \\ &< \sum_{u\in F}|f(u)|\omega(u)\exp(-1-5^{2j-1}) \leqslant \exp(-1-5^{2j-1}), \end{aligned}$$

其中最后一行用到了引理 6.1。 □

设 $g_k = \delta_{a^{5^{2k}}b^{5^{2k}}}$ $(k \in \mathbb{N})$. 根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，存在一个子网 $(g_{h(\beta)})_{\beta\in M}$，它按弱* 拓扑收敛到 $\ell^1(\mathbb{F}_3$的单位球中的一个极限，$\omega)^{**}$。我们将此极限记为 Φ_0。注意到 $\Phi_0 \neq 0$，因为

$$\langle \Phi_0, \omega\rangle = \lim_{\beta}\langle g_{h(\beta)}, \omega\rangle = 1.$$

我们将证明 $\Phi_0 \in \mathrm{rad}\,(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \square)$。

命题 6.3。设 $\Psi \in \ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}$。则 $\Phi_0\square\Psi\square\Phi_0 = 0$。

证明。不失一般性，我们可以取 $\|\Psi\| \leqslant 1$。设 $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为 $\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)$ 的单位球中有限支撑函数的一个网，该网收敛于 Ψ，其收敛是在 $\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}$上的弱*拓扑意义下。我们有

$$\Phi_0\square\Psi\square\Phi_0 = \lim_{w^*,\gamma}\lim_{w^*,\alpha}\lim_{w^*,\beta} g_{h(\gamma)} * f_\alpha * g_{h(\beta)}.$$

设 $\varepsilon > 0$。设 $\lambda \in \ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^*$，并固定 α 与 γ。采用引理 6.2 的记号，存在$\beta_0 \in M$，使得对每一个 $\beta \geqslant \beta_0$ 都有 $h(\beta) \geqslant N(h(\gamma), f_\alpha)$. 由此，引理 6.2 蕴含

$$\left|\langle g_{h(\gamma)} * f_\alpha * g_{h(\beta)}, \lambda\rangle\right| \leqslant \|g_{h(\gamma)} * f_\alpha * g_{h(\beta)}\|_\omega\|\lambda\| \leqslant \exp(-1 - 5^{2h(\gamma)-1})\|\lambda\|,$$

因此（先取极限 $\beta \to \infty$，再取 $\alpha \to \infty$）可得

$$\left|\langle g_{h(\gamma)}\square\Psi\square\Phi_0, \lambda\rangle\right| \leqslant \exp(-1 - 5^{2h(\gamma)-1})\|\lambda\|.$$

设 $\gamma_0 \in M$ 对所有 $\gamma > \gamma_0$ 都满足 $\exp(-1 - 5^{2h(\gamma)-1}) < \varepsilon$。则

$$\left|\langle g_{h(\gamma)}\square\Psi\square\Phi_0, \lambda\rangle\right| < \varepsilon\|\lambda\| \quad (\gamma \geqslant \gamma_0),$$

这意味着

$$|\langle \Phi_0\square\Psi\square\Phi_0, \lambda\rangle| \leqslant \varepsilon\|\lambda\|,$$

因此（由于 λ 是任意的）可得 $\|\Phi_0\square\Psi\square\Phi_0\| \leqslant \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们有 $\Phi_0\square\Psi\square\Phi_0 = 0$，这正是所需的。□

由此可得，对于每个 $\Psi \in \ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}$，都有 $(\Psi\square\Phi_0)^{\square 2} = 0$。因此，$\Phi_0$ 在 $\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}$ 中生成一个幂零左理想，这意味着 $\Phi_0 \in \mathrm{rad}\,(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \square)$。

设 $\psi_j = \delta_{c^j}$ $(j \in \mathbb{N})$。令 $(\psi_{m(\alpha)})_{\alpha\in\Lambda}$ 为 (ψ_j)的弱*收敛子网，由巴拿赫–阿劳格鲁定理可知该子网存在。定义 $\Psi_0 = \lim_{w^*,\alpha}\psi_{m(\alpha)}$。

命题 6.4。泛函 $\Phi_0\diamond\Psi_0$ 在 $(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \diamond)$中不是准幂零的.

证明。注意到 $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{F}_3, 1/\omega) = \ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^*$, 和 $\|\omega\| = 1$。令 $k \in \mathbb{N}$。于是

$$(\Phi_0\diamond\Psi_0)^{\diamond k} = \lim_{\alpha_k}\lim_{\beta_k}\cdots\lim_{\alpha_1}\lim_{\beta_1} g_{h(\beta_1)} * \psi_{m(\alpha_1)} * \cdots * g_{h(\beta_k)} * \psi_{m(\alpha_k)},$$

其中极限是在 $\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}$ 上的弱*拓扑中取得的。由（3.3）可知，只要 $m(\alpha_{i-1}) > 3\cdot 5^{h(\beta_i)}$ $(i = 2, 3, \ldots\ldots, k)$，我们有

$$\left|a^{5^{2h(\beta_1)}}b^{5^{2h(\beta_1)}}c^{m(\alpha_1)}\cdots a^{5^{2h(\beta_k)}}b^{5^{2h(\beta_k)}}c^{m(\alpha_k)}\right|_X - \left|a^{5^{2h(\beta_1)}}b^{5^{2h(\beta_1)}}\right|_X - \left|c^{m(\alpha_1)}\right|_X - \cdots$$
$$\cdots - \left|a^{5^{2h(\beta_k)}}b^{5^{2h(\beta_k)}}\right|_X - \left|c^{m(\alpha_k)}\right|_X = 0,$$

从而

$$\begin{aligned}&\langle g_{h(\beta_1)}{*}\psi_{m(\alpha_1)} * \cdots * g_{h(\beta_k)} * \psi_{m(\alpha_k)}, \omega\rangle \\ &\qquad = \frac{\omega\left[a^{5^{2h(\beta_1)}} b^{5^{2h(\beta_1)}} c^{m(\alpha_1)} \cdots a^{5^{2h(\beta_k)}} b^{5^{2h(\beta_k)}} c^{m(\alpha_k)}\right]}{\omega(a^{5^{2h(\beta_1)}} b^{5^{2h(\beta_1)}})\omega(c^{m(\alpha_1)}) \cdots \omega(a^{5^{2h(\beta_k)}} b^{5^{2h(\beta_k)}})\omega(c^{m(\alpha_k)})} \\ &\qquad = \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

因此

$$\langle (\Phi_0 \diamond \Psi_0)^{\diamond k}, \omega\rangle = \lim_{\alpha_k}\lim_{\beta_k} \cdots \lim_{\alpha_1}\lim_{\beta_1} \langle g_{h(\beta_1)} * \psi_{m(\alpha_1)} * \cdots * g_{h(\beta_k)} * \psi_{m(\alpha_k)}, \omega\rangle = 1.$$

由于 $\|\omega\| = 1$ 作为一个泛函，这意味着 $\|(\Phi_0 \diamond \Psi_0)^{\diamond k}\| \geqslant 1$ $(k \in \mathbb{N})$，进而也意味着 $\|(\Phi_0 \diamond \Psi_0)^{\diamond k}\|^{1/k} \geqslant 1$ $(k \in \mathbb{N})$。因此（根据谱半径公式），$\Phi_0 \diamond \Psi_0$ 不是准幂零的。□

将最后两个命题结合起来，就得到了我们的主要定理。

定理 6.5. 我们有 $\Phi_0 \in$ 半径 $(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \square)$ 但是 $\Phi_0 \notin$ 半径 $(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \diamond)$.

证明。 根据命题 6.3 Φ_0 生成了一个关于 $\square$ 的幂零左理想，因此$\Phi_0 \in$ 半径 $(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \square)$。然而，根据命题 6.4，关于 $\diamond$ 由 Φ_0 生成的右理想不包含于准幂零元集合中，因此 $\Phi_0 \notin$半径 $(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \diamond)$。□

注 6.6. 我们定义的 $(\ell^1(\mathbb{F}_3, \omega)^{**}, \square)$ 的根元素 Φ_0 是归一化点质量的极限。Dales 和 Dedania 在 [5], 中研究了这类元素；按照他们的记号（见本文第 2.4 节），我们找到了 $(\beta\mathbb{F}_3)_\omega$ 中一个属于一个根却不属于另一个根的元素。不过请注意，在无权情形下这是不可能的，因为这类元素绝不可能是根：也就是说，若 G 是一个群，且(δ_{t_α}) 是 $\ell^1(G)$ 中一个弱*收敛到某个元素 $\Gamma \in \ell^1(G)^{**}$ 的点质量网，那么$\Gamma \notin \operatorname{rad}(\ell^1(G)^{**}, \square) \cup \operatorname{rad}(\ell^1(G)^{**}, \diamond)$。这一事实的证明与上文命题 6.4 的证明非常相似：先证明对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\langle \Gamma^{\square k}, 1\rangle = \langle \Gamma^{\diamond k}, 1\rangle = 1$，再利用谱半径公式得出结论：对于任一乘积，$\Gamma$ 都不是准幂零的。

致谢。本文始于作者有机会在 2024 年 4 月举行的 NBFAS 会议上，就 Arens乘积这一主题发表演讲。该会议旨在纪念 H. Garth Dales（1944–2022）。作者感谢会议组织者给予演讲机会，并感谢他们的热情款待。

参考文献

[1] R. Arens，双线性运算的伴随，美国数学会会刊，**2**（1951年），839–848。

[2] R. Arens，函数类中诱导的运算，*Monatsh. Math.* **55**（1951年），1–19。

[3] P.-E. Caprace 和 N. Monod，相对可和性，《群、几何与动力系统》**8**（2014年）（3），747–774.

[4] B. Duchesne、R. Tucker-Drob 和 P. Wesolek，*CAT(0)*立方复形与内可和性，《群、几何与动力系统》**15**（2021年）371–411。

[5] H. G. Dales 和 H. V. Dedania，实直线子半群上的加权卷积代数，《数学论文集》**459**（2009年）。

[6] H. G. Dales 和 A. T.-M. Lau，*Beurling* 代数的二重对偶，美国数学会回忆录，第 177 卷，2005年。[7] H. G. Dales、A. T.-M. Lau 和 D. Strauss，半群及其紧化上的巴拿赫代数，美国数学会回忆录，第 205 卷，2010年。[8] H. G. Dales 和 D. Strauss，全序半群的 *Arens* 正则性，《半群论坛》**105**（2022年），172–190。[9] H. G. Dales、D. Strauss、Y. Zelenyuk 和 Yu. Zelenyuk，若干半群代数的根基，《半群论坛》**87**（2013年）80–96。[10] B. Forrest，可 *amen* 性及理想中的有界近似单位 $A(G)$，《伊利诺伊数学杂志》**34**（1990年）第 1 期，1–25。[11] M. Ghandehari、H. H. Lee、E. Samei 和 N. Spronk，紧群上的某些 *Beurling–Fourier* 代数是算子代数，《美国数学会汇刊》**367**（2015年），第 10 期，7029–7059。[12] N. Hindman 和 D. Strauss，*Stone–Čech* 紧化中的代数：理论与应用，柏林、波士顿：De Gruyter，2012年。[13] H. H. Lee 和 N. Spronk，某些加权群代数是算子代数，《爱丁堡数学学会会刊》（第 2 辑）**58**（2015年），第 2 期，499–519。[14] T. W. Palmer，巴拿赫代数与 *-代数通论，第一卷，《数学及其应用百科全书》第 49 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。代数与巴拿赫代数。[15] J. T. White，群和半群上的巴拿赫代数，博士论文，兰开斯特大学（2018年）。[16] J. T. White，*Beurling*代数双对偶的根基，《季刊数学》**69**（2018年），975–993。[17] J. T. White，与可 *amen* 群的次正规子群上的不变均值相关的代数，《季刊数学》**73**（2022年），495–515。Jared T. White，开放大学数学与统计学院，沃尔顿堂，米尔顿凯恩斯 MK7 6AA，英国。电子邮箱地址：
jared.white@open.ac.uk