arXiv:2602.02800v1 [math.ST] 2 Feb 2026

决策导向最优传输

Suhan Liu统计与运筹学系，北卡罗来纳大学教堂山分校，suhanliu@unc.edu

Mo Liu

统计与运筹学系，北卡罗来纳大学教堂山分校，mo liu@unc.edu

我们提出一种用于衡量两个分布之间距离的基本度量，称为决策聚焦（DF）散度。它专为随机线性优化问题设计，在这类问题中，目标系数是随机的，且可能服从两个不同的分布。KL散度和Wasserstein距离等传统度量并不适合量化由此产生的成本差异，因为系数分布的变化不一定会改变底层线性规划的优化器。相反，目标值受到的影响取决于两个分布如何耦合（对齐）。受最优传输启发，我们在多种设定下提出了决策导向距离，包括乐观决策聚焦距离、鲁棒DF距离及其熵正则化变体。我们建立了所提出的DF距离与经典分布度量之间的联系。为了计算DF距离，我们开发了高效的计算方法。我们还推导出估计这些距离的样本复杂度保证，并证明DF距离估计避免了Wasserstein距离估计中出现的维数灾难。所提出的DF距离为广泛的应用奠定了基础。作为一个示例，我们研究了两个分布之间的插值。数值研究包括一个玩具新周期货商问题和一个真实世界的医学检测数据集，展现了DF距离的实际价值。

关键词：决策导向散度、最优传输、插值、分布耦合、随机优化

1. 引言

衡量两个概率分布之间的距离，是统计学和机器学习中的一个基本问题。设计良好的距离度量是聚类、插值、核加权、异常检测及许多其他任务中的关键工具。经典的选择包括全变差（TV）距离和*Kullback–Leibler*（KL散度）。特别地，给定可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$上的两个概率测度 P和 Q，它们相对于同一个支配测度 p和 q具有密度函数，

全变差距离定义为

$$d_{\mathrm{TV}}(P,Q) := \sup_{A\in\mathcal{F}} \left|P(A)-Q(A)\right| = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |p(x)-q(x)|\, d\mu(x).$$

KL散度定义为

$$D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) := \int_{\Omega} \log\left(\frac{dP}{dQ}\right) dP = \int_{\Omega} p(x)\log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) d\mu(x),$$

约定 若 P 关于 Q 不绝对连续，则 $D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) = +\infty$.

总变差距离和 KL散度的一个关键局限是，它们比较的是相同位置的概率质量。因此，在支撑集不匹配时，这些度量可能表现异常或缺乏信息。例如，若存在可测集 $A \in \mathrm{F}$，使得 $P(A) > 0$ 但$Q(A) = 0$，则 $D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) = +\infty$，而 $d_{\mathrm{TV}}(P,Q)$ 可能达到饱和。这一现象促使人们考虑能够纳入 Ω 几何结构的距离。

一种重要的替代方案是*Wasserstein*距离，它通过最优传输来定义。假设 Ω 配备了一个范数 $\|\cdot\|$（例如 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$）。对于 $p \geq 1$， P 与 Q 之间的 p-Wasserstein距离为

$$W_p(P,Q) := \left(\inf_{\pi\in\Pi(P,Q)} \int_{\Omega\times\Omega} \|x-y\|^p \, d\pi(x,y)\right)^{1/p}, \tag{1}$$

其中， $\Pi(P,\ Q)$ 表示 P和 Q 的所有耦合构成的集合，即定义在 $\Omega\times\Omega$ 上、边缘分布分别为 P 和 Q 的概率测度。与总变差距离和 KL 散度不同，Wasserstein 距离量化了将概率质量从一个分布传输到另一个分布所需的距离。这种几何视角能够自然地处理支撑集不匹配，也与“传输不确定性”的诠释相契合。

除了提供单一的标量差异度量外，式 (1) 中的最优传输问题还会返回一个优化器 $\pi^\star \in \Pi(P,\ Q)$，揭示了 P下的概率质量如何与 Q下的概率质量相匹配。在存在确定性映射 $T\colon \Omega \to \Omega$的特殊情况下，

若 $X \sim P$，则 $T(X) \sim Q$，此时最优耦合由 T诱导，通常称为最优传输映射。然而，一般而言，$\pi^\star$ 表示从 P 中抽取的点与从 Q中抽取的点之间一种多对多的概率对应关系，可以将其理解为在运输成本 $|x-y|^p$下将 P 变换为 Q 的一种“最低成本”方式。这种耦合视角已被证明有助于建模扩散和混合现象、量化随时间变化的分布动态，以及刻画分布偏移。

1.1. 决策导向场景

在许多运筹学应用中，不确定量会作为目标函数系数或约束参数，进入下游优化问题。在这类随机优化问题的决策导向场景中，比较两个分布的目的并非纯粹出于几何考量。相反，我们要量化分布变化如何影响优化器及最终的目标值。这一视角凸显了经典分布度量的一个关键局限，包括 d_{TV}、D_{KL} 和 W_p。这些度量量化了 Ω 上概率测度之间的差异，却无法直接反映这样一个事实：分布发生重大变化时，优化器可能保持不变；而几何上的微小变化则可能使概率质量跨越决策边界，造成不成比例的决策影响。

为了引出一种与决策遗憾相一致的距离度量，我们考虑一个医学检测示例，旨在量化两个年龄组的骨矿物质密度（BMD）分布之间的距离。

预防性医疗与诊断检测。让我们考察某一总体中骨密度的变化，这有助于为骨质疏松症等疾病制定治疗规划。假设医院掌握了两个年龄群体（40岁和50岁）基于历史队列测得的骨密度经验分布。这两个分布分别展示在图1的上排和下排。假设40岁的患者接受了一种根据其

当前骨密度值优化的治疗方案。医院想知道，是否应将该方案维持至45岁：考虑到骨密度可能发生变化，当前治疗方案在45岁时是否仍然最优？如果不是，次优性差距是多少？这个问题颇具挑战，因为在40岁做出决策时，无法获得同一队列在45岁时的未来测量数据。因此，构建合理的中间年龄分布预测，并评估其对决策的影响都至关重要。

估计最优治疗调整并非易事，因为决策必须满足可行性和安全性约束（例如，剂量上限和下限、总预算约束以及药物相互作用约束）。因此，最优决策可能随骨密度及其他临床指标（例如，身体质量指数、实验室检查结果和合并症评分）发生不连续变化。耦合为何重要。要预测45岁时的结果，仅指定40岁和50岁时的边缘分布并不足够。医院还必须推断个体和亚群如何从40岁演变到50岁。这种演变由两个边缘分布之间的耦合刻画。不同的耦合可能意味着截然不同的条件行为，因此会导致显著不同的决策风险。给定40岁和50岁之间的耦合后，插值（例如 McCann 插值）会导出相应的45岁时分布。

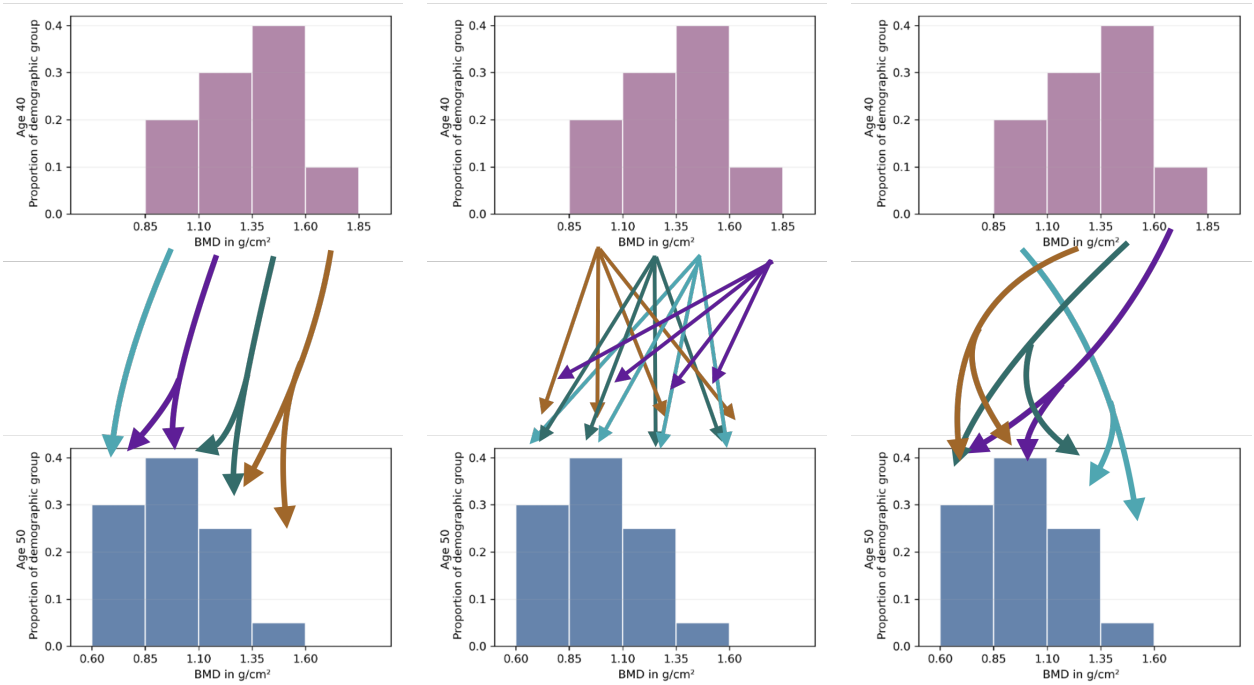
具体而言，耦合有助于回答两个互补的决策问题：

- **个体层面：** 给定患者在40岁时观察到的骨密度，患者在45岁（和50岁）时的特征可能呈现怎样的分布？这会如何影响推荐的治疗方案？

- **总体层面：** 对于某个亚总体（例如某家诊所或某个地理区域）的40岁时骨密度分布，45岁时可能呈现怎样的分布？由此会产生怎样的决策分布和成本？

通过耦合进行三种插值。图1展示了40岁和50岁时骨密度分布之间三种具有代表性的耦合。每种耦合都意味着一组不同的患者轨迹预测，并可能导致截然不同的决策结果。在图1a中，每个人的骨密度只发生必要的最小幅度变化，以使两个边缘分布相匹配；因此，如果维持40岁时的治疗方案，所隐含的决策风险相对较小。相比之下，图1c描绘了使传输最大化的一种匹配方式，这表明40岁时的治疗方案到50岁时可能不再是最优方案，并且可能需要重新进行骨密度检测并调整治疗。图1b呈现了一个“独立”情景：无论个人40岁时的骨密度如何，所有人的50岁时骨密度分布都相同。正如第6.2节所示，在现实环境中，图1a最接近真实动态，而图1b中的独立情景可能会高估平均决策损失。

除了概括群体变化外，图1中的耦合还会产生患者层面的条件预测。图2展示了一位具有代表性的患者在40岁时骨密度为 $= 1.7$的情况。在乐观耦合下，该患者会与50岁时最接近的骨密度结果相匹配；在独立耦合下，该患者的骨密度会朝着50岁的边缘分布变化，但没有个体层面的持续性；在稳健耦合下，该患者会与最远的骨密度结果相匹配。尽管三种情景下40岁和50岁的边缘分布完全相同，这些患者层面的差异仍可能导致不同的后续行动和成本。



(a) 乐观耦合（最佳情况对齐）。(b) 独立耦合（无持续性）。(c) 稳健耦合（最坏情况对齐）。

图1 40岁 和 50岁骨密度分布之间的三种耦合。箭头展示了40岁 时的概率质量如何与50岁时的概率质量相匹配。不同的耦合会产生不同的条件轨迹，并可能导致显著不同的决策风险。图1a对应最小变化对齐（个体层面的偏移较小），图1c对应最大变化对齐（个体层面的偏移较大），图1b则对应独立情景：无论个体在 40岁时的骨密度如何，每个人都具有相同的50岁目标分布。

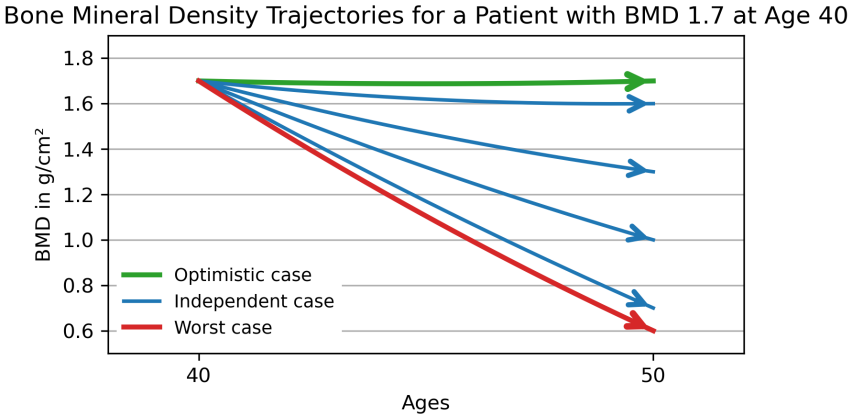


图 2 不同耦合假设所隐含的患者级轨迹。该图展示了一位骨密度为 = 1。7 、年龄为40 岁的患者可能的骨密度路径，分别基于乐观耦合（最佳情况对齐）、独立

耦合，以及稳健耦合（最坏情况对齐）。

45岁时的决策导向平均。 对于当前的40岁队列，假设医院必须决定，在部署治疗或检测策略之前，是否分配资源在他们45岁时再次进行测量。决策导向插值（40岁和50岁之间的决策导向平均）能够比较不同耦合假设所隐含的合理中间风险。如果风险超过临床容忍阈值，那么有必要在45岁时进行新的测量。否则，医院可以证明采用根据历史队列制定的策略是合理的。这说明我们需要一种决策导向距离的概念，从下游优化的角度评估分布差异，而不是单纯进行几何比较。

在医疗领域之外，决策导向散度在个性化推荐、保险定价、库存分配以及其他运筹学问题中有着广泛应用。例如，在报童问题中，只要临界分位数保持不变，许多分布偏移产生的决策影响为零，因此应对应于零（或接近零）的决策导向散度。

诸如 d_{TV} 和 D_{KL} 之类的经典散度仅依赖于边缘分布，并比较同一位置上的概率质量；它们并不刻画个体如何随时间转移。Wasserstein距离W_p 通过产生一个耦合改进了这一点，但该耦合的选择是为了最小化几何运输成本，而这可能与下游决策结构不一致。两个分布在W_p 中可能相距很远，却诱导出几乎相同的优化解；反之，一个很小的几何偏移如果将质量移到最优决策不同的区域，也可能产生很大的决策影响。本文的主要贡献总结如下：

• 我们提出一种新的度量，称为决策导向散度，用于衡量随机线性优化中两个目标系数向量分布之间的决策差异。我们研究了若干变体，包括乐观决策聚焦距离、鲁棒DF距离，以及

它们的熵正则化版本。所提出的度量为广泛的未来研究方向奠定了基础，包括插值、异常检测、不确定性集构造、核回归和聚类。

• 我们建立了 DF 距离的关键理论性质，包括关于 W_1、 W_2KL散度和 d总变差距离的利普希茨型界，以及熵正则化变体的夹逼不等式。（第 3 节）

• 我们通过证明其可等价地转化为 W_2型距离，开发了高效计算 DF 散度的方法。（第 4 节）

• 虽然估计 Wasserstein 距离的样本复杂度通常会随分布维度呈指数级恶化，但我们证明，所提出的 DF 距离具有与维度无关的 $O(1/\sqrt{n})$ 估计率。这一改进源于下游可行域具有有限个极点。（第4.1节）

• 作为一个示例应用，我们展示了如何利用决策导向散度构造分布之间的 McCann 型插值。与不考虑决策的替代方法相比，这些决策导向插值能够更准确地估计中间分布动态（第5节）。

• 我们在两种场景中开展数值实验：(i) 一个玩具报童模型示例和 (ii) 一项真实世界的帕金森病研究。这些实验展示了所提出的决策聚焦距离的实际价值，并表明，传统度量忽略耦合，可能会大幅高估决策风险。

论文结构。 第 2 节正式定义决策导向散度，包括其对称变体和熵正则化版本。第 3 节阐述所提出散度的关键性质，包括它与 d_{TV}、 D_{KL}以及Wasserstein距离W_p的联系。在这些结果的基础上，第 4 节提出高效的计算方法，用于

计算相应的耦合；第4.1节则推导了估计散度时的维数无关收敛速率。第5节通过一个受医学检测启发的插值问题进行说明。第6节在两种场景下评估所提出的决策聚焦距离：第6.1节中的报童问题玩具示例，以及第6.2节中帕金森病治疗的真实世界案例。最后，第 7 节总结全文。

1.2. 文献综述

由于本研究首次提出了适用于随机优化场景的分布差异度，我们围绕两个方向组织文献综述：(i) 面向随机优化的决策导向学习，以及 (ii) 基于最优传输的分布距离度量。

面向决策的随机线性优化学习。决策导向学习（也称为决策感知学习、任务型学习或端到端学习）的动机在于：在随机优化中，提高预测准确度并不一定会改善下游决策质量。近年来，这种决策导向学习在求解随机优化问题方面日益受到关注；全面综述请参见 Mandi 等（2024）和 Sadana 等（2025）。我们重点介绍两类相关论文。第一类着重于估计不确定性的完整信息。Bertsimas 和 Kallus（2020）、Elmachtoub 等（2023, 2025）研究了决策导向场景下的样本均值近似（SAA）。例如，Zhu 等（2022）研究了同时考虑估计与优化的鲁棒表述。Qi 等（2025）通过纳入决策损失，研究了约束中右端项不确定性的估计；Cristian 等（2025）则提出近似优化预言机求解器的训练方法，以应对计算方面的挑战。第二类着重于通过决策对齐损失构建逐点预测。Elmachtoub 和 Grigas（2022）以及 Huang 和 Gupta（2024）提出了替代损失函数，并在各种条件下证明了其一致性。Homem-de Mello 等（2024）、Er 和 Liu（2025）刻画了决策无偏预测的存在性

。Elmachtoub 等（2023）、El Balghiti 等（2022）、Hu 等（2022）和 Liu 等（2023）提供了统计保证，并将其与非决策导向方法进行了比较。

上述文献主要关注固定分布下的学习，并未以决策导向的方式显式建模分布动态。相比之下，我们的工作研究分布如何演化，以及这种演化应如何借助受最优传输启发的工具、从下游线性优化的视角加以度量。

分布距离与最优传输。已有大量度量和散度被提出，用于量化概率分布之间的差异。在一维情形中，基于累积分布函数的距离，如 Kolmogorov–Smirnov（KS）距离和 Cram´er–von Mises（CvM）距离，被广泛使用。在更高维情形中，当各分布具有共同支撑时，全变差（TV）距离提供了一种较强的差异概念。通过密度比定义的非对称散度，如 KL散度和卡方（χ^2）散度，在共同支撑下也是标准选择。在运筹学界，基于 KL 的不确定集已被用于分布鲁棒优化；参见例如 Bennouna 和 Van Parys（2022）。

与上述度量相比，Wasserstein距离具有两个显著特征：（i）它通过一个最优传输问题来定义，从而诱导出显式耦合，用以描述概率质量如何从一个分布移动到另一个分布；（ii）它自然地适应支撑集不匹配。Wasserstein距离在运筹学文献中被广泛使用，因为对于许多目标函数而言，其期望目标值关于底层不确定性分布之间的Wasserstein距离是利普希茨的（例如Blanchet 和 Murthy（2019））；有关方法与应用的综述，参见 Kuhn 等（2019）。利用基于Wasserstein的不确定集，近期工作为分布鲁棒优化建立了强保证与有限样本分析；参见例如Blanchet 等（2022）、Ho-Nguyen 等（2023）、Gao 等（2024）、Gao（2023）。

上述文献中的Wasserstein距离本质上是决策盲视的：它刻画分布之间的几何差异，而不考虑下游优化问题的结构。相比之下，所提出的决策导向散度纳入了线性规划可行域的几何结构，因而与决策影响直接对齐。这种对齐使决策导向聚类、插值、核回归以及其他应用成为可能，在这些应用中，相关的分布邻近性概念由下游决策所支配。

2. 决策导向散度

设 μ 与 ν 为 $\mathbb{R}^d$上的概率测度，并设 $c:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$为可测代价函数。 μ 与 ν 的耦合是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 γ，其边缘分布为 μ 与ν；我们将所有此类耦合的集合记为 $\Gamma(\mu,\nu)$（等价地，$\Gamma_{\mu,\nu}$）。特别地， $\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)$当且仅当对每一个有界可测函数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$,

$$\int f(x)\,\gamma(dx,dy)=\int f\,d\mu \quad \text{and} \quad \int f(y)\,\gamma(dx,dy)=\int f\,d\nu.$$

（康托罗维奇）最优传输问题寻求使期望传输代价最小化的耦合,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}c(x,y)\,\gamma(dx,dy). \tag{2}$$

任一 $\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)$可解释为一对(X,Y)的联合分布，其边缘分布为 $X\sim\mu$与 $Y\sim\nu$。一个经典选择是幂代价 $c(x,y)=\|x-y\|^p$，它导出(1)中的W_p距离。作为特例，当 μ 与 ν 具有有限二阶矩时，相应的最优传输值定义了二次Wasserstein距离

$$W_2(\mu,\nu)=\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)}\left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\|x-y\|_2^2\,\gamma(dx,dy)\right)^{1/2}. \tag{3}$$

在决策导向学习中， x 与 y 之间的差异不应仅从几何角度衡量：重要的是，当我们针对 x 进行优化，却面对

y时，下游决策质量会下降多少。为对此进行形式化，我们考虑一个下游随机线性优化问题。设 X 和$Y \in \mathbb{R}^d$ 为随机成本（系数）向量， $S \subset \mathbb{R}^d$ 为表示可行域的非空紧多面体。当成本向量 X 服从分布 μ时，下游问题选择 $w \in S$以最小化期望目标函数 $\mathbb{E}_\mu[X^\top w]$。对于一个已实现的成本向量$x \in \mathbb{R}^d$，相应的最优决策由优化预言机 $w^*(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$给出，

$$w^*(x) \in \arg\min_{w \in S} w^\top x. \tag{4}$$

由于 S 是多面体的， $w^*(\cdot)$ 可取自S 的（有限）极点集合，并且在 $\mathbb{R}^d$的多面体划分上是分段常数。正如我们稍后所示，这种分段常数结构是推导决策导向传输更紧的估计误差界的一项关键性质。

为了正式刻画两个成本向量 x、 $y \in \mathbb{R}^d$之间的决策差异，我们采用智能先预测后优化（*SPO*）损失，其定义为$l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y) := y^\top w^*(x) - y^\top w^*(y)$，即当真实向量为 y时， $w^*(x)$ 和 $w^*(y)$ 所作决策之间的目标函数差。SPO损失非负，由 Elmachtoub 和 Grigas（2022）在情境化设定中提出。

在（2）中，将 SPO 损失$l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y)$ 用作传输代价 $c(x,\ y)$，可得到针对下游随机线性优化问题的决策导向传输目标函数。由于 SPO 损失通常不对称，即$l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y) \neq l_{\mathrm{SPO}}(y,\ x)$，由此得到的基于传输的差异度也不对称。因此，我们将其定义为一种散度。

定义1（决策导向散度）。给定 μ, ν 以及耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，决策导向散度 （DF散度）定义为

$$W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu; \gamma) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \ell_{\mathrm{SPO}}(x, y)\, \gamma(dx, dy). \tag{5}$$

DF散度取决于联合分布 γ（而不仅仅取决于边缘分布）。特别地，如果 $X \sim \mu$和 $Y \sim \nu$ 相互独立，那么 $\gamma = \mu \otimes \nu$就是 μ 和 ν的乘积（独立）耦合，而式（5）则简化为经典期望遗憾

$$R(\mu, \nu) := \mathbb{E}\big[\ell_{\mathrm{SPO}}(X, Y)\big] = W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu; \mu \otimes \nu). \tag{6}$$

尽管遗憾 (6) 已被广泛用于评估决策损失，但当 X 与 Y之间存在强依赖关系时，$\mu \otimes \nu$ 背后的独立性假设可能并不恰当。例如，如果一位患者 40 岁时的骨密度低于平均水平（如 0.6），那么即使总体中常见高于 1.6 的数值，也不太可能这位患者 50 岁时的骨密度会超过 1.6。在这种情况下，应谨慎地对联合分布，即 μ 与 ν 之间的耦合进行建模。让 γ 在 $\Gamma(\mu, \nu)$ 上变化，相当于改变从 μ 抽取的结果与从 ν 抽取的结果如何对齐，这可能显著改变平均决策损失。我们基于现实世界数据开展的数值研究进一步表明，在实践中忽略依赖关系可能会大幅高估决策损失。这促使我们引入以下基于极值耦合的量。

定义2（决策导向距离）。给定两个测度 μ 和 ν，乐观 和 稳健决策导向距离定义为

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) := \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu; \gamma), \qquad \text{(Optimistic DF distance)}$$

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu, \nu) := \sup_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu; \gamma). \qquad \text{(鲁棒DF距离)}$$

由于 $\mu \otimes \nu \in \Gamma(\mu, \nu)$，我们总有 $0 \le W\mathrm{ODF}(\mu, \nu) \le R(\mu, \nu) \le W\mathrm{RDF}(\mu, \nu)$。顾名思义，乐观决策聚焦距离对应于 μ与 ν之间的最佳（最有利）对齐，而鲁棒DF距离对应于最差（最不利）的对齐，因此是对决策风险的保守评估。距离 $W\mathrm{ODF}(\mu, \nu)$ 和 $W\mathrm{RDF}(\mu, \nu)$ 在 (μ, ν) 中通常不对称。这种不对称是因为评估基于 μ 得出的决策时，采用的是 ν

这不同于评估基于 ν 得出的决策时所采用的方式。在实践中，我们还可以考虑两种对称变体：加法对称化

$$W^{O}_{\mathrm{sym}}(\mu,\nu) := W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}(\mu,\nu) + W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}(\nu,\mu), \qquad W^{R}_{\mathrm{sym}}(\mu,\nu) := W^{\mathrm{R}}_{\mathrm{DF}}(\mu,\nu) + W^{\mathrm{R}}_{\mathrm{DF}}(\nu,\mu),$$

以及 Jens 一种基于中点混合 $m := (\mu+\nu)/$ 的 Jensen–Shannon 类型对称化 2,

$$W^{O}_{\mathrm{JS}}(\mu,\nu) := \tfrac{1}{2}W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}(\mu,m) + \tfrac{1}{2}W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}(\nu,m), \qquad W^{R}_{\mathrm{JS}}(\mu,\nu) := \tfrac{1}{2}W^{\mathrm{R}}_{\mathrm{DF}}(\mu,m) + \tfrac{1}{2}W^{\mathrm{R}}_{\mathrm{DF}}(\nu,m).$$

本文主要关注定义2中的非对称概念，因为其主要性质可以自然地推广到相应的对称变体。因此，我们将定义2称为距离，而非散度。

乐观决策聚焦距离的一个动机是，在现实环境中（例如疾病进展或市场变化），传统的遗憾概念可能会导致 $R(\mu,\ \nu)$ 大幅高估平均决策损失；参见第6节。在实践中，μ 和 ν 往往相关（例如，即使总体层面的分布变化很大，个体患者的状态通常也会逐渐变化）。在这种情况下，乐观决策聚焦距离能更准确地估计决策损失。鲁棒决策聚焦距离的动机则源于运筹学决策中的鲁棒视角，详见附录 B。为进一步阐释这些定义，我们在第 2.1 节给出一个几何示例。

2.1. 决策导向散度示例

本节通过二维情形（$d=2$）说明乐观/鲁棒决策聚焦距离背后的几何结构。考虑一个具有四个极点的多面体可行域 $S \subset \mathbb{R}^2$，如图 3（左）所示。对于 S 的每个极点 w_k，使 w_k 成为（4）的优化器的成本向量集合是一个多面锥（即 S 在 w_k 处的法锥），记作 $\mathsf{C}_k := \{c \in \mathbb{R}^2 :\ w_k \in \operatorname{argmin}_{w\in S} w^{\top}c\}$，并标记为锥 k。这些锥构成了成本

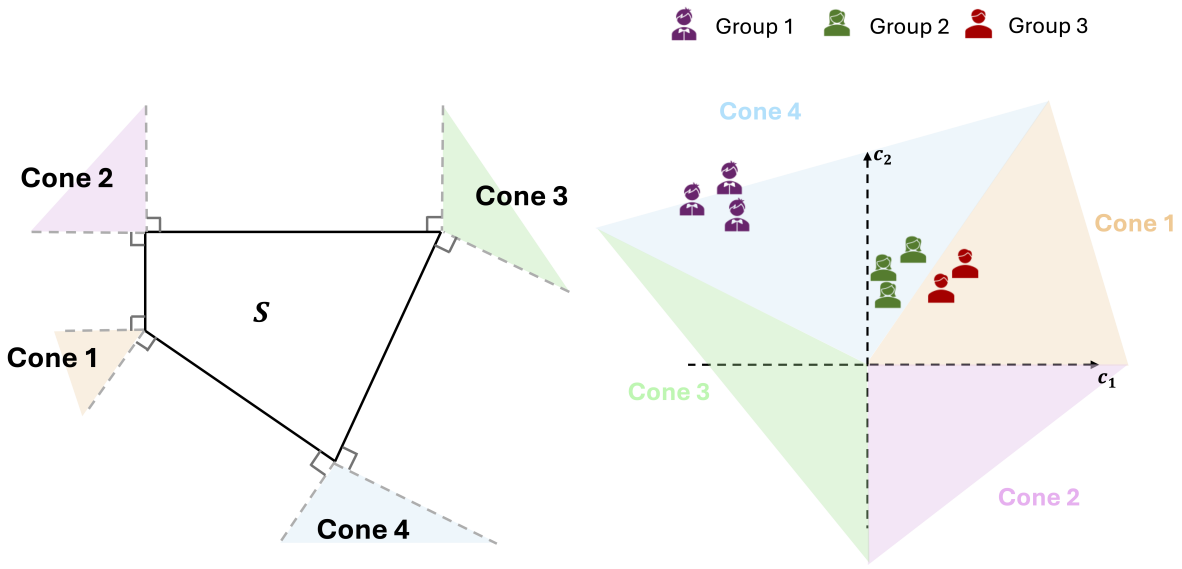


图3 左：一个多面体可行域 S，包含四个极点及其对应的法锥。右：点云展示了三个成本向量示例组。第1组和第2组之间的决策聚焦距离为零，而第2组和第3组之间的决策聚焦距离非零。

空间的一个划分（忽略多个极点同时达到最优的边界），如图 3（右）所示。特别地，预言机映射在每个锥上都是常值的：如果 $x \in \mathrm{C}_k$，则 $w^*(x) = w_k$。

这种锥结构使SPO损失对 x 和 y 是否位于同一个锥内高度敏感。如果 x和 y属于同一个锥C_k，那么 $w^*(x) = w^*(y)$，因此$l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y) = 0$。因此，当耦合 γ 主要将同一锥内的结果配对时，即使配对点之间的欧几里得距离很大，决策导向散度(5)也可能很小（甚至为零）。反过来，即使 $\|x - y\|$很小，跨越锥边界的微小几何扰动也可能使概率质量发生转移，从而改变 $w^*(\cdot)$的优化器，导致$l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y)$严格为正。

图 3 右侧面板用三个点云（第1组–第3组）给出了一个具体示例。每组都可以表示不同客户或患者的成本向量经验分布。例如，第1、2、3组分别表示年龄为 40、45 和 50 岁的患者队列。第1组（紫色）和第2组（绿色）位于锥4中，因此会导出相同的预言机决策；而第3组（红色）位于锥1中，会导出不同的决策。因此，纯粹的几何

距离可能会认为第2组和第3组相近，但它们导出的决策可能不同；相反，第1组和第2组在几何上可能相距甚远，但决策却完全相同。具体而言，如果两个测度 μ 和 ν 的支撑集完全位于同一个锥内，那么对于任意耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，几乎必然有 $w^*(X) = w^*(Y)$，这意味着 $W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu; \gamma) = 0$，因此 $W\mathrm{ODF}(\mu, \nu) = W\mathrm{RDF}(\mu, \nu) = 0$。更一般地，当 μ 和 ν 在多个锥上分配质量时，乐观决策聚焦距离倾向于选择使质量在同一锥内对齐的耦合（以尽可能多地保持 $w^*(X) = w^*(Y)$），而鲁棒决策聚焦距离则对应于会使决策性能下降最大化的最不利对齐。这一视角阐明了耦合选择为何是决策导向传输的核心，也解释了决策导向距离中的乐观量和鲁棒量为何可能存在显著差异。

作为本节示例的总结，我们注意到，即使 μ 和 ν 在几何上相距甚远，在一大类耦合下，$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 仍可能为零。只要耦合对齐（X，Y），使下游优化器保持不变，即 $w^*(X) = w^*(Y)$ 几乎必然成立，就会出现这种情况。一个基本且重要的例子来自尺度不变性：如命题1所示，对于任意 $c > 0$，都有 $w^*(x) = w^*(cx)$。

命题1（**随机缩放会产生零乐观决策聚焦距离**）。设 $X \in \mathbb{R}^d$ 为任意随机成本向量，其分布为 μ。设 κ 为任意非负随机标量（可以依赖于 X），并定义变换后的向量 $Y := \kappa X$，其分布为 ν。那么有 $W_{\text{乐观决策聚焦距离}}(\mu, \nu) = 0$。命题1的证明以及其他省略的证明见附录。

2.2. 熵正则化 DF 散度

定义2中的乐观型和鲁棒决策聚焦散度分别对应两个极端情形：最佳耦合和最坏情况耦合。因此，在实践中，这些估计可能过于乐观或过于悲观。此外，极端耦合可能较为脆弱：经验测度的微小变化可能导致传输方案发生显著差异。为缓解这些问题，并定义介于两种极端情形之间、同时仍能捕捉 μ 与 ν 之间有意义的依赖关系的距离概念，我们引入熵正则化决策聚焦散度。

熵正则化是最优传输中用于提高计算可处理性和稳定性的标准工具。即使将 μ 和 ν 替换为经验分布，最优传输仍然是关于联合分布（等价地，传输计划）的大规模问题，且优化器不一定唯一。熵正则化（i）将耦合偏向于简单的参考分布，（ii）平滑并稳定关于 $\Gamma(\mu,\nu)$的优化，以及（iii）产生通常更易于在离散设置中计算的目标函数。在我们的构造中，我们相对于独立耦合 $\mu\otimes\nu$进行正则化，因此，正则化参数 ε 控制施加于 μ 和 ν之间的依赖关系强度，其范围从高度结构化的依赖关系（较小的 ε）到近似独立（较大的 ε）。

定义 3（熵正则化决策聚焦散度）。对于 $\varepsilon > 0$，将熵正则化的乐观和鲁棒决策聚焦散度定义为

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{ER\text{-}O}}(\mu,\nu;\varepsilon) := \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \left\{ \int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\, d\gamma(x,y) + \varepsilon\, \mathrm{KL}(\gamma \| \mu\otimes\nu) \right\}. \tag{E-DFO}$$

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{ER\text{-}R}}(\mu,\nu;\varepsilon) := \sup_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \left\{ \int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\, d\gamma(x,y) - \varepsilon\, \mathrm{KL}(\gamma \| \mu\otimes\nu) \right\}, \tag{E-DFR}$$

其中，$\mathrm{KL}(\gamma\|\mu\otimes\nu)$ 表示 γ 相对于独立耦合 $\mu\otimes\nu$ 的 KL散度 .

请注意，(E-DFO) 是一个带有正正则化项的最小化问题，而 (E-DFR) 是一个带有负正则化项的最大化问题。因此，在 (E-DFO) 和 (E-DFR) 中，额外的正则化项都在最优传输目标函数中起惩罚作用。随着 ε 增大，优化器会越来越倾向于接近独立耦合（即 γ 趋近于 $\mu\otimes\nu$）；而当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，则恢复为未正则化的乐观和鲁棒表述（乐观决策聚焦距离和鲁棒DF距离）。

3. 决策聚焦散度的性质

我们首先给出一个粗略的稳定性界，将（乐观）决策聚焦距离与标准概率度量联系起来。在本节中，我们假设 μ 和 ν 的支撑集包含于一个有界

集 $\mathrm{Y} \subset \mathbb{R}^d$中。我们将决策空间中可行域的直径定义为 $D_W := \sup\{\|w - w'\|_2 : w, w' \in S\}$，并将 Y 的直径定义为 $\|\mathrm{Y}\| := \sup\{\|x - y\|_2 : x, y \in \mathrm{Y}\}$。

命题2 （**乐观决策聚焦距离关于 W_1 距离是利普希茨的**）。 假设 μ 和 ν 的支撑集均包含于 $\mathcal{Y}$。则

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) \le W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu, \nu) \le D_W \, W_1(\mu, \nu) \le D_W \, \|\mathcal{Y}\| \, d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu).$$

特别地，当 $\mathrm{KL}(\mu \| \nu) < \infty$ 时，*Pinsker* 不等式给出

$$W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu, \nu) \le D_W \, \|\mathcal{Y}\| \sqrt{\tfrac{1}{2} \mathrm{KL}(\mu \| \nu)}.$$

命题2表明，乐观决策聚焦距离不超过传统 W_1 距离与 d_{TV}的某个常数倍。因此，较小的几何结构 W_1 距离与 d_{TV} 也意味着较小或相等的 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$。命题2中的界具有普适性：它没有利用预言机映射 $w^*(\cdot)$的分段常数结构。接下来，我们将引入一种由预言机诱导的（推前）测度，它能够捕捉决策问题的内在几何结构，并提供更精确的控制。

定义4（推前测度）。设 μ 是可测空间(Ω_1, F_1)上的概率测度，(Ω_2, F_2)是另一个可测空间，且 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ 是可测的。 μ 经 f的推前测度记作 $f_{\#}\mu$，它是定义在(Ω_2, F_2)上的测度，其定义为

$$(f_{\#}\mu)(B) := \mu\big(f^{-1}(B)\big), \qquad B \in \mathcal{F}_2.$$

在我们的设定中，取 $f = w^*$ 和 $\Omega_1 = \mathrm{Y} \subset \mathbb{R}^d$。由于 S 是多面体的，我们可以选择 $w^*(\cdot)$，使其取值于极点集合 $\mathfrak{S} = \{w_1, \ldots, w_{|\mathfrak{S}|}\}$。记 $D_i := \{x \in \mathrm{Y} : w^*(x) = w_i\}$，则推前测度 $w_{\#}^*\mu$ 是定义在 $\mathfrak{S}$ 上的离散分布，其形式为

$$w_{\#}^*\mu(\{w_i\}) = \mu(D_i), \qquad i = 1, \ldots, |\mathfrak{S}|.$$

如果 $X \sim \mu$，那么 $w^*(X)$ 是一个取值于 $\mathfrak{S}$的随机决策，其分布为 $\mathrm{L}(w^*(X)) := w_{\#}^*\mu$.

下一个命题将 WODF $(\mu,\ \nu)$ 与由预言机诱导的测度之间的二次Wasserstein距离联系起来。直观而言， $w_{\#}^{*}\mu$ 和 $w_{\#}^{*}\nu$ 记录了 μ 和 ν 如何在预言机区域（或等价地，在极点决策）之间分配质量。

命题 3 （**乐观决策聚焦距离关于 W_2 距离是利普希茨的**）。 设 $V^2 :=\int_{\mathbb{R}^d}\|y\|_2^2\,\nu(dy)$ $<\infty$。则

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)\le V\,W_2\big(w_{\#}^{*}\mu,\ w_{\#}^{*}\nu\big)\,.$$

此外，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)\le V\,D_W\sqrt{d_{\mathrm{TV}}\big(w_{\#}^{*}\mu,\ w_{\#}^{*}\nu\big)}\le V\,D_W\Big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{KL}\big(w_{\#}^{*}\mu\|w_{\#}^{*}\nu\big)\Big)^{1/4}.$$

命题2和命题3通过Wasserstein距离来控制乐观决策聚焦距离，因为Wasserstein距离本身是经由最优传输计划定义的。对于鲁棒DF距离，我们可以证明它是一致有界的，因为SPO损失满足$l_{\mathrm{SPO}}(x,y)\ \le\|y\|_2\,\|w^*(x)\ -w^*(y)\ \|_2\le D_W\|y\|_2$，由此得到界$W$RDF $(\ \mu,\nu)$ $\le D_W\int_{\mathbb{R}^d}\|y\|_2\,\nu(dy)$。

接下来，我们给出熵正则化量(E-DFO)–(E-DFR)的基本序关系。这些界形式化了如下思想：熵正则化抑制极端耦合，并倾向于更接近独立耦合 $\mu\otimes\nu$的计划。

命题 4（**熵正则化决策聚焦距离的单调性与夹逼不等式**).

对于固定的 μ 和 ν，映射 $\varepsilon\mapsto W_{\text{ER-ODF}}(\mu,\nu;\ \varepsilon)$在 $\varepsilon\ge 0$ 上单调不减，而映射 $\varepsilon\mapsto W$ $_{\text{ER-RDF}}(\mu,\nu;\ \varepsilon)$在 $\varepsilon\ge 0$ 上单调不增。此外，对于任意 $\varepsilon\ge 0$,

$W_{ODF}\,(\mu,\nu)\ \le W_{ER\text{-}ODF}\,(\mu,\nu;\ \varepsilon)\ \le R(\ \mu,\nu),\ W_{RDF}\,(\ \mu,\nu)\ge W_{ER\text{-}RDF}\,(\ \mu,\nu;$ $\varepsilon)\ \ge R(\ \mu,\nu)$，其中 $R(\mu,\nu)$ 是式 (6) 中定义的独立后悔值。

命题 4 表明，熵正则化的决策聚焦距离介于乐观/鲁棒决策聚焦距离与独立后悔值之间。 ϵ 的取值进一步控制依赖程度。 ϵ 越大，距离就越接近独立后悔值。第6节中的数值结果进一步印证了这些结论。

4. 决策导向最优传输的计算

计算 $W_{\mathrm{ODF}}(\mu,\ \nu)$ 和 $W_{\mathrm{RDF}}(\mu,\ \nu)$，相当于求解一个传输成本为 $l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y)$ 的最优传输问题。具体而言，当 μ 和 ν 被替换为经验测度（即，n_μ 个来自 μ 的样本和 n_ν 个来自 ν 的样本）时，乐观和鲁棒决策聚焦距离可化为大规模线性规划。附录 A 给出了明确的线性规划形式。

然而，直接的线性规划形式包含 $n_\mu n_\nu$ 个决策变量，当样本量中等或较大时会变得难以处理。此外，当其中一个分布具有连续密度（或当 $n_\mu n_\nu$ 过大时），直接求解线性规划并不可取。对于乐观决策聚焦距离，下游问题的多面体结构可以大幅减少计算量。其核心直觉是，μ 仅通过预言机诱导的离散测度进入优化问题，而唯一依赖于耦合的项可以表示为一个二次型瓦瑟斯坦传输问题。引理1、定理1以及定理2中的提升结果对此进行了形式化表述。为方便记号，我们定义 $\bar{w}^*(x) := -w^*(x)$。

引理1 （**通过预言机推前进行耦合约简**）。 固定概率测度 μ、ν 于 $\mathbb{R}^d$ 上，并令 $w^*:\mathbb{R}^d \to S$ 为预言机映射。对于任意有界可测函数 $h:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \int h(y)^\top w^*(x)\, d\gamma(x,y) = \inf_{\bar{\gamma}\in\Gamma(w^*_{\#}\mu,\nu)} \int h(y)^\top w\, d\bar{\gamma}(w,y).$$

引理1表明，SPO损失中依赖于耦合的项仅通过预言机诱导测度 $w^*_{\#}\mu$依赖于 μ。

定理1 （$W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}$**的二次型最优传输重构**）。假设 μ 和 ν 具有有限二阶矩，并令 $\bar{w}^* := -w^*$。则

$$W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\left[W_2^2\big((\bar{w}^*)_{\#}\mu,\nu\big) - \|w^*_{\#}\mu\|^2 - \|\nu\|^2 - 2\int y^\top w^*(y)\, d\nu(y)\right], \tag{7}$$

其中，对于 $\mathbb{R}^d$上的任意概率测度 ρ，我们记 $\|\rho\|^2 := \int \|z\|_2^2\, d\rho(z)$。

定理***1***的证明 从 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 的定义出发，并利用 $\bar{w}^* = -w^*$，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu) = \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \Big(- \int y^\top \bar{w}^*(x)\, d\gamma(x,y) \Big) - \int y^\top w^*(y)\, d\nu(y).$$

将引理1应用于可测映射 $\bar{w}^*$ （它仍然是分段常数的），并应用于选择$h(y) := -y$。由此可得

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \Big(- \int y^\top \bar{w}^*(x)\, d\gamma(x,y) \Big) = \inf_{\bar{\gamma}\in\Gamma((\bar{w}^*)_{\#}\mu,\nu)} \Big(- \int y^\top w\, d\bar{\gamma}(w,y) \Big).$$

对于 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的任意耦合 $\bar{\gamma}$，

$$\|w-y\|_2^2 = \|w\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2y^\top w \quad \Longrightarrow \quad -y^\top w = \tfrac{1}{2}\Big(\|w-y\|_2^2 - \|w\|_2^2 - \|y\|_2^2 \Big).$$

由于 $\|w\|_2^2$ 项和 $\|y\|_2^2$ 项仅取决于边缘分布，因此在 $\Gamma((\bar{w}^*)_{\#}\mu,\nu)$ 上最小化 $-\int y^\top w\, d\bar{\gamma}$，等价于最小化 $\int \|w-y\|_2^2\, d\bar{\gamma}(w,y)$，其最优值等于$W_2^2((\bar{w}^*)_{\#}\mu,\nu)$。代回并利用 $\|(\bar{w}^*)_{\#}\mu\|^2 = \|w^*_{\#}\mu\|^2$，即可得到 (7)。

□

定理1表明，在 $^{W}\mathrm{ODF}\,(\mu,\nu)$ 中，唯一依赖于耦合的项是 $(\bar{w}^*)_{\#}\mu$ 与 ν 之间的二次传输代价。重要的是，即使 μ 具有连续密度，$(\bar{w}^*)_{\#}\mu$ 也始终是离散的，且其支撑集为（有限）集合 $\{-w_i:\ w_i \in \mathfrak{S}\}$。因此，当 ν 为连续分布时，计算 $^{W}\mathrm{ODF}\,(\mu,\nu)$ 可转化为一个半离散二次最优传输问题；当 ν 为经验分布时，则可转化为一个规模小得多的离散最优传输问题。求解这个简化后的二次最优传输问题后，定理2进一步给出了将耦合提升回原空间$\Gamma(\mu,\nu)$的公式。

定理2 **(提升最优耦合)**。 设 $\gamma^* \in \Gamma((\bar{w}^*)_{\#}\mu, \nu)$ 是关于二次代价 $c(w,y) = \|w-y\|_2^2$、在 $(\bar{w}^*)_{\#}\mu$ 与 ν 之间的一个最优耦合。在可测矩形上定义测度 γ，如下：

$$\gamma(A,B) := \sum_{k=1}^{|\mathfrak{S}|} \gamma^*(\{-w_k\}\times B)\, \frac{\mu(A\cap D_k)}{\mu(D_k)}, \qquad A,B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \tag{8}$$

（约定当 $\mu(D_k) = 0$ 时，第 k 项为0）。等价地，

$$\gamma(D_k \times B) = \gamma^*(\{-w_k\} \times B), \qquad k = 1, \ldots, |\mathfrak{S}|. \tag{9}$$

然后 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ 和 $W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu;\ \gamma) = W_{\mathrm{ODF}}(\mu, \nu)$。

在定理2中，$\gamma^*(\{-w_k\} \times B)$ 是 γ^* 分配给满足 $W = -w_k$ 和 $Y \in B$ 的配对 (W, Y) 的质量。因子 $\mu(A \cap D_k)/\mu(D_k)$ 是在 μ 下，已知 $X \in D_k$ 时 $X \in A$ 的条件概率（约定当 $\mu(D_k) = 0$ 时，相应项为 0）。因此，(8) 按以下方式构造耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$：先对 $(W, Y) \sim \gamma^*$ 进行采样；每当 $W = -w_k$ 时，从限制在 D_k 上的 μ 中采样 X。这样可以确保 $\bar{w}^*(X) = W$，同时保持 Y-边缘分布。

注释 1. 乍一看，最小化二次代价 $c(w, y) = \|w - y\|_2^2$（$\bar{w}^*$）与 $_{\#}\mu$ 和 ν 之间的距离，似乎有些违背直觉。这里，w 表示决策向量（例如产品推荐、药物剂量或路径选择），而 y 表示成本向量（例如点击率、副作用或旅行时间）。这两个对象可能含义不同，因此将它们相减并最小化欧几里得距离，似乎并不自然。之所以这种重构成立，是因为 $W_{\mathrm{ODF}}(\mu, \nu)$ 中依赖于耦合的项仅通过 $y^\top w^*(x)$ 依赖于 x。根据引理1，对 $\Gamma(\mu, \nu)$ 进行优化，等价于（针对该项）对预言机诱导测度与 ν 之间的耦合进行优化，由此得到定理1中的二次传输目标。

4.1. 利用强对偶性分析样本复杂度

本节推导估计 μ 和 ν 之间决策聚焦距离所需的样本复杂度。我们考虑标准的双样本设定，其中 μ 和 ν 均未知。我们观测到独立样本 $X_1, \ldots, X_{n_\mu} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu$ 和 $Y_1, \ldots, Y_{n_\nu} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \nu$，并构造经验测度 $\hat{\mu}_{n_\mu}$ 和 $\hat{\nu}_{n_\nu}$。乐观决策聚焦距离的插件估计量是经验最优传输值 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu})$，通过求解附录 A 中的经验线性规划得到。我们的目标是量化所需的样本数量，以确保根据经验测度计算出的乐观决策聚焦距离与真实的乐观决策聚焦距离之间的差值不超过容差水平 ϵ。

对于经典的 Wasserstein 距离 W_p，众所周知，根据经验测度估计 $W_p(\mu,\nu)$ 通常会遭遇维数灾难：随着环境维数 d 增大，收敛速率会变差（例如，Chewi 等（2025）中的 $\mathrm{O}\left(\sqrt{d}n^{-1/d}\right)$）。相比之下，乐观决策聚焦距离从下游问题中继承了额外的结构。由于预言机映射 $w^*(\cdot)$ 的取值属于 S的有限个极点，$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 对 μ 的依赖关系是通过有限划分 $\{D_i\}$（等价地，通过离散推前测度 $w^*_{\#}\mu$）传递的。下文的强对偶表示明确揭示了这一点，并由此得到的样本复杂度界取决于 $|\mathfrak{S}|$，而非直接取决于 d。

我们首先介绍对偶问题中使用的函数空间。对于 ν 上的概率测度 $\mathbb{R}^d$，令$L^1(\nu)$表示满足 $\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\,\nu(dy)<\infty$的可测函数 $g\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$的集合。

命题*5*（乐观决策聚焦距离的强对偶性）。令 $\mathfrak{S}=\{w_1,\ldots,w_{|\mathfrak{S}|}\}$为 S的极点集合，并令 $D_i:=\{x\in\mathbb{R}^d:\ w^*(x)=w_i\}$表示预言机区域。定义$z(y):=y^\top w^*(y)$，并对每个 i，定义约化成本 $c_i(y):=y^\top w_i-z(y)$。令 Φ_{SPO} 为满足以下条件的所有$(f,\ g)\in\mathbb{R}^{|\mathfrak{S}|}\times L^1(\nu)$的集合：

$$f_i+g(y)\le c_i(y),\qquad \forall i\in\{1,\ldots,|\mathfrak{S}|\},\ \forall y\in\mathbb{R}^d. \tag{10}$$

Then

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)=\sup_{(f,g)\in\Phi_{\mathrm{SPO}}}\left\{\sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|}f_i\,\mu(D_i)+\int_{\mathbb{R}^d}g(y)\,\nu(dy)\right\}. \tag{11}$$

此外，对于任意固定的 $f\in\mathbb{R}^{|\mathfrak{S}|}$，式(11) 中 g 的最优取值为

$$g_f(y):=\min_{1\le i\le|\mathfrak{S}|}\left(c_i(y)-f_i\right), \tag{12}$$

因此，(11) 也可以等价地写成

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)=\sup_{f\in\mathbb{R}^{|\mathfrak{S}|}}\left\{\sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|}f_i\,\mu(D_i)+\int_{\mathbb{R}^d}g_f(y)\,\nu(dy)\right\}. \tag{13}$$

命题5表明，无限维耦合优化可以替换为对 $f \in \mathbb{R}^{|\mathcal{G}|}$ 进行的有限维最大化，并加上包络函数 $g_f(\cdot)$ 的积分。这种结构使得依赖关系不受维度（ d）影响，而仅取决于 μ 的样本量。

利用对偶表示，我们现在给出关于 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{}\mu_{n_\mu}, \hat{}\nu_{n_\nu})$ 的双样本集中结果。回顾一下，μ 和 ν 的支撑集是有界集 $\mathrm{Y} \subset \mathbb{R}^d$，且 S 是直径为 D_W的紧集。在这些假设下，l_{SPO} 一致有界于 $B := \|\mathrm{Y}\| D_W < \infty$。

定理 3 **(关于 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 的双样本集中)**。 对于任意 $\delta \in (0, 1)$，以至少 $1 - \delta$ 的概率，

$$\left| W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) - W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) \right| \le B\sqrt{\frac{|\mathcal{G}|}{n_\mu}} + C\,B\sqrt{\frac{|\mathcal{G}|}{n_\nu}} + 2B\sqrt{\frac{\log(4/\delta)}{2n_\mu}} + 2B\sqrt{\frac{\log(4/\delta)}{2n_\nu}}, \tag{14}$$

其中 $C > 0$ 是一个通用常数。

定理 3 中的界立即给出一个 ϵ-精度样本复杂度，该结果同样适用于鲁棒决策聚焦情形。忽略 δ 中的对数因子和常数后，主导项的量级为 $B\sqrt{|\mathcal{G}|/n_\mu}$ 和 $CB\sqrt{|\mathcal{G}|/n_\nu}$。与高维下估计经典 W_p 距离的典型收敛速率相比，后者的量级为 $\mathrm{O}(\sqrt{d}\, n^{-1/d})$，决策聚焦距离的相应速率显著更快，而且值得注意的是，它与环境维数 d 无关。若要以高概率保证 $\left|W\right.$ ODF $(\hat{}\ \mu_{n_\mu}, \hat{}\nu_{n_\nu}) - W$ODF $(\mu, \nu)\left| \le \epsilon \right.$，只需取 $n_\mu = \tilde{O}\left(\frac{B^2|\mathcal{G}|}{\epsilon^2}\right)$，且 $n_\nu = \tilde{O}\left(\frac{B^2|\mathcal{G}|}{\epsilon^2}\right)$,– 其中 $\tilde{O}$ $(\cdot)$ 隐去对 $1/\delta$ 的对数依赖。

定理*3*的证明 我们分三步进行。

步骤 *1*：总体和经验目标函数的对偶表示。根据命题5，我们可以写成

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathbb{R}^{|\mathcal{G}|}} \left\{ \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} f_i\, \mu(D_i) + \mathbb{E}\big[g_f(Y)\big] \right\}, \tag{15}$$

其中 $Y \sim \nu$ 和 g_f 由 (12) 给出。同理，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) = \sup_{f \in \mathbb{R}^{|\mathcal{G}|}} \left\{ \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} f_i\, \hat{\mu}_{n_\mu}(D_i) + \frac{1}{n_\nu} \sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j) \right\}. \tag{16}$$

由于 SPO损失一致有界于 B，对于所有 i 和 $y \in \mathrm{Y}$，我们有 $0 \le c_i(y) \le B$，因此只要 $\max_i f_i = 0$，就有 $0 \le g_f(y) \le B$。此外，对偶目标函数在平移 $f \mapsto f + t\mathbf{1}$ 下保持不变（因为 $\sum_i \mu(D_i) = 1$ 且 $\sum_i \hat{\mu}_{n_\mu}(D_i) = 1$），因此我们可以将 (15)–(16) 中的上确界限制在归一化集合上

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{S}|} : \max_{1 \le i \le |\mathfrak{S}|} f_i = 0,\ \min_{1 \le i \le |\mathfrak{S}|} f_i \ge -B \right\},$$

不含 ch 。特别地，对于 $f \in \mathrm{F}$，我们有 $|f_i| \le B$ 和 $0 \le g_f(y) \le B$.

步骤 *2*：分解估计误差。对于每个 $f \in \mathcal{F}$，定义

$$A(f) := \sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|} f_i \hat{\mu}_{n_\mu}(D_i) + \frac{1}{n_\nu} \sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j), \qquad B(f) := \sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|} f_i \mu(D_i) + \mathbb{E}[g_f(Y)].$$

根据对偶表示 (16)–(15)，我们有

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} A(f), \qquad W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{F}} B(f).$$

我们首先对差值 $W_{\mathrm{ODF}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) - W_{\mathrm{ODF}}(\mu, \nu)$ 给出上界。记

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) - W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{F}} A(f) - \sup_{f \in \mathcal{F}} B(f).$$

利用不等式 $\sup_f A_f - \sup_f B_f \le \sup_f (A_f - B_f)$，我们得到

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) - W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) &\le \sup_{f \in \mathcal{F}} \big(A(f) - B(f) \big) \\ &= \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|} f_i \big(\hat{\mu}_{n_\mu}(D_i) - \mu(D_i) \big) + \left(\frac{1}{n_\nu} \sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j) - \mathbb{E}[g_f(Y)] \right) \right\} \\ &\le \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|} f_i \big(\hat{\mu}_{n_\mu}(D_i) - \mu(D_i) \big) \right| + \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j) - \mathbb{E}[g_f(Y)] \right|. \end{aligned}$$

接下来，我们对反方向的差值进行上界估计。同理,

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu) - W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} B(f) - \sup_{f \in \mathcal{F}} A(f) \le \sup_{f \in \mathcal{F}} \big(B(f) - A(f) \big).$$

重复相同的展开并应用三角不等式，可得到相同的上界，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)-W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu},\hat{\nu}_{n_\nu})\le \sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} f_i\big(\hat{\mu}_{n_\mu}(D_i)-\mu(D_i)\big)\right|+\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\frac{1}{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j)-\mathbb{E}[g_f(Y)]\right|.$$

结合这两个单侧界，我们得出

$$\left|W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu},\hat{\nu}_{n_\nu})-W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)\right|\le \Delta_\mu+\Delta_\nu, \tag{17}$$

其中

$$\Delta_\mu:=\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} f_i\big(\hat{\mu}_{n_\mu}(D_i)-\mu(D_i)\big)\right|,\qquad \Delta_\nu:=\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\frac{1}{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j)-\mathbb{E}[g_f(Y)]\right|.$$

我们分别对 Δ_μ 和 Δ_ν 进行界定。

步骤 *3*： Δ_μ 和 Δ_ν 的集中性。对于 Δ_μ，由于 $|f_i|\le B$ 对于 $f\in\mathcal{F}$，

$$\Delta_\mu\le B\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}\left|\hat{\mu}_{n_\mu}(D_i)-\mu(D_i)\right|.$$

设 $p_i:=\mu(D_i)$ 且 $\hat{}p_i:\hat{}=\hat{}\mu_{n_\mu}(D_i)$。那么

$$\mathbb{E}[\Delta_\mu]\le B\,\mathbb{E}\Big[\|\hat{p}-p\|_1\Big]\le B\sqrt{|\mathcal{G}|}\left(\mathbb{E}\|\hat{p}-p\|_2^2\right)^{1/2}.$$

此外，我们可以如下界定 $\hat{}p-p$ 的二阶矩。首先，

$$\mathbb{E}\|\hat{p}-p\|_2^2=\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}(\hat{p}_i-p_i)^2\Big]=\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}\mathbb{E}\big[(\hat{p}_i-p_i)^2\big]=\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}\mathrm{Var}(\hat{p}_i),$$

其中，我们对每个 i 使用 $\mathbb{E}[\hat{}p_i]=p_i$。接下来，由于 $\hat{}p_i=\frac{1}{n_\mu}\sum_{t=1}^{n_\mu}\mathbf{1}\{X_t\in D_i\}$，我们有

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_i)=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n_\mu}\sum_{t=1}^{n_\mu}\mathbf{1}\{X_t\in D_i\}\right)=\frac{1}{n_\mu}\mathrm{Var}\big(\mathbf{1}\{X_1\in D_i\}\big)=\frac{1}{n_\mu}p_i(1-p_i).$$

因此，

$$\mathbb{E}\|\hat{p}-p\|_2^2=\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}\mathrm{Var}(\hat{p}_i)=\frac{1}{n_\mu}\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}p_i(1-p_i)\le\frac{1}{n_\mu}\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}p_i=\frac{1}{n_\mu},$$

因此

$$\mathbb{E}[\Delta_\mu] \le B\sqrt{\frac{|\mathfrak{S}|}{n_\mu}}. \tag{18}$$

此外，更改一个样本 X_t，会使每个 $\hat{p}_i$ 至多改变 $1/n_\mu$，因此会使 Δ_μ 至多改变 $2B/n_\mu$。根据 McDiarmid不等式，以至少 $1-\delta/2$ 的概率，

$$\Delta_\mu \le \mathbb{E}[\Delta_\mu] + 2B\sqrt{\frac{\log(4/\delta)}{2n_\mu}}. \tag{19}$$

对于 Δ_ν，注意到对于所有 $f \in \mathrm{F}$ 和 $y \in \mathrm{Y}$，$0 \le g_f(y) \le B$。对函数类 $\{g_f : f \in \mathrm{F}\}$ 使用标准的对称化方法和拉德马赫复杂度界，可得

$$\mathbb{E}[\Delta_\nu] \le C\,B\sqrt{\frac{|\mathfrak{S}|}{n_\nu}} \tag{20}$$

其中 $C > 0$ 是一个通用常数。此外，更改一个样本 Y_t，会使经验分布均值 $\frac{1}{n_\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu} g_f(Y_j)$ 至多改变 B/n_ν，且这一界对所有 f 均成立，因此会使 Δ_ν 至多改变 $2B/n_\nu$。根据 McDiarmid不等式，以至少 $1-\delta/2$ 的概率，

$$\Delta_\nu \le \mathbb{E}[\Delta_\nu] + 2B\sqrt{\frac{\log(4/\delta)}{2n_\nu}}. \tag{21}$$

最后，将 (17) 与 (18)–(21) 结合，并对 (19) 和 (21) 中的事件应用并集界，可得 (14)。

□

5. 应用：决策导向插值

本节将展示 DF 散度在分布插值中的一个应用。直观而言，在决策导向场景中，给定两个测度 μ 和 ν，有意义的“平均”不应是简单的混合 $(\mu+\nu)/2$。相反，它应考虑 μ 下的概率质量如何与 ν下的概率质量相匹配，而这种匹配取决于通过决策损失定义的下游预言机映射 $w^*(\cdot)$。

McCann插值（McCann（1997））通过最优耦合，为构造两个端点之间一条经过中间测度的路径提供了一种规范方法。其基本机制如下：

首先选取端点测度之间的一个最优耦合，然后通过线性映射 $\pi_t(x,\ y) = (1-t)x + ty$（$t \in [0,1]$）。在经典的二次最优传输场景中，这会得到 McCann（位移）插值，并在 $(\mathrm{P}_2(\mathbb{R}^d),\ W_2)$ 中生成一条等速测地线。在我们的决策导向场景中，代价 l_{SPO} 通常是非二次的（并且可能通过 $w^*(\cdot)$ 不连续），因此一般无法直接作 W_2-测地线解释。尽管如此，$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 和 W_{RDF} 的最优耦合仍会通过相同的推前构造，诱导出规范的中间测度族。第5节.1给出了 McCann 插值的基本表述。

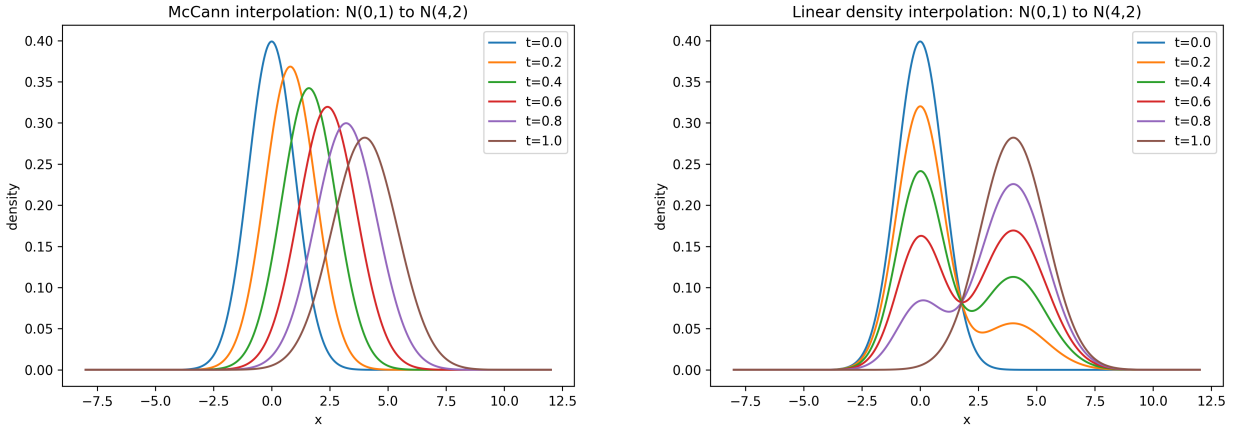
5.1. 由最优耦合得到的 McCann 插值

设 $\mu_0, \mu_1 \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^d)$，并设 $\gamma \in \Gamma(\mu_0, \mu_1)$ 为二次代价 $c(x,y) = \|x-y\|_2^2$ 的最优耦合。对 $t \in [0,1]$，定义 $\pi_t(x,y) = (1-t)x + ty$，并令 $\mu_t := (\pi_t)_{\#}\gamma$。等价地，对任意 Borel 集 $A \subseteq \mathbb{R}^d$，$\mu_t(A) = \gamma(\{(x,y) : (1-t)x + ty \in A\})$。该定义不要求存在最优传输映射；一般而言，耦合 γ 允许来自 μ_0 的质量在 μ_1 中分裂到多个目的地。为引出 McCann 插值，我们考虑如下例子。

例 1（混合插值与 McCann 插值）。设 $\mu_0 = \mathrm{N}(0,1)$ 与 $\mu_1 = \mathrm{N}(4,2)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上。一种朴素插值对密度函数作线性平均，$p_t = (1-t)p_{\mu_0} + tp_{\mu_1}$，从而得到一个二分量高斯混合，并且在中间的 t 处可能是双峰的。相比之下，$(\mathrm{P}_2(\mathbb{R}), W_2)$ 中的 McCann 插值沿最优耦合传输质量，并对所有 $t \in [0,1]$ 保持高斯分布，其中 $\mu_t = \mathrm{N}\big(4t, ((1-t) + t\sqrt{2})^2\big)$。

–

图 4 比较了当 t 从 0 变化到 1 时，μ_0 和 μ_1 之间的 McCann 插值与朴素密度混合。左图所示的 McCann 插值在从 μ_0 到 μ_1 的过渡过程中始终保持高斯形状，而右图中的朴素密度混合在 t 取中间值时变为双峰的。在实践中，当分布形状得以保持



(a) McCann （位移） 插值在 N (0，1) 和 N (4，2) 之间。

(b) 线性 密度 平均 $p_t = (1-t)\,p_{\mathcal{N}(0,1)} + t\,p_{\mathcal{N}(4,2)}$。

图 4 高斯测度的 McCann 插值与线性密度平均的比较。左：McCann 插值呈现了从 μ_0 到 μ_1 的平滑位移。右：线性密度平均在中间 t 处可能呈双峰分布，无法反映合理的质量传输。

沿着动态过程，McCann 插值通过考虑最优耦合，为中间路径提供了更切合实际的估计。

5.2. 决策导向插值

现在，我们通过对决策聚焦目标的最优耦合应用同一个线性映射 $\pi_t(x,\ y) = (1-t)x + ty$ 的推前，来定义决策导向插值。与二次情形不同，这些插值分布并非数据空间中某种黎曼型度量下的测地线；相反，它们提供了一条由耦合驱动的路径，从 μ_0 到 μ_1，专为决策损失而设计。

定义 5（由耦合诱导的决策导向插值体）。设 $\mu_0,\ \mu_1 \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}^d)$，令 $\gamma \in \Gamma(\mu_0,\ \mu_1)$ 为任意耦合，并对 $t \in [0,1]$ 定义 $\pi_t(x,\ y) = (1-t)x + ty$。由 γ 在时刻 t 诱导的决策导向插值为

$$\mu_t^{\gamma} := (\pi_t)_{\#}\gamma, \qquad t \in [0,1].$$

在定义 5 中，让 t 从 0 变化到 1，会得到一条中间分布路径，该路径在耦合 γ下将μ_0 变换为 μ_1。在决策导向场景中，选择耦合 γ 是为了体现

所需的决策聚焦目标函数。例如，可以令 γ 为乐观决策聚焦距离的优化器、鲁棒DF距离的优化器，或熵正则化形式 (E-DFO)–(E-DFR) 的优化器。每种选择都会产生不同的插值路径 $\{\mu_t^\gamma\}_{t\in[0,1]}$，体现 μ_0 和 μ_1之间不同的耦合结构。

备注 2。定义 5 中的插值是通过对耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu_0, \mu_1)$ 取推前构造的。回顾一下，第 4 节根据约化空间 $\Gamma(w_{\#}^{*}\mu_0, \mu_1)$ 中的耦合，给出了乐观决策聚焦距离的 W_2 约化。因此，也可以先在约化空间 $\Gamma(w_{\#}^{*}\mu_0, \mu_1)$ 中构造插值，再将其提升回 $\Gamma(\mu_0, \mu_1)$ 中的耦合。此过程通常会产生一条不同于定义 5 中插值路径的路径。我们在附录 C 中比较这两种方法。在实践中，我们建议使用定义 5，因为由此得到的路径直接描述了原始数据空间中从 μ_0 到 μ_1 的演变过程，相比于约化空间中在 $w_{\#}^{*}\mu_0$ 和 μ_1 之间构造的路径，也更容易解释。

定理 *4*（乐观决策导向插值上的单侧界）。设 μ, ν 是 $\mathbb{R}^d$ 上具有有限二阶矩的概率测度。设 $\gamma^* \in \Gamma(\mu, \nu)$ 是 $^{W}ODF(\mu, \nu)$ 的一个优化器，并对 $t \in [0,1]$ 定义 $\pi_t(u, v) = (1-t)u + tv$ 和 $\nu_t := (\pi_t)_{\#}\gamma^*$。那么，对所有 $t \in [0,1]$，我们都有$^{W}ODF(\mu, \nu_t) \le t\, ^{W}ODF(\mu, \nu)$。

定理 4 为乐观决策导向插值提供了一个简单的“恒定速度”上界：当 t 从 0 增加到 1 时，从 μ 到中间边缘分布 ν_t 的决策导向距离至多线性增长，即 $^{W}\mathrm{ODF}(\mu, \nu_t) \le t\, ^{W}\mathrm{ODF}(\mu, \nu)$。这与 W_2 的 McCann 测地线的精确恒定速度性质相似，但仅呈现为单侧形式（对于 W_2 McCann 插值，速度恰好恒定；见附录 C）。如证明所示，该不等式 $^{W}\mathrm{ODF}(\mu, \nu_t) \le t\, ^{W}\mathrm{ODF}(\mu, \nu)$ 源于值函数 $z(x) = \min_{w\in S} w^\top x$ 的凹性。在实际应用中，该结果保证乐观决策导向插值生成的分布族与 μ 之间的决策导向差异关于 t 一致受控，这在生成中间

分布时很有用（例如用于数据增强或渐进式偏移建模），同时保持有界的决策性能下降。作为特殊情况，如果 γ 是 $^{W}\mathrm{ODF}\,(\mu_0, \mu_1)$ 和 $t = \frac{1}{2}$ 的最优耦合，我们将所得测度 $\mu_{1/2}^{\gamma}$ 称为 μ_0 和 μ_1 的决策导向平均 。

6. 数值研究

本节使用合成数据和真实数据，评估所提出的决策导向散度以及由耦合诱导的插值。我们首先通过一个基于单周期报童问题的示例，比较不同分布对之间各类距离度量的取值。随后，我们研究一个真实的纵向医疗数据集，以量化随时间变化的分布变化，通过耦合诱导的插值构造中间时刻分布，并通过 SPO 损失评估下游决策质量。

6.1. 报童问题的示例

我们采用单周期报童问题作为一个简单的下游决策任务，以说明相较于标准分布距离，决策导向散度的表现。尽管经典报童问题通常表述为对订货量进行标量最小化，但通过允许在有限的可行订货量集合上进行随机化订货决策，也可以将其嵌入我们的线性优化框架。

具体而言，需求在有限集合 $\{d_i\colon\, i \in I\}$ 中取值，其中 $I = \{1, \ldots, m\}$，且 $\mathbb{P}(D = d_i) = p_i$ 以及 $\sum_{i\in I} p_i = 1$。决策者从离散集合 $\{q_j : j \in J\}$ 中选择订货量，其中 $J = \{1, \ldots, n\}$。若需求实现为 d_i 且订货量为 q_j，则产生的成本为 C_{ij}，其中矩阵 $(C_{ij})_{i\in I, j\in J}$ 假定已知（并可编码采购、持有、缺货或其他运营惩罚）。决策向量 $x = (x_j)_{\,j\in J}$ 表示选择每个订货量 q_j 的概率。因此，$x_j \in [0, 1]$ 且 x 位于单纯形中。期望成本为

关于 x 是线性的，且报童问题可以写成线性规划

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_i C_{ij} x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in J} x_j = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad \forall j \in J. \end{aligned} \tag{22}$$

式 (22) 的极点对应于确定性订货决策。

现在，我们将讨论范围限定在标准的缺货–持有成本结构。令 $b > 0$ 和 $h > 0$ 分别表示单位缺货成本和单位持有成本，并定义临界分位数$\alpha := \frac{b}{b+h}$。在下面的示例中，我们通过选择 $b = 3$ 和 $h = 2$，将其设为 $\alpha = 0.6$。对于需求分布为 μ_k、累积分布函数为 $F^{(k)}$ 的客户类型$k \in \{1, 2, 3\}$，最优订货量指的是 60% 分位数值。

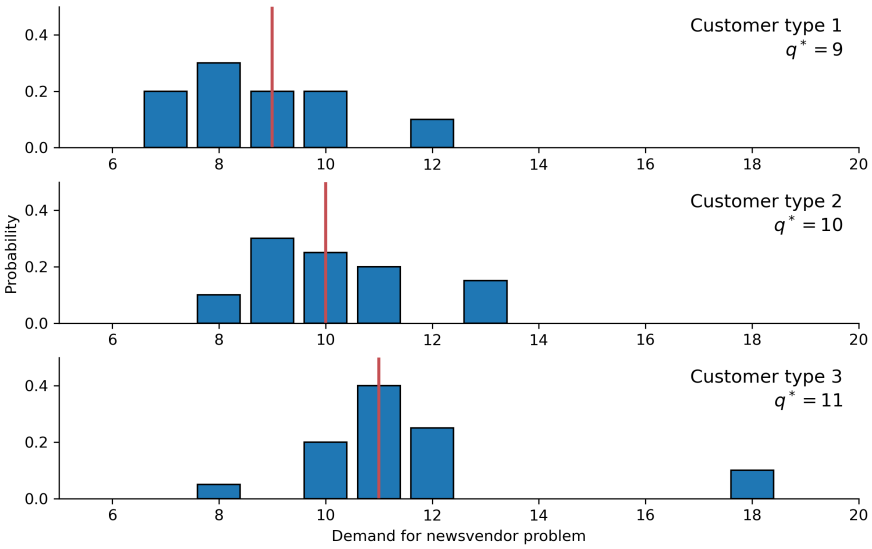


图 5 三种客户类型具有不同的离散需求分布，并在 $\alpha = 0.6$ 下对应不同的最优订货量 $q^{*(1)} = 9$、 $q^{*(2)} = 10$ 和 $q^{*(3)} = 11$（红色竖线）。

图 5 展示了三个形状各异且 α 分位数不同的离散需求分布 μ_1， μ_2， μ_3。具体而言，对于 $\alpha = 0.6$，我们得到 $q^{*(1)} = 9$、 $q^{*(2)} = 10$ 和 $q^{*(3)} = 11$。因此，客户类型会影响下游最优决策。

为了与我们以决策为导向的最优传输表述相衔接，我们将总体视为异质的：随机到达的客户以概率 λ_k 属于类型 $k \in \{1, 2, 3\}$。

我们进一步考虑三种客户类型的总体混合。令 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Delta_3$ 表示混合权重，并定义 $\mu_\lambda := \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \delta_{c^{(k)}}$。我们将均匀混合 λ_0 =(1/3,1/3,1/3)作为基准总体。表1报告了 μ_λ 与 μ_{λ_0}在不同混合向量 λ下的若干距离度量，包括决策导向距离^{W}ODF ($\mu_\lambda, \mu_{\lambda_0}$)和^{W}RDF ($\mu_\lambda, \mu_{\lambda_0}$)。在表1中，列 $R(\mu_\lambda, \mu_{\lambda_0})$报告了独立耦合 $\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda_0}$ 下的决策导向风险（即类型抽样独立时的期望SPO损失）。总变差距离和KL散度直接在权重上计算。Wasserstein 距离 W_1 和 W_2 在三点类型空间$\{1, 2, 3\}$上计算，地面代价分别为 $|i - j|$（对于 W_1）和 $|i - j|^2$（对于 W_2）。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$	$R(\mu_\lambda, \mu_{\lambda_0})$	$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}$	TV	KL散度($\lambda \Vert \lambda_0$)	W_1	W_2
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	0.0833	1.0208	1.9792	0.1667	0.0589	0.2500	0.5000
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	0.1333	0.9667	1.8667	0.2667	0.1483	0.4000	0.6325
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$	0.1667	0.9306	1.7917	0.3333	0.2310	0.5000	0.7071
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{8}{10})$	0.4000	0.8583	1.3750	0.4667	0.4596	0.7000	0.9832

Table 1 混合权重向量 λ与基准 $\lambda_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$之间的各种距离.

在表1中，随着行索引增大，分布 λ 变得越来越不均衡。在这种情况下，乐观决策聚焦距离 d_{TV}、KL散度以及 Wasserstein 距离 W_1和 W_2 都随之增大，反映出不均衡程度加剧所导致的几何差异扩大。另一方面， $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}$ 刻画了两个总体中客户类型的最坏情况对齐，并随着不均衡程度加剧而减小。正如预期，我们观察到^{W}ODF (μ_λ， μ_{λ_0}) $\le R(\mu_\lambda$， μ_{λ_0}) $\le$ ^{W}RDF (μ_λ， μ_{λ_0})，且^{W}ODF与^{W}RDF之间的差距可能相当显著。

6.2. 帕金森病真实数据分析

本小节在真实世界的帕金森病远程监测数据集上评估所提出的决策导向散度和插值分布，该数据集包含每位患者的重复测量数据。数值评估聚焦于三个方面：（i）通过决策导向插值构造中间时刻的分布（第5节）；（ii）评估最优传输中熵正则化项的影响（命题 4）；以及（iii）考察估计误差率随样本量变化的情况（定理 3）。

6.2.1. 数据集与问题设置。我们使用来自 UCI 存储库的帕金森病远程监测数据集，其中包含来自 42 名帕金森病患者的 5，875 条观测记录。每条记录都包含测量时间（自研究开始以来的天数）、两项临床严重程度指标（运动功能UPDRS 和总UPDRS）以及多项语音相关特征。由于同一患者会随时间反复接受测量，因此这些数据具有纵向结构。这种结构既支持群体层面的分布比较，也支持患者追踪评估。我们重点考察患者在以下三个时间窗口内的疾病进展：$[t-5, t+5]$ 对于 $t \in \{50, 100, 150\}$。

对于决策问题，决策变量是每周护理计划

$$w = (h_{\text{exercise}}, h_{\text{nursing}}, h_{\text{rest}}, h_{\text{speech}}) \in \mathbb{R}^4,$$

其中，每个坐标表示分配给某种护理方式的每周小时数：体育锻炼或物理治疗、护理或护理协调、睡眠或休息优化，以及言语治疗。目标是最小化 $y^\top w$，其中

$$y = (y_{\text{ex}}, y_{\text{nurse}}, y_{\text{rest}}, y_{\text{speech}}) \in \mathbb{R}^4$$

由两个严重程度度量和两个额外协变量（运动功能UPDRS，总UPDRS，年龄，PPE）构成。详细的数据处理流程见

附录 E。可行域由五个候选治疗方案组成，详细信息同样见附录 E。在分析不同日期之间的耦合之前，图 6 展示了 42 位患者中两个选定变量的联合密度。

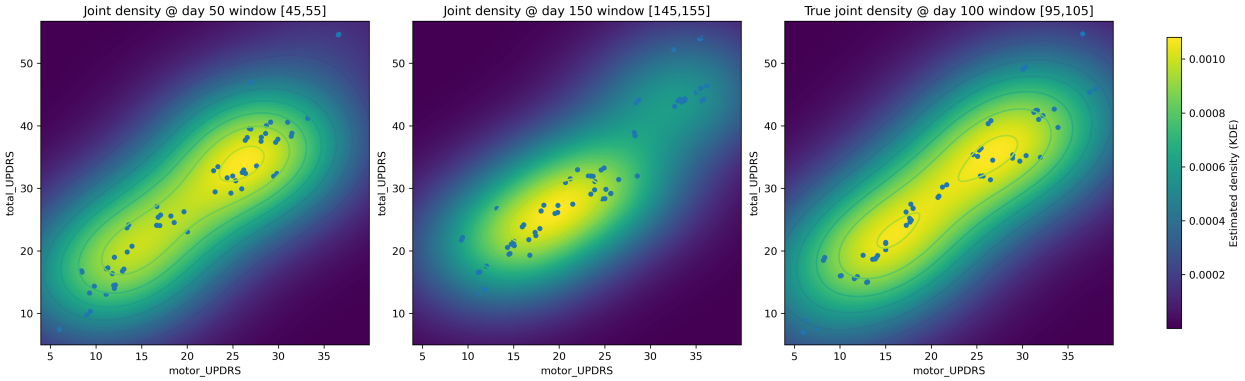


图 6 患者在三个不同时期的经验分布。

在评估第50天与第150天之间的平均决策损失（SPO损失）时，传统方法会直接代入这两个时间点的边缘分布，而不考虑耦合，因此得到的平均遗憾为 $R(\hat{}\mu_{50}, \hat{}\nu_{150}) \approx 0$。4566。然而在实践中，如果跟踪每位患者，并计算其第50天至第150天期间的SPO损失的平均值，则遗憾仅为0。0359，中位数为0。这种数量级的差距表明，忽略时间对齐的独立评估可能会大幅高估实际风险，因此有必要对跨时间的耦合进行显式建模。

6.2.2. 决策导向插值。 我们首先在不进行正则化的情况下，为乐观、稳健和独立决策导向耦合实现 McCann 插值。具体而言，我们使用第50天和第150天附近的分布，对第100天附近的分布进行插值。数值细节见附录 E。预测密度与真实密度一同展示于图 7。

图 7 显示，乐观的决策导向插值最接近真实分布。这一结果符合直觉：每位患者的疾病进展取决于其当前

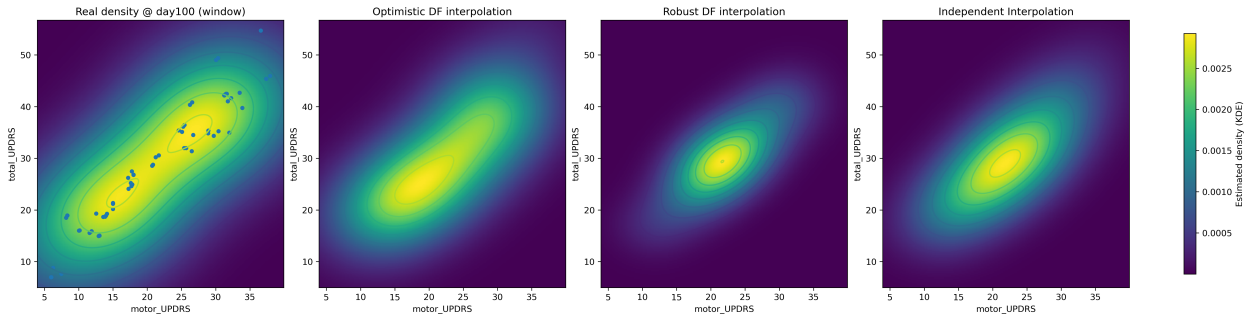


图 7 通过决策导向插值获得的预测分布。

状态，而基于总体的插值可能会在个体层面造成更大的偏差。

6.2.3. 熵正则化。回顾命题 4 可知，引入熵正则化后，插值结果将介于极端乐观情形和稳健情形之间。因此，我们加入熵正则化项，并改变 ϵ 的取值。图 8 报告了平均 SPO 损失，该损失通过使用第100天前后的观测数据追踪每位患者来评估。

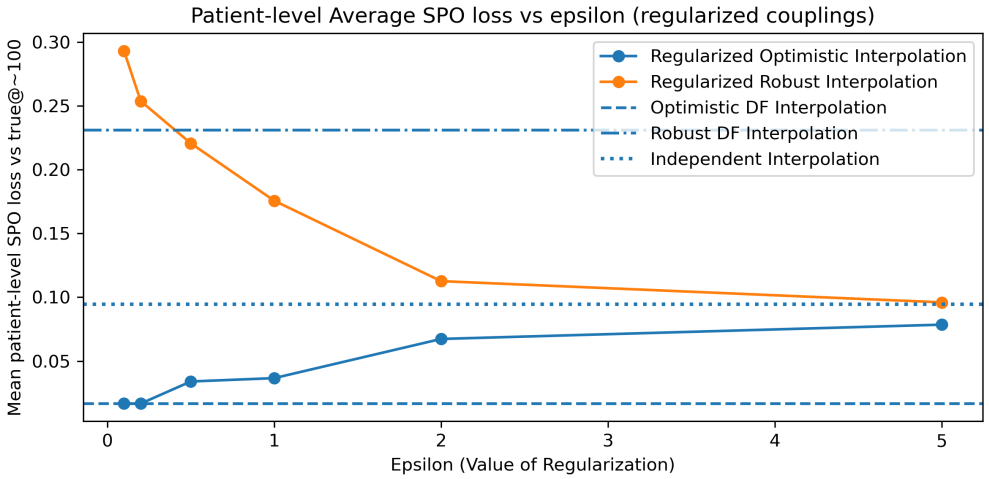


图8 熵正则化对决策导向插值的影响。通过追踪每位患者来评估SPO损失。

图8显示，随着正则化参数 ϵ 增大，决策导向插值的性能逐渐接近独立插值。由于评估基于真实患者轨迹，因此

乐观情形和稳健情形不一定会对所有 ϵ 值提供统一的上界或下界，尤其是在 ϵ 较小时。

6.2.4. 估计误差率。定理 3 为耦合估计建立了一个阶为 $O(1/n)$ 的估计误差界。为展示这一结果，我们将估计误差可视化为样本量的函数。估计误差曲线如图 9 所示。

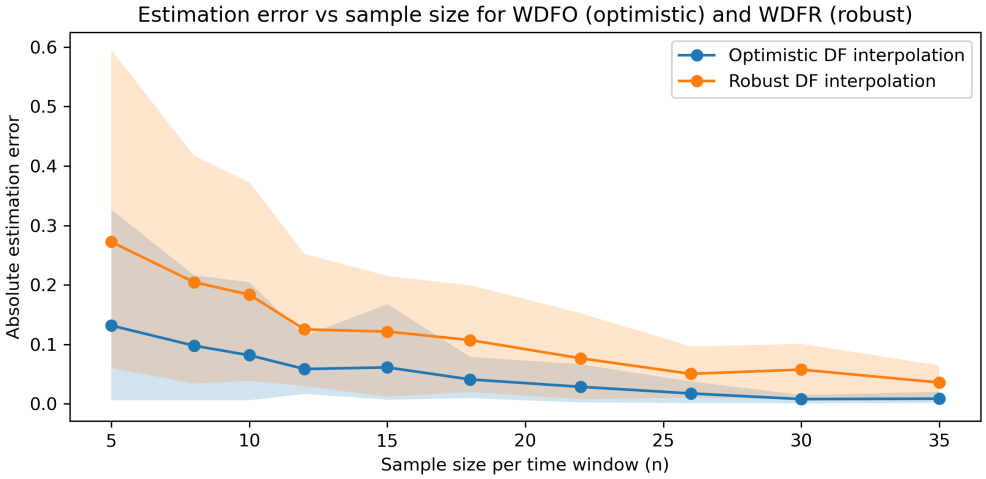


图 9 McCann 插值的估计误差。

图 9 表明，随着样本量增加，估计误差有效地收敛至零。结果还表明，稳健决策导向插值的估计误差大于乐观型插值。有关数值研究的更多结果和细节，请参阅附录 E。

7. 结论

本文提出了一种新的度量，用于量化随机优化问题中分布之间的距离。所提出的决策导向距离与全变差、KL散度和Wasserstein距离等经典度量密切相关。我们开发了用于计算该距离的高效算法，并推导出与维度无关的估计误差界。真实世界的数值实验进一步证明了所提出的决策导向散度的价值。

该度量为未来研究决策导向聚类、异常检测、回归、不确定集构造以及随机优化中的相关问题奠定了基础。

致谢

我们感谢 Soumik Pal 博士在访问教堂山期间对本文提出的宝贵意见。Suhan Liu 感谢美国国家科学基金会 [Grant DMS-2450005] 提供的经费支持。

参考文献

Bennouna A, Van Parys B（2022）整体稳健的数据驱动决策。*arXiv* 预印本 *arXiv:2207.09560* 。Bertsimas D, Kallus N（2020）从预测分析到处方分析。《管理科学》 66(3):1025–1044.

Blanchet J, Murthy K（2019）通过最优传输量化分布模型风险。运筹学数学 44(2):565–600。

Blanchet J, Murthy K, Zhang F（2022）基于最优传输的分布鲁棒优化：结构性质与迭代方案。运筹学数学 47(2):1500–1529。

Chewi S, Niles-WeedJ, Rigollet P（2025）统计最优传输，第2364卷，数学讲义（Springer Cham），ISBN 978-3-031-85159-9，网址 http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-85160-5。

CristianR, Harsha P,PerakisG,Quanz B（2025）用于决策制定的高效端到端学习：一种元优化方法。*arXiv* 预印本 *arXiv:2505.11360* 。

El Balghiti O、Elmachtoub AN、Grigas P、Tewari A（2022）预测后优化框架中的泛化界。运筹学数学。

Elmachtoub AN、Grigas P（2022）智能“预测后优化”。《管理科学》68(1):9–26.

Elmachtoub AN、Lam H、Lan H、Zhang H（2025）剖析模型错设对数据驱动优化的影响。*arXiv* 预印本 *arXiv:2503.00626*。

Elmachtoub AN、Lam H、Zhang H、Zhao Y（2023）先估计后优化与估计优化一体化：随机占优视角。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.06833*107。

Er C、Liu M（2025）面向决策的流体近似偏差校正。*arXiv* 预印本 *arXiv:2512.1572**6* .

Gao R（2023）Wasserstein分布鲁棒优化的有限样本保证：打破维数灾难。运筹学71(6)：2291–2306。

Gao R、Chen X、Kleywegt AJ（2024）Wasserstein分布鲁棒优化与变分正则化。运筹学 72(3)：1177–1191。

Ho-Nguyen N、Kilinc¸-Karzan F、K¨uc¸¨ukyavuz S、Lee D（2023）具有左侧不确定性的Wasserstein模糊集下分布鲁棒机会约束规划的强公式。《*INFORMS* 优化学报》 5(2)：211–232。

Homem-de Mello T、Valencia J、Lagos F、Lagos G（2024）跳出框架进行预测：面向应用的随机优化最优逐点预测。*arXiv* 预印本 *arXiv:2411.03520* 。

Hu Y、Kallus N、Mao X（2022）情境线性优化的快速收敛率。《管理科学》 68(6)：4236–4245。

Huang M、Gupta V（2024）利用方向梯度进行决策导向学习。神经信息处理系统进展 37：79194–79220。

Kuhn D、Esfahani PM、Nguyen VA、Shafieezadeh-Abadeh S（2019）Wasserstein分布鲁棒优化：机器学习中的理论与应用。分析时代的运筹学与管理科学，130–166（INFORMS）。

Liu M, Grigas P, Liu H, Shen ZJM (2023) 先预测后优化框架中的主动学习：一种基于间隔的方法。*arXiv*预印本 *arXiv:2305.06584* 。

Mandi J, Kotary J, Berden S,Mulamba M, Bucarey V, Guns T, Fioretto F (2024) 决策导向学习：基础、最新进展、基准测试与未来机遇。人工智能研究期刊 80:1623– 1701。

McCann RJ (1997) 相互作用气体的凸性原理。数学进展 128(1):153–179。

Qi M, Grigas P, Shen ZJM (2025) 集成条件估计优化。运筹学 0(0):null，网址 http://dx.doi.org/10.1287/opre.2023.0427。

Sadana U, Chenreddy A, Delage E, Forel A, Frejinger E,Vidal T (2025) 不确定性下决策的情境优化方法综述。《欧洲运筹学杂志》320(2):271–289. Zhu T, Xie J, Sim M (2022) 联合估计与鲁棒优化。《管理科学》68(3):1659–1677.

附录 A：经验分布下决策聚焦最优传输的线性规划表述

Let

$$\hat{\mu}_{n_\mu} := \sum_{i=1}^{n_\mu} a_i \, \delta_{x_i}, \qquad \hat{\nu}_{n_\nu} := \sum_{j=1}^{n_\nu} b_j \, \delta_{y_j},$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $\sum_i a_i = \sum_j b_j = 1$（均匀权重对应 $a_i = 1/n_\mu$ 和 $b_j = 1/n_\nu$）。$\hat{}\mu_{n_\mu}$ 与 $\hat{\nu}_{n_\nu}$ 之间的任意耦合都可以表示为一个非负矩阵 $\Pi \in \mathbb{R}_+^{n_\mu \times n_\nu}$，其行和与列和分别匹配$a := (a_i)$ 和 $b := (b_j)$。因此，经验分布下的乐观和稳健决策聚焦距离为

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) = \min_{\Pi \geq 0} \sum_{i=1}^{n_\mu} \sum_{j=1}^{n_\nu} \ell_{\mathrm{SPO}}(x_i, y_j) \, \Pi_{ij} \quad \text{s.t.} \quad \Pi \mathbf{1} = b, \; \Pi^\top \mathbf{1} = a,$$

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\hat{\mu}_{n_\mu}, \hat{\nu}_{n_\nu}) = \max_{\Pi \geq 0} \sum_{i=1}^{n_\mu} \sum_{j=1}^{n_\nu} \ell_{\mathrm{SPO}}(x_i, y_j) \, \Pi_{ij} \quad \text{s.t.} \quad \Pi \mathbf{1} = b, \; \Pi^\top \mathbf{1} = a.$$

当样本量 n_ν 和 n_μ 较小时，求解上述两个线性规划以计算 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 和 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}$ 通常是可行的。当样本量较大，或者 μ 和 ν 是连续变量时，我们则采用第 4 节中的方法。

附录 B：鲁棒决策聚焦距离的动机：机会主义稳健性

定义2中的鲁棒决策聚焦距离可以从这样的角度来理解：在不确定性下进行稳健决策时，代理成本向量与真实成本向量之间的关系存在不确定性。为此，考虑一个不确定集 $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^d$，其中包含成本向量所有可能的实现。假设决策者观察到（或预测出）一个代理 $x \in$U，并据此实施下游决策 $w^*(x)$，但实际实现的（真实）成本是某个 $y \in$U。自然的稳健性目标是选择 x，以最小化由SPO损失衡量的最坏情况下的决策性能下降：

$$\min_{x \in \mathcal{U}} \max_{y \in \mathcal{U}} \ell_{\mathrm{SPO}}(x, y) = \min_{x \in \mathcal{U}} \max_{y \in \mathcal{U}} \left(y^\top w^*(x) - y^\top w^*(y) \right). \tag{23}$$

这是经典稳健优化的先预测后优化类比：我们并不直接选择 $w \in S$，而是选择一个代理 x，由它决定所实施的决策 $w^*(x)$，并针对最坏情况下的真实成本y对其进行评估。

在随机情形下，不确定集的视角自然由分布信息取代。这里，μ 和ν 分别表示代理 X 和真实向量 Y的边缘分布，但 X 与Y 之间的依赖关系可能未知或设定有误。在这种情况下，考虑从 μ 和 ν中抽取结果的最坏情况对齐，以防范机会主义（过于有利）的依赖假设，是合理的。由于 $\Gamma(\mu, \nu)$恰好是所有与这些边缘分布相一致的联合分布集合，因此鲁棒DF距离

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu, \nu) = \sup_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} W_{\mathrm{SPO}}(\mu, \nu; \gamma) = \sup_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\gamma [\ell_{\mathrm{SPO}}(X, Y)]$$

可视为式（23）的分布类比。在这一类比中，“决策”是由代理分布 μ表示的随机化策略：决策者并非选择单个代理 x，而是承诺采用一个代理成本向量上的分布，观察到一个实现值 $X \sim \mu$后，执行由此诱导的决策 $w^*(X)$。

在这种解释下，耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ 扮演着对手的角色。决策者确定代理边缘分布 μ （并给定真实边缘分布 ν ）后，对手会选择 $X \sim \mu$ 与 $Y \sim \nu$ 之间的依赖结构，即选择一个边缘分布为上述两者的联合分布 γ ，以最大化预期 SPO 损失。因此，鲁棒DF距离

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu, \nu) = \sup_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\gamma}[\ell_{\mathrm{SPO}}(X, Y)]$$

量化了所有与给定边缘分布相容的联合分布中，最坏情况下的预期决策性能下降。

因此， $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu, \nu)$ 是式（23）的分布类比：将对 $y \in \mathrm{U}$ 的逐点最大化替换为对耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ 的最大化，并将确定性代理选择 x 替换为随机代理$X \sim \mu$。此外，如果允许决策者在分布类 M 中选择代理边缘分布，那么最小化鲁棒决策聚焦距离，

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}} W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu, \nu),$$

相当于选择一个代理分布，使其在所有与 (μ, ν) 相容的耦合上，最小化最坏情况下的期望 SPO损失。

附录 C：通过 W_2 约化进行 McCann 插值

在本附录中，我们提供另一种方法，通过 W_2 约化在空间$\Gamma(w_{\#}^{*}\mu_0, \mu_1)$ 中构造插值。与二次最优传输情形不同，SPO传输代价 $l_{\mathrm{SPO}}(x, y)$ 并非由二次度量诱导（且可能因分段常值预言机 w^* 而不连续）。因此，McCann 插值在 W_2 中的经典测地线／凸性性质并不会自动延伸至第 5.2 节中的决策导向插值。

然而，对于乐观的 决策聚焦距离，定理1–2表明，在将 μ 通过预言机映射向前推送后，可将问题约化为二次传输。回顾 (4) 中的 $w^*(\cdot)$，并定义

$$\bar{w}^*(x) := -w^*(x), \qquad \alpha := (\bar{w}^*)_{\#}\mu.$$

给定任意耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$，令

$$\eta := (\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma \in \Gamma(\alpha, \nu).$$

由于 $l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y)\ = y^{\top}w^{*}(x)\ - y^{\top}w^{*}(y)\ = -y^{\top}\bar{w}^{*}(x)\ - y^{\top}w^{*}(y)$ 和 $-a^{\top}y = \frac{1}{2}(\|a-y\|_2^2 - \|a\|_2^2 - \|y\|_2^2)$，我们得到如下分解

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\,\gamma(dx,dy) = \frac{1}{2}\int \|a-y\|_2^2\,\eta(da,dy)\ +\ C(\mu,\nu), \tag{24}$$

其中 $C(\mu,\ \nu)$ 仅取决于边缘分布（因此与耦合无关）。因此，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu) = \inf_{\eta\in\Gamma(\alpha,\nu)} \frac{1}{2}\int \|a-y\|_2^2\,\eta(da,dy)\ +\ C(\mu,\nu) = \frac{1}{2}W_2^2(\alpha,\nu) + C(\mu,\nu). \tag{25}$$

这一约化启发我们在约化后的（决策）空间中，于 α 和 ν 之间定义标准的 McCann 位移插值，然后将其提升 回第一边缘为 μ 的耦合。

命题 6 （**决策空间中的 McCann 测地线与一致提升**）。设 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，并定义 $\bar{w}^{*}(x)\ :=-w^{*}(x)$ 以及 $\alpha\ :=\ (\bar{w}^{*})_{\#}\mu$。设 $\eta^{*}\in\Gamma(\alpha,\nu)$ 是二次代价下的最优耦合，即，

$$\eta^{*}\in\arg\min_{\eta\in\Gamma(\alpha,\nu)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\|a-y\|_2^2\,\eta(da,dy).$$

对于 $t\in[0,1]$，定义 $\pi_t(a,y)\ =(1-t)a+ty$，并令

$$\nu_t := (\pi_t)_{\#}\eta^{*},\qquad \eta_t := (\mathrm{Id},\pi_t)_{\#}\eta^{*}\in\Gamma(\alpha,\nu_t).$$

令 $\{w_k\}_{k=1}^{K}$ 为 S 的极点，并定义（可测的）决策区域

$$C_k := \{x\in\mathbb{R}^d:\ w^{*}(x)=w_k\},\qquad k=1,\dots,K,$$

它们构成了 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分（除边界外）。于是，α 支持在 $\{-w_k\}_{k=1}^{K}$ 上，并满足 $\alpha(\{-w_k\})=\mu(C_k)$。对于每个 $t\in[0,1]$，定义一个连接 μ 和 ν_t 的提升耦合 γ_t，如下：

$$\gamma_t(A,B) := \sum_{k=1}^{K}\frac{\mu(A\cap C_k)}{\mu(C_k)}\,\eta_t(\{-w_k\}\times B),\qquad A,B\subseteq\mathbb{R}^d\ \textit{measurable}, \tag{26}$$

按照约定，省略含有 $\mu(C_k)\ =0$ 的项。于是：

1.（***McCann*** 测地线／约化空间中的恒定速度）。曲线 $\{\nu_t\}_{t\in[0,1]}$ 是连接 α 和 ν 的 *McCann* 位移插值；特别地，

$$W_2(\nu_s,\nu_t) = |t-s|\,W_2(\alpha,\nu),\qquad \forall s,t\in[0,1].$$

2.**(**位移恒等式**)**。若 $(A,Y)\sim\eta^{*}$ 且 $Y_t=(1-t)\,A+tY$，则对所有 $s,t\in[0,1]$，

$$\mathbb{E}\|Y_t-A\|_2^2 = t^2\,W_2^2(\alpha,\nu),\qquad \mathbb{E}\|Y_t-Y_s\|_2^2 = (t-s)^2\,W_2^2(\alpha,\nu).$$

3. **(**提升一致性**)**。 对每个 $t \in [0,1]$，由 (26) 定义的测度 γ_t 是 $\Gamma(\mu, \nu_t)$ 中的一个耦合，并满足推前恒等式

$$(\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma_t = \eta_t .$$

特别地，$(\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma_1 = \eta^*$。

4. **(**乐观决策聚焦距离的逐时最优性**)**。固定 $t \in [0,1]$。若 $\tilde{\eta}_t$ 是 α 与 ν_t 之间二次代价的任意最优耦合，则由 (26) 定义、并将 η_t 替换为 $\tilde{\eta}_t$ 所得到的提升 $\tilde{\gamma}_t$，对于 $W^{\mathrm{O}}_{\mathrm{DF}}(\mu, \nu_t)$ 是最优的，即

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\,\tilde{\gamma}_t(dx,dy) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu_t)} \int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\,\gamma(dx,dy).$$

特别地，由 *McCann* 方案 η_t 得到的提升耦合，为 μ 与 ν_t 之间的 *DF* 最优耦合提供了一个规范族。

命题 ***6*** 的证明 **(1)–(2)**。这些都是二次最优传输的标准推论。若 $(A, Y) \sim \eta^*$ 且 $Y_t = (1-t)\,A + tY$，则 $\nu_t := (Y_t)_{\#}\mathbb{P}$ 是 α 与 ν 之间的 McCann 位移插值，从而得到恒速恒等式。此外，$Y_t - A = t(Y - A)$ 且 $Y_t - Y_s = (t-s)(Y-A)$，因此所述二阶矩公式可由 $\mathbb{E}\|Y - A\|_2^2 = W_2^2(\alpha, \nu)$ 得出。

(3)。我们首先验证 $\gamma_t \in \Gamma(\mu,\ \nu_t)$。对于任意可测的 $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\gamma_t(A, \mathbb{R}^d) &= \sum_{k:\mu(C_k)>0} \frac{\mu(A \cap C_k)}{\mu(C_k)}\, \eta_t(\{-w_k\} \times \mathbb{R}^d) \\
&= \sum_{k:\mu(C_k)>0} \frac{\mu(A \cap C_k)}{\mu(C_k)}\, \alpha(\{-w_k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \mu(A \cap C_k) \\
&= \mu(A),
\end{aligned}$$

由于 η_t 具有第一边缘 α，且 $\alpha(\{-w_k\}) = \mu(C_k)$。类似地，对于任意可测的 $B \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\gamma_t(\mathbb{R}^d, B) = \sum_{k:\mu(C_k)>0} \eta_t(\{-w_k\} \times B) = \eta_t(\mathbb{R}^d \times B) = \nu_t(B),$$

因此第二边缘为 ν_t。

对于推前恒等式，注意到 $\bar{w}^*(x) = -w_k$ 对于 $x \in C_k$。因此，对于任意可测的 $B \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\big((\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma_t\big)(\{-w_k\} \times B) = \gamma_t(C_k, B) = \eta_t(\{-w_k\} \times B),$$

这意味着 $(\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma_t = \eta_t$。

(4). 固定 $t \in [0,1]$，并令 $\tilde{\eta}_t$ 为 α 与 ν_t 之间二次代价下的最优解。令 $\tilde{\gamma}_t$ 为其如 (26) 所示的提升。根据第 (3) 部分，$(\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\tilde{\gamma}_t = \tilde{\eta}_t$。将约化恒等式 (24) 中的 ν 替换为 ν_t，可得对任意 $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu_t)$ 以及 $\eta = (\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma \in \Gamma(\alpha, \nu_t)$，

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\,\gamma(dx,dy) = \frac{1}{2}\int \|a-y\|_2^2\,\eta(da,dy) + C(\mu,\nu_t),$$

其中 $C(\mu,\nu_t)$ 不依赖于耦合。因此，在 $\Gamma(\mu,\nu_t)$ 上最小化左侧等价于在 $\Gamma(\alpha,\nu_t)$ 上最小化二次代价，而提升 $\tilde{\gamma}_t$ 达到了这一最小值。这证明了 $\tilde{\gamma}_t$ 对于 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu_t)$ 的最优性，如前所述。

讨论并与耦合驱动插值进行比较。 命题 6 给出了四个互为补充的结论，阐明了通过 W_2 约化构造插值路径时，哪些性质得以保留（哪些没有）。我们逐一讨论这些结论，并将其与定理 4 进行比较；定理 4 分析的是直接耦合驱动插值 $\nu_t = (\pi_t)_{\#}\gamma^*$，它由原始数据空间中 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)$ 的一个优化器构造而成。

（1）恒定速度，但处于约化（决策）空间中。 结论（1）指出，$\{\nu_t\}_{t\in[0,1]}$ 是连接 α 与 ν 的真正恒定速度 W_2 测地线，即 $W_2(\nu_s,\nu_t) = |t-s|\,W_2(\alpha,\nu)$。与定理 4 中的单侧界相比，这一结论是一个更强且双侧的 表述，但它适用于由二次代价诱导的约化空间几何。相比之下，定理 4 则控制乐观决策聚焦距离沿一条路径的增长；该路径由原空间中的 DF 最优耦合直接定义，无需任何 W_2 结构。

(2) 沿路径的二次能量恒等式。 第 (2) 项记录了沿位移插值路径的精确二阶矩恒等式。这些恒等式是二次最优传输的显著特征，有助于量化路径的“能量”并推导稳定性界。对于定理 4 中由耦合驱动的 DF 插值，无法期待存在这类精确等式，因为 l_{SPO} 通常不是二次的，而且预言机映射 w^* 会导致分段常数不连续性。

（3）提升回数据空间的典范提升。 第（3）项构造了一族耦合 $\gamma_t \in \Gamma(\mu,\ \nu_t)$，它们与约化空间中的方案相一致，具体而言，$(\bar{w}^* \times \mathrm{Id})_{\#}\gamma_t = \eta_t$。这一提升明确说明了如何将约化空间中的插值与原始决策聚焦问题联系起来：路径 $\{\nu_t\}$ 在约化空间中生成，而与原始边缘分布 μ 相对应的耦合，则通过对决策区域 $\{\mathrm{C}_k\}$ 进行条件化来恢复。定理 4 并未提供这样的提升，因为它直接从数据空间中的 DF 最优耦合 γ^* 出发，并在保持第一边缘不变的情况下将其推前。

（4）$(\mu,\ \nu_t)$ 的逐时最优性。也许最重要的是，第（4）项表明，对于每个固定的 t，都可以选择一个在 α 与 ν_t 之间的二次最优耦合，并将其提升，从而得到一个对 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu_t)$ 最优的耦合。这是一项逐时最优性结论：在每个中间边缘分布 ν_t 处，该构造都会得到一个 μ 与 ν_t 之间的 DF 最优耦合。相比之下，定理 4 仅保证沿着由一个 μ 与 ν 之间的 单个 DF 最优耦合所诱导的插值，有单侧界 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu_t)\ \le t\, W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu)$；它并未声称推前后的耦合对于中间问题 $(\mu,\ \nu_t)$ 仍然最优。对于非二次代价，这种动态最优性一般并不成立。

定理 4 适用于广泛的一类决策聚焦代价，并仅凭值函数的凹性，给出一条简单的耦合驱动路径及单调（单侧）的距离控制。相比之下，命题 6 利用乐观决策聚焦距离可用的 W_2 约化，通过提升恢复了若干精确的二次最优传输性质（恒定速度、能量恒等式）以及更强的中间时刻最优性。因此，这两种方法互为补充：直接插值与决策聚焦目标的内在联系更紧密，而当二次约化适用时，约化空间中的 McCann 构造则提供了更精细的结构。

附录D：省略的证明

命题 *1* 的证明令 γ 为 $(X,\ Y)=(X,\ \kappa X)$ 的联合分布；则 $\gamma\in\Gamma(\mu,\ \nu)$。对于任意一个实现，若 $\kappa>0$，则

$$\arg\min_{w\in S} w^{\top}(\kappa X)=\arg\min_{w\in S}\kappa\, w^{\top}X=\arg\min_{w\in S} w^{\top}X,$$

因此，根据预言机选择的尺度不变性，我们有 $w^*(Y)=w^*(X)$。若 $\kappa=0$，则 $Y=0$ 且 $l_{\mathrm{SPO}}(X,\ Y)=0^{\top}w^*(X)-0^{\top}w^*(0)=0$。因此 $l_{\mathrm{SPO}}(X,\ Y)=0$ 几乎必然成立，故 $W_{\mathrm{SPO}}(\mu,\ \nu;\ \gamma)=\mathbb{E}[l_{\mathrm{SPO}}(X,\ Y)]=0$。

最后，对于所有 $x,\ y$，由于 $w^*(y)$ 在 S 上最小化 $y^{\top}w$，可得 $l_{\mathrm{SPO}}(x,\ y)\ge 0$，这意味着 $y^{\top}w^*(y)\le y^{\top}w^*(x)$。对 $\Gamma(\mu,\ \nu)$ 取下确界，得到 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu)=0$。

□

命题*2*的证明 不等式 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu)\ \le W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu,\ \nu)$ 是显然的，因为 $W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu,\ \nu)=W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu)+W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\nu,\ \mu)$，且 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\nu,\ \mu)\ge 0$。

为了界定 W_{sym}^{O}，固定任意耦合 $\gamma\in\Gamma(\mu,\ \nu)$，并令 $\gamma^{\top}$ 表示其转置。根据 γ 和 γ 的可行性 $^{\top}$，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)\le\int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\,\gamma(dx,dy)\quad\text{and}\quad W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\nu,\mu)\le\int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\,\gamma^{\top}(dx,dy)=\int \ell_{\mathrm{SPO}}(y,x)\,\gamma(dx,dy).$$

将两个不等式相加，并利用 $l_{\mathrm{SPO}}(x,y)+l_{\mathrm{SPO}}(y,x)=(x-y)^{\top}(w^*(y)-w^*(x))$，我们得到

$$W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu,\nu)\le\int (x-y)^{\top}\big(w^*(y)-w^*(x)\big)\,\gamma(dx,dy)\le\int \|x-y\|_2\,\|w^*(y)-w^*(x)\|_2\,\gamma(dx,dy).$$

由于 $w^*(x), w^*(y) \in S$，我们有 $\|w^*(y) - w^*(x)\|_2 \le D_W$ 因此

$$W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu,\nu) \le D_W \int \|x-y\|_2 \, \gamma(dx,dy).$$

对 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$ 取下确界，得到 $W_{\mathrm{sym}}^{O}(\mu,\nu) \le D_W W_1(\mu,\nu)$。

最后，在有界集 Y 上，我们有初等界 $W_1(\mu,\nu) \le \|\mathrm{Y}\| \, d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu)$。结合 Pinsker 不等式 $d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \le \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{KL}(\mu\|\nu)}$（当 $\mathrm{KL}(\mu\|\nu) < \infty$ 时），即可得到所述的 KL 控制。

□

命题 ***3*** 的证明 根据定义，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu) = \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \int y^{\top}\big(w^*(x) - w^*(y)\big)\, d\gamma(x,y).$$

对被积函数应用柯西–施瓦茨不等式，得到

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu) \le \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \left(\int \|y\|_2^2 \, d\gamma(x,y)\right)^{1/2} \left(\int \|w^*(x) - w^*(y)\|_2^2 \, d\gamma(x,y)\right)^{1/2}.$$

第一因子仅取决于 γ 的第二边缘，因此

$$\left(\int \|y\|_2^2 \, d\gamma(x,y)\right)^{1/2} = \left(\int \|y\|_2^2 \, d\nu(y)\right)^{1/2} =: V.$$

为处理第二个因子，将任意 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$ 沿两个坐标通过预言机映射进行推前。具体而言，令 $\tilde{\gamma} := (w^* \times w^*)_{\#}\gamma$。则 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu)$ 且

$$\int \|w^*(x) - w^*(y)\|_2^2 \, d\gamma(x,y) = \int \|u-v\|_2^2 \, d\tilde{\gamma}(u,v).$$

反之，给定任意 $\tilde{\gamma} \in \Gamma(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu)$，可以构造一个耦合 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$，其预言机层面的推前等于 $\tilde{\gamma}$，方法是先采样 $(U,V) \sim \tilde{\gamma}$，然后在给定 $(U,V) = (w_i, w_j)$ 的条件下，采样 $X \sim \mu(\cdot\,|D_i)$ 与 $Y \sim \nu(\cdot\,|D_j)$。该构造确保 $(w^*(X), w^*(Y)) \sim \tilde{\gamma}$，并保持上述二次代价恒等式。因此，

$$\left(\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \int \|w^*(x) - w^*(y)\|_2^2 \, d\gamma(x,y)\right)^{1/2} = W_2(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu). \tag{27}$$

将各部分结合起来，得到 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu) \le V \, W_2(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu)$。

为了用 d_{TV} 给 $W_2(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu)$ 一个上界，在每个原子 w_i 处以零成本匹配公共质量，并在 S 内传输剩余质量（总量为 $d_{\mathrm{TV}}(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu)$），每单位成本至多为 D_W^2。由此得到

$$W_2^2(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu) \le D_W^2 \, d_{\mathrm{TV}}(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu), \quad \text{hence} \quad W_2(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu) \le D_W \sqrt{d_{\mathrm{TV}}(w^*_{\#}\mu, w^*_{\#}\nu)}.$$

最后，Pinsker 不等式 $d_{\mathrm{TV}}(P,Q) \le \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{KL}(P\|Q)}$ 给出了 KL 控制。

□

命题 ***4*** 的证明 固定 $0 \le \varepsilon < \varepsilon'$ 以及任意 $\gamma \in \Gamma(\mu,\ \nu)$。由于 KL散度$(\gamma \| \mu \otimes \nu) \ge 0$,

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\, d\gamma(x,y) + \varepsilon' \mathrm{KL}(\gamma \| \mu \otimes \nu) \ \ge \ \int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\, d\gamma(x,y) + \varepsilon \mathrm{KL}(\gamma \| \mu \otimes \nu).$$

对 $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$ 取下确界可得 $W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-O}}(\mu,\nu;\varepsilon') \ge W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-O}}(\mu,\nu;\varepsilon)$。由于正则化项在 (E-DFR) 中带负号， $W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-R}}$ 的单调性也可类似地推出。

对于界，首先注意到 $W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-O}}(\mu,\nu;0) = W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)$，且 $W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-R}}(\mu,\nu;\ 0) = W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu,\nu)$。由于 KL 项非负，对于所有 $\varepsilon \ge 0$，我们还有 $W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-O}}(\mu,\nu;\varepsilon) \ge W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)$。另一方面，在 (E-DFO) 中选择独立耦合 $\gamma = \mu \otimes \nu$（此时 $\mathrm{KL}(\gamma \| \mu \otimes \nu) = 0$）可得

$$W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-O}}(\mu,\nu;\varepsilon) \le \int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\, (\mu \otimes \nu)(dx,dy) = R(\mu,\nu).$$

这证明了 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu) \le W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-O}}(\mu,\ \nu;\varepsilon) \le R(\mu,\ \nu)$。

同理，对于 (E-DFR)，我们有

$$W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-R}}(\mu,\nu;\varepsilon) \le \sup_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int \ell_{\mathrm{SPO}}(x,y)\, d\gamma(x,y) = W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}(\mu,\nu),$$

再次在 $\gamma = \mu \otimes \nu$ 处对 (E-DFR) 求值，得到 $W_{\mathrm{DF}}^{\text{ER-R}}(\mu,\ \nu;\varepsilon) \ge R(\mu,\ \nu)$。证明至此完成。 □

引理***1***的证明 令 $\mathfrak{f}\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to S \times \mathbb{R}^d$ 为 $\mathfrak{f}(x,\ y) := (w^*(x),\ y)$。对于任意 $\gamma \in \Gamma(\mu,\ \nu)$，推前$\bar{\gamma}$: $= \mathfrak{f}_{\#}\gamma$ 满足 $\bar{\gamma} \in \Gamma(w^*_{\#}\mu,\ \nu)$，由变量替换公式可得,

$$\int h(y)^{\top} w^*(x)\, d\gamma(x,y) = \int h(y)^{\top} w\, d\bar{\gamma}(w,y).$$

对 γ 取下确界，得到

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int h(y)^{\top} w^*(x)\, d\gamma(x,y) \ge \inf_{\bar{\gamma} \in \Gamma(w^*_{\#}\mu,\nu)} \int h(y)^{\top} w\, d\bar{\gamma}(w,y).$$

对于反向不等式，写作 $w^*(x) = \sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|} w_i\, \mathbf{1}_{D_i}(x)$，其中 $\mathfrak{S} = \{w_1,\ \ldots,\ w_{|\mathfrak{S}|}\}$ 是S的极点集合，且 $D_i :=$ $\{x\colon\ w^*(x) = w_i\}$。任取 $\bar{\gamma} \in \Gamma(w^*_{\#}\mu,\ \nu)$，并在可测矩形上定义测度 γ，定义如下:

$$\gamma(A,B) := \sum_{i=1}^{|\mathfrak{S}|} \mu(A \cap D_i)\, \frac{\bar{\gamma}(\{w_i\} \times B)}{\mu(D_i)}, \qquad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \tag{28}$$

按照约定，当 $\mu(D_i) = 0$ 时，第 i 项为 0。定义 (28) 可（通过线性性和标准测度论证）扩展到耦合 $\gamma \in \Gamma($ $\mu,\ \nu)$，并满足 $\mathfrak{f}_{\#}\gamma = \bar{\gamma}$。因此,

$$\int h(y)^{\top} w^*(x)\, d\gamma(x,y) = \int h(y)^{\top} w\, d\bar{\gamma}(w,y),$$

并取 对 $\bar{\gamma}$ 取下确界即可得到所需的 $\le$ 不等式。结合两个方向的证明，即可证明该结论。 □

定理*2*的证明 首先，由式（8）可知 γ 定义良好。对于任意可测的 A,

$$\gamma(A,\mathbb{R}^d)=\sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|}\mu(A\cap D_k)\frac{\gamma^*(\{-w_k\}\times\mathbb{R}^d)}{\mu(D_k)}=\sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|}\mu(A\cap D_k)=\mu(A),$$

since γ^* 具有第一边缘 $(\bar{w}^*)_{\#}\mu$ 和 $(\bar{w}^*)_{\#}\mu(\{-w_k\})=\mu(D_k)$。同样，对于任意可测的 B,

$$\gamma(\mathbb{R}^d,B)=\sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|}\mu(D_k)\frac{\gamma^*(\{-w_k\}\times B)}{\mu(D_k)}=\sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|}\gamma^*(\{-w_k\}\times B)=\nu(B),$$

所以 $\gamma\in\Gamma(\mu,$
{v5)。

接下来，根据构造，通过 $\mathfrak{f}(x,y)=(\bar{w}^*(x),y)$ 将 γ 向前推送，可还原出 γ^*，即 $\mathfrak{f}_{\#}\gamma=\gamma^*$。在定理1的证明中，我们证明了对于任意 $\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)$，值 $W_{\mathrm{SPO}}(\mu,\nu;\gamma)$ 等于一个常数（仅取决于 $(\bar{w}^*)_{\#}\mu$和 ν）加上 $\frac{1}{2}\int\|w-y\|_2^2\,d(\mathfrak{f}_{\#}\gamma)(w,y)$。因此，选取 γ 使得 $\mathfrak{f}_{\#}\gamma=\gamma^*$，并利用 γ^* 对二次代价的最优性，可得 $W_{\mathrm{SPO}}(\mu,\nu;\gamma)=W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)$。

□

命题*5*的证明 根据定义2和 $l_{\mathrm{SPO}}(x,y)=y^\top w^*(x)-y^\top w^*(y)$,

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)=\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\big(y^\top w^*(x)-z(y)\big)\,d\gamma(x,y).$$

将引理1应用于 $h(y)=y$，可得到如下化简

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu)=\inf_{\bar{\gamma}\in\Gamma(w_{\#}^*\mu,\nu)}\int_{\mathcal{S}\times\mathbb{R}^d}\big(y^\top w-z(y)\big)\,d\bar{\gamma}(w,y).$$

由于 $w_{\#}^*\mu$ 的支撑集是有限集 $\mathcal{S}$，我们可以写作 $w_{\#}^*\mu=\sum_{i=1}^{|\mathcal{S}|}\mu(D_i)\,\delta_{w_i}$，上述问题便成为离散测度 $w_{\#}^*\mu$ 与 ν 之间、代价为 $c(w_i,y)=c_i(y)$ 的最优传输问题。

最优传输的康托罗维奇对偶定理（此处适用，因为第一个空间是有限的，且代价可测且可积）给出

$$\inf_{\bar{\gamma}\in\Gamma(w_{\#}^*\mu,\nu)}\int c(w,y)\,d\bar{\gamma}(w,y)=\sup_{\varphi,\psi}\left\{\int\varphi(w)\,d(w_{\#}^*\mu)(w)+\int\psi(y)\,d\nu(y):\ \varphi(w)+\psi(y)\le c(w,y)\right\},$$

其中 φ 是一个 定义在 $\mathcal{S}$ 上的函数，且 $\psi\in L^1(\nu)$。将 $\varphi(w_i)$ 与 f_i 对应，并将 ψ 与 g 对应，恰好得到 (11)–(10) .

最后，对于任意固定的 f，约束 (10) 逐点蕴含 $g(y)\le\min_i(c_i(y)-f_i)$。由于 (11) 中的目标函数关于 g 单调递增，因此最优的可行选择是 (12) 中定义的 $g=g_f$，由此得到 (13)。

□

定理 *4* 的证明 令 $\mathrm{Id}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 表示恒等映射，并定义耦合 $\gamma_t^*:=(\mathrm{Id},\pi_t)_{\#}\gamma^*\in\Gamma(\mu,\nu_t)$。根据定义，

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu_t)=\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu_t)}\int\ell_{\mathrm{SPO}}(u,w)\,d\gamma(u,w).$$

由于 $\gamma_t^* := (\mathrm{Id}, \pi_t)_{\#}\gamma^* \in \Gamma(\mu, \nu_t)$ 是可行的，因此我们有

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu_t) \le \int \ell_{\mathrm{SPO}}(u, w)\, d\gamma_t^*(u, w). \tag{29}$$

根据推前恒等式，对于任意可测函数 φ,

$$\int \varphi(u, w)\, d(\mathrm{Id}, \pi_t)_{\#}\gamma^*(u, w) = \int \varphi\big(u, \pi_t(u, v)\big)\, d\gamma^*(u, v).$$

将 $\varphi(u, w) = l_{\mathrm{SPO}}(u, w)$ 代入，可得

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}(u, w)\, d\gamma_t^*(u, w) = \int \ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u, v)\big)\, d\gamma^*(u, v). \tag{30}$$

结合 (29) 和 (30)，即可证明定理中的第一个不等式,

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu_t) \le \int \ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u, v)\big)\, d\gamma^*(u, v).$$

定义值函数 $z(x) := \min_{w \in S} w^\top x$，因此 $z(x) = x^\top w^*(x)$。利用 $l_{\mathrm{SPO}}(u, y) = y^\top w^*(u) - z(y)$ 和 $\pi_t(u, v) = (1-t)u + tv$，可得

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u, v)\big) &= \big((1-t)u + tv\big)^\top w^*(u) - z\big((1-t)u + tv\big) \\
&= (1-t)\, u^\top w^*(u) + t\, v^\top w^*(u) - z\big((1-t)u + tv\big) \\
&= (1-t)\, z(u) + t\, v^\top w^*(u) - z\big((1-t)u + tv\big).
\end{aligned} \tag{31}$$

由于 $z(x) = \min_{w \in S} w^\top x$ 是线性函数的逐点最小值，z 是凹函数。因此，对于所有 u, v 和 $t \in [0, 1]$,

$$z\big((1-t)u + tv\big) \ge (1-t)\, z(u) + t\, z(v). \tag{32}$$

将（32）代入（31）可得

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u, v)\big) &\le (1-t)\, z(u) + t\, v^\top w^*(u) - \big((1-t)\, z(u) + t\, z(v)\big) \\
&= t\big(v^\top w^*(u) - z(v)\big) \\
&= t\, \ell_{\mathrm{SPO}}(u, v).
\end{aligned} \tag{33}$$

对（33）关于 γ^* 积分可得

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u, v)\big)\, d\gamma^*(u, v) \le t \int \ell_{\mathrm{SPO}}(u, v)\, d\gamma^*(u, v). \tag{34}$$

由于 γ^* 是 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu)$ 的优化器,

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}(u, v)\, d\gamma^*(u, v) = W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu, \nu). \tag{35}$$

结合 (34) 和 (35) 可得

$$\int \ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u,v)\big)\, d\gamma^*(u,v) \le t\, W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu).$$

综合步骤 1–步骤 5，我们得到

$$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu_t) \le \int \ell_{\mathrm{SPO}}\big(u, \pi_t(u,v)\big)\, d\gamma^*(u,v) \le t\, W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\nu),$$

特别是 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu_t) \le t\, W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}(\mu,\ \nu)$。 □

附录 E：数值研究详情

E.0.1. 数据集与预处理

数据集。 我们使用 帕金森病远程监测 数据集（UCI 存储库），其中包含来自 42 名帕金森病患者（唯一受试者编号）的 5，875 条观测记录。每条观测记录包括测量时间（研究开始后的天数）、两项临床严重程度指标——运动功能UPDRS 和总UPDRS，以及多项语音相关特征。这些数据具有纵向特征：同一患者会在一段时间内被反复测量，从而能够进行总体层面的分布比较和患者追踪评估。

通过窗口化生成时间快照。由于测量时间不规则，我们通过将时间四舍五入为整数，并使用宽度为 ± 5 天的对称窗口，近似得到第 $t \in \{50,\ 100,\ 150\}$ 天的三个群体分布“快照”。具体而言，我们定义

$$\mathcal{D}_t := \{\text{observations with } \lfloor \texttt{test_time} \rceil \in [t-5, t+5]\}.$$

为降低患者内相关性并实现患者跟踪，我们在每个窗口中为每位患者最多选取一条观测记录：对于每个受试者#，保留时间最接近 t 的记录。这样一来，三个窗口中分别得到 $n_{50} = 41$、$n_{100} = 38$ 和 $n_{150} = 39$ 条患者代表观测记录；34 位患者出现在全部三个窗口中，37 位患者同时出现在第50天和第100天的窗口中。

用于可视化的严重程度分布。为了可视化分布偏移和插值，我们聚焦于二维严重程度向量

$$z := (\texttt{motor_UPDRS}, \texttt{total_UPDRS}) \in \mathbb{R}^2$$

并通过高斯核密度估计来估算其密度。由此生成平滑的热力图，以比较第50天、第100天和第150天的严重程度分布，并可视化插值分布。

E.0.2. 决策导向下游问题（护理方案选择）

成本向量。为了评估决策导向差异，我们将每个患者观测嵌入到一个四维成本向量中

$$y = (y_{\text{ex}}, y_{\text{nurse}}, y_{\text{rest}}, y_{\text{speech}}) \in \mathbb{R}^4,$$

由两个严重程度度量和两个额外的协变量构成：

$$(\texttt{motor_UPDRS}, \texttt{total_UPDRS}, \texttt{age}, \texttt{PPE}).$$

我们应用 对每个坐标进行最小-最大归一化（使用完整数据集的取值范围），然后取负：

$$y_k := -\frac{f_k - \min(f_k)}{\max(f_k) - \min(f_k)} \in [-1, 0].$$

这种归一化得到了一个简化但具有可解释性的模型：更大的疾病负担（或更高的风险协变量值）对应更负的系数，即将时间分配给该干预类型可获得更大的边际收益。（我们的目标函数是最小化 $y^\top w$，因此，更负的系数会激励分配更多时间。）

决策。 该决策是一份每周护理计划

$$w = (h_{\text{exercise}}, h_{\text{nursing}}, h_{\text{rest}}, h_{\text{speech}}) \in \mathbb{R}^4,$$

每个坐标表示每周分配给一种护理方式的小时数：体育锻炼/物理治疗、护理/护理协调、睡眠/休息优化以及言语治疗。

可行域。 我们使用一个紧的多面体区域，其极点对应五种临床上可解释的护理计划（每周小时数），每种计划的总时数均为 10 小时：

$w^{(1)} = (3,\ 3,\ 3,\ 1)$ （均衡型）

$w^{(2)} = (6, 2, 2, 0)$ （侧重运动型）

$w^{(3)} = (2, 6, 2, 0)$ (护理侧重)

$w^{(4)} = (2,\ 2,\ 6,\ 0)$ (休息侧重)

$w^{(5)} = (3, 3, 2, 2)$ (言语治疗附加项)。

我们设定 $S := \text{conv}\{w^{(1)}, \ldots\ldots, w^{(5)}\}$。由于下游目标函数是线性的，预言机 $w^*(x) \in \arg\min_{w \in S} w^\top x$(公式 (4)) 总是返回一个极点，因此是分段常数的，这与我们理论中使用的结构假设相符。

解释。 当 y 在“运动”坐标上更负（运动严重程度较高）时，优化器倾向于选择h_{exercise}更大的方案，护理、休息和言语亦然。在操作层面，$y^\top w$ 可解释为预期症状改善的负向代理指标：最小化 $y^\top w$ 对应于选择在患者真实临床状态下预期获益最大的护理计划。

E.0.3. 第50天与第150天之间的几何差异与决策导向差异

严重程度上的决策盲*Wasserstein* 距离。 在二维严重程度空间 $z =$（运动功能UPDRS,总UPDRS）上，第50天与第150天的经验分布相距 $W_1 \approx 4.339$和 $W_2 \approx 5.090$。这些数值反映出约100天内严重程度发生了不可忽略的偏移，从而促使我们通过插值构建中间分布。

护理计划成本上的决策导向距离。 令 $\hat{}\mu_{50}$ 和 $\hat{\nu}_{150}$ 分别表示第50天和第150天四维成本向量的经验分布。使用SPO损失l_{SPO} 作为传输代价（定义1），我们计算乐观和稳健的DF距离（定义2）以及独立同分布遗憾:

$$W_{\text{DF}}^{\text{O}}(\hat{\mu}_{50}, \hat{\nu}_{150}) \approx 0.0061, \qquad R(\hat{\mu}_{50}, \hat{\nu}_{150}) \approx 0.4566, \qquad W_{\text{DF}}^{\text{R}}(\hat{\mu}_{50}, \hat{\nu}_{150}) \approx 0.8605.$$

W_{DF}^{O} 与 W_{DF}^{R} 之间的巨大差距表明，如何将两个边缘分布耦合会显著改变预期决策退化。具体而言，极小的乐观距离表明，存在一种耦合可使第50天与第150天的结果对齐，从而使下游护理计划在平均意义上几乎保持最优；而鲁棒距离则量化了一种会放大决策性能下降的最坏情况耦合。

数量（第50天与第150天）	数值	解释
W_1 关于 (motor,total)	4.3391	严重程度的几何偏移
W_2 关于 (motor,total)	5.0900	二次传输偏移
$W_{\text{DF}}^{\text{O}}(\hat{}\mu_{50}, \hat{}\nu_{150})$	0.0061	乐观决策聚焦距离（最佳情况对齐）
$R(\hat{}\mu_{50}, \hat{}\nu_{150})$	0.4566	独立同分布遗憾（独立耦合）
$W_{\text{DF}}^{\text{R}}(\hat{}\mu_{50}, \hat{}\nu_{150})$	0.8605	鲁棒DF距离（最坏情况对齐）

表2 二维严重程度空间上的几何瓦瑟斯坦距离，以及基于SPO损失、用于比较第50天与第150天经验分布的决策导向距离。DF距离使用四维成本向量（运动功能UPDRS、总UPDRS、年龄、PPE）和护理计划可行域 S。

E.0.4. 耦合诱导插值及第100天评估

插值分布。按照第 5.2 节，第50天与第150天之间的每一种耦合都通过线性插值映射$\pi_{1/2}(x, y) = (x + y)/2$在第100天诱导出一个中间分布。我们通过将耦合经$\pi_{1/2}$ 前推并投影到（运动，总分）坐标上，可视化插值后的严重程度密度。定性而言，乐观决策导向耦合产生的插值分布会保留决策区域，而稳健决策导向耦合则将质量散布到不利区域，从而得到保守的中间分布。

患者追踪预测任务。 为了评估个体层面的决策影响，我们使用同时出现在第 50 天和第 100 天时间窗中的 37 名追踪患者。对于第 50 天与第 150 天之间给定的耦合 γ，我们通过以患者第 50 天的状态为条件，构建患者特异性第 100 天成本预测：

$$\widehat{Y}_{100}(i) := \tfrac{1}{2}\, Y_{50}(i) + \tfrac{1}{2}\, \mathbb{E}_{\gamma}\left[\, Y_{150} \mid X_{50} = Y_{50}(i) \right].$$

然后，我们使用 SPO 损失，根据患者的真实第 100 天成本向量评估患者层面的决策损失：

$$\ell_{\mathrm{SPO}}\Big(\widehat{Y}_{100}(i),\, Y_{100}(i)\Big).$$

这项评估将耦合假设对后续护理计划质量的影响单独剥离出来。

基线方法。 我们将决策导向耦合与两种决策无关基线进行比较：(i) 独立耦合 $\hat{}\mu_{50} \otimes \hat{\nu}_{150}$（无持续性），以及 (ii) 在特征空间中以欧几里得平方代价最小化为目标的标准 W_2 耦合。我们报告患者追踪的平均 SPO 损失（越小越好）。

方法	追踪患者的平均 SPO 损失 (50→100)
未正则化乐观决策导向耦合（DFO）	0.0167
决策盲型 W_2 四维特征空间耦合	0.0231
独立耦合（$\mu \otimes \nu$）	0.0945
未正则化稳健决策导向耦合（DFR）	0.2311
仅基于（运动，整体）的决策盲型 W_2 耦合	0.1165

表3 第100天的患者追踪评估：针对第100天预测成本（根据第50天观测以及第50天与第150天之间的耦合构建）优化决策所产生的平均SPO损失，并以患者第100天的真实成本进行评估。数值越小越好。

洞见：决策导向耦合为何重要。 表 3 展示了三个关键发现。首先，乐观的决策导向耦合取得了最低的平均 SPO 损失（≈ 0.0167），优于同一四维空间中的决策无关 W_2 耦合。这表明，几何匹配并不必然与下游决策质量相一致。其次，独立耦合的表现显著更差（≈ 0.0945），这说明忽略时间依赖性可能会显著降低下游决策的质量。第三，鲁棒决策导向耦合的平均损失要高得多（≈ 0.2311）。这是意料之中的：稳健耦合旨在针对最坏情况对齐，对决策性能下降进行压力测试，而不是预测最可能出现的变化。在预防性医疗中，$W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}$ 提供了决策风险的保守上限，可用于判断是否有必要进行中期重新测量（此处约为第100天）。

追踪转移与独立性。 由于该数据集包含患者标识符，我们还可以利用从第50天到第150天的真实追踪对齐（匹配相同的受试者编号），计算 SPO 损失。在两个时间窗口中均有观测的 38 位患者的平均追踪 SPO 损失为 ≈ 0。0359，中位数为 0。相比之下，独立遗憾值$R(\hat{}\mu_{50}, \hat{\nu}_{150}) \approx 0$。4566 高出一个数量级。这一差距从经验上证实了第 1.1 节提出的现象：时间依赖性（持续性）很重要；当患者的状况平稳演变时，独立同分布耦合可能会大幅高估决策性能下降。

E.0.5. 熵正则化决策导向耦合与 ε 权衡

正则化耦合。 我们使用对数域 Sinkhorn 算法，根据定义 3 计算熵正则化乐观和稳健的决策导向耦合，参数取值为 $\varepsilon \in \{0$。$1, 0$。$2, 0$。$5, 1, 2, 5\}$。随着 ε 增大，KL 惩罚会促使 γ 趋向独立耦合 $\hat{}\mu_{50} \otimes \hat{\nu}_{150}$，从而得到更平滑的耦合和更稳定的估计，但代价是结构性降低。

患者追踪的第 *100* 天决策质量与 ε。 表 4 报告了 E-DFO 和 E-DFR 耦合在第 100 天的平均追踪 SPO 损失。出现了两种单调趋势：(i) E-DFO 损失随 ε 增大而增加，并趋近于独立同分布基线；(ii) E-DFR 损失随 ε 增大而减少，也趋近于独立同分布基线。这一行为符合这样的解释：熵正则化在极端耦合与独立性之间进行插值。

图 10 进一步展示了随着 ϵ 的值增大，分布变化的情况。

图 10 的第一行展示了不同 ϵ 值下的乐观 DF 散度。随着 ϵ 增大，形状与真实密度的差距越来越大。第二行展示了鲁棒 DF 散度。由于现实情形通常趋向于最小传输，稳健情形不像乐观情形那样接近真实密度。ε 在耦合选择中提供了可调节的偏差—方差权衡。较小的 ε 会产生结构性很强的耦合：E-DFO 与

ε	0.1	0.2	0.5	1	2	5
E-DFOmean 跟踪的 SPO	0.0167	0.0167	0.0340	0.0366	0.0673	0.0785
E-DFRmean 跟踪的 SPO	0.2930	0.2537	0.2206	0.1756	0.1126	0.0960

表 4 熵正则化对第100天患者跟踪决策质量的影响。E-DFO 对应熵正则乐观耦合，E-DFR 对应熵正则鲁棒耦合（定义 3）。随着 ε 增大，两种正则化耦合都趋近于独立耦合。

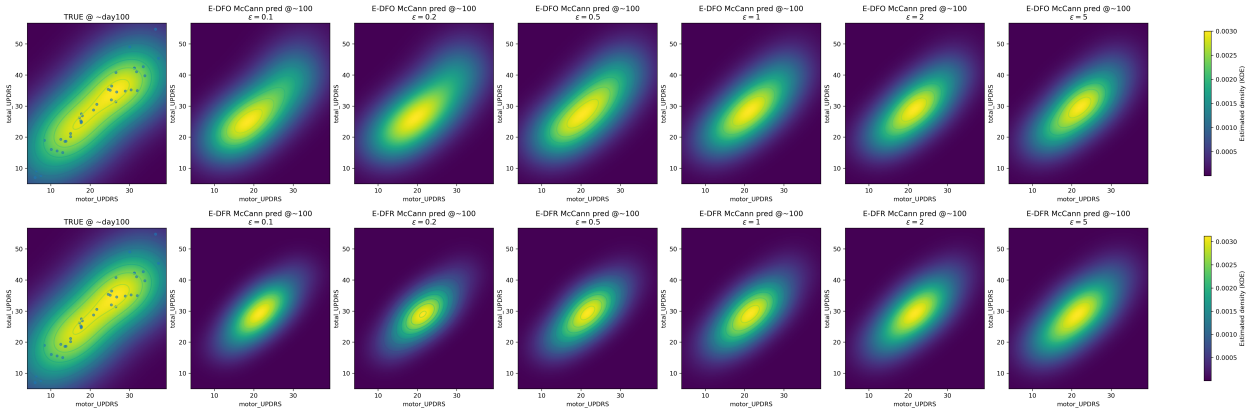


图 10 不同正则化参数 ϵ 下的乐观和鲁棒 DF 插值。

无正则乐观耦合非常接近，并能提供强有力的患者特异性预测（SPO 损失低）；而 E-DFR 则会产生保守且风险较高的预测，适用于压力测试。较大的 ε 会使两种耦合都趋向独立，从而降低对采样噪声的敏感度，但也会舍弃持续性信息。

E.0.6. 有限样本行为：估计误差与样本量

实验设计。 为实证研究估计误差，我们将完整的患者代表第50天和第150天样本视为参考测度，并从每个时间窗口中反复无放回地抽取 n 名患者。对于每个子样本，我们重新计算 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}$ 和 $W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}$，并报告相对于参考值的绝对误差。

结果。 表5报告了有代表性的结果（每个 n进行50次试验）。随着 n 增大，估计误差迅速下降；鲁棒距离则表现出更大的变异性，这反映了稳健耦合的对抗性。总体而言，经验趋势与我们的理论所预测的维数无关收敛行为一致：尽管成本向量为4维，下游预言机 $w^*(\cdot)$仅取有限个极点中的值，因此估计主要取决于样本解析诱导的决策区域的能力，而非对环境空间的覆盖程度。

n	$\lvert\widehat{W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}} - W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{O}}\rvert$ (均值)	(10%,90%)	$\lvert\widehat{W_{\mathrm{DF}}^{\mathrm{R}}} - W$ 值) RDF| (均	(10%,90%)	试验次数
5	0.1527	(0.0061,0.3361)	0.2177	(0.0392,0.4935)	50
10	0.0763	(0.0239,0.1533)	0.1493	(0.0139,0.3439)	50
18	0.0286	(0.0032,0.0544)	0.0980	(0.0195,0.2134)	50
35	0.0075	(0.0009,0.0175)	0.0297	(0.0085,0.0659)	50

表5 帕金森病研究中乐观和稳健的DF距离的有限样本估计误差。我们将第50天和第150天的完整患者代表性样本作为参考测度，并从两侧分别反复抽取 n 名患者（每个 n进行50次试验）。报告的数值为相对于参考值的绝对误差。