基于Malliavin演算的弱导数实现条件希腊值的高效反事实估计*

Vikram Krishnamurthy VIKRAMK@CORNELL.EDU
电气与计算机工程学院 康奈尔大学 美国纽约州伊萨卡

Luke Snow LAS474@CORNELL.EDU
电气与计算机工程学院 康奈尔大学 美国纽约州伊萨卡

arXiv:2602.02811v1 [cs.CE] 2 Feb 2026

编辑：

摘要

我们研究扩散过程的条件损失泛函的反事实梯度估计。在量化金融中，这些梯度称为条件希腊值，即在给定某个关注事件的条件下，预期市场价值的敏感度。难点在于，当条件事件的概率趋近于零或为零时，朴素的蒙特卡罗估计量效率低得难以接受；核平滑虽十分常见，却存在收敛缓慢的问题。我们提出一种两阶段无核方法。首先，我们利用Malliavin演算证明，扩散过程的条件损失泛函可精确表示为Skorohod积分，从而获得具有经典蒙特卡洛估计量方差和收敛率的估计量。其次，我们证明，条件损失泛函关于模型参数的弱导数估计可在方差恒定的情况下计算；相比之下，广泛使用的得分函数法的方差会随样本路径长度线性增长。综合这些结果，我们为稀有事件情形下的反事实条件随机梯度算法和金融希腊值计算提供了一个高效框架。

1 引言与问题表述

考虑如下随机微分方程（SDE）

$$dX_t^\theta = b_\theta(X_t^\theta, t)dt + \sigma_\theta(X_t^\theta, t)dW_t, \quad t \in [0,T] \tag{1}$$

其中， $X_t^\theta \in \mathbb{R}^n$、 $\theta \in \mathbb{R}^p$ 是参数， $W_t \in \mathbb{R}^d$ 是 d维标准布朗运动。记$X^\theta = \{X_t^\theta\}_{t\in[0,T]} \in \mathsf{C}[0,T]$，其中$\mathsf{C}[0,T]$是定义在 $[0,T]$上的连续 $\mathbb{R}^n$值路径空间。我们的目标是估计条件损失函数 $L(\theta)$关于 θ的梯度：

$$\nabla_\theta L(\theta) = \nabla_\theta \mathbb{E}[\ell(X^\theta) \mid g(X^\theta) = 0] \tag{2}$$

其中， Θ是 $\mathbb{R}^p$的紧子集， $L(\cdot)$关于 θ可微，且 $\ell(\cdot)$ $g(\cdot) : \mathsf{C}[0,T] \to \mathbb{R}$是泛函。在量化金融中，梯度（2）是条件希腊值：在给定某个关注事件的条件下，预期市场价值的敏感度。

反事实估计。反事实估计与学习在机器学习中得到了广泛研究——但通常针对的是多元随机变量。例如，给定参数向量 α 和 β，反事实风险评估旨在根据 $\ell(x)$的仿真来评估 $\mathbb{E}_{p(x|\beta)}\{\ell(X)\}$，其中 X 取自 $p(\cdot|\alpha)$。那么显然

$$\mathbb{E}_{p(x|\beta)}\{\ell(X)\} = \mathbb{E}_{p(x|\alpha)}\{\ell(X)p(X|\beta)/p(X|\alpha)\}.$$

*。本研究由美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号为 CCF-2312198 和 CCF-2112457；并获美国陆军研究办公室资助，项目编号为 W911NF-24-1-0083

本文将这一设定扩展到连续时间情形，此时损失和条件事件都是轨迹的泛函。此时， $p(X|\beta)$ 和 $p(X|\alpha)$ 的表达式无法写成闭式。经典的重要性采样恒等式依赖于 $p(\cdot|\alpha)$ 和 $p(\cdot|\beta)$ 的绝对连续性。然而，在我们的连续时间框架中，条件事件是一个概率为零的路径泛函（$g(X^\theta) = 0$），因此比值 $p(X|\beta)/p(X|\alpha)$ 不再有意义。为解决这一问题，我们利用随机微分方程（1）的已知动力学，以涉及狄拉克δ泛函和Skorohod积分的Malliavin演算表示替代似然比，从而得到一个可构造的条件期望估计量。

“反事实”一词表示使用模拟路径评估条件梯度（2），这些路径未必满足条件事件 $\{g(X^\theta) = 0\}$（Zenati 等，2025年；Swaminathan 和 Joachims，2015年；Lopez 等，2020年）。我们所提出方法的实用性在于，它能够在这种反事实条件下评估（2），即不必观测受条件事件约束的路径。具体而言，我们利用 Malliavin 演算工具，将（ 2 ）重写为两个无条件期望之比，而这两个期望均可通过不受事件 $\{g(X^\theta) = 0\}$ 约束的路径进行评估。这种重新构造的评估结构显著提升了效率，因为它恢复了经典的蒙特卡罗收敛速率，无需依赖基于核的方法或对罕见事件进行条件模拟。

金融应　　用。 这一条件（反事实）评估框架适用于　　r:

i) 障碍/数字及其他罕见事件奇异期权： 计算在触及（或接近）障碍或触发条件时的定价和希腊值（Glasserman，2003年）。ii) *xVA*敞口和压力测试： 估计在压力市场情景下的预期敞口指标（例如，信用估值调整）（Gregory，2015年）。iii) 压力下的尾部风险： 评估在回撤或高波动率状态下的尾部风险指标（例如，预期损失），条件为

现在给出一个具体示例：当资产在期限中点被强制处于压力水平时，进行反事实评估。这一设定自然引出条件希腊值，即对由此得到的条件价值关于模型参数求导。

1.1 示例。条件希腊值估计

令 $X^\theta = \{X_t^\theta\}_{t\in[0,T]}$ (1) 表示可交易资产的（风险中性）价格过程，其参数由 θ（例如，波动率）确定。

我们定义路径依赖的累积损失如下：

$$\ell(X^\theta) := \int_0^T h(X_s^\theta)\, ds,$$

其中， $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是用户选定的可测函数，用于表征某项金融目标。典型的选择包括：(i) 下行敞口代理指标 $h(u) = (K-u)^+ := \max\{0, K-u\}$；(ii) 库存/对冲惩罚代理指标 $h(u) = \lambda\,\Delta(u)^2$ ，适用于 $\lambda > 0$ 及预先指定的头寸映射 $\Delta(\cdot)$；或 (iii) 简单的偏离惩罚 $h(u) = u^2$ （或 $h(u) = (\log u)^2$）。

接下来我们施加一个反事实压力条件 ，并通过定义在中间时刻 $t = T/2$　　g

$$g(X^\theta) := \log X_{T/2}^\theta - \log s, \qquad s \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

因此， $g(S^\theta) = 0$ 对应于事件$\{X_{T/2}^\theta = s\}$，即资产价格在期限过半时恰好处于压力水平 s。这是一个前瞻性约束，并且在温和的正则性条件下（例如， $X_{T/2}^\theta$具有密度），它是一个零概率事件。

我们考虑反事实条件风险泛函

$$L(\theta) \;:=\; \mathbb{E}\big[\ell(X^\theta)\,\big|\,g(X^\theta)=0\big] \;=\; \mathbb{E}\Big[\int_0^T h(X_s^\theta)\,ds \;\Big|\; X_{T/2}^\theta = s\Big],$$

以及相应的反事实梯度估计（2）。
更一般地，我们可能希望施加路径泛函约束，其形式为

$$g(X^\theta) \;=\; \int_0^T \gamma(X_s^\theta)\,ds \;-\; c,$$

对于可测的 $\gamma:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 和目标水平 $c\in\mathbb{R}$。这涵盖了常见的金融量，例如亚洲平均约束 $\gamma(u)=u$、回撤时间约束 $\gamma(u)=\mathbf{1}\{u\le K\}$，或与积分方差相关的约束。

1.2 计算难处理性

条件梯度（2）的计算受到两个主要系统性难题的阻碍:

i）通常不存在实用的仿真或观测策略，能够精确强制满足 $g(S^\theta)=0$

ii) 若不进行此类精确条件化，用于计算 (2) 的方法在处理稀有或零测条件事件时效率低得难以接受。

为说明这一点，我们可以重新表达损失，以便进行随机模拟 a s

$$L(\theta) = \frac{\mathbb{E}\{\ell(X^\theta)\,\delta(g(X^\theta))\}}{\mathbb{E}\{\delta(g(X^\theta))\}} \tag{4}$$

其中， $\delta(g(X))$ 表示以零为中心的狄拉克δ函数。因此，要通过蒙特卡罗计算 $L(\theta)$，$\{g(X^\theta)=0\}$ 必须具有非零概率。这在许多我们关注的应用中显然并不成立（例如 (3)）。此外，即使满足 $\mathbb{P}(g(X^\theta)=0)>0$，利用经典随机模拟的方法，其复杂度也与 $\mathbb{P}(g(X^\theta)=0)$ 成反比，因此在稀有事件情形下实际上难以使用。

这促使我们开发能够处理对这些反事实（通常为零测）事件进行条件化的估计量和算法，而无需进行受约束路径模拟，并且在稀有或零测事件情形下不会遭遇难以接受的复杂度。

1.3 核方法的局限性

对（4）中 $L(\theta)$ 进行朴素的蒙特卡洛估计会因分母中出现狄拉克δ函数而失效。经典的解决方法是使用核方法：用核函数 $K_\Delta(g(X))$ 近似狄拉克δ函数 $\delta(g(X))$，其中 Δ表示核带宽。通常， K_Δ 是多元高斯密度，而 Δ 控制其方差。给定 N 个$X^{(i)}$， $i=1$，……， N独立实现 X后，基于核函数的损失 L 的蒙特卡洛估计量为

$$\hat{L}(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N \ell(\theta, X_{[0,T]}^{(i)})\,K_\Delta(g(X^{(i)}))}{\sum_{i=1}^N K_\Delta(g(X^{(i)}))}.$$

但是，对 $L(\theta)$ 的估计方差取决于核带宽 Δ；当 n 较大或事件 $\{g(X^\theta)=0\}$ 的概率较小时，收敛速度会变得极其缓慢。

1.4 主要结果

本文提出了一种两阶段无核方法，用于评估反事实损失函数的梯度（希腊值）：

(i) 基于*Malliavin*演算的损失评估。我们证明，式（4）中的 $\ell(X^\theta)\delta(g(X^\theta))$ 和 $\delta(g(X^\theta))$ 均具有精确的Skorohod积分表示。因此，它们的期望可通过经典蒙特卡洛方法计算。对于由式（1）生成的 N 条独立轨迹，该估计量可达到一致的 $O(1/N)$ 方差，与经典蒙特卡洛相同，即使在罕见事件或零测度事件情形下也成立（Fourni´e 等人，2001年；Bouchard等人，2004年；Crisan等人，2010年）。

（ii）通过弱导数进行梯度估计。我们表明，梯度 $\nabla_\theta L(\theta)$可借助基于Hahn-Jordan分解的弱导数方法（Pflug，1996年；Heidergott与V´azquez-Abad，2008年；Krishnamurthy与Abad，2012年）进行高效估计。该梯度估计的方差为 $O(1)$。相比之下，广泛使用的得分函数估计量（Kleijnen与Rubinstein，1996年）的方差为 $O(T)$。

1.5 背景。反事实随机优化

通过结合（i）与（ii），我们得到一种反事实随机梯度算法，该算法收敛到 $L(\theta)$的局部驻点。该过程如图1所示。

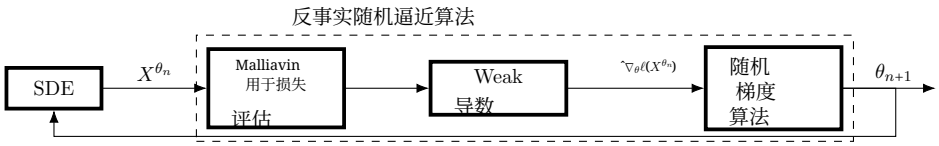

图1：反事实随机梯度算法

备注：模型拟合。上述梯度估计框架可用于随机优化过程，其目标是选择 θ 来控制随机微分方程 (1)，从而最小化条件损失 $L(\theta)$。该框架也适用于模型拟合：将随机微分方程 (1) 拟合到 N 外部生成的数据轨迹 $Y_{(1)0:T}, \ldots Y_{(N)0:T}$。在这种情况下，目标是最小化条件损失 $L(\theta) = \mathbb{E}\{\ell(Y, X^\theta)|g(X^\theta) = 0\}$。

在经典随机逼近中，我们观测到一系列含噪梯度 $\{\nabla\ell(\theta_k, z_k)\}$，其中 z_k 是含噪信号，而 $\nabla\ell(\theta, z)$ 是 $\nabla L(\theta)$ 的渐近无偏估计。我们通过随机梯度算法优化 $L(\theta) = \mathbb{E}\{\ell(\theta_k, z_k)\}$

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \varepsilon\nabla\ell(\theta_k, z_k)$$

在合理条件下（Kushner 和 Yin，2003年），该估计的插值轨迹弱收敛到常微分方程（ODE） $\{\theta_k\}$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\nabla L(\theta). \tag{5}$$

1.5.1 Passive Learning

在被动随机优化中（Nazin 等，1989年；Yin 和 Yin，1996年；Krishnamurthy 和 Yin，2022年；Snow 和 Krishnamurthy，2025 年），与经典随机梯度不同，我们观测到一系列带噪且模型设定错误的梯度：$\{\alpha_k, \nabla\ell(\alpha_k, z_k)\}$，其中参数 $\alpha_k \in \mathbb{R}^p$ 是根据概率密度 $p(\cdot)$ 随机选取的，选取者可能是对手。被动随机梯度算法是

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \varepsilon K_\Delta(\alpha_k - \theta_k)\nabla\ell(\alpha_k, z_k). \tag{6}$$

核函数 $K_\Delta(\cdot)$ 用于衡量梯度 $\nabla\ell(\alpha_k, z_k)$ 相对于所需梯度$\nabla\ell(\theta_k, z_k)$的有效性。如果 θ_k 和 α_k 相距较远，那么核函数的值较小，只有一小部分梯度估计 $\nabla\ell(\alpha_k, z_k)$ 会被加入随机梯度算法中。另一方面，如果 $\alpha_k = \theta_k$，该算法就会变成经典的随机梯度算法。在合理条件下，对于较小的

带宽参数 Δ，核函数 K_Δ 表现得如同狄拉克δ函数，且插值轨迹弱收敛到常微分方程

$$\frac{d\theta}{dt} = -\int_\Theta \pi(\theta)\,\delta(\alpha-\theta)\,\nabla L(\alpha)\,d\alpha = -p(\theta)\,\nabla L(\theta).$$

注意，该常微分方程与 (5) 具有相同的不动点。

1.5.2 Counterfactual Learning

最后，上述反事实随机优化问题可以视为一个被动随机优化问题。在每个阶段，我们需要梯度估计 $\nabla_\theta \ell(\theta,\ g(X^\theta) = 0,\ z)$，它们是 $\nabla_\theta L(\theta)$ 的无偏估计，其中 $L(\theta)$ 在 (2) 中定义；但我们实际得到的却是针对随机 $a \in \mathbb{R}$ 的含噪且设定有误的梯度估计 $\nabla_\theta \ell(\theta,\ g(X^\theta) = a,\ z)$。也就是说，虽然所需梯度对应于反事实约束 $[\theta, g(X^\theta) = 0]$，我们观测到的却只是根据 $\alpha = [\theta, g(X^\theta) = a]$ 计算出的设定有误的含噪梯度。因此，可以使用算法 (6)——基于被动核的算法——来求解反事实随机优化问题。然而，在本文中，我们将利用随机微分方程 (1) 的结构，而不采用基于核的算法。

2 使用Malliavin演算估计条件损失的方法

Malliavin演算（Nualart，2006年）于20世纪70年代发展起来，是一种用于证明随机微分方程解的H¨ormander拟椭圆性定理的概率方法。后来，它被应用于数理金融，以计算期权价格的灵敏度（希腊值）。与（Fourni´e等人，2001年；Bouchard等人，2004年；Crisan等人，2010年）一样，我们运用Malliavin演算高效地 评估条件损失 $\mathbb{E}\{\ell(X^\theta)|g(X^\theta) = 0\}$，即使条件事件$\{g(X^\theta) = 0\}$的概率趋于零或为零也是如此。

2.1 预备知识。Malliavin演算。

我们简要回顾两个核心对象。

2.1.1 Malliavin derivative

我们在概率空间$(\Omega,\ \mathrm{F}\ \mathbb{P})$上工作，其中定义了一个 d维布朗运动 $W = (W^1,\ \ldots\ldots,\ W^d)$及其自然滤过$\{\mathrm{F}_t\}_{t\geqslant 0}$。对于关于 W的光滑泛函 F，*Malliavin*导数 D_tF 定义为一个过程，用以衡量 F 对时刻 t布朗路径扰动的无穷小灵敏度。形式上，对于形如以下形式的柱状随机变量

$$F = f\left(\int_0^T h_1(s)\,dW_s, \ldots, \int_0^T h_n(s)\,dW_s\right),$$

其中 $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $h_i \in L^2([0,T];\ \mathbb{R}^d)$，导数为

$$D_tF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\int_0^T h_1\,dW, \ldots, \int_0^T h_n\,dW\right) h_i(t).$$

该算子在 L^p 中的闭包得到索伯列夫空间 $\mathbb{D}^{1,\ p}$ 其中的随机变量均为 Malliavin 可微。

2.1.2 Skorohod integral

Malliavin导数的伴随算子是*Skorohod*积分，记作 $\mathrm{S}(u)$。事实上，对于过程$u \in L^2([0,T]\times\Omega;\ \mathbb{R}^d)$，若存在平方可积随机变量 $\mathrm{S}(u)$，使得对所有 $F \in \mathbb{D}^{1,2},\ \ u$属于 S 的定义域，

$$\mathbb{E}[F\,\mathcal{S}(u)] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \langle D_tF, u_t\rangle\,dt\Big]. \tag{7}$$

上述伴随关系构成了 Skorohod积分的定义，并可抽象地写为

$$\langle F, \mathcal{S}(u)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle DF, u\rangle_{L^2([0,T]\times\Omega)}.$$

当 u 适应于滤过 $\{\mathrm{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 时，Skorohod积分 S(u) 与 Itˆo 积分$\int_0^T u_t\, dW_t$一致。一般而言，S(u) 将随机积分扩展到了非适应过程，有时也称为散度算子。

2.1.3 Integration by parts

对偶关系 (7) 导出了 Malliavin 分部积分公式，该公式支撑着许多应用，包括对条件期望的蒙特卡罗估计以及随机微分方程的敏感性分析（参见 (Nualart, 2006年; Fourni´e 等人, 2001年; Bouchard等人, 2004年)）。

2.1.4 Computing Malliavin Derivative and Skorohod Integral

以下性质是计算 Malliavin导数和 Skorohod积分的关键工具:

1. 扩散过程的 *Malliavin*导数。对于扩散过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ (1)，Malliavin导数 D_sX_t为 (Gobet 和 Munos, 2005)

$$D_sX_t = Y_tZ_s\sigma(X_s, s)\mathbf{1}_{s\leqslant t} \tag{8}$$

其中， $Y_t := \nabla_x X_t$ 是雅可比矩阵， Z_t 是其逆矩阵 $Z_t := Y_t^{-1}$。这一点结合 Malliavin 链式法则，有助于计算扩散过程一般函数的 Malliavin 导数。

2. *Skorohod*展开。对于随机变量 $F \in \mathbb{D}^{1,\,2}$ 和 Skorohod可积过程 u，我们有（Gobet 和 Munos, 2005，式 2.2）：

$$\mathcal{S}(Fu) = F\mathcal{S}(u) - \int_0^T D_tF \cdot u_t dt \tag{9}$$

一般而言，感兴趣的 Skorohod被积过程$\{u_t\}^{t\in[0,T]}$ 并非适应的。然而，在特殊情况下，若 u 可分解为适应过程ˆu = $\{\hat{u}_t\}^{t\in[0,T]}$ 与预见性随机变量 F的乘积，该公式便给出了一种构造性表达。具体而言，我们可以利用（9）展开 S(u) = S($F\hat{u}$)，并将其表示为适应部分ˆu 的标准 Itˆo 积分与预见性随机变量 F的 Malliavin导数。

2.2 条件期望的Malliavin演算表达式

以下主要结果将条件期望（2）表示为无条件期望之比。

定理1 假设 $\ell(X^\theta)$ $g(X^\theta) \in L^2(\Omega)$ 且 $D_t\ell(X^\theta)$ $D_tg(X^\theta) \in L^2(\Omega\times[0,T])$。则条件损失 L在(4) 中为

$$\begin{aligned} &L(\theta) = \mathbb{E}[\ell(X^\theta) \mid g(X^\theta) = 0] = \frac{E_1^\theta}{E_2^\theta} \\ &\textit{where} \\ &E_1^\theta = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\left(\ell(X^\theta)\mathcal{S}(u) - \int_0^T (D_t\ell(X^\theta))u_t dt\right)\right] \\ &E_2^\theta = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\mathcal{S}(u)] \end{aligned} \tag{10}$$

这里的 u是任意满足以下条件的过程

$$\mathbb{E}[\int_0^T D_tg(X^\theta)u_t\, dt] = 1 \tag{11}$$

证明概要：我们从 (4) 出发，将 $\delta(g(X^\theta))$ 写成 $\delta(G)$。然后，根据 Malliavin 链式法则、伴随关系 (7) 以及 Skorohod 被积函数条件 (11)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\ell(X^\theta)\,\delta(G)] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^T (D_t(\ell(X^\theta))\mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}})\,u_t\,dt\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\Big(\ell(X^\theta)\mathcal{S}(u) - \int_0^T (D_t\ell(X^\theta))u_t\,dt\Big)\Big].
\end{aligned}$$

(4) 式中的分母可以用类似的方法推导。

备注。 (i) 在上述定理中， u 的选择具有相当大的灵活性。例如，若$D_t g(X^\theta) \neq 0$ 几乎处处成立，则可以选择

$$u_t = \begin{cases} \frac{1}{T D_t g(X^\theta)} & D_t g(X^\theta) \neq 0 \\ 1 & D_t g(X^\theta) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

(10) 式的表示需要计算 Malliavin 导数和 Skorohod 积分，若干示例见（Gobet 和 Munos，2005）。由此可得几个重要结论。首先，即使在奇异条件化下，它也能恢复$N^{-1/2}$ 蒙特卡洛收敛速率，因为不再需要直接对事件 $\{g(X^\theta) = 0\}$ 进行采样。其次，该估计量具有很大的方差缩减灵活性：局部化函数的选择（指示函数还是平滑近似）以及容许权重过程 u都会显著影响效率，而最优选择可通过 Malliavin 演算中的变分原理来刻画。第三，该表示与前向随机微分方程的标准离散化方法兼容：Malliavin 导数 $D_t X^\theta$ 可通过递归的 Euler–Maruyama 近似计算，因此无需使用额外的核带宽，也能避免基于回归的方法所固有的维数灾难问题。

3 弱导数估计量

应用商法则，由（10）可得

$$\nabla_\theta \mathbb{E}[\ell(X^\theta) \mid g(X^\theta) = 0] = \frac{E_2\,\nabla_\theta E_1 - E_1\,\nabla_\theta E_2}{E_2^2}. \tag{13}$$

本节将构造一种基于弱导数的算法，在给定随机微分方程（1）的情况下估计 $\nabla_\theta E_1$ 和 $\nabla_\theta E_2$ 。随后可将所得的梯度估计输入随机梯度算法，以最小化损失 $L(\theta)$。与会产生 $O(T)$ 方差标度的得分函数方法不同，该弱导数方法相对于时间范围 T 可恢复 $O(1)$方差标度。

3.1 离散时间测度值弱导数

本节旨在为梯度（2）推导一种计算上可行的弱导数估计量。我们从随机微分方程（1）的 Euler 离散化入手，并推导支配其动力学的非齐次马尔可夫核的弱导数。

为便于实际计算，我们在网格 $t_k = k\Delta t, k = 0, \dots, M$ 上对随机微分方程（1）进行 Euler 离散化，其中 $\Delta t = T/M$。令 $\Sigma(x,t) := \sigma_\theta(x,t)\sigma_\theta(x,t)^\top$。所得的（非齐次）马尔可夫链

$$X_{k+1}^\theta = X_k^\theta + \Delta t\, b_\theta(X_k^\theta, t_k) + \sqrt{\Delta t}\,\sigma_\theta(X_k^\theta, t_k)\,\xi_{k+1}, \qquad \xi_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, I_d),$$

具有一步转移核

$$P_{\Delta t,k}^\theta(x, t_k, dx') = \mathcal{N}\big(x + \Delta t\, b_\theta(x, t_k),\, \Delta t\,\Sigma(x, t_k)\big). \tag{14}$$

对于每个时间索引 k 和参数 θ, $P^{\theta}_{\Delta t,\,k}(x,\ t_k,\ \cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的概率测度。其参数导数通常不是概率测度，而是一个有限符号测度。更确切地说，如果

$$\nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,\cdot)$$

以弱意义存在[1] 那么，对每个有界光滑测试函数 f,

$$\nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k} f(x,t_k) \;=\; \nabla_\theta \int_{\mathbb{R}^n} f(x')\, P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx'). \tag{15}$$

We 将式 (15) 称为 $P^{\theta}_{\Delta t,k}$ 在时间 t_k的弱导数 （或测度值导数） .

根据哈恩–若尔当分解定理，可将可测空间上的任意有限符号测度 ν 表示为两个互相奇异的正测度之差: $\nu = \nu^+ - \nu^-$，其中 ν^+ 和 ν^-唯一确定。将此定理应用于每个时间步的弱导数 $\nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,\cdot)$，可得到逐点分解

$$\nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx') = c_{\theta,k}(x,t_k)\big(\rho^{+}_{\theta,k}(x,t_k,dx') - \rho^{-}_{\theta,k}(x,t_k,dx')\big),$$

其中 $\rho^{\pm}_{\theta,k}(x,t_k,\cdot)$ 是概率测度（归一化汉恩–若尔当分量），而 $c_{\theta,k}(x,t_k)$ 是有限标量权重。

我们将其形式化如下。

定理 2（离散时间汉恩–若尔当弱导数） 设$(X^{\theta}_t)_{t\in[0,T]} \subset \mathbb{R}^n$ 满足伊藤随机微分方程(1)，其中 $b_\theta \in C^2_b(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ 和 $\sigma_\theta \in C^2_b(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times d})$，其中 d 是驱动布朗运动的维数。

对于 $\Delta t>0$，欧拉–丸山格式会导出高斯转移概率(14)，其时间非齐次核函数为$\{P^{\theta}_{\Delta t,k}\}_{k=0}^{M-1}$。于是，对于每个 k 以及(x,t_k)，$P^{\theta}_{\Delta t,k}$关于 θ 的弱导数存在哈恩–若尔当分解

$$\nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx') = c_{\theta,k}(x,t_k)\big(\rho^{+}_{\theta,k}(x,t_k,dx') - \rho^{-}_{\theta,k}(x,t_k,dx')\big), \tag{16}$$

其中 $\rho^{\pm}_{\theta,k}(x,t_k,\cdot)$ 是互相奇异的正测度，且 $c_{\theta,k}(x,t_k)\in\mathbb{R}$ 有限。因此，对于任意有界可测的 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\nabla_\theta \int f(x')\, P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx')\\ &\quad= c_{\theta,k}(x,t_k)\left(\int f(x')\,\rho^{+}_{\theta,k}(x,t_k,dx') - \int f(x')\,\rho^{-}_{\theta,k}(x,t_k,dx')\right).\end{aligned}$$

证明 由于 $P^{\theta}_{\Delta t,k}$服从高斯分布，其均值为 $\mu_\theta(x,t_k) = x+\Delta t\, b_\theta(x,t_k)$，协方差为 $\Sigma(x,t_k) = \Delta t\, a(x,t_k)$，因此密度 $p_\theta(x,t_k,x')$ 关于 θ 光滑，这是由 C^2_b 假设保证的。[2] 对于任意 $\varphi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$,

$$\nabla_\theta \int \varphi(x')\, P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx') = \int \varphi(x')\,\nabla_\theta p_\theta(x,t_k,x')\,dx',$$

因此，$\nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,\cdot)$ 定义了一个有限符号测度。根据汉恩–若尔当分解定理，每个有限符号测度都可以唯一分解为两个互相奇异的正测度 ν^+ 和ν^-。将它们归一化后，可得到概率测度 $\rho^{+}_{\theta,k}$ 和 $\rho^{-}_{\theta,k}$，以及标量权重 $c_{\theta,k}(x,t_k)$，从而使式（16）成立。最后，由于

$$\int \nabla_\theta P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx') = \nabla_\theta \int P^{\theta}_{\Delta t,k}(x,t_k,dx') = 0,$$

■

1. 为使记号简洁并避免使用多维矩阵，我们假设 θ 是一个标量参数。处理 $\theta\in\mathbb{R}^p$ 只需将结果逐元素理解。2. C^2_b 表示二阶可微有界函数， C^∞_c 表示具有紧支撑的无穷次可微函数。

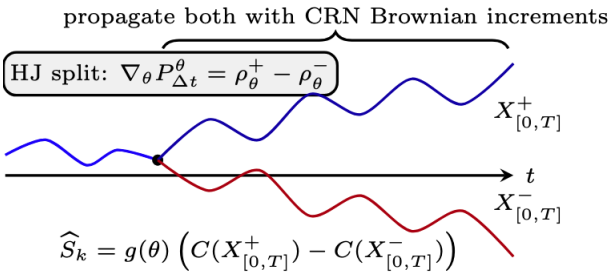

图 2：弱导数估计量的哈恩–若尔当分解概念示意图。在每个时间步，Euler 核的导数表示为由共同随机数（CRN）驱动的两种分支转移之差。

3.2 有限时域分裂表示

本节推导弱导数的一种表示形式，即将加权路径在每个时间点拆分后，取其累积差（Heidergott 和 V´azquez-Abad，2000年）。这为计算非平稳过程泛函的弱导数提供了一种可实现的算法，而这对大多数应用来说都是必需的。

令 μ 表示 X_0^θ 的任意初始分布，并令 $X^\theta = (X_0^\theta, \ldots\ldots, X_M^\theta)$ 表示 Euler 路径。对于有界路径泛函 $C : \mathbb{R}^{(M+1)n} \to \mathbb{R}$，我们考虑

$$J(\theta) := \mathbb{E}_\mu[C(X^\theta)].$$

测度值微分为核函数族 $\{P^\theta_{\Delta t,\, k}\}_{k=0}^{M-1}$ 提供了乘积法则：有限个核的乘积的导数可以展开为对导数作用的所有离散时刻求和。具体而言，可得如下表示：

$$\nabla_\theta J(\theta) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{E}_\mu\Big[c_{\theta,k}(X_k^\theta, t_k)\big(C(X_{0:M}^{\theta,+,k}) - C(X_{0:M}^{\theta,-,k})\big)\Big], \tag{17}$$

其中，对于每个 k，虚链（Heidergott 和 V´azquez-Abad，2000年）$X^\theta_{0:M}{}^{\pm k}$ 定义如下：

- 对于 $i \le k$，$X^{\theta,\pm k}_i = X^\theta_i$（即两个幻影与名义链直到时刻 t_k 均重合）。
- 在时刻 t_{k+1}，我们使用 Hahn–Jordan 分量进行分支：

$$X_{k+1}^{\theta,+,k} \sim \rho^+_{\theta,k}(X_k^\theta, t_k, \cdot), \qquad X_{k+1}^{\theta,-,k} \sim \rho^-_{\theta,k}(X_k^\theta, t_k, \cdot),$$

  在给定 X_k^θ 的条件下。
- 对于 $i \ge k+1$，两个幻影均在名义核 $P^\theta_{\Delta t,\, i}$ 下演化，并彼此使用相同的高斯增量（共同随机数耦合）。

方程 (17) 是在每个时间点拆分有符号导数的离散时间类比：在每一步 k，核函数的导数注入有符号质量 $c_{\theta,\, k}(\cdot)$，并经由剩余动态向前传播。

3.3 单次运行 Hahn–Jordan 弱导数估计量

表示式 (17) 表明，可以直接通过蒙特卡罗实现该方法：原则上，每个时间步都进行分支 k 并对各项贡献取平均。这种虚拟 构造在概念上很有用，但

计算成本很高，因为分支路径的数量会随 M 增长。实际操作中，我们遵循单次运行 MVD 范式，并通过每条模拟轨迹仅设置一个分支来实现 (17)。设 q 是定义在 $\{0,\dots,M-1\}$ 上的概率质量函数（例如 $q_k = 1/M$）。对于每次蒙特卡罗重复：

1. 从 $X_0^\theta \sim \mu$ 出发，模拟一条名义欧拉路径（X_0^θ，……，X_M^θ）。

2. 按 $\mathbb{P}(K=k) = q_k$ 抽取一个分支索引 $K \in \{0,\dots,M-1\}$。

3. 在时刻 t_K，构造局部哈恩–若尔当分解 $\nabla_\theta P^\theta_{\Delta t,\,K}(X_K^\theta,\,t_K,\,\cdot) = c_{\theta,\,K}(X_K^\theta,\,t_K)(\rho^+_{\theta,\,K} - \rho^-_{\theta,\,K})$ 并抽样

$$X_K^{\theta,(+)} \sim \rho^+_{\theta,K}(X_K^\theta, t_K, \cdot), \qquad X_K^{\theta,(-)} \sim \rho^-_{\theta,K}(X_K^\theta, t_K, \cdot).$$

4. 生成未来的高斯增量 $\{\xi_j\}_{j=K+1}^M$，并将其用于两个分支：使用相同的噪声序列（共同随机数耦合），将 $X^{\theta,\,(+)}$ 和 $X^{\theta,\,(-)}$ 从 t_{K+1} 推进至 T，从而得到分支路径 $X^{\theta,\,(+)}_{0:M}$ 和 $X^{\theta,\,(-)}_{0:M}$；它们在 t_K 之前与名义路径重合。

算法 1单次　　运行 HJ 弱导数估计量（欧拉核、非平稳初始分布 μ）

要求： 期限 T、步数 M, $\Delta t = T/M$、参数 θ、分支分布 q、路径泛函　　C

1：抽取 $X_0^\theta \sim \mu$ 并模拟 Euler 路径 $X_0^\theta,\dots,X_M^\theta$。2：根据 $\mathbb{P}(K=k) = q_k$ 抽取分支索引 $K \in \{0,\dots,M-1\}$。3：根据式 (16) 构造 $c_{\theta,K}(X_K^\theta,t_K)$ 和 $\rho^\pm_{\theta,K}(X_K^\theta,t_K,\cdot)$。4：抽取 $X^{\theta,(+)}_K \sim \rho^+_{\theta,K}(X_K^\theta,t_K,\cdot)$、$X^{\theta,(-)}_K \sim \rho^-_{\theta,K}(X_K^\theta,t_K,\cdot)$。5：生成 $\{\xi_j\}_{j=K+1}^M$ 并将其用于两个分支（共同随机数），进行传播以得到 $X^{\theta,(+)}_{0:M}$ 和 $X^{\theta,(-)}_{0:M}$。6：返回单次运行估计量

$$\widehat{S} = \frac{c_{\theta,K}(X_K^\theta,t_K)}{q_K}\Big(C(X^{\theta,(+)}_{0:M}) - C(X^{\theta,(-)}_{0:M})\Big). \tag{18}$$

备注。 根据构造和式 (17)，对于任意在 $\{0,\dots,M-1\}$ 上具有全支撑的 q，$\mathbb{E}_\mu[\widehat{S}] = \nabla_\theta J(\theta)$ 均成立。因此，算法 1 通过单分支蒙特卡罗估计量实现了逐点分割的测度值导数。共同随机数耦合确保差值 $C(X^{\theta,\,(+)}_{0:M}) - C(X^{\theta,\,(-)}_{0:M})$ 由 t_K 处的局部扰动驱动，并且在温和的遍历性假设下，在 T 中保持为 $O(1)$，从而使方差在时间范围内呈现 $O(1)$ 的标度。

3.3.1 Malliavin Gradient Estimation

现在，我们将弱导数估计量与 Malliavin 梯度表示式 (13) 联系起来。对于反事实随机梯度算法，回顾一下，我们需要计算在式 (10) 中定义的灵敏度 $\nabla_\theta E_1^\theta$ 和 $\nabla_\theta E_2^\theta$。我们通过对以下路径泛函应用算法 1 来计算这些灵敏度

$$C_1(X^\theta) = \mathbf{1}_{g(X^\theta)>0}\left(\ell(X^\theta)\mathcal{S}(u) - \int_0^T (D_t\ell(X^\theta))u_t\,dt\right),$$

and

$$C_2(X^\theta) = \mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\mathcal{S}(u),$$

分别地，其中 u 满足 (11)。请注意，在算法 1 中，我们只需代入这些损失泛函，而无需代入它们关于 θ 的导数，即可计算 $\nabla_\theta E_1^\theta$ 和 $\nabla_\theta E_2^\theta$。S(u) 和 $D_t\ell(X^\theta)$ 的计算如第 2.1.4 节中的 (8) 和 (9) 所述；实现细节可参见 Gobet 和 Munos (2005)。第 4 节中，我们以布莱克-斯科尔斯模型为例说明这类计算。

3.4 与无穷小生成元的联系

弱导数估计量传统上是针对离散时间马尔可夫链构建的。本节旨在通过无穷小生成元及其福克–普朗克方程，将 Euler/HJ 构造与连续时间扩散联系起来。该方法基于两种互补的视角：

3.4.1 Infinitesimal Generator Formulation

令 p_t^θ 表示 X_t^θ 的密度， L^θ 表示式（1）的生成元。福克–普朗克方程为

$$\partial_t p_t^\theta = (L^\theta)^* p_t^\theta.$$

对 θ 求导，得到敏感性偏微分方程

$$\partial_t \nu_t = (L^\theta)^* \nu_t + \nabla_\theta (L^\theta)^* p_t^\theta, \qquad \nu_t := \nabla_\theta p_t^\theta.$$

根据杜哈梅尔原理，

$$\nu_T = \int_0^T P_{T-s}^\theta \big(\nabla_\theta (L^\theta)^* p_s^\theta\big)\, ds,$$

因此，时刻 T 的导数测度是由半群 P^θ向前传输的带符号质量注入 $\nabla_\theta (L^\theta)^* p_s^\theta$ 的积分。对于每个带符号测度 $\nabla_\theta (L^\theta)^* p_s^\theta$，均可应用哈恩–若尔当分解。

3.4.2 Discrete Euler Formulation.

欧拉–丸山离散化诱导出形式如式（14）的核函数$P_{\Delta t,k}^\theta$。弱导数$\nabla_\theta P_{\Delta t,k}^\theta$是有限带符号测度，可进行哈恩–若尔当分解（16）。随后，有限时域乘积法则得到逐点拆分表示（17），其单次运行实现即为算法 1。

3.4.3 Consistency.

当 $\Delta t \to 0$时，黎曼和表示

$$\sum_{k=0}^{M-1} P_{T-t_{k+1}}^\theta \big(\nabla_\theta P_{\Delta t,k}^\theta\big) P_{t_k}^\theta \;\longrightarrow\; \int_0^T P_{T-s}^\theta \big(\nabla_\theta (L^\theta)^* p_s^\theta\big)\, ds$$

形式化了基于生成元的描述与基于欧拉方法的描述之间的等价性。因此，欧拉/HJ格式是生成元层面哈恩–若尔当分解的蒙特卡洛实现，适用于非平稳初始条件，具有相同的 $O(1)$方差性质，但便于实际实现。

4 数值实现。条件布莱克–斯科尔斯

设$(\Omega, \mathsf{F}, (\mathsf{F}_t)^{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$支撑一个一维布朗运动$(W_t)^{t\in[0,T]}$。在风险中性测度下，考虑布莱克–斯科尔斯模型

$$dS_t^\theta = r S_t^\theta\, dt + \theta S_t^\theta\, dW_t, \qquad S_0 > 0,$$

并定义对数价格 $X_t^\theta := \log S_t^\theta$，从而

$$dX_t^\theta = \Big(r - \tfrac{1}{2}\theta^2\Big)\, dt + \theta\, dW_t, \qquad X_0 = \log S_0. \tag{19}$$

固定压力中间水平 $s > 0$ ，并定义前瞻性约束

$$g(X^\theta) := X_{T/2}^\theta - \log s.$$

与定理1中一样，反事实条件损失为

$$L(\theta) := \mathbb{E}\big[\ell(X^\theta) \mid g(X^\theta) = 0\big] = \frac{E_1^\theta}{E_2^\theta}, \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned} E_1^\theta &:= \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\Big(\ell(X^\theta)S(u) - \int_0^T (D_t\ell(X^\theta))\, u_t\, dt\Big)\Big], \\ E_2^\theta &:= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\, S(u)\big], \end{aligned} \tag{21}$$

且 u 满足归一化条件 $\mathbb{E}[\int_0^T (D_t g(X^\theta)) u_t\, dt] = 1$。

4.1 收益和参数的选择。

令 ℓ 为贴现欧式看涨期权收益

$$\ell(X^\theta) := e^{-rT}\,(S_T^\theta - K)^+ = e^{-rT}\,(e^{X_T^\theta} - K)^+,$$

并将 θ 视为感兴趣的参数 （因此 $\nabla_\theta L(\theta)$ 是压力事件 $S_{T/2} = s$下的条件维加).

4.2 对数价格模型的 Malliavin 导数。

由于 (19) 关于 W 是仿射的，其 Malliavin导数可以显式写出：

$$D_t X_\tau^\theta = \theta\, \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}, \qquad 0 \le t, \tau \le T.$$

因此，

$$D_t g(X^\theta) = D_t X_{T/2}^\theta = \theta\, \mathbf{1}_{\{t\le T/2\}}.$$

由于 $D_t g$ 是确定且适应的，我们选择一个适应的 u，其支撑集位于 $[0, T/2]$ 上：

$$u_t := \frac{2}{\theta T}\, \mathbf{1}_{\{t\le T/2\}}.$$

于是 $\int_0^T (D_t g) u_t\, dt = \int^T\!/_0\ {}^2\theta \cdot \frac{2}{\theta T}\, dt = 1$，因此归一化条件成立。由于 u 是适应的， $S(u)$ 与一个 Itˆo 积分一致：

$$S(u) = \int_0^T u_t\, dW_t = \frac{2}{\theta T}\int_0^{T/2} dW_t = \frac{2}{\theta T}\, W_{T/2}.$$

4.3 看涨期权收益的 Malliavin 导数。

利用 $S_T^\theta = e^{X_T^\theta}$ 和链式法则，

$$D_t S_T^\theta = S_T^\theta\, D_t X_T^\theta = \theta S_T^\theta\, \mathbf{1}_{\{t\le T\}} = \theta S_T^\theta.$$

于是，

$$D_t \ell(X^\theta) = e^{-rT}\, \mathbf{1}_{\{S_T^\theta > K\}}\, D_t S_T^\theta = e^{-rT}\, \mathbf{1}_{\{S_T^\theta > K\}}\, \theta S_T^\theta.$$

由于 u 的支撑集位于 $[0, T/2],$，式 (21) 中的修正项变为

$$\begin{aligned} \int_0^T (D_t\ell(X^\theta))\, u_t\, dt &= \int_0^{T/2} \Big(e^{-rT}\, \mathbf{1}_{\{S_T^\theta > K\}}\, \theta S_T^\theta\Big)\, \frac{2}{\theta T}\, dt \\ &= e^{-rT}\, \mathbf{1}_{\{S_T^\theta > K\}}\, S_T^\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

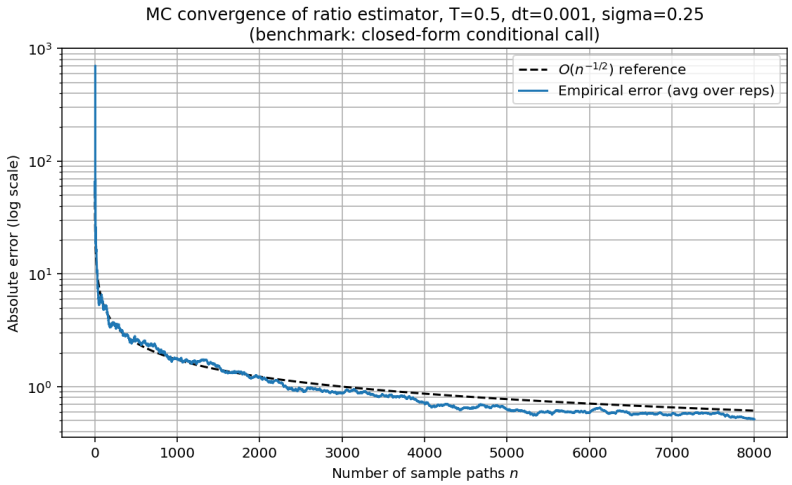

图 3：马利亚万商 (20) 的蒙特卡洛估计随模拟路径 N 的收敛情况。我们看到，即使是在零测度事件上进行条件化，仍能恢复 $O(N^{-1/2})$ 收敛率。

布莱克-斯科尔斯压力看涨期权的最终显式表达式 E_1^θ， E_2^θ令 $g(X^\theta) = X_{T/2}^\theta -$ 对数 s，并结合式 (22)，可得，

$$E_1^\theta = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{X_{T/2}^\theta > \log s\}}\Big(e^{-rT}(S_T^\theta - K)^+ \cdot \frac{2}{\theta T} W_{T/2} - e^{-rT}\,\mathbf{1}_{\{S_T^\theta > K\}}\,S_T^\theta\Big)\Big],$$
$$E_2^\theta = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{X_{T/2}^\theta > \log s\}} \cdot \frac{2}{\theta T} W_{T/2}\Big].$$

因此，反事实事件 $\{S_{T/2} = s\}$ 下的条件看涨价格为 $L(\theta) = E_1^\theta / E_2^\theta$。

4.4 通过弱导数计算条件维加。

根据商法则，

$$\nabla_\theta L(\theta) = \frac{E_2^\theta \nabla_\theta E_1^\theta - E_1^\theta \nabla_\theta E_2^\theta}{(E_2^\theta)^2}. \tag{23}$$

要计算 $\nabla_\theta E_1^\theta$ 和 $\nabla_\theta E_2^\theta$，将单次运行的 Hahn–Jordan估计量（算法 1）应用于路径泛函

$$C_1(X^\theta) := \mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\Big(\ell(X^\theta)S(u) - \int_0^T (D_t \ell(X^\theta))u_t\,dt\Big),$$
$$C_2(X^\theta) := \mathbf{1}_{\{g(X^\theta)>0\}}\,S(u),$$

其中 ℓ， g， u 如上所述，并对 (19) 进行 Euler 离散化。
图 3 展示了估计量 (20) 随蒙特卡罗样本路径数量变化的收敛情况。可以看到，尽管条件事件的测度为零，我们仍恢复了经典的 $O(N^{-1/2})$ 收敛率。图 4 展示了估计量 (23) 的方差，其中 θ-梯度分别采用得分函数计算（方差为 $O(T)$）和算法 1 的弱导数方法计算（方差为 $O(1)$）。因此，将马利亚万条件化重构与弱导数梯度估计相结合，形成了一套有理论依据且高效的条件梯度估计流程。

生成这些图的代码 为开源项目，代码可在以下地址找到：https://github.com/LukeSnow0/Malliavin-W D.

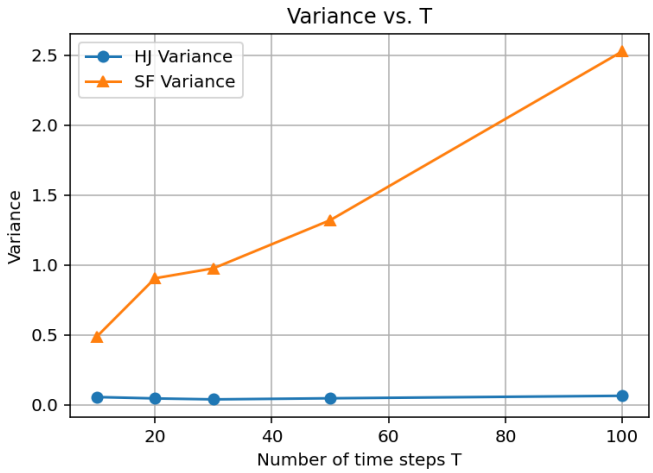

图4：弱导数估计量和得分函数估计量的方差标度随时间范围 T 的变化。我们验证了弱导数估计量具有稳定的 $O(1)$ 方差标度，而得分函数估计量的方差标度为 $O(T)$，与之形成对比。

5 结论

我们提出了一种用于条件希腊值反事实估计的方法。我们不依赖核平滑或直接条件蒙特卡罗方法，而是利用 Malliavin 演算对条件期望梯度进行重构。即使在稀有事件或零测度事件上进行条件化，该方法仍能达到 $O(N^{-1/2})$ 的蒙特卡洛收敛率；而在这些情形下，直接蒙特卡洛无法进行，核平滑方法则不可行且效率低下。此外，我们将此方法与一种弱导数梯度估计算法相结合，该算法在时间期限上具有稳定的 $O(1)$ 方差标度；相比之下，得分函数方法的方差标度为 $O(T)$。在被动随机优化框架下结合这两种方法，是一种新颖的途径，可实现高效的梯度评估，尤其是条件希腊值评估，即使面对稀有条件事件或设定错误的函数评估也不例外。

参考文献

Carlo Acerbi 和 Dirk Tasche。论预期损失的一致性。《银行与金融杂志》，26(7):1487–1503，2002年。

Bruno Bouchard、Ivar Ekeland 和 Nizar Touzi。论采用 Malliavin 方法对条件期望进行蒙特卡罗近似。《金融与随机》，8(1):45–71，2004年。

Dan Crisan、Konstantinos Manolarakis 和 Nizar Touzi。论倒向随机微分方程的蒙特卡罗仿真：对 Malliavin 权重的改进。《随机过程及其应用》，120(7):1133–1158，2010。

Eric Fourni´e、Jean-Michel Lasry、J´erˆome Lebuchoux 和 Pierre-Louis Lions。Malliavin演算在金融中的蒙特卡罗方法中的应用。II.《金融与随机》，5(2):201–236，2001年。

Paul Glasserman。《金融工程中的蒙特卡罗方法》。Springer，2003年。

Emmanuel Gobet 和 R´emi Munos。使用 Itˆo–Malliavin 演算和鞅进行敏感性分析，并将其应用于随机最优控制。《*SIAM*控制与优化杂志》，43(5):1676–1713，2005。

Jon Gregory。《*xVA* 挑战：交易对手风险、融资、抵押品、资本和初始保证金》。威立，2015。Bernd Heidergott 和 FJ V´azquez-Abad。马尔可夫链的测度值微分。《优化理论与应用杂志》，136(2):187–209，2008。BF Heidergott 和 Felisa J V´azquez-Abad。随机过程的测度值微分：有限时域情形。2000。Jack PC Kleijnen 和 Reuven Y Rubinstein。使用得分函数法对计算机仿真模型进行优化和敏感性分析。《欧洲运筹学杂志》，88(3):413–427，1996。V. Krishnamurthy 和 F. Vazquez Abad。受约束的单链马尔可夫决策过程的基于梯度的策略优化。载于 S. Cohen、D. Madan 和 T. Siu（编），《随机过程、金融与控制：献给 *Robert J. Elliott* 的纪念文集》。世界科学出版社，2012年。*http://arxiv.org/abs/1110.4946*。Vikram Krishnamurthy 和 George Yin。多核被动随机梯度算法与迁移学习。《*IEEE* 自动控制汇刊》，67(4):1792–1805，2022年。H. J. Kushner 和 G. Yin。《随机逼近算法与递归算法及其应用》。施普林格出版社，第2版，2003年。Romain Lopez、Chenchen Li、Xiang Yan、Junwu Xiong、Michael Jordan、Yuan Qi 和 Le Song。通过结构化反事实推断实现高性价比的激励分配。载于《*AAAI* 人工智能会议论文集》，第34卷，第4997–5004页，2020年。Aleksandr Viktorovich Nazin、Boris Teodorovich Polyak 和 Aleksandr Borisovich Tsybakov。被动随机逼近。《自动化与远程控制》，(50):1563–1569，1989年。David Nualart。《*Malliavin*演算及相关主题》。Springer，2006年。G. Pflug。《随机模型优化：仿真与优化之间的接口》。克鲁维尔学术出版社，1996年。Luke Snow 和 Vikram Krishnamurthy。利用被动朗之万动力学进行自适应逆强化学习的有限样本界。《*IEEE* 信息论汇刊》，2025年。Adith Swaminathan 和 Thorsten Joachims。反事实风险最小化：从日志化老虎机反馈中学习。载于《国际机器学习会议》，第814–823页。PMLR，2015年。G. Yin 和 K. Yin。具有恒定步长和窗口宽度的被动随机逼近。《*IEEE* 自动控制汇刊》，41(1):90–106，1996年。Houssam Zenati、Alberto Bietti、Matthieu Martin、Eustache Diemert、Pierre Gaillard 和 Julien Mairal。连续动作随机策略的反事实学习。《机器学习研究汇刊》，2025年。