基于逆否的经典线性 λ-演算

PabloBarenbaum 基尔梅斯国立大学（CONICET），阿根廷；布宜诺斯艾利斯大学，阿根廷

Eduardo Bonelli
史蒂文斯理工学院，美国

Leopoldo Lerena
布宜诺斯艾利斯大学（CONICET），阿根廷

arXiv:2602.02822v1 [cs.LO] 2 Feb 2026

摘要

我们沿着命题即类型范式的思路，为经典乘法指数线性逻辑（MELL）提出了一种新颖的线性 λ 演算。从直觉主义乘法线性逻辑（IMLL）的标准项指派出发，我们观察到，若纳入线性否定，其对合性意味着 $A \multimap B$ 和 $B^{\perp} \multimap A^{\perp}$ 应当具有相同的证明。引入线性否定后件规则，即由 $B^{\perp} \multimap A^{\perp}$ 和 A 可推出 B，便能够恢复经典 MLL。此外，为这一消去规则指定项赋值，并研究带有此消去规则的 λ 演算中的证明规范化，促使我们定义了反代换这一新颖概念 $t\{a\backslash\backslash s\}$。反代换与线性代换一同引入，表示这样一种项：在 t 中“抓住” a 的唯一出现，并从中“拉出”，使项 t 翻转过来（就像一只袜子），然后用 s 替换 a。我们将经典 MLL 的单边自然演绎表示称为 λ_{MLL} 演算。根据反代换在指数模态下的行为，我们将其扩展为 MELL 的类似表示。我们证明，该演算相对于 MELL 是可靠且完备的，并且满足带类型编程语言的标准性质：主体约简、合流性和强正规化。此外，我们还展示了若干经典逻辑中广为人知的项赋值都可编码在 λ_{MELL} 中，其中包括 Parigot 的 $\lambda\mu$ [25]（通过 Danos、Joinet 和 Schellinx 的 T 与 Q 翻译 [14], ）、Curien 和 Herbelin 的 $\lambda\mu\tilde{\mu}$ 演算 [13],，以及 Hasegawa 的 μ DCLL [20, 19]。

–

2012 年美国计算机协会学科分类计算理论 → 线性逻辑；计算理论→ 类型理论；计算理论 → 证明论

关键词与短语线性逻辑、λ 演算、证明论、类型系统

数字对象标识符10.4230/LIPIcs.CVIT.2016.23

1 引言

线性逻辑（LL） [18] 提出了一种资源意识型逻辑方法，其中公式不能任意复制或删除。它引入了两种称为指数模态的模态算子，以受控的方式恢复复制和删除公式的能力。当然模态 $!A$ 表示有义务按所需次数复制和删除公式 A，而为何不模态 $?A$ 表示有权按希望的次数复制和删除公式 A。这使 LL 成为建模并发、内存管理和计算复杂性等资源敏感现象的合适语言。为了探究这些思想带来的计算后果，可以采用命题即类型范式，将命题解释为类型，将证明解释为程序，并将证明规范化解释为程序求值。其典型例子是极小逻辑与简单类型 λ-演算之间的对应关系。命题即类型范式已扩展到许多其他逻辑系统，尤其是线性逻辑及其各种片段。

© John Open Access 和 Joan R. Public；依据知识共享署名 4.0 国际许可协议授权
第42届重要主题会议（CVIT 2016）。编辑：John Q. Open 和 Joan R. Access；文章编号 23；页码 23:1–23:55 莱布尼茨国际信息学会议录
达格施图尔城堡 – 莱布尼茨信息学中心，Dagstuhl 出版社，德国

经典对称性与 λ 演算之间的张力。线性逻辑以具有众多对称性而闻名。这一点在相继式演算表述中或许最为明显：在这类表述中，一个逻辑联结词（例如“！”）的左规则，是其对偶联结词（例如“？”）右规则的镜像。这类对称性在经典逻辑（CL）中也存在，但在直觉主义逻辑中则没有。例如，在 CL 和 LL 中，肯定一个命题 A 作为论题，恰好对应于否定它 A 作为假设——这正是经典归谬法的关键。另一种相关的对称性体现于经典的逆否律，该律指出 $A \to B$ 等价于 $\neg B \to \neg A$。这种对称性的一个重要方面是，人们预期可以将否定定义为对合联结词，从而使 $\neg\neg A = A$ 成为严格的等式；特别是，这意味着在 A 的证明与其否定 $\neg A$ 的证明之间进行切割时，不会优先考虑任何一方。相比之下，在直觉主义情形中，$\neg A$ 对应于函数类型$A \to \bot$，但一般而言，任意类型 B 都不能被理解为函数类型。

当逻辑以（单一结论的）自然演绎风格呈现时，所得到的计算形式体系是 λ-演算的一种变体。如何以这种风格表述既展现经典对称性、又具备规范性等良好计算性质的系统，并非显而易见。例如，在经典命题逻辑中，Barbanera 和 Berardi 的经典 λ-演算 [7] 具有对称性但不合流，而 Parigot 的 $\lambda\mu$- 演算 [25] 则合流但不对称（例如，否定不是对合的[1]）。对于线性逻辑，如何为那些涉及右侧含有多个公式的相继式的逻辑联结词制定恰当的自然演绎规则，目前尚不清楚。例如，乘性合取的右引入规则从 $\Gamma \vdash A$、B 推导出 $\Gamma \vdash A \parr B$，而 why-not 模态的右收缩规则从 $\Gamma \vdash ?A$、$?A$ 推导出 $\Gamma \vdash ?A$ 。

直觉主义与基于相继式的系统。经典对称性与 λ 演算难以协调，这或许解释了为什么现有文献中，从命题即类型范式的角度研究线性逻辑的大多数工作都采取了两种途径之一。一方面，某些系统（如直觉主义线性逻辑或双重上下文直觉主义线性逻辑） [9, 8] 将线性逻辑限制在**直觉主义** 片段内。直觉主义线性逻辑的表述通过限制公式和相继式可能具有的“形状”，避开了上述困难；在这种限制下，一个判断包含若干输入 公式和一个特定的输出 公式。例如，在直觉主义线性逻辑中，乘法析取被限制性更强的线性蕴含取代，而 why-not 模态则被完全移除。这些限制使得我们能够构造行为良好的直觉主义线性 λ 演算，其中，相继式 $A_1, \ldots, A_n \vdash B$的证明被视为一个单一的顺序程序，它接收 n 个输入并产生一个输出。然而，这样做的代价是失去了经典对称性，并排除了一大类公式和证明，使底层的计算机制未能得到探索。

另一方面，也有对应于不受限制的（即 经典）线性逻辑的系统，这些系统通常源自线性逻辑的**相继式演算** 表述。正如前面提到的，基于相继式的表述具有对称性；在这种设定下，切消呈现出强正规化和合流性等良好性质。公式不承担特定的输入或输出角色：相继式 $\vdash A_1, \ldots, A_n$ 的证明被理解为 n 交互进程 [1, 28, 29]的并行复合。因此，基于这些原则的演算可以视为并发系统，与其说类似于 λ-演算，不如说更接近进程演算。在这些系统中，还包括**证明网**等图形形式体系。它们有意设计成抽象掉相继式演算的置换规则。这使得我们能够在更高层次上进行推理

[1] 不仅是 $\neg\neg A \neq A$，而且 $\neg\neg A \supset A$ 不可证明 [3, 推论1]。

，但同时也使公理化推理变得困难：例如，要在证明助手中形式化证明网，就需要选择具体的项作为证明网的代表，而显式置换规则的需求也会再次出现。

这留下了一个尚未解决的问题：能否为（经典）线性逻辑设计一种单结论自然演绎系统，同时保留经典对称性和理想的计算特性。在这种系统中，证明仍可被理解为“函数式”程序，并可作为线性函数式编程语言和证明助手的基础。

迈向经典线性 λ演算。我们的出发点是一个自然演绎系统，其中仅包含乘性合取($\otimes$)和线性蕴含($\multimap$)作为联结词，即对应于乘性线性逻辑(MLL)。对合否定算子 $(\cdot)^{\perp}$ 基本上可由等式 $(A \multimap B)^{\perp} = A \otimes B^{\perp}$及其对偶定义。在 MLL 的直觉主义片段中，线性蕴含的消去规则是线性的肯定前件规则，它指出，由 $A \multimap B$ 和 A 可得出 B。一个初步观察是，要恢复经典 MLL，所缺的唯一部分就是加入线性的否定后件规则，该规则指出，由 $A \multimap B$ 和 $B^{\perp}$ 可得出 $A^{\perp}$。由此得到的推理系统——从纯粹逻辑的角度来看——恰好能证明 MLL 的所有有效相继式。此外，这也引出了如何为其提供计算解释的问题，也就是如何设计一种证明规范化过程。定义计算解释的关键在于标准的替换操作，以及据我们所知一种新的操作，我们称之为反代换。

线性反代换原理。肯定前件对应于应用：线性函数 $t\colon A \multimap B$可以应用于参数 $s\colon A$，得到结果 $t \bullet s\colon B$。从计算的角度来看，由 λ-抽象与应用相互作用形成的可约式，可以通过通常的 β-规则进行归一化，执行简化 $(\lambda a.\, t) \bullet s \rightsquigarrow t\{a := s\}$。右侧 $t\{a := s\}$表示将 t 中唯一自由出现的 a 替换为 s。否定后件规则对应于一种相对不那么熟悉的操作，我们称之为反应用：线性函数 $t\colon A \multimap B$ 可以对项 $s\colon B^{\perp}$ 进行“反应用”，得到结果 $t \blacktriangledown s\colon A^{\perp}$。由 λ- 抽象与反应用相互作用形成的可约式，可以通过一条新规则进行归一化，该规则执行简化 $(\lambda a.\, t) \blacktriangledown s \rightsquigarrow t\{a \backslash\backslash s\}$。右侧 $t\{a \backslash\backslash s\}$对应于一种非标准操作，我们称之为反代换。直观地说，$t\{a \backslash\backslash s\}$是这样一个表达式：抓住 t 中 a的唯一出现，并从中“向外拉”，从而将项 t 由内向外翻转。该操作通过对 t进行结构归纳来定义。例如，若 $t, a\colon A \otimes B$ 是一个张量对，且 $s\colon A \multimap B^{\perp}$，那么 $t, a\{a \backslash\backslash s\}$ 最终会得到项 $s \bullet t\colon B^{\perp}$，其中 s 应用于 t。a 出现的唯一性（即线性性）对于定义这一概念至关重要。

贡献摘要。 我们探讨了一种命题即类型对应，其针对乘法指数线性逻辑 （MELL）的单边自然演绎表述，并基于新颖的反代换概念，其中证明被建模为函数表达式而非进程。所得的 λ_{MELL}-演算为 MELL 中的所有证明提供项见证，并且是强正规化且合流的。它采用了一种作为强双模拟的结构等价概念，我们认为该概念本身亦具有独立的研究价值。若干著名的经典逻辑项赋值被证明可在 λ_{MELL}中得到模拟，包括 Parigot 的 $\lambda\mu$ [25]、Hasegawa 的 μ DCLL [20, 19] （见附录），以及 Curien 与 Herbelin 的 $\lambda\mu\tilde{\mu}$-演算 [13]。部分证明骨架及补充定义见

附录。完整证明参见 [10] 。

2 预备知识

本节通过通常的单边序列表示回顾 MLL 和 MELL（含单位元）.

乘法线性逻辑。我们假设给定一个可数的原子公式 α，β，.....每个原子公式都有相应的负版本 $\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$，.....。**MLL公式**集合定义如下:

$$A, B, \ldots ::= \alpha \mid \overline{\alpha} \mid A \otimes B \mid A \multimap B$$

逻辑联结词 $\otimes$ 和 $\multimap$ 称为乘法的。线性否定是对合算子 $(\cdot)^{\perp}$，其定义如下:

$$\alpha^{\perp} := \overline{\alpha} \qquad \overline{\alpha}^{\perp} := \alpha \qquad (A \otimes B)^{\perp} := A \multimap B^{\perp} \qquad (A \multimap B)^{\perp} := A \otimes B^{\perp}$$

在 MLL 中，我们将线性蕴含（$\multimap$）而非乘法析取（$\parr$）作为原始联结词；后者是更常见的选择。这只是表示上的小差异，因为 $\multimap$ 和 $\parr$ 可以相互定义；事实上，可以定义 $A \parr B := A^{\perp} \multimap B$。

MLL 中的判断形式为 $\vdash \Gamma$，其中 Γ 是由 MLL 公式构成的有限多重集。注意，使用多重集可以避免显式引入交换规则的需要。我们用Γ，Γ' 表示有限多重集 Γ 和 Γ' 的多重集并。有效 MLL 判断由以下规则归纳定义。

▶ **定义 1**（有效 MLL 判断）。

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ L\text{-}AX \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma', A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Gamma'}\ L\text{-}CUT \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma', B}{\vdash \Gamma, \Gamma', A \otimes B}\ L\text{-}\otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A^{\perp}, B}{\vdash \Gamma, A \multimap B}\ L\text{-}\multimap$$

乘法指数线性逻辑。MELL 公式的**集合**定义如下:

$$A, B, \ldots ::= \alpha \mid \overline{\alpha} \mid A \otimes B \mid A \parr B \mid \mathbb{1} \mid \perp \mid !A \mid ?A$$

联结词 $\otimes$ 和 $\parr$，以及单位元 $\mathbf{1}$ 和 $\perp$，称为乘法的；而模态算子 ! 和 ? 称为指数的。线性否定是对合算子 $(\cdot)^{\perp}$，定义如下:

$$\alpha^{\perp} := \overline{\alpha} \qquad \overline{\alpha}^{\perp} := \alpha \qquad (A \otimes B)^{\perp} := A^{\perp} \parr B^{\perp} \qquad (A \parr B)^{\perp} := A^{\perp} \otimes B^{\perp}$$
$$(!A)^{\perp} := ?A^{\perp} \qquad (?A)^{\perp} := !A^{\perp} \qquad \mathbb{1}^{\perp} := \perp \qquad \perp^{\perp} := \mathbb{1}$$

与 MLL 不同，在 MELL 中我们将乘法析取（$\parr$）作为原始联结词。再次说明，这只是为了改善表述而作的一点小调整；在 MELL 中可以定义$A \multimap B := A^{\perp} \parr B$。判断形式为 $\vdash \Gamma$，其中 Γ 是由 MELL 公式构成的有限多重集。有效 MELL 判断由以下规则归纳定义。

▶ **定义 2**（有效 MELL 判断）。

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ L\text{-}AX \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma', A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Gamma'}\ L\text{-}CUT \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma', B}{\vdash \Gamma, \Gamma', A \otimes B}\ L\text{-}\otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ L\text{-}\parr$$

$$\frac{}{\vdash \mathbb{1}}\ L\text{-}\mathbb{1} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}\ L\text{-}\perp \qquad \frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ L\text{-}!P \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ L\text{-}?W \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ L\text{-}?D \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ L\text{-}?C$$

3 基于逆否的乘法线性逻辑演算

本节介绍 λ_{MLL}**演算**，这是我们对 MLL 的命题即类型解释。**项** 和**分情况上下文** 的集合定义如下：

$$\begin{array}{lll} \text{(Terms)} & t, s, \ldots & ::= \quad a \mid \langle t, s\rangle \mid s[\langle a, b\rangle := t] \mid \lambda a.\, t \mid t \bullet s \mid t \blacktriangledown s \\ \text{(Case contexts)} & \mathsf{L} & ::= \quad \Box \mid \mathsf{L}[\langle a, b\rangle := t] \end{array}$$

项包括线性 λ-演算的标准构造：线性变量 a、b、……，它们取值于一个可数无限集合；张量引入 t，s 以及消去 $t[a,\ b := s]$；λ 抽象 $\lambda a.\, t$ 和应用 $t \bullet s$。此外，它们还包括一种新颖的构造：反应用 $t \blacktriangledown s$。从逻辑角度来看，应用和反应用都对应于蕴含的消去。如前所述，应用对应于肯定前件，而反应用对应于否定后件。变量的自由出现和约束出现按预期定义，其中 $t[a,\ b := s]$ 约束 t 中 a、b 的自由出现，而 $\lambda a.\, t$ 约束 t 中 a 的自由出现。项按约束变量的 α-重命名视为等同。

分情况上下文是带有子项空位（$\Box$）的张量消去序列，该空位可由任意给定的 λ_{MLL} 项填入。我们用 $\mathsf{L}\langle t\rangle$（或亦记作 $t\mathsf{L}$）表示将 L 中空位的唯一出现替换为 t 后所得的项，此过程中可能会捕获 t 中的自由变量。我们将使用分情况上下文进行远程归约。

类型判断具有形式 $\Gamma \vdash t : A$，其中 A 是一个乘法线性逻辑公式，Γ 是一个类型环境，即把变量映射到乘法线性逻辑公式的偏函数，记作 $\Gamma = (a_1 : A_1, \ldots, a_n : A_n)$，并假定其定义域有限。有效判断由以下给出：

▶ **定义 3**（有效 λ_{MLL} 类型判断）。

$$\frac{}{a : A \vdash a : A}\ \textit{M-AX} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma' \vdash s : B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \langle t, s\rangle : A \otimes B}\ \textit{M-I}\otimes \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \otimes B \quad \Gamma', a : A, b : B \vdash s : C}{\Gamma, \Gamma' \vdash s[\langle a, b\rangle := t] : C}\ \textit{M-E}\otimes$$

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda a.\, t : A \multimap B}\ \textit{M-I}\multimap \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \multimap B \quad \Gamma' \vdash s : A}{\Gamma, \Gamma' \vdash t \bullet s : B}\ \textit{M-E}\multimap_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \multimap B \quad \Gamma' \vdash s : B^{\perp}}{\Gamma, \Gamma' \vdash t \blacktriangledown s : A^{\perp}}\ \textit{M-E}\multimap_2$$

规则以自然演绎的引入／消去对风格呈现，其中最值得注意的一点是，线性蕴含允许两种不同的消去规则。第一种 m-e$\multimap_1$（肯定前件）对应于 λ演算中项的标准应用。第二种 m-e$\multimap_2$（否定后件）是我们的新构造——反应用——的类型规则。后者是我们类型系统中唯一严格的经典规则。下述结果从命题即类型的观点证明了 λ_{MLL} 演算对应于乘法线性逻辑。该引理的陈述依赖于一种记号滥用：若 Γ 是公式的多重集$\Gamma = (A_1, \ldots, A_n)$，则我们写 $\Gamma^{\perp} \vdash t : B$ 以表示 $a_1 : A_1^{\perp}, \ldots, a_n : A_n^{\perp} \vdash t : B$，其中 $a_1, \ldots, a_n$ 是一组互不相同的线性变量。

▶ **引理 4**（λ_{MLL} [第 16] 页的证明）**（可靠性与完备性）.**

- **可靠性**。如果 $\Gamma \vdash t : A$ 在 λ_{MLL} 中成立，那么 $\vdash \Gamma^{\perp}, A$ 在乘法线性逻辑中成立。**完备性**。如果 $\vdash \Gamma_0$ 在乘法线性逻辑 中成立，并且 Γ, A 是 Γ_0 的任意置换，则存在一个项 t，使得 $\Gamma^{\perp} \vdash t : A$ 在 λ_{MLL}中成立。

注意，如果相继式 $\vdash A_1, \ldots, A_n$ 在 MLL 中成立，那么完备性允许选择其中的 A_i中的<一定>一个作为论题，将其余公式的否定（$A_1^{\perp}, \ldots, A_{i-1}^{\perp}, A_{i+1}^{\perp}, \ldots, A_n^{\perp}$）作为假设。例如，有效的 MLL 相继式 $\vdash A^{\perp}, B^{\perp}, A \otimes B$ 有三种可能的

"解读" λ_{MLL}，且它们全部有效。完备性同时保证存在三个项 t_1、t_2、t_3，使得 $a:\ A, b:\ A \multimap B^{\perp} \vdash t_1:\ A^{\perp}$ 以及 $a:\ A, b:\ A \multimap B^{\perp} \vdash t_2:\ B^{\perp}$以及 $a:\ A, b:\ B \vdash t_3:\ A \otimes B$。此外，完备性的证明是构造性的，因此可以从 MLL 中的推导有效地恢复出项 t_1、t_2和 t_3。

▶ 注 5. 若缺少 m-e$\multimap_2$，完备性便不成立。例如，很容易看出，相继式 $\vdash A \otimes (C \multimap C)\ A^{\perp} \otimes (B \multimap B)$ 在乘法线性逻辑中是有效的。然而，若缺少 m-e$\multimap_2$，则不存在项 t 和变量 a，使得 $a: A \multimap (C \otimes C^{\perp}) \vdash t:\ A^{\perp} \otimes (B \multimap B)$ 或 $a:\ A^{\perp} \multimap (B \otimes B) \vdash t:\ A \otimes (C \multimap C)$ 能在 λ_{MLL} 中导出。二者都能在 λ_{MLL} 中导出。例如：

$$\dfrac{\dfrac{a : A \multimap (C \otimes C^{\perp}) \vdash a : A \multimap (C \otimes C^{\perp}) \quad \cdot \vdash \lambda c.\, c : C \multimap C}{a : A \multimap (C \otimes C^{\perp}) \vdash a\blacktriangledown(\lambda c.\, c) : A^{\perp}}\ \text{M-E}\multimap_2 \qquad \cdot \vdash \lambda b.\, b : B \multimap B}{a : A \multimap (C \otimes C^{\perp}) \vdash \langle a\blacktriangledown(\lambda c.\, c), \lambda b.\, b\rangle : A^{\perp} \otimes (B \multimap B)}\ \text{M-I}\otimes$$

线性项。若每个自由变量恰好出现一次，且每个绑定子的作用域内每个约束变量恰好出现一次，则称一个项是线性的。可类型化项都是线性的：若 $\Gamma \vdash t:\ B$，则 t 是线性的，并且 Γ 中的变量恰好是 t 的自由变量。

λ_{MLL}演算的归约语义依赖两种替换操作。首先，线性代换 $t\{a := s\}$ 表示将线性变量 a 用项 s 在 t 中进行标准的避免变量捕获的代换。该操作与类型判定相容，即若在 λ_{MLL} 中有 $\Gamma, a:\ A \vdash t:\ B$ 和 $\Gamma' \vdash s:\ A$，则也有 $\Gamma, \Gamma' \vdash t\{a := s\}:\ B$。其次，我们引入反代换，记作 $t\{a \backslash\backslash s\}$。

▶**定义 6**（对 λ_{MLL} 的反代换）。设 t 是一个线性项，且 a 是一个自由线性变量，满足 $a \in$ 自由变量(t)。我们用"$*_i$"来简写条件 $a \in$ 自由变量(t_i)。反代换操作 $t\{a \backslash\backslash s\}$通过对 t 的结构归纳定义如下：

$$a\{a \backslash\backslash s\} := s \qquad (t_1[\langle b, c\rangle := t_2])\{a \backslash\backslash s\} := \begin{cases} t_1\{a \backslash\backslash s\}[\langle b, c\rangle := t_2] & \text{if } *_1,\ a \notin \{b, c\} \\ t_2\{a \backslash\backslash \lambda b.\, t_1\{c \backslash\backslash s\}\} & \text{if } *_2 \end{cases}$$

$$(\lambda b.\, t')\{a \backslash\backslash s\} := t'\{a \backslash\backslash c\}[\langle b, c\rangle := s] \qquad \langle t_1, t_2\rangle\{a \backslash\backslash s\} := \begin{cases} t_1\{a \backslash\backslash s\blacktriangledown t_2\} & \text{if } *_1 \\ t_2\{a \backslash\backslash s \bullet t_1\} & \text{if } *_2 \end{cases}$$

$$(t_1 \bullet t_2)\{a \backslash\backslash s\} := \begin{cases} t_1\{a \backslash\backslash \langle t_2, s\rangle\} & \text{if } *_1 \\ t_2\{a \backslash\backslash t_1\blacktriangledown s\} & \text{if } *_2 \end{cases} \qquad (t_1\blacktriangledown t_2)\{a \backslash\backslash s\} := \begin{cases} t_1\{a \backslash\backslash \langle s, t_2\rangle\} & \text{if } *_1 \\ t_2\{a \backslash\backslash t_1 \bullet s\} & \text{if } *_2 \end{cases}$$

例如，$(\lambda b.\, a \bullet b)\{a \backslash\backslash s\} = (a \bullet b)\{a \backslash\backslash c\}[b, c := s] = a\{a \backslash\backslash b, c\}[b, c := s] = b, c[b, c := s]$。反代换也与类型判定相容：

▶ **引理 7** (MLL 反向替换的类型相容性 [证明见第 19])。若$\Gamma,\ a:\ A \vdash t:\ B$且 $\Gamma' \vdash s:\ B^{\perp}$ 在 λ_{MLL}中成立，则 $\Gamma,\ \Gamma' \vdash t\{a \backslash\backslash s\}:\ A^{\perp}$亦成立。

在 λ_{MLL}中的归约。在 $\to$ λ_{MLL}-演算中，归约关系定义在**线性项**上，是以下三个归约规则的上下文闭包：

$$\begin{array}{lll} (\lambda a.\, t)\mathsf{L} \bullet s & \mapsto_{\beta\lambda\mathsf{L}} & t\{a := s\}\mathsf{L} \\ (\lambda a.\, t)\mathsf{L}\blacktriangledown s & \mapsto_{\beta\lambda\mathsf{R}} & t\{a \backslash\backslash s\}\mathsf{L} \\ t[\langle a, b\rangle := \langle s, r\rangle\mathsf{L}] & \mapsto_{\beta\otimes} & t\{a := s\}\{b := r\}\mathsf{L} \quad (b \notin \mathsf{fv}(s)) \end{array}$$

注意，对线性项的限制是必要的，以便规则$\mapsto_{\beta\lambda\mathsf{R}}$ 的右侧是良定义的，因为反代换并未对任意项定义。由于

分情况上下文的存在，这些规则被称为以“远距离”方式运作。例如，$(\lambda a.\, t)[\langle b, c\rangle := r] \bullet s$ 是一个可约式，尽管 λ-抽象与应用并未彼此直接“接触”。

强正规化与合流性。我们将线性项 t 的大小记为 $\mathsf{sz}(t)$，定义为 t 中项构造子的数量。假设 $a \in \mathsf{fv}(t)$，该度量满足以下两个性质：$\mathsf{sz}(t\{a := s\}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s)$ 和 $\mathsf{sz}(t\{a \backslash\backslash s\}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s)$，这是由线性性所致。由此容易看出，每个归约步骤都会严格减小项的大小；因此，λ_{MLL}-演算是强正规化的。根据纽曼引理，合流性问题随即归结为局部合流性（即弱 Church–Rosser 性质），这可以通过对所有共同起始步骤进行系统的分类讨论来证明。

▶**命题 8.** λ_{MLL} 是强正规化且合流的。

4 基于逆否的 MELL 演算

本节介绍 λ_{MELL}，即我们基于反代换构建的 MELL 命题即类型演算。**项**和**正向消去上下文**的集合定义如下：

$$
\begin{array}{llll}
\text{(Terms)} & t, s, \ldots & ::= & a \mid u \mid \langle t, s\rangle \mid t[\langle a, b\rangle := s] \mid \parr(a, b).t \mid t \bullet s \mid t \blacktriangledown s \\
 & & \mid & !a.t \mid t[!u := s] \mid ?u.t \mid t \blacktriangleright^{a} s \mid t \lightning s \mid \star \mid t[\star := s] \\
\text{(Positive elim. contexts)} & \mathsf{L} & ::= & \Box \mid \mathsf{L}[\langle a, b\rangle := t] \mid \mathsf{L}[!u := t] \mid \mathsf{L}[\star := t]
\end{array}
$$

项包括：线性变量 $a, b, \ldots$，取值范围为一个可数无限集合；不受限变量 $u, v, \ldots$，取值范围为一个可数无限集合；张量引入 t, s 和消去子 $t[a, b := s]$；par 引入 $\parr(a, b).t$；应用 $t \bullet s$；反应用 $t \blacktriangledown s$；of-course 引入 $!a.t$ 和消去子 $t[!u := s]$；why-not 引入 $?u.t$ 和消去子 $t \blacktriangleright^{a} s$；矛盾 $t \lightning s$；单位引入 $\star$ 和消去子 $t[\star := s]$。变量的自由出现和约束出现按通常方式定义，其中 $t[a, b := s]$ 和 $\parr(a, b).t$ 在 t 中约束 a, b 的自由出现；$!a.t$ 和 $t \blacktriangleright^{a} s$ 在 t 中约束 a 的自由出现；而 $t[!u := s]$ 和 $?u.t$ 在 t 中约束 u 的自由出现。项视为在约束变量的 α-重命名下等价。我们将形式为 $[a, b := t]$, $[!u := t]$ 和 $[\star := t]$ 的表达式称为正消去子[2]。正消去子统称为 $[\mathsf{p} := t]$，其中 p 称为模式，而 $\mathsf{fv}(\mathsf{p})$ 定义如下：$\mathsf{fv}(a, b) = \{a, b\}$，$\mathsf{fv}(!u) = \{u\}$，以及 $\mathsf{fv}(\star) = \varnothing$。

判断具有形式 $\Delta; \Gamma \vdash t : A$，其中 A 是一个 MELL 公式，Δ（相应地，Γ）是一个**无限制（相应地，线性）类型环境**，即一个将无限制（相应地，线性）变量映射到类型的偏函数。可推导的判断在图 1 中定义。

讨论。 规则按照自然演绎中的标准做法，以引入／消去对的形式呈现。特别是，底没有引入规则。我们的呈现满足局部内在和谐 [15, 17]：局部可靠性（消去规则不会“太强”）和局部完备性（消去规则不会“太弱”）。如果 $\lambda a.\, t$ 是 $\parr(a,\ b)$。$(t \lightning b)$ 的简写，那么可以添加这样一条规则：从 $\Delta;\ \Gamma,\ a$ 推出 $\Delta;\ \Gamma \vdash \lambda a.\, t :\ A^{\perp}$；$A \vdash t :\ \perp$，并删去所有的 m-e$\otimes$、m-e$\parr_1$、m-e$\parr_2$、m-e!、m-e? 和 m-e1（这些规则都可以推导出来），这与经典命题逻辑的 [7] 风格一致。然而，归约语义会引入临界对，导致合流性失效[3],，因此我们不这样做。

[2] 这一术语源于极化线性逻辑。[3] 例如，如果 $u :\ \perp \parr \perp$ 且 $v :\ \perp \parr \mathbb{1}$，则 $(\lambda a.\, u \bullet a) \lightning (\lambda b.\, v \blacktriangledown b)$ 既归约为 $u \bullet (\lambda b.\, v \blacktriangledown b)$ 也归约为 $v \blacktriangledown (\lambda a.\, u \bullet a)$。

$$\frac{}{\Delta;a:A\vdash a:A}\,\text{M-AX}\qquad \frac{}{\Delta,u:A;\cdot\vdash u:A}\,\text{M-UAX}\qquad \frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:B}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash\langle t,s\rangle:A\otimes B}\,\text{M-I}\otimes$$

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash s:A\otimes B\quad \Delta;\Gamma',a:A,b:B\vdash t:C}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t[\langle a,b\rangle:=s]:C}\,\text{M-E}\otimes\qquad \frac{\Delta;\Gamma,a:A,b:B\vdash t:\bot}{\Delta;\Gamma\vdash\parr(a,b).t:A^\bot\parr B^\bot}\,\text{M-I}\parr$$

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\parr B\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:A^\bot}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\bullet s:B}\,\text{M-E}\parr_1\qquad \frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\parr B\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:B^\bot}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\blacktriangledown s:A}\,\text{M-E}\parr_2$$

$$\frac{\Delta;a:A\vdash t:\bot}{\Delta;\cdot\vdash !a.t:!A^\bot}\,\text{M-I}!\qquad \frac{\Delta;\Gamma\vdash s:!A\quad \Delta,u:A;\Gamma'\vdash t:B}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t[!u:=s]:B}\,\text{M-E}!$$

$$\frac{\Delta,u:A^\bot;\Gamma\vdash t:\bot}{\Delta;\Gamma\vdash ?u.t:?A}\,\text{M-I}?\qquad \frac{\Delta;\Gamma\vdash s:?A\quad \Delta;a:A\vdash t:\bot}{\Delta;\Gamma\vdash t\blacktriangleright^a s:\bot}\,\text{M-E}?$$

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash t:B\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:B^\bot}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\not\downarrow s:\bot}\,\text{M-I}\bot\qquad \frac{}{\Delta;\cdot\vdash\star:\mathbb{1}}\,\text{M-I}\mathbb{1}\qquad \frac{\Delta;\Gamma\vdash s:\mathbb{1}\quad \Delta;\Gamma'\vdash t:A}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t[\star:=s]:A}\,\text{M-E}\mathbb{1}$$

图 1 λ_{MELL} 的类型规则。

MELL 的自然演绎有许多不同的表述方式。尽管这些表述在逻辑上可能等价（即 它们证明的恰好是所有有效的 MELL 序列），但它们展现出不同的计算行为。 λ_{MELL} 中的规则经过精心选择，能够定义出性质良好的反代换操作。

▶**引理 9 (可靠性与完备性**（λ_{MELL} [证明见第 23]页）。

- **可靠性**。 若 $\Delta;\Gamma\vdash t:A$ 在 λ_{MELL}中成立，则 $\vdash ?\Delta^\bot,\Gamma^\bot,A$ 在 MELL中成立。**完备性**。 若 $\vdash\Gamma_0$
- 在 MELL 中成立，且 Γ,A 是 Γ_0的任意置换，则存在一个项 t，使得 $\cdot;\Gamma^\bot\vdash t:A$ 在 λ_{MELL}中成立。

替换与反代换。 λ_{MELL}-演算的归约语义依赖于三种替换概念：线性代换（$t\{a:=s\}$）、非受限代换（$t\{u:=s\}$）和反代换（$t\{a\backslash\backslash s\}$）。线性（分别为非受限）代换就是将线性（分别为非受限）变量替换为一个项，同时避免变量捕获。要定义反代换，我们需要调整线性项这一概念，使其适用于 λ_{MELL}-演算。项 λ_{MELL} 是线性的，当且仅当满足以下各项：1）每个自由线性变量恰好出现一次；2）每个约束线性变量都在其绑定子的作用域内恰好出现一次；3）形如 $!a.t$ 的子项不含自由线性变量；4）在形如 $t\blacktriangleright^a s$的子项中， t里只有 a 作为自由线性变量出现。

▶**定义 10** (反代换)。 操作 $t\{a\backslash\backslash s\}$ 在去掉定义 *6* 中关于 λ 抽象和张量消去的子句，并加入图 *2* 中的子句后，定义在线性项上。

例如：$((\parr(c,d).s)[\star:=a]\bullet t)\{a\backslash\backslash\star\}=(\parr(c,d).s)[\star:=a]\{a\backslash\backslash t,\star\}=a\{a\backslash\backslash\parr(c,d).s\not\downarrow t,\star\}=\parr(c,d).s\not\downarrow t,\star$。
反代换与类型判定相容:

▶ 引理 11（逆代换的类型相容性 [证明见第 30] 页）。如果 $\Delta;\Gamma,a:A\vdash t:B$和 $\Delta;\Gamma'\vdash s:B^\bot$ 在 λ_{MELL}中成立，那么 $\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\{a\backslash\backslash s\}:A^\bot$也成立。

$$
\begin{array}{rcl}
(t_1[\langle b,c\rangle := t_2])\{a \backslash\!\backslash s\} & := & \begin{cases} t_1\{a \backslash\!\backslash s\}[\langle b,c\rangle := t_2] & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_1), a \notin \{b,c\} \\ t_2\{a \backslash\!\backslash \parr(b,c).(t_1 \not\downarrow s)\} & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_2) \end{cases} \\
(\parr(b,c).t)\{a \backslash\!\backslash s\} & := & t\{a \backslash\!\backslash \star\}[\langle b,c\rangle := s] \\
(!b.t)\{a \backslash\!\backslash s\} & := & (\text{impossible, as } !b.t \text{ has no free linear variables}) \\
t_1[!u := t_2]\{a \backslash\!\backslash s\} & := & \begin{cases} t_1\{a \backslash\!\backslash s\}[!u := t_2] & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_1) \\ t_2\{a \backslash\!\backslash ?u.t_1 \not\downarrow s\} & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_2) \end{cases} \\
(?u.t)\{a \backslash\!\backslash s\} & := & t\{a \backslash\!\backslash \star\}[!u := s] \\
(t_1 \blacktriangleright^b t_2)\{a \backslash\!\backslash s\} & := & \begin{cases} (\text{impossible as } \mathsf{flv}(t_1) = \{b\} \text{ and } a \neq b) & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_1) \\ t_2\{a \backslash\!\backslash !b.t_1\}[\star := s] & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_2) \end{cases} \\
(t_1 \not\downarrow t_2)\{a \backslash\!\backslash s\} & := & \begin{cases} t_1\{a \backslash\!\backslash t_2\}[\star := s] & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_1) \\ t_2\{a \backslash\!\backslash t_1\}[\star := s] & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_2) \end{cases} \\
\star\{a \backslash\!\backslash s\} & := & (\text{impossible, as } \star \text{ has no free linear variables}) \\
t_1[\star := t_2]\{a \backslash\!\backslash s\} & := & \begin{cases} t_1\{a \backslash\!\backslash s\}[\star := t_2] & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_1) \\ t_2\{a \backslash\!\backslash t_1 \not\downarrow s\} & \text{if } a \in \mathsf{fv}(t_2) \end{cases}
\end{array}
$$

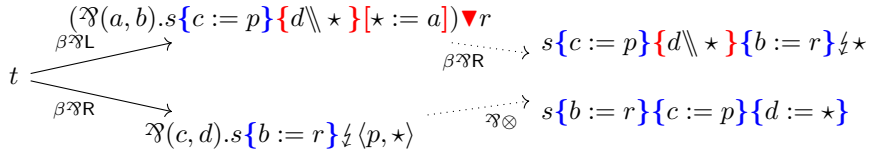
图 2 λ_{MELL} 的反代换：我们采用定义 6 中的各条款，去掉 λ 抽象和张量消去的条款，并添加上述条款。

归约语义学。 λ_{MELL} 中的归约是按照项上的一种称为结构等价的等价关系定义的。我们先介绍预归约（定义 12），其中不涉及结构等价；接着介绍结构等价（定义 13），最后介绍正式的归约（定义 16）。

▶ **定义 12 (** λ_{MELL} 中的预归约)。记作 $\to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$，它由以下归约公理的上下文闭包给出，其中假定两侧在相同上下文中具有相同的类型。

$$
\begin{array}{lll}
(\parr(a,b).t)\mathsf{L} \bullet r & \mapsto_{\beta\parr\mathsf{L}} & t\{a := r\}\{b \backslash\!\backslash \star\}\mathsf{L} \qquad (b \notin \mathsf{fv}(r)) \\
(\parr(a,b).t)\mathsf{L} \blacktriangledown r & \mapsto_{\beta\parr\mathsf{R}} & t\{b := r\}\{a \backslash\!\backslash \star\}\mathsf{L} \qquad (a \notin \mathsf{fv}(r)) \\
t[\langle a,b\rangle := \langle s,r\rangle\mathsf{L}] & \mapsto_{\beta\otimes} & t\{a := s\}\{b := r\}\mathsf{L} \qquad (b \notin \mathsf{fv}(s)) \\
t[!u := (!a.s)\mathsf{L}] & \mapsto_{\beta!} & t\{u := s\{a \backslash\!\backslash \star\}\}\mathsf{L} \\
t \blacktriangleright^a (?u.s)\mathsf{L} & \mapsto_{\beta?} & s\{u := t\{a \backslash\!\backslash \star\}\}\mathsf{L} \\
(\parr(a,b).t)\mathsf{L} \not\downarrow \langle s,r\rangle\mathsf{K} & \mapsto_{\parr\otimes} & t\{a := s\}\{b := r\}\mathsf{LK} \qquad (b \notin \mathsf{fv}(s)) \\
\langle s,r\rangle\mathsf{L} \not\downarrow (\parr(a,b).t)\mathsf{K} & \mapsto_{\otimes\parr} & t\{a := s\}\{b := r\}\mathsf{LK} \qquad (b \notin \mathsf{fv}(s)) \\
(!a.t)\mathsf{L} \not\downarrow (?u.r)\mathsf{K} & \mapsto_{!?} & r\{u := t\{a \backslash\!\backslash \star\}\}\mathsf{LK} \\
(?u.r)\mathsf{L} \not\downarrow (!a.t)\mathsf{K} & \mapsto_{?!} & r\{u := t\{a \backslash\!\backslash \star\}\}\mathsf{LK}
\end{array}
$$

讨论。前五个归约公理对应引入／消去对。其余公理类似于主割消去情形，是保证合流性所必需的（但正如下文所述，它们并不足够）。在 $\beta\parr\mathsf{L}$、$\beta\parr\mathsf{R}$、$\beta\otimes$、$\parr\otimes$ 和 $\otimes\parr$ 右侧呈现替换与反代换的顺序并不重要，因为 $t\{a := r\}\{b \backslash\!\backslash \star\} = t\{b \backslash\!\backslash \star\}\{a := r\}$，鉴于 $b \notin \mathsf{fv}(r)$，而且 $t\{a := s\}\{b := r\} = t\{b := r\}\{a := s\}$，因为 $b \notin \mathsf{fv}(s)$。即使加入最后四个归约公理，预归约仍不具合流性。考虑 $t = (\parr(a,b).(\parr(c,d).s)[\star := a] \bullet p)\blacktriangledown r$，其中，例如 $b \in \mathsf{fv}(s)$。它可以有两种归约方式：



项 $s\{c := p\}\{d \setminus\!\setminus \star\}\{b := r\} \lightning \star$ 和 $s\{b := p\}\{c := p\}\{d := \star\}$ 是不同的。对于类型为 $\bot$ 的项 t，将 $t \lightning \star$ 和 t 视为相等是合理的。接下来，我们将引入项等价的概念，它包含这一等式及其他等式。事实证明，相对于预归约，这种等价概念是一种强双模拟。

4.1 结构等价

▶**定义 13**（结构等价）。表层上下文 S 为下列表达式中的任意一种：

$$\mathfrak{P}(a,b).\Box \quad \langle \Box, t\rangle \quad \langle t, \Box\rangle \quad \Box \bullet t \quad t \bullet \Box \quad \Box \blacktriangledown t \quad t \blacktriangledown \Box$$

$$\Box \lightning t \quad t \lightning \Box \quad ?u.\Box \quad \Box[\mathsf{p} := t] \quad t[\mathsf{p} := \Box] \quad t \blacktriangleright^a \Box$$

注意，$\Box \blacktriangleright^a t$ 以及 $!a.\Box$ 被排除在表层上下文集合之外。一个项 r 对表层上下文 S 是自由的，如果 $S\langle r\rangle$ 不绑定 r 的变量的自由出现。结构等价 定义为下列公理的自反、对称、传递及上下文闭包。在每个等式中，假定两边在相同的上下文中具有相同的类型：

$$\begin{array}{lll}
S\langle t\rangle[\mathsf{p} := r] & \equiv_{\mathsf{Prop}} & S\langle t[\mathsf{p} := r]\rangle \quad (\mathsf{fv}(\mathsf{p}) \cap \mathsf{fv}(S) = \varnothing \text{ and } r \text{ is free for } S) \\
t[\star := \star] & \equiv_{\beta\star} & t \\
t[\star := s] & \equiv_{\mathsf{Symm}\star} & s[\star := t] \\
t\{a \setminus\!\setminus \star\} \lightning r & \equiv_{\mathsf{split}} & t\{a := r\}
\end{array}$$

讨论。第一个等式允许正消去子自由传播。但请注意，Prop 不会将消去子传播到当然构造子 $!a.t$ 之下，也不会传入为何不消去子 $t \blacktriangleright^a s$ 的左参数中（这些是非线性位置）。第二个等式对应于关于 1 的引入／消去迂回；它作为归约规则并不表现良好，因此被建模为一个等式。第三个等式允许同为类型 1 的项 t 与 s 在该类型的消去子中的位置自由对换。事实上，只要有 $t : \bot$，便有 $t[\star := s] \equiv t \lightning s$。第四个等式表明，任何类型为 $\bot$ 的项都可以理解为源自一个矛盾。它在关联反代换与替换方面至关重要。特别地，若 $t : \bot$，则 $t\{a \setminus\!\setminus r\} \equiv t\{a := r\}$。我们强调，这些等式适用于带类型项。例如，$\mathsf{Symm}\star$ 应读作：若 $\Delta; \Gamma \vdash s : 1$ 且 $\Delta; \Gamma' \vdash t : 1$，则 $\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash t[\star := s] \equiv s[\star := t] : 1$。

结构等价作为一种理论是相容的，因为 $t \equiv s$ 蕴含 $\mathsf{fv}(t) = \mathsf{fv}(s)$，因此 $a \equiv b$ 不可导出；这里的线性变量 a 和 b 任意，且满足$a \neq b$。此外，我们所有的替换概念都与结构等价相容。特别地，若 $s \equiv r$，则 $t\{a \setminus\!\setminus s\} \equiv t\{a \setminus\!\setminus r\}$ 且 $s\{a \setminus\!\setminus t\} \equiv r\{a \setminus\!\setminus t\}$。这一事实的证明依赖一系列辅助结果，这些结果涉及三种替换概念及其与 $\equiv$的相互作用。我们特别指出其中两条，因为它们涉及线性代换和反代换，值得一提。设 $\{t, s, r\}$ 是一组线性项，满足 $a \in \mathsf{fv}(t)$，并设 $b \neq a$ 满足 $b \in \mathsf{fv}(t) \cup \mathsf{fv}(s)$。那么：

1. If $b \in \mathsf{fv}(t)$, then $t\{a \setminus\!\setminus s\}\{b \setminus\!\setminus r\} \equiv t\{b \setminus\!\setminus s\}\{a := r\}$

2. 若 $b \in \mathrm{fv}(s)$，则 $t\{a\backslash\backslash s\}\{b\backslash\backslash r\} \equiv s\{b\backslash\backslash t\{a := r\}\}$
3. 若 $b \in \mathrm{fv}(s)$，则 $s\{b := t\}\{a\backslash\backslash r\} \equiv t\{a\backslash\backslash s\{b\backslash\backslash r\}\}$

本节的主要结果是，结构等价是预归约的**强双模拟**。这一结果的重要性在于，它使我们能够将项上的归约概念提升到模 $\equiv$ 的项等价类上。

▶ **定理 14** (强双模拟 [第 38])。 设 t、s 是两个带类型线性项。若 $t \equiv s$ 且 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} t'$，则存在一个线性项 s'，使得 $s \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s'$ 且 $t' \equiv s'$。

定理 14 的证明（以及涉及这一等价概念的其他结果）因最后一个方程分裂中出现反代换和替换而变得复杂。证明围绕结构等价的一种替代刻画展开，在这种刻画中，反代换和替换并未出现在其公理中（参见 附录中的定义 45）。下面的引理展示了一些最有趣的导出方程（参见 附录中的引理 46）：

▶ **引理 15** （ $\equiv$中的一些导出方程）。

$$
\begin{array}{rcll}
\star \not\downarrow t & \equiv & t & (\text{若 } t\colon \bot) \\
t \not\downarrow s & \equiv & s \not\downarrow t & \\
t\{a \backslash\backslash \star\}[\star := r] & \equiv & t\{a \backslash\backslash r\} & \\
\langle r, t\rangle \not\downarrow s & \equiv & r \not\downarrow (s \blacktriangledown t) & \\
\langle t, r\rangle \not\downarrow s & \equiv & r \not\downarrow (s \bullet t) & \\
(s \bullet t) \not\downarrow r & \equiv & t \not\downarrow (s \blacktriangledown r) & \\
(\parr(a, b).s) \not\downarrow t & \equiv & s[\langle a, b\rangle := t] &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
(?u.t) \not\downarrow r & \equiv & t[!u := r] & \\
(!a.t)[\star := p] \not\downarrow r & \equiv & p \not\downarrow (t \blacktriangleright^{a} r) & \\
(!a.t) \not\downarrow r & \equiv & t \blacktriangleright^{a} r & \\
(s \not\downarrow t) \not\downarrow r & \equiv & s \not\downarrow t[\star := r] & \\
t[\star := s] & \equiv & t \not\downarrow s & (\mathit{if}\ t : \bot) \\
\star[\star := t] & \equiv & t & \\
t\{a \backslash\backslash r\} & \equiv & t\{a := r\} & (\mathit{if}\ t : \bot)
\end{array}
$$

现在我们为 λ_{MELL}-演算定义归约。

▶**定义 16** (λ_{MELL}-归约)。 λ_{MELL} 中的归约定义为模结构等价的预归约： $t \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$，当且仅当存在项 t' 和 s' 使得 $t \equiv t' \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s' \equiv s$。

λ_{MELL} 具有**主体约简** 性质：

▶ **引理 17** ([证明见第 38])。 $\Delta;\ \Gamma \vdash t\colon A$ 且 $t \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 蕴含 $\Delta;\ \Gamma \vdash s\colon A$。

4.2 强正规化与合流性

我们使用可约性候选集技术证明 λ_{MELL} 的强正规化。

预备知识。令 $\mathrm{T}_A := \{t \mid \exists \Delta, \Gamma.\ \Delta;\ \Gamma \vdash t\colon A\}$ 表示类型为 A 的项集合，并令 $\mathrm{SN}_A := \{t \in \mathrm{T}_A \mid t \text{ is SN}\}$ 表示其中强正规化（相对于预归约 $\to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$）的项所构成的子集。若项 t 是 SN，则令 $|t| \in \mathbb{N}$ 表示从 t 开始的最长归约序列的长度（根据 König 引理，这是有定义的，因为$\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$ 是有限分支的）。若 A 是一种类型且 $X \subseteq \mathrm{T}_A$，我们用 $t \lhd_A X$ 表示： $t \in \mathrm{T}_A$ 蕴含 $t \in X$。若 $X \subseteq \mathrm{T}_A$，则将其正交集定义为 $X^{\bot} = \{t \in \mathrm{T}_{A^{\bot}} \mid \forall s \in X.\ t \not\downarrow s \lhd_{\bot} \mathrm{SN}_{\bot}\}$。$(\cdot)^{\bot}$ 满足以下（典型）性质。若 $X, Y \subseteq \mathrm{T}_A$，则：1） $X \subseteq Y$ 蕴含$Y^{\bot} \subseteq X^{\bot}$；2） $X \subseteq X^{\bot\bot}$；3） $X^{\bot} = X^{\bot\bot\bot}$。给定带类型项集合 $X \subseteq \mathrm{T}_A$ 和$Y \subseteq \mathrm{T}_B$，我们定义：

$$
\begin{array}{lcl}
X \otimes Y & := & \{\langle t, s\rangle \in \mathcal{T}_{A \otimes B} \mid t \in X \wedge s \in Y\} \\
?X & := & \{?u.t \in \mathcal{T}_{?A^{\bot}} \mid \forall s \in X,\ t\{u := s\} \lhd_{\bot} \mathrm{SN}_{\bot}\}
\end{array}
$$

可约性候选集。 对于每种类型 A，我们关联一个项集合 $[\![A]\!] \subseteq \mathcal{T}_A$，称为该类型 A的可约性候选集：

$$[\![\alpha]\!] := \mathrm{SN}_\alpha \quad [\![\alpha^\perp]\!] := \mathrm{SN}_{\overline{\alpha}} \quad [\![A \otimes B]\!] := ([\![A]\!] \otimes [\![B]\!])^{\perp\perp} \quad [\![A \parr B]\!] := ([\![A^\perp]\!] \otimes [\![B^\perp]\!])^{\perp}$$
$$[\![\bot]\!] := \mathrm{SN}_\bot \quad [\![\mathbb{1}]\!] := \mathrm{SN}_{\mathbb{1}} \quad [\![?A]\!] := (?[\![A^\perp]\!])^{\perp\perp} \quad [\![!A]\!] := (?[\![A]\!])^{\perp}$$

给定线性类型环境 Γ、非线性类型环境 Δ 以及替换σ，我们称 σ 相容 于 Γ，Δ，记作 $\sigma \models \Delta, \Gamma$，如果：1）对所有 $a:\ A \in \Gamma$，我们有 $\sigma(a) \in [\![A]\!]$；并且 2）对所有 $u:\ B \in \Delta$，我们有 $\sigma(u) \in [\![B]\!]$。

▶ **定理 18**（充分性 [证明见第 42]页）。 对每一个有效判断 $\Delta;\ \Gamma \vdash t:\ A$，以及每一个 σ，使得 $\sigma \models \Delta,\ \Gamma$，我们有 $t^\sigma \lhd_A [\![A]\!]$。

特别地，取恒等代换，我们便得到**强正规化** 作为推论 .

合流性。 鉴于 λ_{MELL} 满足强正规化，只需证明它具有弱 Church–Rosser 性，即可得到合流性。这可以通过繁琐的分类讨论来证明。

▶**命题 19。** $\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$ 是合流的。

无类型项上的归约并不合流。考虑项 $(\lambda a.\,((\lambda b.(\langle b, c\rangle \blacktriangleright^c a)) \bullet t))\blacktriangledown r$。它不可类型化，因为 $\lambda b.\langle b, c\rangle$ 没有类型 $\bot$。如上划线和下划线所示，它可以用两种不同方式归约。然而，这些归约结果不可汇合。

$$\begin{array}{ccc} \underline{(\lambda a.\,\underline{((\lambda b.\,(\langle b, c\rangle \blacktriangleright^c a)) \bullet t)})\blacktriangledown r} & \xrightarrow{\beta\parr\mathsf{L}} & \lambda a.\,\langle t, c\rangle \blacktriangleright^c a \blacktriangledown r \\ \downarrow{\scriptstyle \beta\parr\mathsf{R}} & & \vdots{\scriptstyle \beta\parr\mathsf{R}} \\ (\lambda b.\,(\langle b, c\rangle \blacktriangleright^c a)) \bullet t)\{a \backslash\!\backslash r\} = (!c.(\lambda b.\,\langle b, c\rangle))[\star := \langle t, r\rangle] & \cdots\not\to & (!c.\langle t, c\rangle)[\star := r] \end{array}$$

5 将经典 λ-演算翻译为 λ_{MELL}

λ_{MELL}-演算能够模拟 Parigot 的 $\lambda\mu$ 以及 Curien 和 Herbelin 的 $\lambda\mu\tilde{\mu}$，还能够模拟 Hasegawa 的 μ DCLL（因篇幅限制，相关内容见附录）。下面简要回顾前两种演算，并介绍将它们翻译为 λ_{MELL}-演算的相应方法。

5.1 通过 T 和 Q 翻译模拟 Parigot 的 $\lambda\mu$

我们简要回顾 Parigot 的 $\lambda\mu$-演算 [25], 。该演算通过命题即类型范式，从具有多结论的经典命题逻辑自然演绎项指派中得到。设 $x, y, \ldots$（分别为 $a, b, \ldots$）取自一个可数的**变量**（分别为**续延变量**）集合。$\lambda\mu$ 的类型和项定义如下：

$$\text{(Types) } A, B ::= \bot \mid \alpha \mid A \supset B \qquad \text{(Terms) } M, N ::= x \mid \lambda x.\,M \mid M\,N \mid [a]M \mid \mu a.M$$

判断具有以下形式：$\Gamma \vdash M:\ A \mid \Sigma$，其中 Γ 是将变量映射到类型的偏函数，Σ是将续延变量映射到类型的偏函数。类型规则如下：

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A \mid \Sigma}\ \text{P-AX} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \mid \Sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.\,M : A \supset B \mid \Sigma}\ \text{P-LAM} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \mid \Sigma, a : A}{\Gamma \vdash [a]M : \bot \mid \Sigma, a : A}\ \text{P-NAME}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \supset B \mid \Sigma \quad \Gamma \vdash N : A \mid \Sigma}{\Gamma \vdash M\ N : B \mid \Sigma}\ \text{P-APP} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \bot \mid \Sigma, a : A}{\Gamma \vdash \mu a.M : A \mid \Sigma}\ \text{P-MU}$$

我们将 $M\{a\lhd N\}$ 记作**结构替换**，它将 M 中形如$[a]O$ 的子项替换为 $[a](O\ N)$；并将 $M\{b\frown a\}$ 记作将所有 b 在 M 中的自由出现重命名为 a。

T-翻译。 Danos 等人最初提出的 T-翻译 [14], 将经典逻辑嵌入线性逻辑。它作用于公式和序列演算证明。这里我们将其扩展为把 $\lambda\mu$-项翻译为 λ_{MELL}-项，使其能够模拟归约。 $\lambda\mu$ 中的归约记作 $\to_\mu$，定义为以下规则的上下文闭包：

$$\begin{array}{llll} (\lambda x.\,M)\ N & \mapsto_\beta & M\{x := N\} & \qquad [a](\mu b.M) \mapsto_\rho M\{b\frown a\} \\ (\mu a.M)\ N & \mapsto_\mu & \mu a.(M\{a\lhd N\}) & \qquad \mu a.[a]M \mapsto_\theta M \qquad (a \notin \mathsf{fv}(M)) \end{array}$$

记作 $!t := !a.(t \leftthreetimes a)$。公式和 $\lambda\mu$-项的 T-翻译定义如下：

$$\begin{array}{rcl} \bot^{\mathsf{T}} & := & \bot \\ \alpha^{\mathsf{T}} & := & \alpha \\ (A \supset B)^{\mathsf{T}} & := & ?!(A^{\mathsf{T}})^\perp \parr ?B^{\mathsf{T}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_k^{\mathsf{T}} & := & x \leftthreetimes !k \\ (\lambda x.\,M)_k^{\mathsf{T}} & := & \parr(a,b).M_{k'}^{\mathsf{T}}[!x := a][!k' := b] \leftthreetimes k \\ (M\ N)_k^{\mathsf{T}} & := & M_{k'}^{\mathsf{T}}\{k' := \langle !?k''.N_{k''}^{\mathsf{T}}, !k\rangle\} \\ ([a]M)_k^{\mathsf{T}} & := & M_{k'}^{\mathsf{T}}\{k' := a\} \leftthreetimes k \\ (\mu a.M)_k^{\mathsf{T}} & := & M_{k'}^{\mathsf{T}}\{k' := \star\}\{a := k\} \end{array}$$

▶ **引理 20** (类型保持 [证明见第 46]页)。 若 $\Gamma \vdash M :: A \mid \Sigma$ 在 $\lambda\mu$中成立，则? $\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^\perp$, $k : (A^{\mathsf{T}})^\perp$; $\cdot \vdash M_k^{\mathsf{T}} :: \bot$ 在 λ_{MELL}中成立，其中 k 是一个新的线性变量。

▶ **命题 21** (模拟 [证明见第 47]页)。 如果 $M \to_\mu N$，那么 $M_k^{\mathsf{T}} \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N\mathsf{T}k$。

Q-翻译。 Q-翻译也在 [14], 中引入，是将经典逻辑嵌入线性逻辑的另一种方式。T-翻译是一种按名称调用 翻译，而众所周知，Q-翻译则是一种按值调用 翻译。为了研究 Q-翻译，我们首先需要回顾 $\lambda\mu$-演算 [26]中的按值调用归约概念。

的类型和项 与 $\lambda\mu$的相同。我们使用记号 $M\{a\lhd V\}$表示通常的（右）结构替换， $M\{a\lhd^\star V\}$ 表示左结构替换。中的归约记为 $\to_{\mu_V}$，定义为以下归约公理的上下文闭包：

$$\begin{array}{llll} (\lambda x.\,M)\ V & \mapsto_{\beta_V} & M\{x := V\} \\ (\mu a.M)\ V & \mapsto_{\mu_V} & \mu a.(M\{a\lhd V\}) \\ V\ (\mu a.M) & \mapsto_{\mu'_V} & \mu a.(M\{a\lhd^\star V\}) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} [a](\mu b.M) & \mapsto_\rho & M\{b\frown a\} \\ \mu a.[a]M & \mapsto_\theta & M \qquad (a \notin \mathsf{fv}(M)) \end{array}$$

类型的 Q-翻译定义如下：

$$\bot^{\mathsf{Q}} := !\bot \qquad \alpha^{\mathsf{Q}} := !\alpha \qquad (A \supset B)^{\mathsf{Q}} := !((A^{\mathsf{Q}})^\perp \parr ?B^{\mathsf{Q}})$$

我们将 A^{Q} 定义为满足 $A^{\mathsf{Q}} = !A^{\mathsf{Q}}$ 的函数。值定义如下： $V ::= x \mid \lambda x.\,M$。值和项的 $(\cdot)^{\mathsf{Q}}$-翻译通过相互递归定义如下：

$$\begin{array}{rcl} x^{\underline{\mathsf{Q}}} & := & x \\ (\lambda x.\,M)^{\underline{\mathsf{Q}}} & := & \parr(a,b).M_k^{\mathsf{Q}}[!x := a][!k := b] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} V_k^{\mathsf{Q}} & := & !V^{\underline{\mathsf{Q}}} \leftthreetimes k \\ (M\ N)_k^{\mathsf{Q}} & := & M_{k''}^{\mathsf{Q}}\{k'' := ?v.N_{k'}^{\mathsf{Q}}\{k' := v\blacktriangledown !k\}\} \\ ([a]M)_k^{\mathsf{Q}} & := & M_{k'}^{\mathsf{Q}}\{k' := a\} \leftthreetimes k \\ (\mu a.M)_k^{\mathsf{Q}} & := & M_{k'}^{\mathsf{Q}}\{k' := \star\}\{a := k\} \end{array}$$

▶ **引理 22** (类型保持 [证明见第 48])。 若 $\Gamma \vdash M :: A \mid \Sigma$ 在 $\lambda\mu_V$ 中成立，则$\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^\perp$, $k \div (A^{\mathsf{Q}})^\perp$; $\cdot \vdash M^{\mathsf{Q}} :: \bot$ 在 λ_{MELL} 中成立。

▶ **命题 23** （模拟 [第 49] 页的证明）。若 $M \to_{\mu_V} N$，则 $M\mathsf{Q}_k \doteq_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N_k^{\mathsf{Q}}$，其中$\doteq_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$ 表示 $\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$的自反、对称和传递闭包。

5.2 通过 T-翻译模拟 Curien 和 Herbelin 的 $\lambda\mu\tilde{\mu}$

Curien 和 Herbelin [13] 提出了一种具有相继式演算风格的经典逻辑项指派，此后它已成为研究经典逻辑计算解释的基石。其优点在于，它揭示了相继式演算天然对称性所蕴含的编程语言中的隐藏对偶性（参见 [16] 中的教程）。

我们先回顾 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 的类型集和项集，它们定义如下. 注意，项分为三种句法类别（项、余项和命令）：

$$\begin{array}{lrcl} \text{(Types)} & A, B & ::= & \alpha \mid A \supset B \end{array} \qquad \begin{array}{lrcl} \text{(Terms)} & v, v' & ::= & x \mid \mu\alpha.\, c \mid \lambda x.\, v \\ \text{(Co-terms)} & e, e' & ::= & \alpha \mid v \cdot e \\ \text{(Commands)} & c, c' & ::= & \langle v \mid e \rangle \end{array}$$

类型系统包含三个判断 $\Gamma \vdash v :\ A \mid \Delta$、$\Gamma \mid e :\ A \vdash \Delta$ 和 $c :\ (\Gamma \vdash \Delta)$，其类型规则如下：

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A \mid \Delta}\ \textsc{VarR} \qquad \frac{}{\Gamma \mid \alpha : A \vdash \alpha : A, \Delta}\ \textsc{VarL} \qquad \frac{\Gamma \vdash v : A \mid \Delta \quad \Gamma \mid e : B \vdash \Delta}{\Gamma \mid (v \cdot e) : A \supset B \vdash \Delta}\ \textsc{AppL}$$

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \alpha : B, \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.\, c : B, \Delta}\ \textsc{ActivR} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash v : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.\, v : A \supset B \mid \Delta}\ \textsc{Abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash v : A \mid \Delta \quad \Gamma \mid e : A \vdash \Delta}{\langle v \mid e \rangle : (\Gamma \vdash \Delta)}\ \textsc{cut}$$

在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中的归约由以下两个归约公理的上下文闭包给出，其中 $v_1\{x :=\ v_2\}$ 和 $c\{\alpha :=\ e\}$ 是标准替换：

$$\langle \lambda x.\, v_1 \mid v_2 \cdot e \rangle \quad \mapsto \quad \langle v_1\{x := v_2\} \mid e \rangle \qquad\qquad \langle \mu\alpha.\, c \mid e \rangle \quad \mapsto \quad c\{\alpha := e\}$$

Danos 等人的 T-翻译针对 [14] 公式、判断和$\lambda\mu\tilde{\mu}$的项定义如下：

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{\mathsf{T}} & := & \alpha \\ (A \supset B)^{\mathsf{T}} & := & ?!(A^{\mathsf{T}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{T}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} c : (\Gamma \vdash \Delta) & \mapsto & ?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}\perp}; \cdot \vdash c^{\mathsf{T}} : \perp \\ \Gamma \mid e : A \vdash \Delta & \mapsto & ?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}\perp}; \cdot \vdash e^{\mathsf{T}} : !(A^{\mathsf{T}\perp}) \\ \Gamma \vdash v : A \mid \Delta & \mapsto & ?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}\perp}; \cdot \vdash v^{\mathsf{T}} : ?A^{\mathsf{T}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x^{\mathsf{T}} & := & x \\ (\mu\alpha.\, c)^{\mathsf{T}} & := & ?\alpha.c^{\mathsf{T}} \\ (\lambda x.\, v)^{\mathsf{T}} & := & ?u.(u \leftthreetimes (a, b).(v^{\mathsf{T}} \leftthreetimes b[!x := a])) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \alpha^{\mathsf{T}} & := & !\alpha \\ (v \cdot e)^{\mathsf{T}} & := & !\langle !v^{\mathsf{T}}, e^{\mathsf{T}} \rangle \\ \langle v \mid e \rangle^{\mathsf{T}} & := & v^{\mathsf{T}} \leftthreetimes e^{\mathsf{T}} \end{array}$$

▶**引理 24**（类型保持 [证明见第 50]）。

1. 若 $c : (\Gamma \vdash \Delta)$ 在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}\perp}; \cdot \vdash c^{\mathsf{T}} : \perp$ 在 λ_{MELL} 中成立。*2.* 若 $\Gamma \mid e : A \vdash \Delta$ 在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}\perp}; \cdot \vdash e^{\mathsf{T}} : !(A^{\mathsf{T}\perp})$ 在 λ_{MELL} 中成立。*3.* 若 $\Gamma \vdash v : A \mid \Delta$ 在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}\perp}; \cdot \vdash v^{\mathsf{T}} : ?A^{\mathsf{T}}$ 在 λ_{MELL} 中成立。

▶ **命题 25**（模拟 [证明见第 50]）。若 $t \to_{\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}} s$，则 $t_k^{\mathsf{T}} \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s_k^{\mathsf{T}}$。

6 相关工作与结论

证明即过程。 虽然这并非我们工作的重点，但已有大量研究探讨如何将切消去解释为并发或并行程序。这个研究方向或许由 Abramsky [1] 率先开启，也可能受到 Girard 本人 [18] 的影响（他曾提到：“线性逻辑的联结词在并行计算方面有着显而易见的含义……”）。此后，该领域涌现出许多研究。较近期的

重要进展包括 Caires 和 Pfenning [12], 发现直觉主义线性逻辑与会话类型之间的紧密对应关系，Wadler [28, 29]将其扩展至经典线性逻辑，以及通过为乘法线性逻辑（MLL）的多结论自然演绎表述指派项来建模异步通信 [4]。更多参考文献见 [4, 第11]节。

证明即函数。 Troelstra [27]介绍了线性逻辑的单边自然演绎表述。然而，该表述未包含乘性析取和为何不，也没有研究证明规范化。Martini 和 Masini [22]研究了乘性析取联结词，并指出，从自然演绎的角度来看，它此前一直未受关注，因为“在坚持采用单结论系统时，似乎不可能构造出合适的引入-消去对”。我们关于乘性析取的规则与他们的规则相似（消去规则完全相同，引入规则则不同，但可以证明两者等价）。他们的工作既未考虑项指派，也未涉及指数模态。Ramalho Martins 等人 [23]也提出了完整线性逻辑的自然演绎表述，其中考虑了所有联结词，包括加性联结词。他们只证明了弱规范化，未讨论项演算或证明规范化的计算解释。Albrecht 等人 [2]为线性逻辑提出了一种项指派。他们引入了一条名为交换 的推理规则，对应于我们（导出的）逆否替换概念，但与我们工作的相似之处也仅止于此。他们提出的系统$\mathcal{N}$ 存在若干缺陷（参见《前引文》》第 221 页第 2.4 节），包括对推导良构性的全局限制；为避免违反这一限制，需要采用复杂的项归约概念（并行归约）[4]。Bierman [11] 提出了一种适用于完整线性逻辑的 Parigot风格演算，该演算依赖多结论自然演绎。其项指派采用了 Parigot 的结构替换，其中包含许多交换转换（大多数并未列出）。文中还提到可以为乘性析取定义一条规则，但并未对此展开讨论（[11, 第 3.4 节]）。Mazurak 和 Zdancewic [24] 为乘法线性逻辑提出了一种项指派。他们引入了一种函数式语言，其中包含并发原语；这些原语的设计动机是对 Felleisen 的控制算子和中止控制算子进行并行化实现。以下几点使我们的工作与之不同：我们研究的是包含指数模态的 MELL。我们证明了本系统 λ_{MELL} 相对于 MELL 是完备的；而在他们的演算中， [24]这一问题仍未解决。最后，我们的操作语义完全源自证明规范化，而他们的演算包含了若干并非纯粹从证明理论方法中导出的项构造子，例如用于新绑定子的项构造子以及进程的并行复合。最后，还有一些工作基于证明网表述，为线性逻辑提供计算解释。Kesner 最近的一项工作 [21] 便是其中之一，其中将项与证明网相关联。有关证明网方法的更多参考文献，请参见前引文 。

未来工作。 将我们的方法扩展以纳入加性联结词并非易事，因为反代换的定义严重依赖于线性项。这需要进一步研究。此外，通过证明网模拟我们的演算，尤其是结构等价，也颇具意义。将 λ_{MELL} 扩展以包含二阶命题量词应当不会有问题。然而，以 Baelde 等人 [5, 6] 的方式加入不动点则更具挑战性。

[4] 此外，我们认为 $\mathcal{N}$相对于线性逻辑并不完备。问题出在展示线性逻辑中的收缩可由 $\mathcal{N}$捕获的情形中。引理 A.1 的情形 (?C) 未考虑在 $n = 0$的证明中出现 $\vdash ?\alpha, ?\alpha, \beta_1 \ldots, \beta_n$的情况。这个情形似乎无法在 $\mathcal{N}$ 中证明。

用于乘法线性逻辑的基于逆否命题的演算

▶ **引理 4** （λ_{MLL}的完备性和可靠性）。

- **可靠性**。 如果 $\Gamma \vdash t : A$ 在 λ_{MLL} 中成立，那么 $\vdash \Gamma^{\perp}, A$ 在 乘法线性逻辑中成立。**完备性**。
- 如果 $\vdash \Gamma_0$ 在 乘法线性逻辑 中成立，并且 Γ, A 是 Γ_0 的任意一个置换，则存在一个项 t，使得 $\Gamma^{\perp} \vdash t : A$ 在 λ_{MLL}中成立。

证明。 **可靠性**。 对该判断的推导进行归纳:

1. M-AX: 那么 $t = a : A$ 且 $\Gamma = (a : A)$ 并且该推导的形式如下:

$$\frac{}{a : A \vdash a : A}\ \text{M-AX}$$

因此我们可以取:

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ \text{L-AX}$$

2. M-I$\otimes$: 那么 $t = \langle s,\ r\rangle$ 以及 $A = B \otimes C$，且推导的形式为:

$$\frac{\Gamma \vdash s : B \quad \Gamma' \vdash r : C}{\Gamma, \Gamma' \vdash \langle s, r\rangle : B \otimes C}\ \text{M-I}\otimes$$

因此:

$$\frac{\vdash \Gamma^{\perp}, B \quad \vdash \Gamma'^{\perp}, C}{\vdash \Gamma'^{\perp}, \Gamma^{\perp}, B \otimes C}\ \text{L-}\otimes$$

3. M-E$\otimes$: 推导的形式为

$$\frac{\Gamma' \vdash s : B \otimes C \quad \Gamma'', b : B, c : C \vdash r : A}{\Gamma', \Gamma'' \vdash r[\langle b, c\rangle := s] : A}\ \text{M-E}\otimes$$

因此根据归纳假设:

$$\frac{\vdash \Gamma'^{\perp}, B \otimes C \quad \dfrac{\text{IH}}{\vdash \Gamma''^{\perp}, B^{\perp}, C^{\perp}, A}\ \text{L-}\multimap}{\vdash \Gamma'^{\perp}, \Gamma''^{\perp}, A}\ \text{L-CUT}$$

4. M-I$\multimap$: 那么 $t = \lambda b.\, t'$ 以及 $A = B \multimap C$，且推导的形式为:

$$\frac{\Gamma, b : B \vdash t' : C}{\Gamma \vdash \lambda b.\, t' : B \multimap C}\ \text{M-I}\multimap$$

因此，根据归纳假设:

$$\frac{\dfrac{\text{IH}}{\vdash \Gamma^{\perp}, B^{\perp}, C}\ \text{L-}\multimap}{\vdash \Gamma^{\perp}, B \multimap C}$$

5. M-E$\multimap_1$：那么 $t = s \bullet r$ 推导形式如下：

$$\frac{\Gamma' \vdash s : B \multimap A \quad \Gamma'' \vdash r : B}{\Gamma', \Gamma'' \vdash s \bullet r : A}\ \text{M-E}\multimap_1$$

因此由归纳假设：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{IH}\\ \vdash \Gamma'^{\perp}, B \multimap A\end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{IH}\\ \vdash \Gamma''^{\perp}, B\end{array} \quad \frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ \text{L-AX}}{\vdash \Gamma''^{\perp}, A, B \otimes A^{\perp}}\ \text{L-}\otimes}{\vdash \Gamma'^{\perp}, \Gamma''^{\perp}, A}\ \text{L-CUT}$$

6. M-E$\multimap_2$：则 $t = s \blacktriangledown r$ 且该推导具有如下形式：

$$\frac{\Gamma' \vdash s : A^{\perp} \multimap B \quad \Gamma'' \vdash r : B^{\perp}}{\Gamma', \Gamma'' \vdash s \blacktriangledown r : A}\ \text{M-E}\multimap_2$$

因此由归纳假设：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{IH}\\ \vdash \Gamma'^{\perp}, A^{\perp} \multimap B\end{array} \quad \frac{\begin{array}{c}\text{IH}\\ \vdash \Gamma''^{\perp}, B\end{array} \quad \frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ \text{L-AX}}{\vdash \Gamma''^{\perp}, A, A^{\perp} \otimes B^{\perp}}\ \text{L-}\otimes}{\vdash \Gamma'^{\perp}, \Gamma''^{\perp}, A}\ \text{L-CUT}$$

完备性。 根据假设， $\vdash \Gamma_0$ 在乘法线性逻辑中成立。我们对 $\vdash \Gamma_0$的无割导出进行归纳，并诉诸乘法线性逻辑中（众所周知的）割消去定理。

1. L-AX：

于是 $\Gamma_0 = A$ ，且该推导具有如下形式：

$$\frac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ \text{L-AX}$$

并且我们有

$$\frac{}{A \vdash a : A}\ \text{M-AX}$$

2. L-$\otimes$：于是 Γ_0 是 Γ'、 Γ''、 $B \otimes C$，且该推导具有如下形式：

$$\frac{\vdash \Gamma', B \quad \vdash \Gamma'', C}{\vdash \Gamma', \Gamma'', B \otimes C}\ \text{L-}\otimes$$

此外，根据假设，我们知道 Γ'、 Γ''、 $B \otimes C$是 Γ、 A的一个置换。我们分三种情形讨论，具体取决于 Γ'中是否出现 A ，或者 Γ''中是否出现 A ，或者 $A = B \otimes C$：

a. 如果 A 在 Γ'中出现，那么： $\Gamma' = \Gamma''$， A 且推导的形式如下：

$$\frac{\vdash \Gamma'', A, B \quad \vdash \Gamma'', C}{\vdash \Gamma'', A, \Gamma'', B \otimes C}\ \text{L-}\otimes$$

因此，根据归纳假设，存在项 s， r 使得：

$$\dfrac{\overset{\text{IH}}{\Gamma''^{\perp}, a : B^{\perp} \vdash s : A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{b : B \multimap C^{\perp} \vdash b : B \multimap C^{\perp}}\,\text{M-AX} \qquad \overset{\text{IH}}{\Gamma''^{\perp} \vdash r : C}}{b : B \multimap C^{\perp}, \Gamma''^{\perp} \vdash b \blacktriangledown r : B^{\perp}}\,\text{M-E}\multimap_2}{\Gamma''^{\perp}, \Gamma''^{\perp}, b : B \multimap C^{\perp} \vdash s\{a := b \blacktriangledown r\} : A}\,\text{M-SUB}$$

因此只需取 $t :\equiv s\{a :\equiv b \blacktriangledown r\}$。

b. 若 A 出现在 Γ'' 中：那么 $\Gamma'' = \Gamma'''$， A 且推导形式如下

$$\dfrac{\vdash \Gamma, B \quad \vdash \Gamma''', A, C}{\vdash \Gamma, \Gamma''', A, B \otimes C}\,\text{L-}\otimes$$

因此，根据归纳假设，存在项 s， r 使得：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b : B \multimap C^{\perp} \vdash b : B \multimap C^{\perp}}\,\text{M-AX} \qquad \overset{\text{IH}}{\Gamma^{\perp} \vdash s : B}}{\Gamma^{\perp}, b : B \multimap C^{\perp} \vdash b \bullet s : C^{\perp}}\,\text{M-E}\multimap_1 \qquad \overset{\text{IH}}{\Gamma'''^{\perp}, c : C^{\perp} \vdash r : A}}{\Gamma^{\perp}, \Gamma'''^{\perp}, B \multimap C^{\perp} \vdash r\{c := b \bullet s\} : A}\,\text{M-SUB}$$

c. 若 $A = B \otimes C$，且推导形式如下：

$$\dfrac{\vdash \Gamma, B \quad \vdash \Gamma'', C}{\vdash \Gamma, \Gamma'', B \otimes C}\,\text{L-}\otimes$$

因此，根据归纳假设，存在项 s， r 使得：

$$\dfrac{\overset{\text{IH}}{\Gamma^{\perp} \vdash s : B} \qquad \overset{\text{IH}}{\Gamma''^{\perp} \vdash r : C}}{\Gamma^{\perp}, \Gamma''^{\perp} \vdash \langle s, r \rangle : B \otimes C}\,\text{M-I}\otimes$$

3. L-$\multimap$：那么 Γ_0 是 Γ'， $B \multimap C$ 且推导形式如下

$$\dfrac{\vdash \Gamma', B^{\perp}, C}{\vdash \Gamma', B \multimap C}\,\text{L-}\multimap$$

此外，根据假设可知， Γ'， $B \multimap C$ 是 Γ， A的一个置换。我们根据 Γ' 或 $A = B \multimap C$ 中是否出现 A，考虑三种子情形。

a. 如果 A 出现在 Γ'中，那么 $\Gamma' = \Gamma''$， A 且推导形式如下：

$$\dfrac{\vdash \Gamma'', A, B^{\perp}, C}{\vdash \Gamma'', A, B \multimap C}\,\text{L-}\multimap$$

根据归纳假设，我们有：

$$\dfrac{\overset{\text{IH}}{\Gamma'', b : B, c : C^{\perp} \vdash s : A} \qquad \dfrac{}{r : B \otimes C^{\perp} \vdash r : B \otimes C^{\perp}}\,\text{M-AX}}{\Gamma'', B \otimes C^{\perp} \vdash s[\langle b, c \rangle := r] : A}\,\text{M-E}\otimes$$

b. 如果 $A = B \multimap C^{\perp}$ 且推导的形式如下：

$$\frac{\vdash \Gamma', B^{\perp}, C}{\vdash \Gamma', A}\ \text{L-}\multimap$$

因此，根据归纳假设，我们有

$$\frac{\dfrac{\text{IH}}{\Gamma', b : B \vdash t' : C}}{\Gamma' \vdash \lambda b.\, t' : B \multimap C}\ \text{M-I}\multimap$$

◀

▶ **引理 7** (乘法线性逻辑中反代入的类型相容性)。 若 $\Gamma,\ a :\ A \vdash t :\ B$ 和$\Gamma' \vdash s :\ B^{\perp}$ 在 λ_{MLL}中成立，那么 Γ、$\Gamma' \vdash t\{a \backslash\backslash s\} :\ A^{\perp}$也成立。

证明。 我们对 $\Gamma,\ a :\ A \vdash t :\ B$ 的推导进行归纳。

1. M-AX：于是 $\Gamma = \varnothing,\ t = a$ 和 $A = B$。因此我们可以取

$$\frac{}{\Gamma' \vdash s : A^{\perp}}$$

2. M-I⊗：则 $t = \langle t_1,\ t_2 \rangle$ 以及 $B = B_1 \otimes B_2$。根据 $a \in$ 自由变量(t_1) 或 $a \in$ 自由变量(t_2) 的情况，我们考虑两种子情形：

a. 如果 $a \in$自由变量(t_1)：则该推导形式如下：

$$\frac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : B_1 \quad \Gamma_2 \vdash t_2 : B_2}{\Gamma_1, a : A, \Gamma_2 \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : B}\ \text{M-I}\otimes$$

此外，根据假设，我们有 $\Gamma' \vdash s :\ B_1 \multimap B_2^{\perp}$。回顾 $\langle t_1,\ t_2 \rangle \{a \backslash\backslash s\} = t_1\{a \backslash\backslash s \blacktriangledown t_1\}$。因此：

$$\frac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : B_1 \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash s : B_1 \multimap B_2^{\perp} \quad \Gamma_2 \vdash t_2 : B_2}{\Gamma_2, \Gamma' \vdash s \blacktriangledown t_2 : B_1^{\perp}}\ \text{M-E}\multimap_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_1\{a \backslash\backslash s \blacktriangledown t_2\} : A^{\perp}}\ \text{M-COS}$$

b. 如果 $a \in$ 自由变量(t_2)：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : B_1 \quad \Gamma_2, a : B_2 \vdash t_2 : B_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, a : A \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : B_2}\ \text{M-I}\otimes$$

此外，根据假设，我们有 $\Gamma' \vdash s :\ B_1 \multimap B_2^{\perp}$。回顾 $\langle t_1,\ t_2 \rangle \{a \backslash\backslash s\} = t_2\{a \backslash\backslash s \bullet t_1\}$。因此：

$$\frac{\dfrac{\Gamma' \vdash s : B_1 \multimap B_2 \quad \Gamma_1 \vdash t_1 : A_1}{\Gamma_1, \Gamma' \vdash s \bullet t_1 : B^{\perp}}\ \text{M-E}\multimap_1 \qquad \Gamma_2, a : A \vdash t_2 : B_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_2\{a \backslash\backslash s \bullet t_1\} : A^{\perp}}\ \text{M-COS}$$

3. M-E⊗：那么 $t = t_2[\langle b,\ c \rangle :\ = t_1]$。我们根据 $a \in$ 自由变量(t_1)或 $a \in$自由变量(t_2) 来分为两种情形。

a. 若 $a \in$自由变量(t_1)，则推导形式如下：

$$\dfrac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : C_1 \otimes C_2 \quad \Gamma_2, b : C_1, c : C_2 \vdash t_2 : B}{\Gamma_1, a : A, \Gamma_2 \vdash t_2[\langle b, c\rangle := t_1] : B}\ \text{M-E}\otimes$$

此外，根据假设，我们有 $\Gamma' \vdash s : B^\perp$。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2, b : C_1, c : C_2 \vdash t_2 : B \quad \Gamma' \vdash s : B^\perp}{\Gamma_2, b : C_1 \vdash t_2\{c \backslash\!\backslash s\} : C_2^\perp}\ \text{M-COS}}{\Gamma_2 \vdash \lambda b.\, s\{c \backslash\!\backslash B\} : C_1 \multimap C_2^\perp}\ \text{M-I}\multimap \qquad \Gamma_1, a : A \vdash t_1 : C_1 \otimes C_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_2\{a \backslash\!\backslash \lambda b.\, t_1\{c \backslash\!\backslash s\}\} : A^\perp}\ \text{M-COS}$$

b. 若 $a \in$自由变量(t_2)，则推导形式为：

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash t_1 : C_1 \otimes C_2 \quad \Gamma_2, a : A, b : C_1, c : C_2 \vdash t_2 : B}{\Gamma_1, a : A, \Gamma_2 \vdash t_2[\langle b, c\rangle := t_1] : B}\ \text{M-E}\otimes$$

此外，根据假设，我们有 $\Gamma' \vdash s : B^\perp$。

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash t_1 : C_1 \otimes C_2 \qquad \dfrac{\Gamma_2, b : B, c : C, a : A \vdash t_2 : B \quad \Gamma' \vdash s : B^\perp}{\Gamma_2, \Gamma', b : C_1, c : C_2 \vdash t_2\{a \backslash\!\backslash s\} : A^\perp}\ \text{M-COS}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_2\{a \backslash\!\backslash s\}[\langle b, c\rangle := t_1] : A^\perp}\ \text{M-E}\otimes$$

4. M-I$\multimap$:
然后 $t = \lambda b.\, t'$ 和 $B = B_1 \multimap B_2$。推导形式为：

$$\dfrac{\Gamma, a : A, b : B_1 \vdash t' : B_2}{\Gamma, a : A \vdash \lambda b.\, t' : B_1 \multimap B_2}\ \text{M-I}\multimap$$

此外，根据假设，我们有 $\Gamma' \vdash s : B^\perp$。

$$\dfrac{\Gamma' \vdash s : B_1 \otimes B_2^\perp \qquad \dfrac{\Gamma, a : A, b : B_1 \vdash t' : B_2 \qquad \dfrac{}{c : B_2 \vdash c : B_2}\ \text{M-AX}}{\Gamma, b : B_1, c : B_2^\perp \vdash t'\{a \backslash\!\backslash c\} : A^\perp}\ \text{M-COS}}{\Gamma, \Gamma' \vdash t'\{a \backslash\!\backslash c\}[\langle b, c\rangle := s] : A^\perp}\ \text{M-E}\otimes$$

5. M-E$\multimap_1$。
然后 $t = t_1 \bullet t_2$。根据 $a \in$ 自由变量(t_1) 或 $a \in$ 自由变量(t_2) 的情况，我们分两种情形讨论。此外，我们知道 $\Gamma' \vdash s : B^\perp$。

a. 如果 $a \in$自由变量(t_1)，那么推导形式如下：

$$\dfrac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : A \multimap B \quad \Gamma_2 \vdash t_2 : A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \bullet t_2 : B}\ \text{M-E}\multimap_1$$

因此：

$$\dfrac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : A \multimap B \qquad \dfrac{\Gamma_2 \vdash t_2 : A \quad \Gamma' \vdash s : B^\perp}{\Gamma_2, \Gamma' \vdash \langle t_2, s\rangle : A \otimes B^\perp}\ \text{M-I}\otimes}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_1\{a \backslash\!\backslash \langle t_2, s\rangle\} : A^\perp}\ \text{M-COS}$$

b. 若 $a \in$自由变量(t_2) 则推导具有以下形式：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : A \multimap B \quad \Gamma_2, a : A \vdash t_2 : A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \bullet t_2 : B}\ \text{M-E}{\multimap_1}$$

因此：

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash t_1 : A \multimap B \quad \Gamma' \vdash s : B^\perp}{\Gamma_1, \Gamma' \vdash t_1 \blacktriangledown s : A^\perp}\ \text{M-E}{\multimap_2} \qquad \Gamma_2, a : A \vdash t_2 : A}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_2\{a \backslash\backslash t_1 \blacktriangledown s\} : A^\perp}\ \text{M-COS}$$

6. M-E$\multimap_2$:
那么 $t = t_1 \blacktriangledown t_2$ 和 $B = C^\perp$。我们根据 $a \in$自由变量(t_1) 或$a \in$自由变量(t_2) 的情况分为两种情形。此外，我们知道 $\Gamma' \vdash s : \ C$。

a. 如果 $a \in$自由变量(t_1) 那么推导形式如下：

$$\frac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : C \multimap A \quad \Gamma_2 \vdash t_2 : A^\perp}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \blacktriangledown t_2 : C^\perp}\ \text{M-E}{\multimap_2}$$

回想一下，$(t_1 \bullet t_2)\{a \backslash\backslash s\} = t_1\{a \backslash\backslash \langle t_2, s\rangle\}$ 如果 $a \in$ 自由变量(t_1)。因此：

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : C \multimap A \quad \Gamma' \vdash s : C}{\Gamma_1, \Gamma', a : A \vdash t_1 \bullet s : A}\ \text{M-I}{\multimap} \qquad \Gamma_2 \vdash t_2 : A^\perp}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_1\{a \backslash\backslash \langle t_2, s\rangle\} : A^\perp}\ \text{M-COS}$$

b. 如果 $a \in$ 自由变量(t_2)，那么推导具有以下形式：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : C \multimap A \quad \Gamma_2, a : A \vdash t_2 : A^\perp}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1 \blacktriangledown t_2 : C^\perp}\ \text{M-E}{\multimap_2}$$

因此：

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash t_1 : C \multimap A \quad \Gamma' \vdash s : C}{\Gamma_1, \Gamma' \vdash t_1 \bullet s : A}\ \text{M-I}{\multimap} \qquad \Gamma_2, a : A \vdash t_2 : A^\perp}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash t_2\{a \backslash\backslash t_1 \bullet s\} : A^\perp}\ \text{M-COS}$$

◀

▶**定义 26**（大小）。 线性项 t 的大小记作 $\mathsf{sz}(t)$，定义为

$$\begin{array}{rclrcl} \mathsf{sz}(a) & := & 0 & \mathsf{sz}(\langle t, s\rangle) & := & 1 + \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) \\ \mathsf{sz}(s[\langle a, b\rangle := t]) & := & 1 + \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) & \mathsf{sz}(\lambda a.\, t) & := & 1 + \mathsf{sz}(t) \\ \mathsf{sz}(t \bullet s) & := & 1 + \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) & \mathsf{sz}(t \blacktriangledown s) & := & 1 + \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) \end{array}$$

我们将此定义扩展到分情况上下文如下：

$$\mathsf{sz}(\square) := 0 \qquad\qquad \mathsf{sz}(\mathsf{L}[\langle a, b\rangle := t]) := \mathsf{sz}(\mathsf{L}) + \mathsf{sz}(t)$$

▶ **引理 27**。 设 t 是一个线性项，且 $a \in$ 自由变量(t)，那么 $\mathsf{sz}(t\{a := s\}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s)$。

证明。 通过对项的结构进行直接归纳法 t。 ◀

▶ **引理 28**。 设 t 为线性项且 $a \in$ 自由变量(t)，则 $\mathsf{sz}(t\{a \backslash\backslash s\}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s)$。

证明。 通过对项 t的结构进行直接归纳。我们展示应用 $t = t_1 \bullet t_2$的情形，其中 $\mathsf{sz}(t) = \mathsf{sz}(t_1) + \mathsf{sz}(t_2)$。其余情形可用类似的推理得出。

1. 若 $a \in \mathsf{fv}(t_1)$，则 $(t_1 \bullet t_2)\{a \backslash\backslash s\} = t_1\{a \backslash\backslash t_2, s\}$。根据归纳假设，$\mathsf{sz}(t_1\{a \backslash\backslash t_2, s\}) = \mathsf{sz}(t_1) + \mathsf{sz}(t_2, s)$。由于 $\mathsf{sz}(t_2, s) = \mathsf{sz}(t_2) + \mathsf{sz}(s) + 1$，因此可得 $\mathsf{sz}((t_1 \bullet t_2)\{a \backslash\backslash s\}) = \mathsf{sz}(t_1) + \mathsf{sz}(t_2) + \mathsf{sz}(s) + 1 = \mathsf{sz}(t_1 \bullet t_2) + \mathsf{sz}(s)$。2. 若 $a \in \mathsf{fv}(t_2)$，则 $(t_1 \bullet t_2)\{a \backslash\backslash s\} = t_2\{a \backslash\backslash t_1 \blacktriangledown s\}$。根据归纳假设，$\mathsf{sz}(t_2\{a \backslash\backslash t_1 \blacktriangledown s\}) = \mathsf{sz}(t_2) + \mathsf{sz}(t_1 \blacktriangledown s)$。由于 $\mathsf{sz}(t_1 \blacktriangledown s) = \mathsf{sz}(t_2) + \mathsf{sz}(s) + 1$，因此可得 $\mathsf{sz}((t_1 \bullet t_2)\{a \backslash\backslash s\}) = \mathsf{sz}(t_2) + \mathsf{sz}(t_1) + \mathsf{sz}(s) + 1 = \mathsf{sz}(t_1 \bullet t_2) + \mathsf{sz}(s)$。

◀

▶**引理 29.** λ_{MLL} 是强正规化的。

证明。 我们将证明每条归约规则都会严格减小项的大小，即可约式的大小严格大于缩约结果的大小。由于项的大小是非负整数，因此不可能存在无限归约序列。

令 r 表示可约式， r' 表示缩约结果；我们对三条归约规则进行分类讨论。

1. 情形 $(\lambda a.\, t)\mathrm{L} \bullet s \to t\{a := s\}\mathrm{L}$。可约式的大小为 $\mathsf{sz}(r) = \mathsf{sz}((\lambda a.\, t)\mathrm{L} \bullet s) = \mathsf{sz}(\lambda a.\, t) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) + \mathsf{sz}(s) = \mathsf{sz}(t) + 1 + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) + \mathsf{sz}(s)$。对于缩约结果，我们有 $\mathsf{sz}(r') = \mathsf{sz}(t\{a := s\}\mathrm{L}) = \mathsf{sz}(t\{a := s\}) + \mathsf{sz}(\mathrm{L})$；由引理 27 可得 $\mathsf{sz}(t\{a := s\}) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) + \mathsf{sz}(\mathrm{L})$。由此可知 $\mathsf{sz}(r) = \mathsf{sz}(r') + 1$。 2. 情形 $(\lambda a.\, t)\mathrm{L} \blacktriangledown s \to t\{a \backslash\backslash s\}\mathrm{L}$。可约式的大小为 $\mathsf{sz}(r) = \mathsf{sz}((\lambda a.\, t)\mathrm{L} \blacktriangledown s) = \mathsf{sz}(\lambda a.\, t) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) + \mathsf{sz}(s) = \mathsf{sz}(t) + 1 + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) + \mathsf{sz}(s)$。对于缩约结果，我们有 $\mathsf{sz}(r') = \mathsf{sz}(t\{a \backslash\backslash s\}\mathrm{L}) = \mathsf{sz}(t\{a \backslash\backslash s\}) + \mathsf{sz}(\mathrm{L})$；由引理 28 可得 $\mathsf{sz}(t\{a \backslash\backslash s\}) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) + \mathsf{sz}(\mathrm{L})$。由此可知 $\mathsf{sz}(r) = \mathsf{sz}(r') + 1$。 3. 情形 $t[a, b := s, p\mathrm{L}] \to t\{a := s\}\{b := p\}\mathrm{L}$。可约式的大小为 $\mathsf{sz}(r) = \mathsf{sz}(t[a, b := s, p\mathrm{L}]) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s, p\mathrm{L}) + 1 = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s, p) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) + 1 = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) + \mathsf{sz}(p) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) + 1$。对于缩约结果，我们有 $\mathsf{sz}(r') = \mathsf{sz}(t\{a := s\}\{b := p\}\mathrm{L}) = \mathsf{sz}(t\{a := s\}\{b := p\}) + \mathsf{sz}(\mathrm{L})$；由引理 27 可得 $\mathsf{sz}(t\{a := s\}\{b := p\}) + \mathsf{sz}(\mathrm{L}) = \mathsf{sz}(t) + \mathsf{sz}(s) + \mathsf{sz}(p) + \mathsf{sz}(\mathrm{L})$。由此可知 $\mathsf{sz}(r) = \mathsf{sz}(r') + 1$。

◀

B 基于逆否命题的演算MELL

▶引理30（弱化与收缩）。1. $\Delta; \Gamma \vdash t : A$ 蕴含 $\Delta, u : B; \Gamma \vdash t : A$。2. $\Delta, u : B, v : B; \Gamma \vdash t : A$ 蕴含 $\Delta, u : B; \Gamma \vdash t\{v := u\} : A$。

证明。 对 $\Delta; \Gamma \vdash t : A$ 进行归纳，这是对第一项；并对 Δ、$u : B$、$v : B$；$\Gamma \vdash t : A$ 进行归纳，这是对第二项。◀

▶ **引理31** （线性与非受限替换与类型判定相容）。 以下规则在 λ_{MELL} 中是可容许的：

$$\frac{\Delta; \Gamma, a : A \vdash t : B \quad \Delta; \Gamma' \vdash s : A}{\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash t\{a := s\} : B}\ M\text{-}SUB \qquad \frac{\Delta, u : A; \Gamma \vdash t : B \quad \Delta; \cdot \vdash s : A}{\Delta; \Gamma \vdash t\{u := s\} : B}\ M\text{-}USUB$$

证明。 对 Δ 的推导进行归纳法：$\Gamma,\ a:\ A \vdash t:\ B$，对于第一项，以及$\Delta,\ u:\ A;\ \Gamma \vdash t:\ B$ 对于第二项。◀

可以注意到，以下两个判断在逻辑上等价，即第一个可证当且仅当第二个可证：

$$\Delta, u : A; \Gamma \vdash B \qquad \Delta; a : !A, \Gamma \vdash B$$

更确切地说，我们有以下引理：

▶引理 32.

1. 若 $\Delta, u:\ A;\ \Gamma \vdash t:\ B$, 则 $\Delta;\ a:!A, \Gamma \vdash t[!u := a]:\ B$. 2. 若 $\Delta; a:!A, \Gamma \vdash t:\ B$, 则 $\Delta, u:\ A;\ \Gamma \vdash t\{a := !b.(u \not\downarrow b)\}:\ B$,

证明。 对于第一项，我们有：

$$\frac{\Delta; a : !A \vdash a : !A \quad \Delta, u : A; \Gamma \vdash t : B}{\Delta; a : !A, \Gamma \vdash t[!u := a] : B}\ \text{M-E!}$$

对于第二项，我们有：

$$\frac{\dfrac{\Delta; a : !A, \Gamma \vdash t : B}{\Delta, u : A; a : !A, \Gamma \vdash t : B}\ \textsc{Lem.}\ 30 \qquad \dfrac{\Delta, u : A; \cdot \vdash u : A}{\Delta, u : A; \cdot \vdash !b.(u \not\downarrow b) : !A}\ \text{M-I!}}{\Delta, u : A; \Gamma \vdash t\{a := !b.(u \not\downarrow b)\} : B}\ \text{M-SUB}$$

◀

记号：$s[!\vec{u} := t]$用以简写 $s[!u_1 := t_1] \ldots [!u_n := t_n]$。此外，$t\{a :\equiv s\}$ 用以简写$t\{a_1 := s_1\} \ldots \{a_n := s_n\}$。

▶引理 9（λ_{MELL}的逻辑可靠性与完备性）。

- **可靠性。** 若在 λ_{MELL} 中成立 $\Delta; \Gamma \vdash t:\ A$，则在 MELL 中成立 $\vdash ?\Delta^{\perp}, \Gamma^{\perp}, A$。**完备性。** 若在 MELL 中成立 $\vdash \Gamma_0$，且 Γ, A 是 Γ_0的任意一个置换，则存在一个项 t，使得在 λ_{MELL} 中成立 $\cdot; \Gamma^{\perp} \vdash t:\ A$。

证明。 我们先讨论可靠性。对 $\Delta; \Gamma \vdash t:\ A$ 的推导进行归纳。

1. M-AX。推导如下：

$$\frac{}{\Delta; a : A \vdash a : A}\ \text{M-AX}$$

我们可以取：

$$\frac{\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ \text{L-AX}}{\vdash ?\Delta^{\perp}, A^{\perp}, A}\ \text{L-?W}$$

2. M-UAX。推导如下：

$$\frac{}{\Delta, u : A; \cdot \vdash u : A}\ \text{M-UAX}$$

我们可以取：

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ \text{L-AX}}{\vdash ?A^{\perp}, A}\ \text{L-?D}}{\vdash ?\Delta^{\perp}, ?A^{\perp}, A}\ \text{L-?W}$$

3. M-I$\otimes$。推导如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:B}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash\langle t,s\rangle:A\otimes B}\ \text{M-I}\otimes$$

我们可以取：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,A}\text{IH}\qquad\dfrac{}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,B}\text{IH}}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,A\otimes B}\ \text{L-}\otimes}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,\Gamma'^\perp,A\otimes B}\ \text{L-}?\text{C}$$

4. M-E$\otimes$。推导如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\otimes B\quad \Delta;\Gamma',a:A,b:B\vdash s:C}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash s[\langle a,b\rangle:=t]:C}\ \text{M-E}\otimes$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,A\otimes B\qquad\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,A^\perp,B^\perp,C}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,A\multimap B^\perp,C}\ \text{L-}\multimap}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,C}\ \text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,\Gamma'^\perp,C}\ \text{L-}?\text{C}$$

5. M-I$\parr$。推导如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma,a:A,b:B\vdash t:\bot}{\Delta;\Gamma\vdash\parr(a,b).t:A^\perp\parr B^\perp}\ \text{M-I}\parr$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,A^\perp,B^\perp,\bot\quad\vdash \mathbb{1}}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,A^\perp,B^\perp}\ \text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,A^\perp\parr B^\perp}\ \text{L-}\parr$$

6. M-E$\parr_1$。推导如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\parr B\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:A^\perp}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\bullet s:B}\ \text{M-E}\parr_1$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,A^\perp\quad\vdash B^\perp,B}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,B,A^\perp\otimes B^\perp}\ \text{L-}\otimes\qquad\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,A\parr B}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,?\Delta^\perp,\Gamma^\perp,B}\ \text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp,\Gamma'^\perp,\Gamma^\perp,B}\ \text{L-}?\text{C}$$

7. M-E$\parr_2$. 推导如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash t:A\parr B\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:B^\perp}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\blacktriangledown s:A}\ \text{M-E}\parr_2$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^\perp}\,\text{L-AX} \qquad \vdash ?\Delta^\perp, \Gamma'^\perp, B^\perp}{\vdash A, ?\Delta^\perp, \Gamma'^\perp, A^\perp \otimes B^\perp}\,\text{L-}\otimes \qquad \vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp, A \parr B}{\vdash A, ?\Delta^\perp, \Gamma'^\perp, ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp}\,\text{L-CUT}}{\vdash A, ?\Delta^\perp, \Gamma'^\perp, \Gamma^\perp}\,\text{L-?C}$$

8. M-I!。推导如下：

$$\dfrac{\Delta; a : A \vdash t : \bot}{\Delta; \cdot \vdash !a.t : !A^\perp}\,\text{M-I!}$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\text{IH}}{\vdash ?\Delta^\perp, A^\perp, \bot} \qquad \vdash \mathbb{1}}{\vdash ?\Delta^\perp, A^\perp}\,\text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp, !A^\perp}\,\text{L-!P}$$

9. M-E!。推导如下：

$$\dfrac{\Delta; \Gamma \vdash t : !A \quad \Delta, u : A; \Gamma' \vdash s : C}{\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash s[!u := t] : C}\,\text{M-E!}$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp, !A \quad \vdash ?\Delta^\perp, ?A^\perp, \Gamma'^\perp, C}{\vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp, ?\Delta^\perp, \Gamma'^\perp, C}\,\text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp, \Gamma'^\perp, C}\,\text{L-?C}$$

10. M-I?。推导如下：

$$\dfrac{\Delta, u : A^\perp; \Gamma \vdash t : \bot}{\Delta; \Gamma \vdash ?u.t : ?A}\,\text{M-I?}$$

我们取：

$$\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp, ?A, \Gamma^\perp, \bot \quad \vdash \mathbb{1}}{\vdash ?\Delta^\perp, ?A, \Gamma^\perp}\,\text{L-CUT}$$

11. M-E?。有两种情形。

$$\dfrac{\Delta; \Gamma \vdash s : ?A \quad \Delta; a : A \vdash t : \bot}{\Delta; \Gamma \vdash t \blacktriangleright^a s : \bot}\,\text{M-E?}$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp, ?A \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^\perp, A^\perp, \bot \quad \vdash \mathbb{1}}{\vdash ?\Delta^\perp, A^\perp}\,\text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp, !A^\perp}\,\text{L-!P}}{\vdash ?\Delta^\perp, ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp}\,\text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp}\,\text{L-?C}}{\vdash ?\Delta^\perp, \Gamma^\perp, \bot}\,\text{L-}\bot$$

12. M-I⊥。推导如下：

$$\dfrac{\Delta;\Gamma\vdash t:B\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:B^{\perp}}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash t\not\downarrow s:\perp}\ \text{M-I}\perp$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},B\quad \vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma'^{\perp},B^{\perp}}{\vdash ?\Delta^{\perp},?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},\Gamma'^{\perp}}\ \text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^{\perp},?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},\Gamma'^{\perp},\perp}\ \text{L-}\perp}{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},\Gamma'^{\perp},\perp}\ \text{L-}?\text{C}$$

13. M-I$\mathbb{1}$. 推导如下：

$$\dfrac{}{\Delta;\cdot\vdash\star:\mathbb{1}}\ \text{M-I}\mathbb{1}$$

我们取：

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash\mathbb{1}}\ \text{L-}\mathbb{1}}{\vdash ?\Delta^{\perp},\mathbb{1}}\ \text{L-}?\text{W}$$

14. M-E$\mathbb{1}$. 推导如下：

$$\dfrac{\Delta;\Gamma\vdash t:\mathbb{1}\quad \Delta;\Gamma'\vdash s:A}{\Delta;\Gamma,\Gamma'\vdash s[\star:=t]:A}\ \text{M-E}\mathbb{1}$$

我们取：

$$\dfrac{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},\mathbb{1}\qquad \dfrac{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma'^{\perp},A}{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma'^{\perp},A,\perp}\ \text{L-}\perp}{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},?\Delta^{\perp},\Gamma'^{\perp},A}\ \text{L-CUT}}{\vdash ?\Delta^{\perp},\Gamma^{\perp},\Gamma'^{\perp},A}\ \text{L-}?\text{C}$$

接下来我们讨论完备性。对 $\vdash\Gamma_0$ 的无割导出的规模进行归纳法。

1. L-AX：推导以如下形式结束

$$\dfrac{}{\vdash B,B^{\perp}}\ \text{L-AX}$$

根据 $A=B$ 或 $A=B^{\perp}$，有两种情形。

a. $A=B$。则 $\Gamma=B^{\perp}$ 并且

$$\dfrac{}{\cdot;a:B\vdash a:B}\ \text{M-UAX}$$

b. $A=B^{\perp}$。那么 $\Gamma=B$ 以及

$$\dfrac{}{\cdot;a:B^{\perp}\vdash a:B^{\perp}}\ \text{M-UAX}$$

2. L-⊗：推导以此结束

$$\frac{\vdash \Gamma_1, B_1 \quad \vdash \Gamma_2, B_2}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, B_1 \otimes B_2}\ \text{L-}\otimes$$

根据 $A = B_1 \otimes B_2$、$A \in \Gamma_1$ 或 $A \in \Gamma_2$ 是否成立，共有三种情形。

a. $A = B_1 \otimes B_2$. 根据归纳假设两次，$\cdot; \Gamma_1^\perp \vdash s_1 : B_1$ 以及$\cdot; \Gamma_2^\perp \vdash s_2 : B_2$。由以下推导可得结论

$$\frac{\begin{array}{cc}\text{IH} & \text{IH} \\ \cdot; \Gamma_1^\perp \vdash s_1 : B_1 & \cdot; \Gamma_2^\perp \vdash s_2 : B_2\end{array}}{\cdot; \Gamma_1^\perp, \Gamma_2^\perp \vdash \langle s_1, s_2\rangle : B_1 \otimes B_2}\ \text{M-I}\otimes$$

因此，只需取 $t := \langle s_1, s_2\rangle$。

b. $A \in \Gamma_1$。接着 $\Gamma_1 = \Gamma_3, A$。因此，根据归纳假设，存在项 s, r 使得：

$$\frac{\begin{array}{cc}\text{IH} & \dfrac{\dfrac{}{\cdot; b : B_1^\perp \parr B_2^\perp \vdash b : B_1^\perp \parr B_2^\perp}\ \text{M-AX} \quad \begin{array}{c}\text{IH} \\ \cdot; \Gamma_2^\perp \vdash r : B_2\end{array}}{\cdot; b : B_1^\perp \parr B_2^\perp, \Gamma_2^\perp \vdash b \blacktriangledown r : B_1^\perp}\ \text{M-E}\parr_2 \\ \cdot; \Gamma_3^\perp, a : B_1^\perp \vdash s : A & \end{array}}{\cdot; \Gamma_3^\perp, \Gamma_2^\perp, b : B_1^\perp \parr B_2^\perp \vdash s\{a := b \blacktriangledown r\} : A}\ \text{M-SUB}$$

因此只需取 $t := s\{a := b \blacktriangledown r\}$。

c. $A \in \Gamma_2$。则 $\Gamma_2 = \Gamma_3, A$。故由归纳假设，存在项 s、r 使得：

$$\frac{\begin{array}{ccc}\dfrac{\cdot; a : B_1^\perp \parr B_2^\perp \vdash a : B_1^\perp \parr B_2^\perp \quad \begin{array}{c}\text{IH} \\ \cdot; \Gamma_1^\perp \vdash r : B_1\end{array}}{\cdot; a : B_1^\perp \parr B_2^\perp, \Gamma_1^\perp \vdash a \bullet r : B_2^\perp}\ \text{M-E}\parr_1 & & \cdot; \Gamma_3^\perp, b : B_2^\perp \vdash s : A\end{array}}{\cdot; \Gamma_1^\perp, \Gamma_3^\perp, a : B_1^\perp \parr B_2^\perp \vdash s\{b := a \bullet r\} : A}\ \text{M-SUB}$$

3. L-⅋：该推导终止于

$$\frac{\vdash \Gamma_1, B_1, B_2}{\vdash \Gamma_1, B_1 \parr B_2}\ \text{L-}\parr$$

视 $A = B_1 \parr B_2$ 还是 $A \in \Gamma_1$而定，有两种情形。

a. $A = B_1 \parr B_2$。由归纳假设，$\overline{\cdot}; a : \Gamma_1^\perp, b : B_1 \vdash s : B_2$。我们由该推导得出：

$$\frac{\begin{array}{cc}\text{IH} & \\ \cdot; \overline{a} : \Gamma_1^\perp, b : B_1^\perp \vdash s : B_2 & \cdot; c : B_2^\perp \vdash c : B_2^\perp\end{array}}{\cdot; \overline{a} : \Gamma_1^\perp, b : B_1^\perp, c : B_2^\perp \vdash s \not\downarrow c : \bot}\ \text{M-I}\parr$$

$$\cdot; \overline{a} : \Gamma_1^\perp \vdash \parr(b, c).s \not\downarrow c : B_1 \parr B_2$$

因此只需取 $t := \parr(b, c).s \not\downarrow c$。

b. $A \in \Gamma_1$. 因此 $\Gamma_1 = \Gamma_2, A$。根据归纳假设$\overline{\cdot}; a : \Gamma_2^\perp, b : B_1^\perp, c : B_2^\perp \vdash s : A$。然后我们构造如下推导并得出结论：

$$\frac{\cdot; d : B_1^\perp \otimes B_2^\perp \vdash d : B_1^\perp \otimes B_2^\perp \quad \begin{array}{c}\text{IH} \\ \cdot; \overline{a} : \Gamma_2^\perp, b : B_1^\perp, c : B_2^\perp \vdash s : A\end{array}}{\cdot; d : B_1^\perp \otimes B_2^\perp, \overline{a} : \Gamma_2^\perp \vdash s[\langle b, c\rangle := d] : A}\ \text{M-E}\otimes$$

因此，只需取 $t := s[\langle b, c\rangle := d]$。

4. L-!P：推导结束于

$$\frac{\vdash ?\Gamma_1, B}{\vdash ?\Gamma_1, !B}\ \text{L-!P}$$

根据 $A = !B$ 或 $A \in ?\Gamma_1$ 是否成立，有两种情形。

a. $A = !B$. 根据归纳假设 $\cdot; a : !\Gamma_1^\perp \vdash s : B$. 根据引理 32(2)，我们有 $u : \Gamma_1^\perp; \cdot \vdash s\{a := !u\} : B$. 由此可得：

$$\frac{\overline{u} : \Gamma_1^\perp; \cdot \vdash s\{\overline{a} := \overline{!u}\} : B}{\overline{u} : \Gamma_1^\perp; \cdot \vdash !(s\{\overline{a} := \overline{!u}\}) : !B}\ \text{M-I!'}$$

最后，由引理 32(1)，我们得到 $\cdot; b : !\Gamma_1^\perp \vdash !(s\{a := !u\})[!u := b]$。因此，只需取 $t := !(s\{a := !u\})[!u := b]$。

b. $A \in ?\Gamma_1$。因此，$?\Gamma_1 = ?\Gamma_2, ?A_1$ 和 $A = ?A_1$。根据归纳假设 $\cdot; a : !\Gamma_1^\perp, b : B^\perp \vdash s : ?A_1$。根据引理 32(2)，我们有 $u : \Gamma_1^\perp; b : B^\perp \vdash s\{a := !u\} : ?A_1$。由弱化可得 $v : A_1^\perp, u : \Gamma_1^\perp; b : B^\perp \vdash s\{a := !u\} : ?A_1$。推理如下

$$\dfrac{\dfrac{v : A_1^\perp, \overline{u} : \Gamma_1^\perp; c : ?B^\perp \vdash c : ?B^\perp \qquad \dfrac{v : A_1^\perp, \overline{u} : \Gamma_1^\perp; b : B^\perp \vdash s\{\overline{a} := \overline{!u}\} : ?A_1 \quad v : A_1^\perp, \overline{u} : \Gamma_1^\perp; \cdot \vdash !d.(d \not\downarrow v) : !A_1^\perp}{v : A_1^\perp, \overline{u} : \Gamma_1^\perp; b : B^\perp \vdash s\{\overline{a} := \overline{!u}\} \not\downarrow !d.(d \not\downarrow v) : \perp}\ \text{M-E?}}{v : A_1^\perp, \overline{u} : \Gamma_1^\perp; c : ?B^\perp \vdash (s\{\overline{a} := \overline{!u}\} \not\downarrow !d.(d \not\downarrow v)) \blacktriangleright^b c : \perp}}{\overline{u} : \Gamma_1^\perp; c : ?B^\perp \vdash ?v.(s\{\overline{a} := \overline{!u}\} \not\downarrow !d.(d \not\downarrow v)) \blacktriangleright^b c : ?A_1}\ \text{M-I?}$$

最后，由 $u : \Gamma_1^\perp; c : ?B^\perp \vdash ?v.(s\{a := !u\} \not\downarrow !d.(d \not\downarrow v)) \blacktriangleright^b c : ?A_1$ 以及引理 32(2)，我们有 $\cdot; d : !\Gamma_1^\perp, c : ?B^\perp \vdash ?v.(s\{a := !u\} \not\downarrow !d.(d \not\downarrow v)) \blacktriangleright^b c[!u := d] : ?A_1$。因此只需取 $t := ?v.(s\{a := !u\} \not\downarrow !d.(d \not\downarrow v)) \blacktriangleright^b c[!u := d]$。

5. L-?W：该推导终止于

$$\frac{\vdash \Gamma_1}{\vdash \Gamma_1, ?B}\ \text{L-?W}$$

根据 $A = ?B$ 还是 $A \in \Gamma_1$，有两种情形。

a. $A = ?B$。注意，Γ_1 不能为空，因为 MELL 是一致的。令 $\Gamma_1 = \Gamma_2, C$。由归纳假设 $\cdot; a : \Gamma_2^\perp \vdash s : C$。由弱化（引理 30）$u : B^\perp; a : \Gamma_2^\perp \vdash s : C$。然后我们可以构造如下推导并得出结论：

$$\dfrac{\dfrac{u : B^\perp; \overline{a} : \Gamma_2^\perp \vdash s : C \quad u : B^\perp; c : C^\perp \vdash c : C^\perp}{u : B^\perp; \overline{a} : \Gamma_2^\perp, c : C^\perp \vdash s \not\downarrow c : \perp}\ \text{M-I}\perp}{\cdot; \overline{a} : \Gamma_2^\perp, c : C^\perp \vdash ?u.s \not\downarrow c : ?B}\ \text{M-I?}$$

因此，只需取 $t := ?u.s \not\downarrow c$。

b. $A \in \Gamma_1$。于是 $\Gamma_1 = \Gamma_2, A$。根据归纳假设 $\cdot; a : \Gamma_2^\perp \vdash t : A$。由弱化和引理 30 $u : B^\perp; a : \Gamma_2^\perp \vdash t : A$。由引理 32(1)，$\cdot; b : !B^\perp, a : \Gamma_2^\perp \vdash t[!u := b] : A$。由此得证。

6. L-?D：推导结束于

$$\frac{\vdash \Gamma_1, B}{\vdash \Gamma_1, ?\ B}\ \text{L-?D}$$

根据 $A = ?B$ or $A \in \Gamma_1$ 的情况，有两种情形。

a. $A = ?\ B$。根据归纳假设 $\overline{\cdot};\ a:\ \Gamma_1^{\perp} \vdash s:\ B$。根据弱化 $u:\ B^{\perp};\ a:\ \Gamma_1^{\perp} \vdash s:\ B$。我们得出如下结论：

$$\dfrac{\dfrac{u : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_1^{\perp} \vdash s : B \qquad \dfrac{}{u : B^{\perp}; \cdot \vdash u : B^{\perp}}\ \text{M-UAX}}{u : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_1^{\perp} \vdash s \lightning u : \perp}\ \text{M-I}\perp}{\cdot; \overline{a} : \Gamma_1^{\perp} \vdash ?u.s \lightning u : ?B}\ \text{M-I}?$$

因此，只需取 $t := ?u.s \lightning u$。

b. $A \in \Gamma_1$。于是 $\Gamma_1 = \Gamma_2, A$。根据归纳假设 $\overline{\cdot}; a : \Gamma_2^{\perp}, b:\ B^{\perp} \vdash s:\ A$。由弱化引理 30，$u:\ B^{\perp};\ a:\ \Gamma_2^{\perp}, b:\ B^{\perp} \vdash s:\ A$。于是我们得到 $u:\ B^{\perp}; a:\ \Gamma_2^{\perp} \vdash s\{b := u\}:\ A$，如下所示：

$$\dfrac{u : B^{\perp}; \cdot \vdash u : B^{\perp} \qquad u : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_2^{\perp}, b : B^{\perp} \vdash s : A}{u : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_2^{\perp}, \vdash s\{b := u\} : A}\ \text{M-SUB}$$

根据引理 32(1)，$\cdot; b : !B^{\perp}, \overline{a}:\ \Gamma_2^{\perp} \vdash s\{b := u\}[!u := b]:\ A$。因此，取 $t := s\{b := u\}[!u := b]$.

7. L-?C：推导以……结束

$$\dfrac{\vdash \Gamma_1, ?B, ?B}{\vdash \Gamma_1, ?B}\ \text{L-?C}$$

根据 $A = ?B$ 还是 $A \in \Gamma_1$，分为两种情形。

a. $A = ?B$. 根据归纳假设 $\cdot;\ a:\ \Gamma_1^{\perp}, b : !B^{\perp} \vdash s : ?B$. 根据引理 32(2)，$u:\ B^{\perp}; a:\ \Gamma_1^{\perp} \vdash s\{a := !u\} : ?B$. 随后构造如下推导，得出结论：

$$\dfrac{\dfrac{u : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_1^{\perp} \vdash s\{a := !u\} : ?B \qquad u : B^{\perp}; \cdot \vdash !u : !B^{\perp}}{u : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_1^{\perp} \vdash (s\{a := !u\}) \lightning !u : \perp}\ \text{M-I}\perp}{\cdot; \overline{a} : \Gamma_1^{\perp} \vdash ?u.(s\{a := !u\}) \lightning !u : ?B}\ \text{M-I}?$$

因此，只需取 $t := ?u.(s\{a := !u\}) \lightning !u$。

b. $A \in \Gamma_1$。于是 $\Gamma_1 = \Gamma_2, A$。推理如下

$$\begin{array}{rl}
\cdot; \overline{a} : \Gamma_2^{\perp}, b_1 : !B^{\perp}, b_2 : !B^{\perp} \vdash s : A & IH \\
u_1 : B^{\perp}, u_2 : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_2^{\perp} \vdash s\{\overline{b} := \overline{!u}\} : A & Lem.\ 32(2) \\
u_1 : B^{\perp}; \overline{a} : \Gamma_2^{\perp} \vdash (s\{\overline{b} := \overline{!u}\})\{u_2 := u_1\} : A & Lem.\ 30 \\
\cdot; \overline{a} : \Gamma_2^{\perp}, b : !B^{\perp} \vdash (s\{\overline{b} := \overline{!u}\})\{u_2 := u_1\}[!u_1 := b] : A & Lem.\ 32(1)
\end{array}$$

8. L-$\mathbb{1}$。该推导以如下形式结束：

$$\dfrac{}{\vdash \mathbb{1}}\ \text{L-}\mathbb{1}$$

接下来取：

$$\dfrac{}{\cdot; \cdot \vdash \star : \mathbb{1}}\ \text{M-I}\mathbb{1}$$

9. L-$\perp$。推导结束于：

$$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}\ \text{L-}\perp$$

我们根据 $A = \perp$ 或 $A \in \Gamma$的情形进行讨论。

a. $A = \bot$。由于 MELL 是一致的， Γ 不可能为空。因此 $\Gamma = \Gamma_1,\ B$。

$$\dfrac{\overset{\text{IH}}{\cdot; \Gamma_1^\bot \vdash s : B} \qquad \cdot; a : B^\bot \vdash a : B^\bot}{\cdot; \Gamma_1^\bot, a : B^\bot \vdash s \not\downarrow a : \bot}\ \text{M-I}\bot$$

因此，只需取 $t := s \not\downarrow a$。

b. $A \in \Gamma$。那么 $\Gamma = \Gamma_1,\ A$。

$$\dfrac{\cdot; a : \mathbb{1} \vdash a : \mathbb{1} \qquad \overset{\text{IH}}{\cdot; \Gamma_1^\bot \vdash s : A}}{\cdot; \Gamma_1^\bot, a : \mathbb{1} \vdash s[\star := a] : A}\ \text{M-E}\mathbb{1}$$

因此，只需取 $t := s[\star := a]$。

◀

▶ **引理 11** (反代入的类型相容性)。 若 $\Delta; \Gamma, a : A \vdash t : B$ 以及 $\Delta; \Gamma' \vdash s : B^\bot$ 在 λ_{MELL}中成立，则 $\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash t\{a \backslash\backslash s\} : A^\bot$也成立。

证明。 对 $\Delta; \Gamma_1, a : A \vdash t : B$ 的推导大小作归纳。我们省略已在 A 中处理的情形，仅详细说明下面的新情形。

1. 情形M-AX。

$$\dfrac{}{\Delta; a : A \vdash a : A}\ \text{M-AX}$$

于是 $B = A$ ，由假设可得结论。

2. 情形 M-UAX。此情形不可能，因为 a 不出现在 u中。
3. 情形M-E$\otimes$。有两种情形。

a. $a :\ A$ 用于为 t_2 定型。

$$\dfrac{\Delta; \Gamma_{11}, a : A \vdash t_2 : C \otimes D \quad \Delta; \Gamma_{12}, b : C, c : D \vdash t_1 : B}{\Delta; \Gamma_{11}, a : A, \Gamma_{12} \vdash t_1[\langle b, c\rangle := t_2] : B}\ \text{M-E}\otimes$$

$$\dfrac{\Delta; \Gamma_{11}, a : A \vdash t_2 : C \otimes D \qquad \dfrac{\dfrac{\Delta; \Gamma_{12}, b : C, c : D \vdash t_1 : B \quad \Delta; \Gamma_2 \vdash s : B^\bot}{\Delta; \Gamma_{12}, b : C, c : D, \Gamma_2 \vdash t_1 \not\downarrow s : \bot}\ \text{M-I}\bot}{\Delta; \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash \parr(b, c).t_1 \not\downarrow s : C^\bot \parr D^\bot}\ \text{M-I}\parr}{\Delta; \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash t_2\{a \backslash\backslash \parr(b, c).t_1 \not\downarrow s\} : A^\bot}$$

b. $a :\ A$ 用于为 t_1。

$$\dfrac{\Delta; \Gamma_{11} \vdash t_2 : C \otimes D \quad \Delta; \Gamma_{12}, a : A, b : C, c : D \vdash t_1 : B}{\Delta; \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, a : A \vdash t_1[\langle b, c\rangle := t_2] : B}\ \text{M-E}\otimes$$

$$\dfrac{\Delta; \Gamma_{11} \vdash t_2 : C \otimes D \qquad \dfrac{\Delta; \Gamma_{12}, a : A, b : C, c : D \vdash t_1 : B \quad \Delta; \Gamma_2 \vdash s : B^\bot}{\Delta; \Gamma_{12}, b : C, c : D, \Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\backslash s\} : A^\bot}}{\Delta; \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, a : A \vdash t_1\{a \backslash\backslash s\}[\langle b, c\rangle := t_2] : A^\bot}\ \text{M-E}\otimes$$

4. 情形M-I⅋

$$\frac{\Delta;\Gamma_1, a : A, b : B_1, c : B_2 \vdash t : \bot}{\Delta;\Gamma_1, a : A \vdash \parr(b, c).t : B_1^\bot \parr B_2^\bot}\ \text{M-I}\parr$$

$$\frac{\Delta;\Gamma_2 \vdash s : B_1 \otimes B_2 \qquad \dfrac{\Delta;\Gamma_1, a : A, b : B_1, c : B_2 \vdash t : \bot \quad \Delta;\cdot \vdash \star : \mathbb{1}}{\Delta;\Gamma_1, b : B_1, c : B_2 \vdash t\{a \backslash\!\backslash \star\} : A^\bot}}{\Delta;\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t\{a \backslash\!\backslash \star\}[\langle b, c\rangle := s] : A^\bot}\ \text{M-E}\otimes$$

5. 情形 M-I!。此情形不可能，因为 Γ_1， $a :\ A$ 不是空上下文。
6. 情形 M-E!。那么 $t = t_1[!u :\ = t_2]$ 对于某个 t_1， t_2 和 u。根据 $a :\ A$ 是用于为 t_1 还是 t_2定类型，分为两种情形。
   a. $a :\ A$ 用于为 t_1定类型。那么 $\Gamma_1 = \Gamma_{11}$， Γ_{12}，且推导以此结束

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11} \vdash t_2 : !C \quad \Delta, u : C;\Gamma_{12}, a : A \vdash t_1 : B}{\Delta;\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, a : A \vdash t_1[!u := t_2] : B}\ \text{M-E}!$$

   根据弱化（引理 30）， $\Delta, u : C;\Gamma_2 \vdash s :\ B^\bot$。因此我们使用归纳假设构造推导：

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11} \vdash t_2 : !C \qquad \dfrac{\Delta, u : C;\Gamma_{12}, a : A \vdash t_1 : B \quad \Delta, u : C;\Gamma_1 \vdash s : B^\bot}{\Delta, u : C;\Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\!\backslash s\} : A^\bot}\ \text{M-COS}}{\Delta;\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\!\backslash s\}[!u := t_2] : A^\bot}\ \text{M-E}!$$

   b. a: A 用于给 t_2 定型。

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11}, a : A \vdash t_2 : !C \quad \Delta, u : C;\Gamma_{12} \vdash t_1 : B}{\Delta;\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, a : A \vdash t_1[!u := t_2] : B}\ \text{M-E}!$$

   根据弱化（引理 30）， $\Delta, u :\ C;\Gamma_2 \vdash s :\ B^\bot$。因此，我们使用归纳假设构造如下推导：

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11}, a : A \vdash t_2 : !C \qquad \dfrac{\dfrac{\Delta, u : C;\Gamma_{12} \vdash t_1 : B \quad \Delta, u : C;\Gamma_2 \vdash s : B^\bot}{\Delta, u : C;\Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash t_1 \not\downarrow s : \bot}\ \text{M-I}\bot}{\Delta;\Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash ?u.t_1 \not\downarrow s : ?C^\bot}\ \text{M-I}?}{\Delta;\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_2 \vdash t_2\{a \backslash\!\backslash ?u.t_1 \not\downarrow s\} : A^\bot}\ \text{M-COS}$$

7. 情形 M-I?。那么 $B = ?B_1$，其中某个类型为 B_1，且 $t = ?u.t_1$，其中某个 t_1 以及 u。

$$\frac{\Delta, u : B_1^\bot;\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : \bot}{\Delta;\Gamma_1, a : A \vdash ?u.t_1 : ?B_1}\ \text{M-I}?$$

   我们使用归纳假设并构造推导（注意 $B^\bot = !B_1^\bot$）：

$$\frac{\Delta;\Gamma_2 \vdash s : B^\bot \qquad \dfrac{\Delta, u : B_1^\bot;\Gamma_1, a : A \vdash t_1 : \bot \quad \Delta, u : B_1^\bot;\cdot \vdash \star : \mathbb{1}}{\Delta, u : B_1^\bot;\Gamma_1 \vdash t_1\{a \backslash\!\backslash \star\} : A^\bot}\ \text{M-I}\bot}{\Delta;\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\!\backslash \star\}[!u := s] : A^\bot}\ \text{M-E}!$$

8. 情形 M-E?。于是 $t = t_1 \blacktriangleright^a t_2$ 并且 $B = \bot$ 因此 $B^\perp = \mathbb{1}$。

$$\frac{\Delta;\Gamma_1, a : A \vdash t_3 : ?C \quad \Delta; c : C \vdash t_2 : \bot}{\Delta;\Gamma_1, a : A \vdash t_2 \blacktriangleright^c t_3 : \bot}\ \text{M-E?}$$

$$\frac{\Delta;\Gamma_2 \vdash s : B^\perp \qquad \dfrac{\Delta;\Gamma_1, a : A \vdash t_3 : ?C \qquad \dfrac{\Delta; c : C \vdash t_2 : \bot}{\Delta;\cdot \vdash !c.t_2 : !C^\perp}\ \text{M-I!}}{\Delta;\Gamma_1 \vdash t_3\{a \backslash\backslash !c.t_2\} : A^\perp}\ \text{M-COS}}{\Delta;\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash t_3\{a \backslash\backslash !c.t_2\}[\star := s] : A^\perp}\ \text{M-E}\mathbb{1}$$

9. 情形 M-I⊥。于是 $B = \bot$， $t = t_1 \lightning t_2$，并且有两种情形，取决于$a \in$自由变量(t_1) 还是 $a \in$ 自由变量(t_2)。

a. $a \in$自由变量(t_1)。于是推导以

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11}, a : A \vdash t_1 : C \quad \Delta;\Gamma_{12} \vdash t_2 : C^\perp}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12}, a : A \vdash t_1 \lightning t_2 : \bot}\ \text{M-I}\bot$$

$$\frac{\Delta;\Gamma_2 \vdash s : \mathbb{1} \qquad \dfrac{\Delta;\Gamma_{11}, a : A \vdash t_1 : C \quad \Delta;\Gamma_{12} \vdash t_2 : C^\perp}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12} \vdash t_1\{a \backslash\backslash t_2\} : A^\perp}\ \text{M-I}\bot}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\backslash t_2\}[\star := s] : A^\perp}$$

b. $a \in$自由变量(t_2)。于是推导以

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11} \vdash t_1 : C \quad \Delta;\Gamma_{12}, a : A \vdash t_2 : C^\perp}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12}, a : A \vdash t_1 \lightning t_2 : \bot}\ \text{M-I}\bot$$

$$\frac{\Delta;\Gamma_2 \vdash s : \mathbb{1} \qquad \dfrac{\Delta;\Gamma_{12}, a : A \vdash t_2 : C \quad \Delta;\Gamma_{11} \vdash t_1 : C^\perp}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12} \vdash t_2\{a \backslash\backslash t_1\} : A^\perp}\ \text{M-I}\bot}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_2 \vdash t_2\{a \backslash\backslash t_1\}[\star := s] : A^\perp}$$

10. 情形 M-I𝟙。这种情形不可能成立，因为此时 $t = \star$ 且 自由变量$(\star) = \varnothing$。

$$\frac{}{\Delta;\cdot \vdash \star : \mathbb{1}}\ \text{M-I}\mathbb{1}$$

11. 情形 M-E𝟙。于是 $t = t_1[\star :=\ = t_2]$，并且有两种情形，取决于 $a \in$ 自由变量(t_1)还是 $a \in$ 自由变量(t_2)。

a. $a \in$自由变量(t_1)。那么该推导结束于

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11} \vdash t_2 : \mathbb{1} \quad \Delta;\Gamma_{12}, a : A, \vdash t_1 : B}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12}, a : A, \vdash t_1[\star := t_2] : B}\ \text{M-E}\mathbb{1}$$

$$\frac{\Delta;\Gamma_{11} \vdash t_2 : \mathbb{1} \qquad \dfrac{\Delta;\Gamma_{12}, a : A \vdash t_1 : B \quad \Delta;\Gamma_2 \vdash s : B^\perp}{\Delta;\Gamma_{12},\Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\backslash s\} : A^\perp}}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_2 \vdash t_1\{a \backslash\backslash s\}[\star := t_2] : A^\perp}\ \text{M-E}\mathbb{1}$$

b. $a \in$自由变量(t_2)。那么该推导结束于

$$\dfrac{\Delta;\Gamma_{11}, a : A, \vdash t_2 : \mathbb{1} \quad \Delta;\Gamma_{12} \vdash t_1 : B}{\Delta;\Gamma_{11}, a : A, \Gamma_{12} \vdash t_1[\star := t_2] : B}\,\text{M-E}\mathbb{1}$$

$$\dfrac{\Delta;\Gamma_{11}, a : A, \vdash t_2 : \mathbb{1} \qquad \dfrac{\Delta;\Gamma_{12} \vdash t_1 : B \quad \Delta;\Gamma_2 \vdash s : B^{\perp}}{\Delta;\Gamma_{12},\Gamma_2 \vdash t_1 \not\downarrow s : \perp}}{\Delta;\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_2 \vdash t_2\{a \backslash\backslash t_1 \not\downarrow s\} : A^{\perp}}\,\text{M-E}\mathbb{1}$$

◀

C 等价

C.1 替换和结构等价

▶ **引理 33**。 $t \equiv s$ 蕴含 自由变量$(t) =$ 自由变量(s)

证明。 对 $t \equiv s$ 的推导进行归纳。 ◀

▶**推论 34.** $\equiv$ 是一致的。

证明。 由引理 33，我们推得 $a \equiv b$ 不可导出，对任意线性变量 a和 b 满足 $a \neq b$的情况。◀

▶ **引理 35** (反代换与等价相容（右情形）)。 设 t 是一个线性项，且 $a \in$ 自由变量(t)。假设 $s \equiv r$。则 $t\{a \backslash\backslash s\} \equiv t\{a \backslash\backslash r\}$。

证明。 对 t作归纳。

◀

称 r 相对于 是反自由的 a 在 t中，若 r 的自由变量在 $t\{a \backslash\backslash r\}$中均未被绑定。

▶ **引理 36** (消去子浮动)。 设 t 是一个线性项，且 $a \in$ 自由变量(t)。假设 自由变量$(\mathtt{p}) \cap$自由变量$(t) = \varnothing$ 且 r 相对于 a在 t中是反自由的。则

$$t\{a \backslash\backslash s\}[\mathtt{p} := r] \equiv t\{a \backslash\backslash s[\mathtt{p} := r]\}$$

证明。 对 t作归纳法。

◀

▶ **引理 37** （消去子浮动）。 设 t 为线性项，且 $a \in$ 自由变量(t)。假设自由变量$(\mathtt{p}) \cap$自由变量$(t) = \varnothing$ ，且 r 在 t中对 a 是自由的。则

$$t\{a := s\}[\mathtt{p} := r] \equiv t\{a := s[\mathtt{p} := r]\}$$

证明。 对 t作归纳法。

◀

▶ **引理 38**。 假设 $s \equiv r$。则

1. $t\{x := s\} \equiv s\{x := r\}$；且
2. $s\{x := t\} \equiv r\{x := t\}$；且

证明。 对 t进行归纳法。 ◀

23:34 基于逆否的经典线性 λ 演算

▶ 注 39. 由于自由变量$(\star) = \varnothing$，我们有：

1. $t, s[\star := r] \equiv t[\star := r], s \equiv t, s[\star := r]$. 2. $(t \bullet s)[\star := r] \equiv t[\star := r] \bullet s \equiv t \bullet s[\star := r]$. 3. $(t \blacktriangledown s)[\star := r] \equiv t[\star := r] \blacktriangledown s \equiv t \blacktriangledown s[\star := r]$. 4. $(t \lightning s)[\star := r] \equiv t[\star := r] \lightning s \equiv t \lightning s[\star := r]$. 5. $(\Re(a, b).t)[\star := r] \equiv \Re(a, b).t[\star := r]$, 若 $a, b \notin \mathrm{flv}(r)$.
6. $t[\mathrm{p} := s][\star := r] \equiv t[\star := r][\mathrm{p} := s] \equiv t[\mathrm{p} := s[\star := r]]$.
7. $(?u.t)[\star := r] \equiv ?u.t[\star := r]$, 若 $u \notin$自由变量(r).

▶ **引理 40** (广义 Simpl)。 设 t 是一个线性项，且 $a \in$ 自由变量(t)。那么 $t\{a \backslash\backslash \star\}[\star := r] \equiv t\{a \backslash\backslash r\}$

证明。 对 t作归纳法，使用引理 36、引理 35 和对称性。

◀

▶ **引理 41** (逆代换引理 I)。 设 $\{t, s, r\}$ 是一个线性项集合，满足$a \in$自由变量(t)，并设 $b \neq a$。那么

1. $t\{a||s\}\{b := r\} = t\{b := r\}\{a||s\{b := r\}\}$。注意，$b$ 在 t, s 中至多出现一次，因此右侧要么形如 $t\{b := r\}\{a||s\}$，要么形如 $t\{a||s\{b := r\}\}$。 *2.* $t\{a||s\}\{u := r\} = t\{u := r\}\{a||s\{u := r\}\}$。

证明。 对 t进行归纳。

◀

▶ **引理 42** (逆代换引理)。 设 $\{t, s, r\}$ 是一个项的线性集合，满足 $a \in$ 自由变量(t)，并设 $b \neq a$ 满足 $b \in$ 自由变量$(t) \cup$ 自由变量(s)。那么：

1. 如果 $b \in$ 自由变量(t)，那么：

$$t\{a \backslash\backslash s\}\{b \backslash\backslash r\} \equiv t\{b \backslash\backslash s\}\{a := r\}$$

2. 如果 $b \in$ 自由变量(s)，那么：

$$t\{a \backslash\backslash s\}\{b \backslash\backslash r\} \equiv s\{b \backslash\backslash t\{a := r\}\}$$

证明。 对 t进行同步归纳。

◀

▶ **引理 43** (嵌套反替换引理)。 设 $\{t, s, r\}$ 是一个项的线性集合，满足$a \in$自由变量(t)，并设 $b \neq a$ 满足 $b \in$ 自由变量 (s)。那么：

$$s\{b := t\}\{a \backslash\backslash r\} \equiv t\{a \backslash\backslash s\{b \backslash\backslash r\}\}$$

证明。 对 s进行归纳法。

◀

▶ **引理 44** (反代换与等价相容)。 假设 $s \equiv r$。那么，$t\{a \backslash\backslash s\} \equiv t\{a \backslash\backslash r\}$ 和 $s\{a \backslash\backslash t\} \equiv r\{a \backslash\backslash t\}$。

证明。 第一项已在引理 35 中证明。第二项可通过对 $s \equiv r$ 的推导进行归纳法证明。

◀

C.2 ≡的另一种表述

本小节给出结构等价的一种等价刻画，该刻画旨在便于证明强双模拟定理（定理 14）。

▶**定义 45** (替代结构等价)。 结构等价关系 $\equiv^\star$ 定义为以下公理的自反、对称、传递闭包和上下文闭包，并假设等式两边都带有类型：

$$
\begin{array}{lll}
S\langle t\rangle[\mathsf{p} := r] & \equiv^\star_{\mathsf{Prop}} & S\langle t[\mathsf{p} := r]\rangle \quad (\mathsf{fv}(\mathsf{p}) \cap \mathsf{fv}(S) = \varnothing \ \textit{and}\ r\ \textit{free for}\ S) \\
t[\star := \star] & \equiv^\star_{\beta\star} & t \\
t[\star := s] & \equiv^\star_{\mathsf{Symm}\star} & s[\star := t] \\
\star \lightning t & \equiv^\star_{\mathsf{Lunit\_for\_}\lightning} & t \\
(s \blacktriangledown t) \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{E}\parr_2/\mathsf{I}\parr} & t \lightning s \bullet r \\
\langle r, t\rangle \lightning s & \equiv^\star_{\mathsf{I}\otimes/\mathsf{E}\parr_2} & r \lightning (s \blacktriangledown t) \\
\parr(a,b).s \lightning t & \equiv^\star_{\mathsf{I}\parr/\mathsf{E}\otimes} & s[\langle a, b\rangle := t] \\
(?u.s) \lightning t & \equiv^\star_{\mathsf{I}?/\mathsf{E}!} & s[!u := t] \\
(!a.t) \lightning s & \equiv^\star_{\mathsf{I}!/\mathsf{E}?} & t \blacktriangleright^a s \\
t[\star := s] \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{I}\bot/\mathsf{E}\star} & s \lightning (r \lightning t)
\end{array}
$$

▶**引理 46**。 以下等式属于 $\equiv$ *

$$
\begin{array}{lll}
\star \lightning t & \equiv^\star_{\mathsf{Lunit\_for\_}\lightning} & t \\
S\langle t\rangle[\mathsf{p} := r] & \equiv^\star_{\mathsf{Prop}} & S\langle t[\mathsf{p} := r]\rangle \quad \textit{if}\ \mathsf{fv}(\mathsf{p}) \cap \mathsf{fv}(S) = \varnothing \ \textit{and}\ r\ \textit{free for}\ S \\
t \lightning s & \equiv^\star_{\mathsf{Symm\_for\_}\lightning} & s \lightning t \\
(s \blacktriangledown t) \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{E}\parr_2/\mathsf{I}\otimes} & s \lightning \langle r, t\rangle \\
(s \blacktriangledown t) \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{E}\parr_2/\mathsf{I}\parr} & t \lightning s \bullet r \\
(s \bullet t) \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{E}\parr_1/\mathsf{E}\parr_2} & t \lightning s \blacktriangledown r \\
\langle t, s\rangle \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{E}\otimes/\mathsf{E}\parr_1} & s \lightning (r \bullet t) \\
\langle t, s\rangle \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{I}\otimes/\mathsf{E}\parr_2} & t \lightning (r \blacktriangledown s) \\
\parr(a,b).s \lightning t & \equiv^\star_{\mathsf{I}\parr/\mathsf{E}\otimes} & s[\langle a, b\rangle := t] \\
(?u.s) \lightning t & \equiv^\star_{\mathsf{I}?/\mathsf{E}!} & s[!u := t] \\
(!a.t)[\star := p] \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{I}!/\mathsf{E}?} & p \lightning t \blacktriangleright^a r \\
t[\star := s] \lightning r & \equiv^\star_{\mathsf{I}\bot/\mathsf{E}\star} & s \lightning (r \lightning t)
\end{array}
$$

证明。 我们给出规则 $ruleCCEqOneLUnitForBott$的证明，其余规则可通过类似的推理得出。

$$
\begin{array}{lll}
 & t \lightning s & \\
\equiv^\star & t[\star := \star] \lightning s & \beta\star \\
\equiv^\star & \star \lightning (s \lightning t) & \mathsf{I}\bot/\mathsf{E}\star \\
\equiv^\star & s \lightning t & \mathsf{Lunit\_for\_}\lightning
\end{array}
$$

◀

我们建立若干辅助结果，以证明关系 $\equiv^\star$ 与 $\equiv$一致。唯一的难点在于证明 $\equiv^\star$ 捕捉了 $\equiv$ （定义 13）的第四条公理分裂。其余公理 Prop、 $\beta\star$和 Symm$\star$ 则是两个关系共有的。为此，我们首先定义深上下文和深层上下文的对偶这两个概念。

▶ **定义 47.** 深上下文 P 的定义语法如下：

$$
\begin{array}{lll}
P & ::= & \square \mid \parr(a,b).P \mid P \blacktriangledown t \mid t \blacktriangledown P \mid P \bullet t \mid t \bullet P \mid \langle P, t\rangle \\
 & & \mid \langle t, P\rangle \mid P \lightning t \mid t \lightning P \mid ?u.P \mid P[\mathsf{p} := t] \mid t[\mathsf{p} := P] \mid t \blacktriangleright^a P
\end{array}
$$

23:36 基于逆否的经典线性 λ 演算

如果 t 的自由变量在 P$\langle t\rangle$ 中未被捕获，我们就说 t 对 P 是自由的。同样，如果 Q$\langle$ P$\rangle$ 不会绑定 P 的变量的自由出现，则上下文 P 对深上下文 Q 是自由的。

▶ **定义 48** (深层上下文的对偶)。 深层上下文 P 的对偶 $P^{\perp}$，记作深层上下文 $P\{\Box\backslash\backslash\Box\}$。

▶ **引理 49** (逆代换引理)。 假设 t 对 P 是自由的。那么 $P\langle a\rangle\{a\backslash\backslash t\} \equiv P^{\perp}\langle t\rangle$。

证明。 对P作归纳。

◀

▶ **引理 50** （深层上下文复合上的对偶反变性）。 假设 Q 对 P 是自由的。那么 $P\langle Q\rangle^{\perp} \equiv Q^{\perp}\langle P^{\perp}\rangle$

下面的例子说明了为什么必须要求 Q 对 P 是自由的。假设 $\mathsf{P} = \Re(c,d).\Box$ 且 $\mathsf{Q} = \Box[\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle]$。那么

$\mathsf{P}\langle\mathsf{Q}\rangle = \Re(c,d).\Box[\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle]$
$\mathsf{P}\langle\mathsf{Q}\rangle^{\perp} = \star[\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle][\langle c,d\rangle := \Box]$
$\mathsf{P}^{\perp} = \star[\langle c,d\rangle := \Box]$
$\mathsf{Q}^{\perp} = \Box[\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle]$
$\mathsf{Q}^{\perp}\langle\mathsf{P}^{\perp}\rangle = \star[\langle c,d\rangle := \Box][\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle]$

注意，

$$\mathsf{P}\langle\mathsf{Q}\rangle^{\perp} = \star[\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle][\langle c,d\rangle := \Box] \not\equiv \star[\langle c,d\rangle := \Box][\langle a,b\rangle := \langle c,d\rangle] = \mathsf{Q}^{\perp}\langle\mathsf{P}^{\perp}\rangle$$

证明。 对P进行归纳。

◀

我们已准备好证明，分裂可由 $\equiv^{\star}$ （引理 51）捕获。

▶ **引理 51** （分裂的可推导性）。 $P^{\perp}\langle\star\rangle \not\downarrow r \equiv^{\star} P\langle r\rangle$，若 r 对P自由。

证明。 对P进行归纳，采用“由内向外”的方式，使用引理 50、引理 36 和引理 46。换言之，我们考虑构造P时所用的最内层项构造子可能出现的每一种情形。

◀

▶**命题 52**。 $\equiv = \equiv^{\star}$。

证明。 我们证明 $\equiv \subseteq \equiv^{\star}$，然后证明 $\equiv^{\star} \subseteq \equiv$。具体来说，我们将证明 $\equiv$ 的公理可在 $\equiv^{\star}$中得到证明（对于第一项），然后证明 $\equiv^{\star}$ 的公理可在 $\equiv$中得到证明（对于第二项）。

1. $\equiv \subseteq \equiv^{\star}$。
   对于第一项，我们注意到以下内容：
   1.1. Prop $\beta\star$，以及 Symm$\star$。

$$\begin{array}{lll} \mathsf{S}\langle t\rangle[\mathsf{p} := r] & \equiv_{\mathsf{Prop}} & \mathsf{S}\langle t[\mathsf{p} := r]\rangle \\ t[\star := \star] & \equiv_{\beta\star} & t \\ t[\star := s] & \equiv_{\mathsf{Symm}\star} & s[\star := t] \end{array}$$

   其中，在公理 Prop 中，$\mathsf{fv(p)} \cap \mathsf{fv(S)} = \varnothing$ 且 r 对 S 自由。全部三个公理都包含在 $\equiv^{\star}$中，因此我们可以立即得出结论。

1.2. 分裂。

$$t\{a \backslash\backslash \star\} \lightning r \equiv_{\mathsf{split}} t\{a := r\}$$

这个公理可在 $\equiv^\star$ 中证明，这可由引理 49 和引理 51 得出。

2. $\equiv^\star \subseteq \equiv$。
现在我们考虑第二项。再一次，公理 Prop $\beta\star$ 和分裂都包含在 $\equiv$ 中。因此，剩下要证明其他内容可在 $\equiv$ 中证明。

2.1. $t \equiv \star \lightning t$

$$\begin{array}{lll} & t & \\ \equiv & t[\star := \star] & \beta\star \\ = & a[\star := \star]\{a := t\} & \\ \equiv & a[\star := \star]\{a \backslash\backslash \star\} \lightning t & \mathsf{split} \\ = & \star[\star := \star] \lightning t & Def.\ 10 \\ \equiv & \star \lightning t & \beta\star \end{array}$$

2.2. $(s \blacktriangledown t) \lightning r \equiv t \lightning (s \bullet r)$

$$\begin{array}{lll} & (s \blacktriangledown t) \lightning r & \\ = & ((s \blacktriangledown a) \lightning r)\{a := t\} & \\ \equiv & ((s \blacktriangledown a) \lightning r)\{a \backslash\backslash \star\} \lightning t & \mathsf{split} \\ = & (s \blacktriangledown a)\{a \backslash\backslash r[\star := \star]\} \lightning t & \\ = & (s \bullet r[\star := \star]) \lightning t & \\ \equiv & (s \bullet r) \lightning t & \beta\star \\ \equiv & t \lightning (s \bullet r) & \mathsf{Symm\_for\_}\lightning\ (Lem.\ 46) \end{array}$$

2.3. $\langle r, t \rangle \lightning s \equiv r \lightning (s \blacktriangledown t)$

$$\begin{array}{lll} & \langle r, t \rangle \lightning s & \\ = & \langle r[\star := \star], t \rangle \lightning s & \beta\star \\ = & (a \blacktriangledown t)\{a \backslash\backslash r[\star := \star]\} \lightning s & Def.\ 10 \\ \equiv & ((a \blacktriangledown t) \lightning r)\{a \backslash\backslash \star\} \lightning s & Def.\ 10 \\ = & ((a \blacktriangledown t) \lightning r)\{a := s\} & \mathsf{split} \\ = & (s \blacktriangledown t) \lightning r & \end{array}$$

2.4. $(\mathfrak{R}(a, b).s) \lightning t \equiv_{\mathsf{I}\mathfrak{R}/\mathsf{E}\otimes} s[\langle a, b \rangle := t]$

$$\begin{array}{lll} & (\mathfrak{R}(a, b).s) \lightning t & \\ = & (\mathfrak{R}(a, b).(s \lightning \star)) \lightning t & \mathsf{Lunit\_for\_}\lightning \\ = & ((\mathfrak{R}(a, b).(s \lightning c)) \lightning t)\{c := \star\} & \\ \equiv & ((\mathfrak{R}(a, b).(s \lightning c)) \lightning t)\{c \backslash\backslash \star\} \lightning \star & \mathsf{split} \\ \equiv & ((\mathfrak{R}(a, b).(s \lightning c)) \lightning t)\{c \backslash\backslash \star\} & \mathsf{Lunit\_for\_}\lightning \\ = & (\mathfrak{R}(a, b).(s \lightning c))\{c \backslash\backslash t\}[\star := \star] & Def.\ 10 \\ \equiv & (\mathfrak{R}(a, b).(s \lightning c))\{c \backslash\backslash t\} & \beta\star \\ = & (s \lightning c)\{c \backslash\backslash \star\}[\langle a, b \rangle := t] & Def.\ 10 \\ \equiv & c\{c \backslash\backslash s\}[\star := \star][\langle a, b \rangle := t] r & Lem.\ 42 \\ = & s[\star := \star][\langle a, b \rangle := t] & Def.\ 10 \\ = & s[\langle b, c \rangle := t] & \beta\star \end{array}$$

2.5. $(?u.s)\not\downarrow t \equiv s[!\ u\colon = t]$

$$
\begin{array}{lll}
 & (?u.s)\not\downarrow t & \\
\equiv & (?u.s\not\downarrow\star)\not\downarrow t & \\
= & ((?u.s\not\downarrow a)\not\downarrow t)\{a := r\} & \\
\equiv & ((?u.s\not\downarrow a)\not\downarrow t)\{a \setminus\!\setminus \star\}\not\downarrow\star & \text{split} \\
\equiv & ((?u.s\not\downarrow a)\not\downarrow t)\{a \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & (?u.s\not\downarrow a)\{a \setminus\!\setminus t\}[\star := \star] & Def.\ 10 \\
= & (?u.s\not\downarrow a)\{a \setminus\!\setminus t\} & \\
= & (s\not\downarrow a)\{a \setminus\!\setminus \star\}[!u := t] & Def.\ 10 \\
= & a\{a \setminus\!\setminus s\}[\star := \star][!u := t] & Def.\ 10 \\
\equiv & s[!u := t] & \beta\star
\end{array}
$$

2.6. $(!a.t)\not\downarrow s \equiv t \blacktriangleright^a s$

$$
\begin{array}{lll}
 & t\blacktriangleright^a s & \\
= & (t\blacktriangleright^a b)\{b := s\} & \\
\equiv & (t\blacktriangleright^a b)\{b \setminus\!\setminus \star\}\not\downarrow s & t\blacktriangleright^a b : \bot, \text{split} \\
= & b\{b \setminus\!\setminus !a.t\}[\star := \star]\not\downarrow s & \\
= & (!a.t)[\star := \star]\not\downarrow s & \\
\equiv & (!a.t)\not\downarrow s &
\end{array}
$$

2.7. $t[\star := s]\not\downarrow r \equiv s\not\downarrow(r\not\downarrow t)$

$$
\begin{array}{lll}
 & s\not\downarrow(r\not\downarrow t) & \\
\equiv & (t\not\downarrow r)\not\downarrow s & \text{Symm\_for\_}\not\downarrow(Lem.\ 46) \\
\equiv & (t\not\downarrow r[\star := \star])\not\downarrow s & \beta\star \\
= & a\{a \setminus\!\setminus t\not\downarrow r[\star := \star]\}\not\downarrow s & Def.\ 10 \\
= & t[\star := a]\{a \setminus\!\setminus r[\star := \star]\}\not\downarrow s & Def.\ 10 \\
= & (t[\star := a]\not\downarrow r)\{a \setminus\!\setminus \star\}\not\downarrow s & Def.\ 10 \\
\equiv & (t[\star := a]\not\downarrow r)\{a := s\} & \text{split} \\
= & t[\star := s]\not\downarrow r &
\end{array}
$$

◀

▶ **定理 14** (强双模拟)。 设 t、s 是两个带类型线性项。若 $t \equiv s$ 且 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} t'$，则存在一个线性项 s'，使得 $s \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s'$ 且 $t' \equiv s'$。

证明。 我们对 $t \equiv^{\star} s$ 的推导进行归纳。首先，通过对项中可约式的位置进行分类讨论，证明该结果适用于 10 条公理。然后，我们证明强双模拟在推理规则下保持不变。

◀

▶ **引理 17** (主体约简)。 $\Delta;\Gamma \vdash t\colon A$ 且 $t \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 蕴含 $\Delta;\Gamma \vdash s\colon A$。

证明。 注意，根据定义，结构等价关联的是类型相同且处于相同上下文中的项。因此，我们只需验证 $\Delta;\Gamma \vdash t\colon A$ 且 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 蕴含$\Delta;\Gamma \vdash s\colon A$。对此可对 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 进行归纳法证明。◀

D 强正规化

▶ **引理 53** (对偶性质)。 设 A 是一个类型，且 $X, Y \subseteq T_A$，则以下性质成立。

1. 若 $X \subseteq Y$ 那么 $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$。
2. $X \subseteq X^{\perp\perp}$。3. $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$。

证明。 让我们证明每个性质。

1. 若 $t \in Y^{\perp}$ 那么 $\forall s \in Y$ 我们有 $t \nleftarrow s \lhd_{\perp} \mathrm{SN}_{\perp}$。特别是，由于 $X \subseteq Y$ 那么这意味着 $\forall s \in X$ 我们有 $t \nleftarrow s \in \mathrm{SN}_{\perp}$。2. 根据定义，我们有

$$X^{\perp\perp} = \{r \in \mathcal{T}_A : \forall s \in X^{\perp},\ r \nleftarrow s \lhd_{\perp} \mathrm{SN}_{\perp}.\}$$

由 $t \in X$ 我们得到 $\forall s \in X^{\perp}$ 这意味着 $s \nleftarrow t \lhd_{\perp} \mathrm{SN}_{\perp}$，根据对偶集 $X^{\perp}$的定义。由于 $s \nleftarrow t \equiv t \nleftarrow s$，这意味着 $t \in X^{\perp\perp}$。
3. 这由前面的性质直接得到。根据性质 **2**，我们有 $X \subseteq X^{\perp\perp}$，根据性质 **1**，我们有 $X^{\perp\perp\perp} \subseteq X^{\perp}$。于是根据性质 **2**，我们有$X^{\perp} \subseteq (X^{\perp})^{\perp\perp} = X^{\perp\perp\perp}$，从而证明了 $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$。

◀

▶**命题 54**。 设 A 是一个类型，则：

1. 对于所有 u 非受限变量，我们有 $u \in [\![A]\!]$。2. $[\![A]\!] \subseteq SN_A$。

证明。 我们对类型 A进行相互归纳。

- 若 $A = \alpha, \alpha^{\perp}, \perp, \mathbf{1}$，则对任意非受限变量，我们有 $u \in \mathrm{SN}_A$。根据可约性候选集的定义，在这个特定情形下，我们有 $[\![A]\!] =\mathrm{SN}_A$。若 $A = A_1 \otimes A_2$，则由归纳假设可知，存在非受限变量 u_1, u_2，使得 $u_1 \in [\![A_1]\!], u_2 \in [\![A_2]\!]$；于是根据引理 63，集合 $[\![A_1]\!] \otimes [\![A_2]\!] \subseteq \mathrm{SN}^{A_1 \otimes A_2}$，且 $[\![A_1]\!] \otimes [\![A_2]\!] \neq \varnothing$。因此，由于 $[\![A_1 \otimes A_2]\!] =([\![A_1]\!] \otimes [\![A_2]\!])^{\perp\perp}$，根据引理 62 连续应用两次，我们便得到所要证明的结论。若 $A = A_1 \parr A_2$，则由归纳假设，对所有非受限变量 u，我们都有 $u \in [\![A_1^{\perp} \otimes A_2^{\perp}]\!]$。因此，由于 $[\![A_1 \parr A_2]\!] = [\![A_1^{\perp} \otimes A_2^{\perp}]\!]^{\perp}$，根据引理 62，我们便得到所要证明的结论。若 $A = ?A_1$，则由归纳假设，对所有非受限变量 u，我们都有 $u \in [\![A^{\perp}]\!]$。由此，根据引理 64，以下结论成立：$?[\![A_1^{\perp}]\!] \subseteq \mathrm{SN}^{?A_1}$且 $?[\![A_1^{\perp}]\!] \neq \varnothing$。因此，由于 $[\![?A_1]\!] = (?[\![A_1^{\perp}]\!])^{\perp\perp}$，根据引理 62 连续应用两次，我们便得到所要证明的结论。若 $A =!A_1$，则由归纳假设，对所有非受限变量 u，我们都有$u \in [\![?A_1^{\perp}]\!]$。因此，由于 $[\![!A_1]\!] = [\![?A_1^{\perp}]\!]^{\perp}$，根据引理 62，我们便得到所要证明的结论。

◀

▶ **定义 55.** 给定一个类型 A， $X \subseteq SN_A$，我们称 X 是归约闭合的，若对于所有$t \in X$ 和 t'，只要满足 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} t'$，就有 $t' \in X$。

▶**引理 56.** 若 A 是一个类型，则 SN_A 是归约闭合的。

证明。 如果 $t \in \mathrm{SN}_A$ 那么对于所有归约结果 t' 我们有 $t' \in \mathcal{T}_A$ 根据主体约简，并且由于 t 是强正规化的，因此我们得到 t' 也具有强正规化性质。由此可得$t' \in \mathrm{SN}_A$。 ◀

▶ **引理 57**。 如果 A 是一个类型，且 $X \subseteq SN_A$ ，那么 $X^\perp$ 是归约闭合的。

证明。 如果 $t \in X^\perp$ 那么对于所有 $s \in X$ 我们有 $t \not\downarrow s \in \mathrm{SN}_\perp$，这尤其意味着$t \in \mathrm{SN}_{A^\perp}$。如果 $t \to^-_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} t'$ 那么根据主体约简 $t' \not\downarrow s \in \mathcal{T}_\perp$ ，而且 $t' \not\downarrow s \in \mathrm{SN}_\perp$ ，因为它是 $t \not\downarrow s$的一个归约项。 ◀

▶**命题 58**。 对于所有类型 A ，我们有 $[\![A]\!]$ 是归约闭合的。

证明。 我们对类型 A进行归纳。如果 $A = \alpha, \alpha^\perp, \perp, \mathbb{1}$ 则由引理 56 可得。如果 $A = A_1 \otimes A_2, A_1 \parr A_2, ?A_1, !A_1$ 则由归纳假设以及引理 57 ◀

▶ 引理 *59*（ $\parr$的充分性）。如果 $\Delta; \Gamma, a_1 : A_1, a_2 : A_2 \vdash t : \perp$ 使得 $t \in [\![\perp]\!]$，并且对于所有 $s_1 \in [\![A_1]\!], s_2 \in [\![A_2]\!]$ ，我们得到 $t\{a_1 := s_1\}\{a_2 := s_2\} \in [\![\perp]\!]$ ，那么这意味着$\parr(a_1, a_2).t \in [\![A_1^\perp \parr A_2^\perp]\!]$。

证明。由于 $[\![A_1^\perp \parr A_2^\perp]\!] = [\![A_1^\perp \otimes A_2^\perp]\!]^\perp = ([\![A_1^\perp]\!] \otimes [\![A_2^\perp]\!])^\perp$ 只需证明，对于任意 $r_1, r_2 \in ([\![A_1^\perp]\!] \otimes [\![A_2^\perp]\!])^\perp$，都有 $(\parr(a_1, a_2).t) \not\downarrow r_1, r_2 \in [\![\perp]\!]$。注意，根据命题 54，项 t、 r_1 和 r_2 都是强正规化的。这意味着自然数 $|t| + |r_1| + |r_2|$ 有良好定义。

我们对 $|t| + |r_1| + |r_2|$进行归纳证明。基础情形显然。对于归纳步骤，我们根据归约步骤考虑三种不同的情形。

1. 如果 $t \to t'$，则可直接由归纳假设得出。2. 如果 $r_1 \to r_1'$ 或 $r_2 \to r_2'$，则可直接由归纳假设得出。3. 如果 $r = r_1, r_2$ 且 $\parr(a_1, a_2).t \not\downarrow r_1, r_2 \to t\{a_1 := r_1\}\{a_2 := r_2\}$，则可由假设得出。

◀

以下结果通过对 A进行归纳证明。

▶ **引理 60.** 对于所有类型 A ，以下等式成立 $[\![A^\perp]\!] = [\![A]\!]^\perp$

证明。 我们对类型进行归纳 A。

- 若 $A = \alpha$， $\alpha^\perp$，$\mathbf{1}$， $\perp$，那么我们必须证明 $\mathrm{SN}_A^\perp = \mathrm{SN}_{A^\perp}$。若 $t \in \mathrm{SN}_A^\perp$，那么对于所有 $s \in \mathrm{SN}_A$ ，都有 $t \not\downarrow s \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$ ；这意味着 $t \in \mathcal{T}_{A^\perp}$，并且特别地， $t \in \mathrm{SN}_{A^\perp}$ 。若 $t \in \mathrm{SN}_{A^\perp}$ ，那么我们必须证明对于所有 $s \in \mathrm{SN}_A$，都有 $t \not\downarrow s \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。注意，由于所考虑的类型，项 $t \not\downarrow s$不可能有根可约式；又因为两个项 t， s 都是强正规化的，所以这意味着 $t \not\downarrow s \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。若 $A = A_1 \otimes A_2$ ，那么 $(A_1 \otimes A_2)^\perp = A_1^\perp \parr A_2^\perp$，并且我们有
- $$[\![A_1^\perp \parr A_2^\perp]\!] = ([\![A_1^{\perp\perp}]\!] \otimes [\![A_2^{\perp\perp}]\!])^\perp = [\![A_1 \otimes A_2]\!]^\perp$$

- 若 $A = A_1 \parr A_2$，那么 $(A_1 \parr A_2)^\perp = A_1^\perp \otimes A_2^\perp$，并且根据可约性候选集的定义和引理 53，我们有以下结论成立：

$$[\![A_1^\perp \otimes A_2^\perp]\!] = [\![A_1^\perp \otimes A_2^\perp]\!]^{\perp\perp} = (([\![A_1^\perp]\!] \otimes [\![A_2^\perp]\!])^{\perp\perp})^{\perp\perp} = [\![A_1 \parr A_2]\!]^\perp$$

- 如果 $A = ?A_1$ 那么 $(?A_1)^\perp = !A_1^\perp$，并且我们有 $[\![?A_1]\!]^\perp = [\![!A_1^\perp]\!]$。
- 如果 $A = !A_1$ 那么 $(!A_1)^\perp = ?A_1^\perp$，并且利用可约性候选集的定义和引理 53，可得以下结论：

$$[\![!A_1]\!]^\perp = [\![?A_1^\perp]\!]^{\perp\perp} = (?[\![A_1]\!]^{\perp\perp})^{\perp\perp} = [\![?A_1]\!]^\perp$$

◀

▶**推论 61**。 对于所有类型 A，以下等式成立

$$[\![A]\!] = [\![A]\!]^{\perp\perp}$$

证明。 这是因为对于所有类型 $A^{\perp\perp} = A$，并将最后一个引理 60 应用于 $A^\perp$。◀

N注意，对于任意类型 A，任意非受限变量 u 都满足 $u \in \mathrm{SN}_A$。

▶ **引理 62**。 设 $X \subseteq SN_A$，满足 $X \neq \varnothing$，则：

1. 如果 u 是非受限变量，则 $u \in X^\perp$。**2.** $X^\perp \subseteq SN_{A^\perp}$。

证明。 对于第 **1** 项，设 $t \in X$，则对于 $u \in \mathrm{SN}_{A^\perp}$，我们有 $t \not\downarrow u \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$，因为不存在根可约式，并且 t 和 u 都是强正规化项。

对于第 **2** 项，设 $s \in X^\perp$，则对于任意 $t \in X$，我们有 $s \not\downarrow t \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$，这意味着 $s \in \mathrm{SN}_{A^\perp}$。◀

▶ **引理 63**。 设 $X \subseteq SN_A$，$Y \subseteq SN_B$，满足 $u \in X$，并且对于所有 u，v 都是非受限变量，则：

1. $X \otimes Y \neq \varnothing$**2.** $X \otimes Y \subseteq$ 强正规化$_{A \otimes B}$。

证明。 对于第 **1** 项。我们有 $\langle u,\ v\rangle \in \mathcal{T}_{A\otimes B}$ 因此 $X \otimes Y \neq \varnothing$。

对于第**2**项。对于所有项$\langle t,\ s\rangle \in X \otimes Y$，我们有：由于 t，s 都属于强正规化项，因此$\langle t,\ s\rangle$ 也同样是强正规化的。◀

▶ **引理 64**。 设 $X \subseteq SN_A$，使得 $u \in X$ 对所有 u 非受限变量均成立：

1. ? $X \neq \varnothing$**2.** ? $X \subseteq$强正规化$_{?A^\perp}$。

证明。 对于第 **1** 项。由于 $X \subseteq$ 强正规化$_A$，那么对于所有 $s \in X$，我们有 $v\{w := s\} = v$ 因此 $v \in ?\ X$。

对于条目 **2**。若 $?u.t \in ?X$ 那么，由于 $u \in X$ 我们有 $t\{u := u\} \in$ 强正规化$_\perp$ 因此 $t \in$强正规化$_\perp$ 并且这意味着 $?u.t \in$强正规化$_{?A^\perp}$。

◀

▶ **引理 65.** 设 $t \in \mathcal{T}_\perp$ 和判断 $\Delta;\ a :\ A,\ \Gamma \vdash t :\ \perp$ 使得对所有 $s \in [\![A]\!]$ 都有 $t\{a := s\} \in [\![\perp]\!]$ 则可推出 $t\{a \backslash\backslash *\} \in [\![A^\perp]\!]$。

证明。 若 $r \in [\![A]\!]$ 则利用结构等价 $t\{a\backslash\backslash s\}\lightning r \equiv t\{a:=r\}$。然后利用假设 $t\{a:=r\} \in [\![\bot]\!]$。◀

▶ **引理 66 (!的充分性).** 若 $\Delta; a: A \vdash t: \bot$ 使得 $t \in [\![\bot]\!]$ 且对于所有 $s \in [\![A]\!]$，我们得到 $t\{a:=s\} \in [\![\bot]\!]$ 那么这意味着 $!a.t \in [\![!A^{\bot}]\!]$。

证明。 由于 $[\![!A]\!] = (?[\![A^{\bot}]\!])^{\bot}$ 那么若 $?u.r \in ?[\![A^{\bot}]\!]$ 我们必须证明 $!a.t\lightning ?u.r \in [\![\bot]\!]$。注意，项 t、r 根据命题 54 是强正规化的。这意味着自然数 $|t|+|r|$ 是定义良好的。

我们对 $|t|+|r|$ 使用归纳法来证明这一点。基础情形显而易见。对于归纳步骤，我们根据归约步骤考虑三种不同的情形。

1. 如果 $t \to t$，则可直接由归纳法得出。2. 如果 $r \to r'$，则可直接由归纳法得出。3. 如果 $!a.t\lightning ?u.r \to r\{u := t\{a\backslash\backslash \star\}\}$，那么根据引理 65，我们得到 $t\{a\backslash\backslash \star\} \in [\![A]\!]$，并且由于根据假设 $r \in ?[\![A^{\bot}]\!]$，因此我们可以得出 $r\{u := t\{a\backslash\backslash \star\}\} \in [\![\bot]\!]$。

◀

▶ **定理 18** （充分性）。 对于每个有效判断 $\Delta; \Gamma \vdash t: A$，以及满足$\sigma \models \Delta$的每个 σ，我们都有 $t^{\sigma} \lhd_A [\![A]\!]$。

证明。 我们通过对该项的推导使用归纳法来证明 t。根据归纳假设，只需考虑其定义域为在推导最后一步中被绑定的变量的那些代换。证明的大部分内容由先前已证明的相应引理得出。

- 如果 $t = a$ 或 $t = u$，则根据替换 σ 的定义，我们得到 $t^{\sigma} \lhd_A [\![A]\!]$。
- 如果 $t = \langle t_1, t_2\rangle$ 则推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash t_1 : A_1 \quad \Delta; \Gamma' \vdash t_2 : A_2}{\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash \langle t_1, t_2\rangle : A_1 \otimes A_2}\ \text{M-I}\otimes$$

  我们必须证明，对所有 $\sigma \models \Delta, \Gamma, \Gamma'$，我们有 $(\langle t_1, t_2\rangle)^{\sigma} \lhd [\![A_1 \otimes A_2]\!]$。
  根据假设，对所有代换 $\nu \models \Delta, \Gamma$ 与 $\tau \models \Delta, \Gamma'$，我们有 $t_1^{\nu} \in [\![A_1]\!]$与 $t_2^{\tau} \in [\![A_2]\!]$。特别地，由于 $(\langle t_1, t_2\rangle)^{\sigma} = \langle t_1^{\sigma}, t_2^{\sigma}\rangle$，因此不失一般性，只需证明 $\langle t_1, t_2\rangle \lhd [\![A_1 \otimes A_2]\!]$。由于 $[\![A_1 \otimes A_2]\!] = ([\![A_1]\!] \otimes [\![A_2]\!])^{\bot\bot}$，则利用引理 53，我们得出该情形。

- If $t = \parr(a, b).t_1$ 那么这由引理可得 59.
- 若 $t = t_1[\langle a, b\rangle := s]$ 那么推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta; \Gamma', a : A_1, b : A_2 \vdash t_1 : A \quad \Delta; \Gamma \vdash s : A_1 \otimes A_2}{\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash t_1[\langle a, b\rangle := s] : A}\ \text{M-E}\otimes$$

  我们必须证明，对于所有满足 $\sigma \models \Delta$、Γ、Γ' 的 σ，都有 $(t_1[a, b := s])^{\sigma} \lhd [\![A]\!]$。根据假设，对于所有代换 $\tau \models \Delta$、Γ'、$a: A_1$、$b: A_2$ 以及 $\nu \models \Delta$、Γ，我们有 $t_1^{\tau} \in [\![A]\!]$ 和 $s^{\nu} \in [\![A_1 \otimes A_2]\!]$。特别地，我们可以考虑相容替换 τ、ν，使得 $(t_1[a, b := s])^{\sigma} = t_1^{\tau}[a, b := s^{\nu}]$，因此不失一般性，只需证明 $t_1[a, b := s] \in [\![A]\!]$。

  根据引理 60，只需证明对所有 $r \in [\![A^{\bot}]\!]$，以下命题成立：$t_1[\langle a, b\rangle := s]\lightning r \lhd_{\bot} \mathrm{SN}_{\bot}$。根据结构等价，我们有 $t_1[\langle a, b\rangle := s]\lightning r \equiv (t_1\lightning r)[\langle a, b\rangle := s] \equiv (\parr(a, b).t_1\lightning r)\lightning s$，因此我们将证明 $(\parr(a, b).t_1\lightning r)\lightning s \lhd_{\bot} \mathrm{SN}_{\bot}$。

由于 $a,b \in \mathrm{fv}(t_1)$，并且根据归纳假设，对所有相容替换 $\tau \models \Delta,\Gamma',a:A_1,b:A_2$，我们有 $t_1^\tau \in [\![A]\!]$，因此可推出对所有 $s_1 \in [\![A_1]\!], s_2 \in [\![A_2]\!]$，有 $t_1\{a := s_1\}\{b := s_2\} \in [\![A]\!]$。根据引理 60，由于 $t_1 \in [\![A]\!]$ 且 $r \in [\![A^\perp]\!]$，因此 $t_1 \not\downarrow r \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。接着，我们可以应用引理 59 得出 $\parr(a,b).t_1 \not\downarrow r \in [\![A_1^\perp \parr A_2^\perp]\!]$，这意味着 $(\parr(a,b).t_1 \not\downarrow r) \not\downarrow s \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。

- 若 $t = t_1 \blacktriangledown t_2$，则推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma \vdash t_1 : A_1 \parr A_2 \quad \Delta;\Gamma' \vdash t_2 : A_2^\perp}{\Delta;\Gamma,\Gamma' \vdash t_1 \blacktriangledown t_2 : A_1}\ \text{M-E}\parr_2$$

我们必须证明，对于所有满足 $\sigma \models \Delta,\ \Gamma,\ \Gamma'$ 的 σ，都有 $(t_1 \blacktriangledown t_2)^\sigma \lhd [\![A]\!]$。
根据假设，对于所有替换 $\tau \models \Delta,\ \Gamma'$ 和 $\nu \models \Delta,\ \Gamma$，都有 $t_1^\tau \in [\![A_1 \parr A_2]\!]$ 和 $t_2^\nu \in [\![A_2^\perp]\!]$。特别地，我们可以考虑相容替换 $\tau,\ \nu$，使得 $(t_1 \blacktriangledown t_2)^\sigma = t_1^\tau \blacktriangledown t_2^\nu$，因此不失一般性，只需证明 $t_1 \blacktriangledown t_2 \in [\![A]\!]$。
利用引理 60，只需证明对于所有 $s \in [\![A_1^\perp]\!]$，$(t_1 \blacktriangledown t_2) \not\downarrow s \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。根据结构等价，我们有 $(t_1 \blacktriangledown t_2) \not\downarrow s \equiv t_1 \not\downarrow (s,t_2)$，因此只需证明 $t_1 \not\downarrow (s,t_2) \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。由于根据假设 $t_2 \in [\![A_2^\perp]\!]$ 且 $s \in [\![A_1^\perp]\!]$，这意味着 $s,t_2 \lhd [\![A_1^\perp]\!] \otimes [\![A_2^\perp]\!]$，并由引理 53 可得 $s,t_2 \lhd [\![A_1^\perp \otimes A_2^\perp]\!]$。由于根据假设 $t_1 \in [\![A_1 \parr A_2]\!]$，因此我们可以得出 $t_1 \not\downarrow (s,t_2) \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。

- 若 $t = t_1 \bullet t_2$ 那么推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma \vdash t_1 : A_1 \parr A_2 \quad \Delta;\Gamma' \vdash t_2 : A_1^\perp}{\Delta;\Gamma,\Gamma' \vdash t_1 \bullet t_2 : A_2}\ \text{M-E}\parr_1$$

我们必须证明，对于所有满足 $\sigma \models \Delta$ 的 σ，Γ，Γ'，都有 $(t_1 \bullet t_2)^\sigma \lhd [\![A]\!]$。
根据假设，对于所有代换 $\tau \models \Delta,\Gamma'$ 和 $\nu \models \Delta,\Gamma$，我们有 $t_1^\tau \in [\![A_1 \parr A_2]\!]$ 和 $t_2^\nu \in [\![A_1^\perp]\!]$。特别地，我们可以考虑满足 $(t_1 \bullet t_2)^\sigma = t_1^\tau \bullet t_2^\nu$ 的相容替换 τ,ν，因此不失一般性，只需证明 $t_1 \bullet t_2 \in [\![A]\!]$。利用引理 60，只需证明对于所有 $s \in [\![A_1^\perp]\!]$，若 $(t_1 \bullet t_2) \not\downarrow s \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$，则.....利用结构等价，我们有 $(t_1 \bullet t_2) \not\downarrow s \equiv (t_1 \blacktriangledown s) \not\downarrow t_2$，因此此情形可由上一种情形推出。

- 若 $t = ?u.t_1$，则推导的最后一步为：

$$\frac{\Delta, u : A^\perp;\Gamma \vdash t_1 : \perp}{\Delta;\Gamma \vdash ?u.t_1 : ?A}\ \text{M-I}?$$

我们必须证明，对所有满足 $\sigma \models \Delta,\ \Gamma$ 的 σ，都有 $(?u.t)^\sigma \lhd [\![?A]\!]$。根据假设，对于所有代换 $\nu \models \Delta,\ \Gamma,\ u :\ A^\perp$，都有 $t_1^\nu \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$，由此可得 $(?u.t_1)^\sigma \in ?[\![A^\perp]\!]$。利用引理 53，我们得出 $(?u.t_1)^\sigma \in [\![?A]\!]$。
- 若 $t = !a.t_1$，则这可由引理 66 得出。
- 若 $t = t_1 \not\downarrow t_2$，则推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma \vdash t_1 : A \quad \Delta;\Gamma' \vdash t_2 : A^\perp}{\Delta;\Gamma,\Gamma' \vdash t_1 \not\downarrow t_2 : \perp}\ \text{M-I}\perp$$

我们必须证明，对所有 $\sigma \models \Delta,\ \Gamma,\ \Gamma'$，都有 $(t_1 \not\downarrow t_2)^\sigma \lhd_\perp [\![\perp]\!] = \mathrm{SN}_\perp$。
根据假设，对于所有替换 $\nu \models \Delta$、Γ 和 $\tau \models \Delta$、Γ'，我们有 $t_1^\nu \in [\![A]\!]$ 和 $t_2^\tau \in [\![A^\perp]\!]$。特别地，我们可以考虑满足 $(t_1 \not\downarrow t_2)^\sigma = t_1^\nu \not\downarrow t_2^\tau$ 的相容替换，因此利用引理 60，我们可以得出 $(t_1 \not\downarrow t_2)^\sigma \lhd_\perp \mathrm{SN}_\perp$。

- 如果 $t = t_1 \blacktriangleright^a t_2$，那么推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma \vdash t_2 : ?A \quad \Delta; a : A \vdash t_1 : \bot}{\Delta;\Gamma \vdash t_1 \blacktriangleright^a t_2 : \bot}\ \text{M-E?}$$

  我们必须证明，对于所有 $\sigma \models \Delta$，Γ，Γ'，都有 $(t_1 \blacktriangleright^a t_2)^\sigma \in \mathsf{SN}_\bot$。
  根据假设，对于所有替换 $\nu \models \Delta$，Γ 和 $\tau \models \Delta$，$a:A$，都有 $t_2^\nu \lhd [\![?A]\!]$ 和 $t_1^\tau \lhd [\![\bot]\!]$。特别地，我们可以考虑相容替换，使得 $(t_1 \blacktriangleright^a t_2)^\sigma = t_1^\tau \blacktriangleright^a t_2^\nu$，因此不失一般性，只需证明 $t_1 \blacktriangleright^a t_2 \in [\![?A]\!]$。

  根据引理 60，只需证明对于所有 $r \in [\![\mathbb{1}]\!]$ 满足 $t_1 \blacktriangleright^a t_2 \not\downarrow r \lhd_\bot$ 强正规化$_\bot$。由结构等价可得 $t_1 \blacktriangleright^a t_2 \not\downarrow r \equiv (!a.t_1 \not\downarrow s)[\star :\ = r]$，并且由于 $r \in [\![\mathbb{1}]\!] =$ 强正规化$_\mathbb{1}$，则r 是强正规化的，因此只需证明 $!a.t_1 \not\downarrow s \lhd_\bot$ 强正规化$_\bot$，这由引理 66 得出。

- 如果 $t = t_1[!u := t_2]$ 那么推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma \vdash t_2 : !A \quad \Delta, u : A; \Gamma' \vdash t_1 : C}{\Delta;\Gamma,\Gamma' \vdash t_1[!u := t_2] : C}\ \text{M-E!}$$

  我们必须证明，对于所有 $\sigma \models \Delta$，Γ，Γ'，都有 $(t_1[!u := t_2])^\sigma \in [\![C]\!]$。
  根据假设，对于所有代换 $\nu \models \Delta$，Γ 和 $\tau \models \Delta$，$u:A$，Γ'，都有 $t_2^\nu \in [\![!A]\!]$ 和 $t_1^\tau \in [\![C]\!]$。特别地，我们可以考虑相容替换，使得 $(t_1[!u :=t_2])^\sigma = t_1^\tau[!u := t_2^\nu]$，因此只需证明 $t_1[!u :\ = t_2] \in [\![C]\!]$。
  利用引理 60，只需证明对于所有 $r \in [\![C^\bot]\!]$，$t_1[!u := t_2] \not\downarrow r \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$。利用结构等价，我们得到 $t_1[!u := t_2] \not\downarrow r \equiv ?u.(t_1 \not\downarrow r) \not\downarrow t_2$，因此只需证明 $?u.(t_1 \not\downarrow r) \not\downarrow t_2 \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$。

  由于 $r \in [\![C^\bot]\!]$，因此我们得到 $t_1 \not\downarrow r \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$；根据假设，对于所有 $s \in [\![A]\!]$，我们有 $(t_1 \not\downarrow r)\{a := s\} \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$。这意味着 $?u.(t_1 \not\downarrow r) \in ?[\![A^\bot]\!]$；根据引理 53，$?u.(t_1 \not\downarrow r) \in [\![?A^\bot]\!]$。由于 $t_2 \in [\![!A]\!]$，因此我们得出 $?u.(t_1 \not\downarrow r) \not\downarrow t_2 \in \mathsf{SN}_\bot$。

- 若 $t = t_1[\star :\ = t_2]$ 则推导的最后一步如下：

$$\frac{\Delta;\Gamma \vdash t_2 : \mathbb{1} \quad \Delta;\Gamma' \vdash t_1 : A}{\Delta;\Gamma,\Gamma' \vdash t_1[\star := t_2] : A}\ \text{M-E}\mathbb{1}$$

  我们必须证明，对于所有 $\sigma \models \Delta$、Γ，Γ'，都有 $(t_1[\star :\ = t_2])^\sigma \in [\![A]\!]$。
  根据假设，对于所有代换 $\nu \models \Delta$、Γ 和 $\tau \models \Delta$，Γ'，都有 $t_2^\nu \in [\![\mathbb{1}]\!]$ 和 $t_1^\tau \in [\![A]\!]$。特别地，我们可以考虑满足 $(t_1[!u :=t_2])^\sigma = t_1^\tau[\star := t_2^\nu]$ 的相容替换，因此只需证明 $t_1[\star := t_2] \in [\![A]\!]$。

  根据引理 60，只需证明对于所有 $r \in [\![A^\bot]\!]$，$t_1[\star := t_2] \not\downarrow r \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$。利用结构等价，我们得到 $t_1[\star := t_2] \not\downarrow r \equiv (t_1 \not\downarrow r)[\star := t_2]$，因此只需证明 $(t_1 \not\downarrow r)[\star := t_2] \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$。由于根据归纳假设 $t_1 \not\downarrow r \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$，且 $t_2 \in [\![\mathbb{1}]\!] = \mathsf{SN}_\mathbb{1}$，于是我们得出 $(t_1 \not\downarrow r)[\star := t_2] \lhd_\bot \mathsf{SN}_\bot$。

◀

E 弱 Church-Rosser

▶**引理 67.** 令 L 为正消去子上下文。则以下各项成立：

1. $(?\mathfrak{V}(a,b).t)\mathsf{L}$ 是良类型的，当且仅当 $?\mathfrak{V}(a,b).t\mathsf{L}$ 是良类型的。2. $(?u.t)\mathsf{L}$ 是良类型的，当且仅当 $?u.t\mathsf{L}$ 是良类型的。

3. 如果 定义域(L) ∩自由变量(s) $= \varnothing$，则 $(t \not\downarrow s)$L 是良类型的，当且仅当 tL$\not\downarrow s$ 是良类型的。类似地，$(s \not\downarrow t)$L是良类型的，当且仅当 $s \not\downarrow t$L是良类型的。

证明。 这是因为，对于以下形式的项 $t[\langle a, b\rangle := s]$, $t[!u := s]$ 和$t[\star := s]$，类型规则 M-E⊗, M-E!，以及 M-E𝟙分别不会对t的类型作出要求，并允许任意数量的线性变量和非受限变量。◀

▶**引理 68。** 令 L 为一个正消去子上下文。则以下各项成立：

1. $(\parr(a, b).t)$L $\equiv \parr(a, b).t$L. 2. $(?u.t)$L $\equiv ?u.t$L. 3. $(t \not\downarrow s)$L $\equiv t$ L$\not\downarrow s$ 和 $(s \not\downarrow t)$L $\equiv s \not\downarrow t$L, 若 dom(L) ∩fv$(s)$ $= \varnothing$. 4. $t[a, b :$ $= s]$L $\equiv t[a, b := s$L$]$, 若 dom(L) ∩ fv$(s)\varnothing$. 5. $t[!u := s]$L $\equiv t[!u :=$ sL$]$, 若 dom(L) ∩fv(s) $= \varnothing$. 6. $t[$p $:= s]$L $\equiv t$L $[$p $:= s]$, 若 fv(L) ∩fv(p) $= \varnothing$.

证明。 所有各项都可以通过对L进行归纳法证明。

◀

▶ **引理 69** （归约与线性变量的替换相容）。 假设 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$。则

1. $t\{a := r\} \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s\{a := r\}$.
2. $r\{a := t\} \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} r\{a := s\}$.

证明。 对 t进行归纳法。 ◀

▶ **引理 70** （归约与非受限变量的替换相容）。 假设$t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$。则

1. $t\{u :=r\} \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s\{u :=r\}$。
2. $r\{u:=t\} \twoheadrightarrow^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} r\{u:=s\}$。

证明。 对 t进行归纳法。 ◀

▶**引理 71.** 设 t 和 $t\{a\backslash\backslash r\}$ 是可类型化项。

1. $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 推出 $t\{a\backslash\backslash r\} \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s\{a\backslash\backslash r\}$。
2. $r \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 推出 $t\{a\backslash\backslash r\} \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} t\{a\backslash\backslash s\}$。

证明。 这两项通过对 t进行归纳法，同时得到证明。

◀

▶ **引理 72** (弱 Church-Rosser)。 设 t 是带类型的。则 $t \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$ 和 $t \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} r$，推出存在 p，使得 $s \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} p$ 和 $r \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} p$。

证明。 由于 $\equiv$ 是强双模拟，只需考虑以下情形： $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s$经过一步 σ 且 $t \to^{-}_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} r$ 经过一步 ρ。对 t作归纳法。

◀

F 翻译

F.1 Parigot 的 $\lambda\mu$

F.1.1 T-翻译

▶ **引理 20** (类型保持)。 若 $\Gamma \vdash M\colon A \mid \Sigma$ 在 $\lambda\mu$中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k : (A^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash M_k^{\mathsf{T}}\colon \perp$ 在 λ_{MELL}中成立，其中 k 是一个新的线性变量。

证明。 对推导进行归纳。

1. P-AX。该推导以.....结束

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A \mid \Sigma}\ \text{P-AX}$$

注意， $x_k^{\mathsf{T}} = x \lightning !k$ 因此我们根据以下内容得出结论:

$$\frac{}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, x : ?A^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k : (A^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash x \lightning !k : \perp}\ \text{P-AX}$$

2. P-LAM。推导以此结束

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash N : B \mid \Sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.\, N : A \supset B \mid \Sigma}\ \text{P-LAM}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{IH}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, x : ?A^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k' : (B^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash N_{k'}^{\mathsf{T}} : \perp}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k' : (B^{\mathsf{T}})^{\perp}; a : !?A^{\mathsf{T}} \vdash N_{k'}^{\mathsf{T}}[!x := a] : \perp}\ \text{Lem. 32(1)}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}; a : !?A^{\mathsf{T}}, b : !(B^{\mathsf{T}})^{\perp} \vdash N_{k'}^{\mathsf{T}}[!x := a][!k' := b] : \perp}\ \text{Lem. 32(1)}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash \parr(a, b).N_{k'}^{\mathsf{T}}[!x := a][!k' := b] : ?!(A^{\mathsf{T}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{T}}}\ \text{M-I}\parr}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k : !?A^{\mathsf{T}} \otimes !(B^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash \parr(a, b).N_{k'}^{\mathsf{T}}[!x := a][!k' := b] \lightning k : \perp}\ \text{M-I}\perp$$

3. P-APP。推导以此结束

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \supset B \mid \Sigma \quad \Gamma \vdash Q : A \mid \Sigma}{\Gamma \vdash P\ Q : B \mid \Sigma}\ \text{P-APP}$$

设 π 为如下推导:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{IH}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k'' : (A^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash Q_{k''}^{\mathsf{T}} : \perp}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash ?k''.Q_{k''}^{\mathsf{T}} : ?A^{\mathsf{T}}}\ \text{M-I}?}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash !?k''.Q_{k''}^{\mathsf{T}} : !?A^{\mathsf{T}}}\ \text{M-I}!}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash \langle !?k''.Q_{k''}^{\mathsf{T}}, !k\rangle : !?A^{\mathsf{T}} \otimes !(B^{\mathsf{T}})^{\perp}}\ \text{M-I}\otimes$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{IH}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k' : !?A^{\mathsf{T}} \otimes !(B^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash P_{k'}^{\mathsf{T}} : \perp}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\perp}, k' : !(B^{\mathsf{T}})^{\perp}; \cdot \vdash P_{k'}^{\mathsf{T}}\{k' := \langle !?k''.Q_{k''}^{\mathsf{T}}, !k\rangle\} : \perp}\ \text{M-SUB}$$

4. P-NAME。推导结束于

$$\dfrac{\Gamma \vdash N : A \mid \Sigma, a : A}{\Gamma \vdash [a]N : \bot \mid \Sigma, a : A}\ \text{P-NAME}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{IH}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\bot}, a : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}, k' : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}; \cdot \vdash N^{\mathsf{T}}_{k'} : \bot}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\bot}, a : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}; \cdot \vdash N^{\mathsf{T}}_{k'}\{k' := a\} : \bot}\ \text{M-SUB}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\bot}, a : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}, k : \mathbb{1}; \cdot \vdash N^{\mathsf{T}}_{k'}\{k' := a\} \lightning k : \bot}\ \text{M-I}\bot$$

5. P-MU。推导以

$$\dfrac{\Gamma \vdash N : \bot \mid \Sigma, a : A}{\Gamma \vdash \mu a.N : A \mid \Sigma}\ \text{P-MU}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{IH}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\bot}, a : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}, k' : \mathbb{1}; \cdot \vdash N^{\mathsf{T}}_{k'} : \bot}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\bot}, a : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}; \cdot \vdash N^{\mathsf{T}}_{k'}\{k' := \star\} : \bot}\ \text{M-SUB}}{?\Gamma^{\mathsf{T}}, (\Sigma^{\mathsf{T}})^{\bot}, k : (A^{\mathsf{T}})^{\bot}; \cdot \vdash N^{\mathsf{T}}_{k'}\{k' := \star\}\{a := k\} : \bot}\ \text{M-SUB}$$

◀

▶ **引理 73.** 假设 $M \to_{\beta} N$，则 $M^{\mathsf{T}}_k \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N^{\mathsf{T}}_k$。

证明。 对 M 进行归纳。

◀

▶ **引理 74.** 假设 $M \to_{\mu} N$，则 $M^{\mathsf{T}}_k = N^{\mathsf{T}}_k$。

证明。 对 M 进行归纳。

◀

▶ **引理 75。** 假设 $M \to_{\rho} N$，则 $M^{\mathsf{T}}_k \equiv N^{\mathsf{T}}_k$。

证明。 对 M 进行归纳。

◀

▶ **引理 76。** 假设 $M \to_{\theta} N$，则 $M^{\mathsf{T}}_k \equiv N^{\mathsf{T}}_k$。

证明。 对 M 进行归纳。

◀

▶ **命题 21** (模拟)。 如果 $M \to_{\mu} N$，则 $M^{\mathsf{T}}_k \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N^{\mathsf{T}}_k$。

证明。 对 $M \to_{\mu} N$ 使用引理73、引理74、引理75和引理76进行归纳。 ◀

F.1.2 Q-翻译

▶ **引理 22** (类型保持)。 如果 $\Gamma \vdash M : A \mid \Sigma$ 在 $\lambda\mu_V$ 中成立，那么 $\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash M^{\mathsf{Q}} : \perp$ 在 λ_{MELL} 中成立。

证明。 对推导进行归纳法。

1. P-AX。推导以以下形式结束

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A \mid \Sigma}\ \text{P-AX}$$

$$\frac{}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, x : A^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash !x \lightning k : \perp}\ \text{P-AX}$$

2. P-LAM。推导以以下形式结束

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash N : B \mid \Sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.\, N : A \supset B \mid \Sigma}\ \text{P-LAM}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{IH}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, x : A^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k' : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'} : \perp}\ \text{Lem. } 32(1)}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k' : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; a : !A^{\mathsf{Q}} \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'}[!x := a] : \perp}\ \text{Lem. } 32(1)}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}; a : !A^{\mathsf{Q}}, b : !(B^{\mathsf{Q}}_{k'})^{\perp} \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'}[!x := a][!k' := b] : \perp}\ \text{M-I}\parr}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash \parr(a, b).N^{\mathsf{Q}}_{k'}[!x := a][!k' := b] : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}}\ \text{M-I}!}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash !(\parr(a, b).N^{\mathsf{Q}}_{k'}[!x := a][!k' := b]) : !((A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}})}\ \text{M-I}\perp}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : ?(A^{\mathsf{Q}} \otimes !(B^{\mathsf{Q}}_{k'})^{\perp}); \cdot \vdash !(\parr(a, b).N^{\mathsf{Q}}[!x := a][!k' := b]) \lightning k : \perp}$$

3. P-APP。推导以以下形式结束

$$\frac{\Gamma \vdash N : A \supset B \mid \Sigma \quad \Gamma \vdash O : A \mid \Sigma}{\Gamma \vdash N\ O : B \mid \Sigma}\ \text{P-APP}$$

令 π 为推导:

$$\frac{\dfrac{v : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}, \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}}{v : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}, \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash !k : !(B^{\mathsf{Q}})^{\perp}}\ \text{M-I}!}{v : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}, \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash v\blacktriangledown !k : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}}\ \text{M-E}\parr_2$$

$$\frac{\begin{array}{c} v : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}, \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash v\blacktriangledown !k : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \\ v : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}, \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k' : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash O^{\mathsf{Q}}_{k'} : \perp \end{array}}{v : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp} \parr ?B^{\mathsf{Q}}, \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash O^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := v\blacktriangledown !k\} : \perp}\ \text{M-SUB}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash ?v.O^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := v\blacktriangledown !k\} : ?(A^{\mathsf{Q}} \otimes !(B^{\mathsf{Q}})^{\perp})}\ \text{M-I}?$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash ?v.O^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := v\blacktriangledown !k\} : ?(A^{\mathsf{Q}} \otimes !(B^{\mathsf{Q}})^{\perp}) \\ \Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k'' : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k' : ?(A^{\mathsf{Q}} \otimes !(B^{\mathsf{Q}})^{\perp}); \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k''} : \perp \end{array}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k''}\{k'' := ?v.O^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := v\blacktriangledown !k\}\} : \perp}\ \text{M-SUB}$$

4. P-NAME。推导终止于

$$\frac{\Gamma \vdash N : A \mid \Sigma, a : A}{\Gamma \vdash [a]N : \bot \mid \Sigma, a : A}\ \text{P-NAME}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma^{\mathsf{Q}}_{=}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, a : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k' : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'} : \bot}\ \text{IH}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}_{=}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, a : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := a\} : \bot}\ \text{M-SUB}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}_{=}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, a : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : \mathbb{1}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := a\} \lightning k : \bot}\ \text{M-I}\bot$$

5. P-MU。推导结束于

$$\frac{\Gamma \vdash N : \bot \mid \Sigma, a : A}{\Gamma \vdash \mu a.N : A \mid \Sigma}\ \text{P-MU}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma^{\mathsf{Q}}_{=}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, a : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k' : \mathbb{1}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'} : \bot}\ \text{IH}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}_{=}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, a : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := \star\} : \bot}\ \text{M-SUB}}{\Gamma^{\mathsf{Q}}_{=}, (\Sigma^{\mathsf{Q}})^{\perp}, k : (A^{\mathsf{Q}})^{\perp}; \cdot \vdash N^{\mathsf{Q}}_{k'}\{k' := \star\}\{a := k\} : \bot}\ \text{M-SUB}$$

◀

▶ **引理 77**。 假设 $M \to_{\beta_V} N$，则 $M^{\mathsf{Q}}_k \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N \mathsf{Q} k$。

证明。 对 M进行归纳法。

◀

▶ **引理 78**。 假设 $M \to_{\mu_V} N$，则 $M^{\mathsf{Q}}_k = N \mathsf{Q} k$。

证明。 对 M进行归纳法。

◀

▶ **引理 79**。 **</style}假设，那么 Q** k。

证明。 对 M进行归纳法。

◀

▶ **引理 80**。 假设 $M \to_{\rho} N$，那么 $M^{\mathsf{Q}}_k \equiv N \mathsf{Q} k$。

证明。 对 M进行归纳法。

◀

▶ **引理 81**。 假设 $M \to_{\theta} N$，那么 $M^{\mathsf{Q}}_k \equiv N \mathsf{Q} k$。

证明。 对 M进行归纳。

◀

▶ **命题 23**（模拟）。 若 $M \to_{\mu_V} N$，则 $M \mathsf{Q}_k \doteq_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N^{\mathsf{Q}}_k$，其中 $\doteq_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$表示 $\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}$ 的自反、对称和传递闭包。

证明。 根据归纳法 $M \to_{\mu_V} N$ 并使用引理 77、引理 78、引理 79、引理 80 和引理 81。

◀

F.2 Curien 和 Herbelin 的 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$

▶**引理 24**（类型保持）。

1. 若 $c : (\Gamma \vdash \Delta)$ 在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}^{\perp}}; \cdot \vdash c^{\mathsf{T}} : \perp$ 在 λ_{MELL} 中成立。*2.* 若 $\Gamma \mid e : A \vdash \Delta$ 在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}^{\perp}}; \cdot \vdash e^{\mathsf{T}} : !(A^{\mathsf{T}^{\perp}})$ 在 λ_{MELL} 中成立。*3.* 若 $\Gamma \vdash v : A \mid \Delta$ 在 $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 中成立，则 $?\Gamma^{\mathsf{T}}, \Delta^{\mathsf{T}^{\perp}}; \cdot \vdash v^{\mathsf{T}} : ?A^{\mathsf{T}}$ 在 λ_{MELL} 中成立。

证明。对推导作归纳。 ◀

▶ **命题 25** (模拟)。若$t \to_{\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}} s$，则 $t_k^{\mathsf{T}} \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} s_k^{\mathsf{T}}$。

证明。 对归约步骤 $t \to_{\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}} s$进行归纳。 ◀

F.3 Hasegawa 的 μDCLL

Hasegawa [19, 20] 引入了 μDCLL，这是 Barber 和 Plotkin 的对偶直觉主义线性逻辑 [8, 9] 向 MELL 的扩展。该系统同时包含直觉主义（非线性）箭头类型 $\supset$和线性箭头类型 $\multimap$。

▶**定义 82** （ μDCLL 的类型和项）。 其定义如下:

$$A, B ::= \perp \mid \alpha \mid A \supset B \mid A \multimap B \qquad M, N ::= x \mid u \mid \Lambda u.\, M \mid M \mathbin{@} N \mid \lambda x.\, M \mid M \bullet N \mid [a]M \mid \mu a.M$$

μDCLL 的类型规则如下，其中在 Γ, Γ' 中，假设 dom(Γ) ∩dom(Γ′) $= \varnothing$ ，且 Σ, Σ' 中也类似。

$$\frac{}{\Delta, u : A; \cdot \vdash u : A \mid \cdot}\ \text{INT-AX} \qquad \frac{}{\Delta; x : A \vdash x : A \mid \cdot}\ \text{LIN-AX}$$

$$\frac{\Delta, u : A; \Gamma \vdash M : B \mid \Sigma}{\Delta; \Gamma \vdash \Lambda u.\, M : A \supset B \mid \Sigma}\ \supset\text{-I} \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A \supset B \mid \Sigma \quad \Delta; \cdot \vdash N : A \mid \cdot}{\Delta; \Gamma \vdash M \mathbin{@} N : B \mid \Sigma}\ \supset\text{-E}$$

$$\frac{\Delta; \Gamma, x : A \vdash M : B \mid \Sigma}{\Delta; \Gamma \vdash \lambda x.\, M : A \multimap B \mid \Sigma}\ \multimap\text{-I} \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A \multimap B \mid \Sigma \quad \Delta; \Gamma' \vdash N : A \mid \Sigma'}{\Delta; \Gamma, \Gamma' \vdash M \bullet N : B \mid \Sigma, \Sigma'}\ \multimap\text{-E}$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A \mid \Sigma}{\Delta; \Gamma \vdash [a]M : \perp \mid \Sigma, a : A}\ \perp\text{-I} \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash M : \perp \mid \Sigma, a : A}{\Delta; \Gamma \vdash \mu a.M : A \mid \Sigma}\ \perp\text{-E}$$

我们对 μDCLL中等式的表述与 [19, 20]的表述略有三点不同。首先，我们区分线性变量（例如 x）和非线性变量（例如 u）。其次，我们删去了两个外延性公理（即 $\Lambda x.\, M @ x \doteq M$和 $\lambda x.\, M \bullet x \doteq M$，其中$x \notin \mathrm{fv}(M)$）。此外，op cit 在其对（$\mu - R$）的表述中使用了“一次性” μ绑定子。也就是说，在（$\mu - R$）的右侧，op cit 同时删去了 μ绑定子的一次出现，以及 $[a]$ 在 M中的（唯一）一次出现，而我们保留了二者[5]。我们采用的方法也见于 Bierman [11]的经典线性 $\lambda\mu$演算中。

▶**定义83** （关于 μDCLL的公理）。 *μDCLL*-等价定义为以下等价公理的上下文闭包:

[5] 更准确地说，该等式为 $N\,(\mu a.M) \doteq M[^{N(-)}/_{[a](-)}],$ ，其中 $M[^{N(-)}/_{[a](-)}]$ 是通过以 N O 无捕获地替换 $[a]O$ 的唯一一次出现而得到的。

$$
\begin{array}{llll}
(\Lambda u.\, M) \mathbin{@} N & \doteq_{lin\beta} & M\{u{:}=N\} & N\ (\mu a.M) \doteq_{\mu-R} \mu a.(M\{a \lhd^{\star} N\}) \\
(\lambda x.\, M) \bullet N & \doteq_{\beta} & M\{x := N\} & \mu a.[a]M \doteq_{\theta} M \qquad (a \notin \text{自由变量}(M))
\end{array}
$$

▶**定义 84**（翻译）。 公式与 $\mu DCLL$-项的翻译由下式给出

$$
\begin{array}{lcl}
\bot^{\mathsf{H}} & := & \bot \\
\alpha^{\mathsf{H}} & := & \alpha \\
(A \supset B)^{\mathsf{H}} & := & ?(A^{\mathsf{H}})^{\perp} \parr B^{\mathsf{H}} \\
(A \multimap B)^{\mathsf{H}} & := & (A^{\mathsf{H}})^{\perp} \parr B^{\mathsf{H}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
x^{\mathsf{H}} & := & x \\
(\Lambda u.\, M)^{\mathsf{H}} & := & \parr(a,k).(M^{\mathsf{H}}[!u := a] \not\downarrow k) \\
(M \mathbin{@} N)^{\mathsf{H}} & := & M^{\mathsf{H}} \bullet !N^{\mathsf{H}} \\
(\lambda x.\, M)^{\mathsf{H}} & := & \parr(x,k).(M^{\mathsf{H}} \not\downarrow k) \\
(M \bullet N)^{\mathsf{H}} & := & M^{\mathsf{H}} \bullet N^{\mathsf{H}} \\
([a]M)^{\mathsf{H}} & := & M^{\mathsf{H}} \not\downarrow a \\
(\mu a.M)^{\mathsf{H}} & := & M^{\mathsf{H}}\{a \backslash\!\backslash \star\}
\end{array}
$$

▶**引理 85.** 如果 $\Delta;\ \Gamma \vdash M:\ A \mid \Sigma$ 在 $\mu DCLL$ 中成立，那么 $\Delta^{\mathsf{H}};\ \Gamma^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash M^{\mathsf{H}} : A^{\mathsf{H}}$ 在λ_{MELL}中成立。

证明。 对 $\Delta; \Gamma \vdash M:\ A \mid \Sigma.$ 的推导进行归纳。

1. INT-AX

$$\frac{}{\Delta, u : A; \cdot \vdash u : A \mid \cdot}\ \text{INT-AX}$$

$$\frac{}{\Delta^{\mathsf{H}}, u : A^{\mathsf{H}}; \cdot \vdash u : A^{\mathsf{H}}}\ \text{M-UAX}$$

2. LIN-AX

$$\frac{}{\Delta; x : A \vdash x : A \mid \cdot}\ \text{LIN-AX}$$

$$\frac{}{\Delta^{\mathsf{H}}; x : A^{\mathsf{H}} \vdash x : A^{\mathsf{H}}}\ \text{M-AX}$$

3. $\supset$-I

$$\frac{\Delta, u : A; \Gamma \vdash M : B \mid \Sigma}{\Delta; \Gamma \vdash \Lambda u.\, M : A \supset B \mid \Sigma}\ \supset\text{-I}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta^{\mathsf{H}}, u : A^{\mathsf{H}}; \Gamma^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash M^{\mathsf{H}} : B^{\mathsf{H}}}{\Delta^{\mathsf{H}}; \Gamma^{\mathsf{H}}, a : !A^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash M^{\mathsf{H}}[!u := a] : B^{\mathsf{H}}}}{\Delta^{\mathsf{H}}; \Gamma^{\mathsf{H}}, a : !A^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp}, k : (B^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash M^{\mathsf{H}}[!u := a] \not\downarrow k : \bot}}{\Delta^{\mathsf{H}}; \Gamma^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash \parr(a,k).M^{\mathsf{H}}[!u := a] \not\downarrow k : ?(A^{\mathsf{H}})^{\perp} \parr B^{\mathsf{H}}}$$

4. $\supset$-E

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash M : A \supset B \mid \Sigma \quad \Delta; \cdot \vdash N : A \mid \cdot}{\Delta; \Gamma \vdash M \mathbin{@} N : B \mid \Sigma}\ \supset\text{-E}$$

$$\frac{\Delta^{\mathsf{H}}; \Gamma^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash M^{\mathsf{H}} : ?(A^{\mathsf{H}})^{\perp} \parr B^{\mathsf{H}} \qquad \dfrac{\Delta^{\mathsf{H}}; \cdot \vdash N^{\mathsf{H}} : A^{\mathsf{H}}}{\Delta^{\mathsf{H}}; \cdot \vdash !N^{\mathsf{H}} : !A^{\mathsf{H}}}}{\Delta^{\mathsf{H}}; \Gamma^{\mathsf{H}}, (\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp} \vdash M^{\mathsf{H}} \bullet !N^{\mathsf{H}} : B^{\mathsf{H}}}$$

5. $\multimap$-I

$$\frac{\Delta;\Gamma,x:A\vdash M:B\mid\Sigma}{\Delta;\Gamma\vdash\lambda x.M:A\multimap B\mid\Sigma}\multimap\text{-I}$$

$$\frac{\dfrac{\Delta^{\mathsf{H}};\Gamma^{\mathsf{H}},x:A^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}:B^{\mathsf{H}}}{\Delta^{\mathsf{H}};\Gamma^{\mathsf{H}},x:A^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp},k:(B^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}\not\downarrow k:\perp}}{\Delta^{\mathsf{H}};\Gamma^{\mathsf{H}},x:A^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp},k:(B^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash\parr(x,k).M^{\mathsf{H}}\not\downarrow k:(A^{\mathsf{H}})^{\perp}\parr B^{\mathsf{H}}}$$

6. $\multimap$-E

$$\frac{\Delta;\Gamma_1\vdash M:A\multimap B\mid\Sigma_1\quad\Delta;\Gamma_2\vdash N:A\mid\Sigma_2}{\Delta;\Gamma_1,\Gamma_2\vdash M\bullet N:B\mid\Sigma_1,\Sigma_2}\multimap\text{-E}$$

$$\frac{\Delta^{\mathsf{H}};{\Gamma_1}^{\mathsf{H}},({\Sigma_1}^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}:(A^{\mathsf{H}})^{\perp}\parr B^{\mathsf{H}}\quad\Delta^{\mathsf{H}};{\Gamma_2}^{\mathsf{H}},({\Sigma_2}^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash N^{\mathsf{H}}:A^{\mathsf{H}}}{\Delta^{\mathsf{H}};{\Gamma_1}^{\mathsf{H}},{\Gamma_2}^{\mathsf{H}},({\Sigma_1}^{\mathsf{H}})^{\perp},({\Sigma_2}^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}\bullet N^{\mathsf{H}}:B^{\mathsf{H}}}$$

7. $\perp$-I

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash M:A\mid\Sigma}{\Delta;\Gamma\vdash[a]M:\perp\mid\Sigma,a:A}\perp\text{-I}$$

$$\frac{\Delta^{\mathsf{H}};\Gamma^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}:A^{\mathsf{H}}}{\Delta^{\mathsf{H}};\Gamma^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp},a:(A^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}\not\downarrow a:\perp}$$

8. $\perp$-E

$$\frac{\Delta;\Gamma\vdash M:\perp\mid\Sigma,a:A}{\Delta;\Gamma\vdash\mu a.M:A\mid\Sigma}\perp\text{-E}$$

$$\frac{\Delta^{\mathsf{H}};\Gamma^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp},a:(A^{\mathsf{H}})^{\perp}\vdash M^{\mathsf{H}}:\perp}{\Delta^{\mathsf{H}},(\Sigma^{\mathsf{H}})^{\perp};\Gamma^{\mathsf{H}}\vdash M^{\mathsf{H}}\{a\backslash\!\backslash\star\}:A^{\mathsf{H}}}$$

◀

▶**引理 86** ($(\cdot)^{\mathsf{H}}$与线性与非受限替换交换)。 $M\{x:=N\}^{\mathsf{H}}=M^{\mathsf{H}}\{x:=N^{\mathsf{H}}\}$且 $M\{u:=N\}^{\mathsf{H}}=M^{\mathsf{H}}\{u:=N^{\mathsf{H}}\}$。

证明。 对 M 使用引理 41 进行归纳法。 ◀

▶**引理 87**。 $((\Lambda x.M)@N)^{\mathsf{H}}\twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}}(M\{x:=N\})^{\mathsf{H}}$

证明。

$$\begin{array}{lll}
 & ((\Lambda x.M)@N)^{\mathsf{H}} & \\
= & (\Lambda x.M)^{\mathsf{H}}\bullet!N^{\mathsf{H}} & \\
= & (\parr(a,k).(M^{\mathsf{H}}[!x:=a]\not\downarrow k))\bullet!N^{\mathsf{H}} & \\
\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} & (M^{\mathsf{H}}[!x:=a]\not\downarrow k)\{a:=!N^{\mathsf{H}}\}\{k\backslash\!\backslash\star\} & \\
= & (M^{\mathsf{H}}[!x:=!N^{\mathsf{H}}]\not\downarrow k)\{k\backslash\!\backslash\star\} & \\
\equiv & M^{\mathsf{H}}[!x:=!N^{\mathsf{H}}] & \\
\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} & M^{\mathsf{H}}\{x:=N^{\mathsf{H}}\} & \\
= & (M\{x:=N\})^{\mathsf{H}} & \textit{Lem. 86}
\end{array}$$

◀

▶ **引理 88.** $((\lambda x.\, M) \bullet N)^{\mathsf{H}} \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} (M\{x := N\})^{\mathsf{H}}$证明。

$$
\begin{array}{lll}
 & ((\lambda x.\, M) \bullet N)^{\mathsf{H}} & \\
= & (\lambda x.\, M)^{\mathsf{H}} \bullet N^{\mathsf{H}} & \\
= & (\wp(x,k).(M^{\mathsf{H}} \not\downarrow k)) \bullet N^{\mathsf{H}} & \\
\to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} & (M^{\mathsf{H}} \not\downarrow k)\{x := N^{\mathsf{H}}\}\{k \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & (M^{\mathsf{H}}\{x := N^{\mathsf{H}}\} \not\downarrow k)\{k \setminus\!\setminus \star\} & \\
\equiv & M^{\mathsf{H}}\{x := N^{\mathsf{H}}\} & \\
= & (M\{x := N\})^{\mathsf{H}} & \textit{Lem. } 86
\end{array}
$$

◀

▶ **引理 89.** $\mathsf{C}\langle t \not\downarrow a\rangle\{a \setminus\!\setminus s\} = t\mathsf{L}$，其中 L 取决于 C 和 s

证明。 对C进行归纳法。 ◀

▶ **引理 90.** $(N\ (\mu a.M))^{\mathsf{H}} \equiv (\mu a.(M\{a \lhd^{\star} N\}))^{\mathsf{H}}$

证明。 由于 M 有且仅有一个形如 $[a]O$的子项，因此它必定具有形式 $\mathsf{C}\langle [a]O\rangle$。因此 $M^{\mathsf{H}} = \mathsf{C}^{\mathsf{H}}\langle O^{\mathsf{H}} \not\downarrow a\rangle$。

$$
\begin{array}{lll}
 & (N\ (\mu a.M))^{\mathsf{H}} & \\
= & N^{\mathsf{H}} \bullet (\mu a.M)^{\mathsf{H}} & \\
= & N^{\mathsf{H}} \bullet M^{\mathsf{H}}\{a \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & N^{\mathsf{H}} \bullet \mathsf{C}^{\mathsf{H}}\langle O^{\mathsf{H}} \not\downarrow a\rangle\{a \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & N^{\mathsf{H}} \bullet O^{\mathsf{H}}\mathsf{L} & \textit{Lem. } 89 \\
\equiv & (N^{\mathsf{H}} \bullet O^{\mathsf{H}})\mathsf{L} & \textit{Lem. } 36 \\
= & (\mathsf{C}^{\mathsf{H}}\langle (N^{\mathsf{H}} \bullet O^{\mathsf{H}}) \not\downarrow a\rangle)\{a \setminus\!\setminus \star\} & \textit{Lem. } 89 \\
= & (M\{a \lhd^{\star} N\})^{\mathsf{H}}\{a \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & (\mu a.(M\{a \lhd^{\star} N\}))^{\mathsf{H}} &
\end{array}
$$

◀

▶**引理 91.** $(\mu a.[a]M)^{\mathsf{H}} \equiv M^{\mathsf{H}}$，如果 $a \notin$自由变量(M)

证明。

$$
\begin{array}{lll}
 & (\mu a.[a]M)^{\mathsf{H}} & \\
= & ([a]M)^{\mathsf{H}}\{a \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & (M^{\mathsf{H}} \not\downarrow a)\{a \setminus\!\setminus \star\} & \\
= & a\{a \setminus\!\setminus M^{\mathsf{H}}[\star := \star]\} & \\
= & M^{\mathsf{H}}[\star := \star] & \\
\equiv & M^{\mathsf{H}} &
\end{array}
$$

◀

▶ **命题 92.** 若 $M \doteq N$，则 $M\mathsf{Q}k \doteq_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} N_{\mathsf{Q}k}$。

P证明。 对 $M \doteq N$作归纳，使用引理 90、引理 88、引理 90 和引理 91。总之 ，

1. $((\Lambda u.\, M)\ @\ N)^{\mathsf{H}} \twoheadrightarrow_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} (M\{u := N\})^{\mathsf{H}}$。
2. $((\lambda x.\, M) \bullet N)^{\mathsf{H}} \to_{\lambda_{\mathsf{MELL}}} (M\{x := N\})^{\mathsf{H}}$。 3. $(N(\mu a.M))^{\mathsf{H}} \equiv (\mu a.(M\{a \lhd^{\star} N\}))^{\mathsf{H}}$。 4. $(\mu a.[a]M)^{\mathsf{H}} \equiv M^{\mathsf{H}}$，如果 $a \notin \mathsf{fv}(M)$。

◀

参考文献

1 Samson Abramsky。线性逻辑的计算解释。《理论计算机科学》，111(1&2)：3–57，1993年。 doi:10.1016/0304-3975(93)90181-R。2 David W. Albrecht、John N. Crossley 和 John S. Jeavons。完全线性逻辑的新 Curry–Howard 项。《理论计算机科学》，185(2)：217–235，1997年。 doi:10.1016/S0304-3975(97)00044-3。3 Zena M. Ariola 和 Hugo Herbelin。最小经典逻辑与控制算子。载于 Jos C. M. Baeten、Jan Karel Lenstra、Joachim Parrow 和 Gerhard J. Woeginger 编，《自动机、语言与编程》，第30届国际研讨会，ICALP 2003，荷兰埃因霍温，2003年6月30日至7月4日，会议录，第2719卷《计算机科学讲义》，第871–885页。施普林格，2003年。 doi:10.1007/3-540-45061-0_68。4 Federico Aschieri 和 Francesco A. Genco。Par 意味着并行：作为并发函数式程序的乘性线性逻辑证明。《ACM 程序设计语言会议录》，4(POPL)：18:1–18:28，2020年。 doi:10.1145/3371086。5 David Baelde。线性逻辑中的最小不动点与最大不动点。《ACM计算逻辑汇刊》，13(1)：2:1–2:44，2012年。 doi:10.1145/2071368.2071370。6 David Baelde 和 Gopalan Nadathur。结合模理论演绎与不动点定义逻辑。载于《2012年第27届IEEE/ACM计算机科学逻辑国际研讨会会议录》，LICS '12，第105–114页，美国，2012年。IEEE计算机学会。 doi:10.1109/LICS.2012.22。7 Franco Barbanera 和 Stefano Berardi。用于经典程序提取的对称λ演算。《信息与计算》，125(2)：103–117，1996年。URL: https://doi.org/10.1006/inco.1996.0025, doi:10.1006/INCO.1996.0025。8 Andrew Barber。《线性类型理论、语义学与行动演算》。博士论文，爱丁堡大学，1997年。ECS-LFCS-97-371。9 Andrew Barber 和 Gordon Plotkin。对偶直觉主义线性逻辑。技术报告 ECS-LFCS-96-347，爱丁堡大学，1997年。10 Pablo Barenbaum、Eduardo Bonelli 和 Leopoldo Lerena。基于逆否的经典线性λ演算（技术报告），2026年。 ???11 Gavin M. Bierman。经典线性λ演算。《理论计算机科学》，227(1-2)：43–78，1999年。 doi:10.1016/S0304-3975(99)00048-1。12 Luís Caires 和 Frank Pfenning。作为直觉主义线性命题的会话类型。载于 Paul Gastin 和 François Laroussinie 编，CONCUR 2010——并发理论，第222–236页，柏林、海德堡，2010年。施普林格·柏林·海德堡。13 Pierre-Louis Curien 和 Hugo Herbelin。计算的对偶性。载于 Martin Odersky 和 Philip Wadler 编，《第五届ACM SIGPLAN函数式编程国际会议会议录》（ICFP '00），加拿大蒙特利尔，2000年9月18日至21日，第233–243页。ACM，2000年。 doi:10.1145/351240.351262。14 V. Danos、J.-B. Joinet 和 H. Schellinx。二阶逻辑的相继式演算。载于 Jean-Yves Girard、Yves Lafont 和 LaurentEditors Regnier 编，《线性逻辑进展》，伦敦数学会讲义系列，第211–224页。剑桥大学出版社，1995年。15 Rowan Davies 和 Frank Pfenning。分阶段计算的模态分析。《ACM杂志》，48(3)：555–604，2001年。 doi:10.1145/382780.382785。16 PAUL DOWNEN 和 ZENA M. ARIOLA。计算经典逻辑与相继式演算教程。《函数式编程期刊》，28：e3，2018年。 doi:10.1017/S0956796818000023。17 Nissim Francez 和 Roy Dyckhoff。关于协调性的一则注记。《哲学逻辑杂志》，41(3)：613–628，2012年。URL： https://doi.org/10.1007/s10992-011-9208-0, doi:10.1007/S10992-011-9208-0。18 Jean-Yves Girard。线性逻辑。《理论计算机科学》，50：1–102，1987年。 doi:10.1016/0304-3975(87)90045-4。

19 Masahito Hasegawa。蕴涵的经典线性逻辑。载于 Julian C. Bradfield 编，Com- puter Science Logic，第16届国际研讨会、EACSL 第11届年度会议，苏格兰爱丁堡，英国，2002年9月22日至25日，会议录，《计算机科学讲义》第2471卷，第458–472页。施普林格，2002年。 doi:10.1007/3-540-45793-3_31。20 Masahito Hasegawa。蕴涵的经典线性逻辑。《数学结构与计算机科学》，15(2)：323–342，2005年。 doi:10.1017/S0960129504004621。21 Delia Kesner。Girard 的直觉主义证明网的细粒度计算解释。《ACM 程序设计语言会议录》，6(POPL)：1–28，2022年。 doi:10.1145/3498669。22 Simone Martini 和 Andrea Masini。线性自然演绎中的实验。《理论计算机科学》，176(1-2)：159–173，1997年。 doi:10.1016/S0304-3975(96)00055-2。23 Lília Ramalho Martins 和 Ana Teresa C. Martins。完全线性逻辑中的自然演绎与弱规范化。《IGPL 逻辑期刊》，12(6)：601–625，2004年。URL： https://doi.org/10.1093/jigpal/12.6.601， doi:10.1093/JIGPAL/12.6.601。24 Karl Mazurak 和 Steve Zdancewic。Lolliproc：通过 Curry–Howard 对应和控制，从经典线性逻辑走向并发。载于 Paul Hudak 和 Stephanie Weirich 编，《第15届 ACM SIGPLAN 函数式编程国际会议论文集》，ICFP 2010，美国马里兰州巴尔的摩，2010年9月27日至29日，第39–50页。ACM，2010年。 doi:10.1145/1863543.1863551。25 Michel Parigot。Lambda-mu 演算：经典自然演绎的算法解释。载于 Andrei Voronkov 编，《逻辑编程与自动推理》，LPAR'92 国际会议，俄罗斯圣彼得堡，1992年7月15日至20日，会议录，《计算机科学讲义》第624卷，第190–201页。施普林格，1992年。URL：https://doi.org/10.1007/BFb0013061， doi:10.1007/BFB0013061。26 Walter Py。Lambda/mu 演算中的合流性。博士论文，尚贝里，1998年。27 Anne Sjerp Troelstra。《线性逻辑讲义》。语言与信息研究中心出版物，1992年。28 Philip Wadler。命题即会话。载于《第17届 ACM SIGPLAN 函数式编程国际会议论文集》，ICFP '12，美国纽约州纽约，2012年，第273–286页。计算机协会。 doi:10.1145/2364527.2364568。29 PHILIP WADLER。命题即会话。《函数式编程期刊》，24(2–3)：384–418，2014年。 doi:10.1017/S095679681400001X。