Shiha 分布：统计性质及其在可靠性工程与环境数据中的应用

F. A. Shiha

曼苏拉大学理学院数学系，埃及曼苏拉 35516。通讯方式：电子邮箱：fshiha@mans.edu.eg

arXiv:2602.02875v1 [stat.ME] 2 Feb 2026

摘要

本文介绍一种新的双参数分布，称为 Shiha 分布。该分布可灵活地对具有重尾或轻尾特征的偏态寿命数据进行建模。所提出的分布适用于多个领域，包括可靠性工程、环境研究及相关领域。我们推导了该分布的主要统计性质，包括矩母函数、矩、风险率函数、分位数函数和熵。此外，还以闭式形式推导了应力–强度可靠性参数。我们通过模拟研究评估其性能。对若干真实数据集的应用表明，与已有的竞争模型相比，Shiha 分布始终具有更优的拟合效果，证实了其在寿命数据分析中的实用性。

关键词：寿命分布；可靠性分析；分位数；熵；拟合优度。数学主题分类：62E15，62H10，62H12。

1 引言

现有的概率模型种类繁多，但有些数据集需要灵活性更高、拟合效果更好的分布。由于传统模型并不总能捕捉这类模式，研究人员持续开发和推广概率分布，以提升预测和估计能力。这项持续进行的工作催生了许多模型，它们通过各种构造方法适应现代可靠性数据。提高灵活性的一种常见方法是采用适当的混合比例，将两个或多个分布组合起来构造混合模型。这类混合模型能够表示单一分布往往无法捕捉的复杂形态。文献中已出现若干三成分混合分布。例如，将 Exp(ω)、Exp(2ω) 和 Gamma(2,2ω) 分布混合，得到了一参数 Sarhan–Tadj–Hamilton分布，该分布由 Sarhan等人[11] 研究，之后 Shiha等人 [16]又对其变异版本进行了拓展。通过采用不同的混合比例，将 Exp(ω)、Gamma(2,ω) 和 Gamma(3,ω) 混合，Shanker [14, 15] 以及 Welday 和 Shanker [18] 提出了 Aradhana 分布、Sujatha 分布和广义 Aradhana 分布。

Exp(ω) 和 Gamma(2,ω) 的经典双成分混合分布，混合比例分别为 $\frac{\omega}{1+\omega}$ 和 $\frac{1}{1+\omega}$，即 Lindley 分布，由 Lindley [7]，提出；此后，该分布启发了多种扩展，包括幂 Lindley 分布 [5], 、广义Lindley分布 [9], 、三参数广义 Lindley 分布 [3], 等。另一种基于 Exp(ω) 和 Gamma(3,ω) 的双成分混合分布也得到了研究，并由此产生了 xgamma 分布 [12], 、其 α 幂变换 [17], 、Akash 分布 [13], 和 Chris–Jerry 分布 [10]等模型。尽管许多分布广泛应用于寿命分析，但在某些情况下

它们在实际应用中无法提供足够好的拟合。为解决这些局限，我们引入一种新的双参数分布，该分布由 Exp(ω)、Exp(2ω) 和 Gamma(2,2ω) 按适当的混合权重构成。该模型能够生成灵活多样的风险率模式，因此适用于对各种类型的右偏寿命数据建模。本文其余部分安排如下：第 2 节介绍 Shiha 分布，并研究其可靠性性质，包括风险率函数和应力–强度可靠性。第 3 节研究该分布的一些统计特征，包括分位数函数、矩、偏度、峰度和熵。第 4 节介绍使用最大似然法进行参数估计。第 5 节将所提出的分布应用于来自可靠性工程和环境研究的四个真实寿命数据集，并将其拟合效果与 α幂变换后的 xgamma 分布、幂 Lindley 分布、三参数广义 Lindley 分布、Chris–Jerry 分布和 Akash 分布进行比较。最后，第 6 节总结全文。

2 Shiha 分布

新提出的双参数寿命分布的概率密度函数（概率密度函数）定义如下：

$$f(y;\omega,\eta)=\frac{\omega}{\omega+3\eta}\left[\omega+(2\eta+8\omega\eta y)e^{-\omega y}\right]e^{-\omega y}, \tag{2.1}$$

其中 $y\geq 0$，$\omega>0$，$\eta>0$，我们将该分布称为 Shiha 分布（$Y\sim$Shiha分布(ω,η)）。注意，当 $\eta=0$ 时，所提出的分布退化为指数分布(ω)。该分布可以表示为指数分布(ω)、指数分布(2ω) 和 Gamma(2,2ω) 的混合，其混合比例分别为 $p_1=\frac{\omega}{\omega+3\eta}$、$p_2=\frac{\eta}{\omega+3\eta}$、$p_3=\frac{2\eta}{\omega+3\eta}$。这意味着

$$f(y;\omega,\eta)=p_1\mathrm{Exp}(\omega)+p_2\mathrm{Exp}(2\omega)+p_3\mathrm{Gamma}(2,2\omega). \tag{2.2}$$

（2.1）对应的累积分布函数（累积分布函数）为

$$F(y;\omega,\eta)=1-\frac{1}{\omega+3\eta}\left[\omega+(3\eta+4\omega\eta y)e^{-\omega y}\right]e^{-\omega y}, \tag{2.3}$$

其生存函数为

$$S(y;\omega,\eta)=\frac{1}{\omega+3\eta}\left[\omega+(3\eta+4\omega\eta y)e^{-\omega y}\right]e^{-\omega y},\quad y\geq 0,\omega>0,\eta>0. \tag{2.4}$$

而风险率函数的形式为：

$$h(y;\omega,\eta)=\frac{f(y;\omega,\eta)}{S(y;\omega,\eta)}=\frac{\omega\left[\omega+(2\eta+8\omega\eta y)e^{-\omega y}\right]}{\omega+(3\eta+4\omega\eta y)e^{-\omega y}},\quad y\geq 0,\omega>0,\eta>0. \tag{2.5}$$

定理 1. 风险率函数 h(y;ω,η) 在 处取得唯一的最大值

$$y=\frac{1}{\omega}\left[W\left(\frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}\right)+\frac{5}{4}\right],$$

最大值为

$$h_{\max}=\omega\,\frac{2W\left(\frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}\right)+1}{W\left(\frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}\right)+1},$$

其中，$W(\cdot)>0$ 表示朗伯 W 函数。

证明。令 $t = \omega y$，则

$$h(y;\omega,\eta) =: h(t) = \omega\,\frac{8\eta t + 2\eta + \omega e^t}{4\eta t + 3\eta + \omega e^t}, \qquad t \geq 0$$

导数为

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\omega\left[(8\eta+\omega e^t)(4\eta t+3\eta+\omega e^t) - (8\eta t+2\eta+\omega e^t)(4\eta+\omega e^t)\right]}{(4\eta t+3\eta+\omega e^t)^2} \\ &= \frac{\omega\eta\left(16\eta+\omega e^t(5-4t)\right)}{(4\eta t+3\eta+\omega e^t)^2}. \end{aligned}$$

由于 $\omega,\eta > 0$，导数在以下位置等于零

$$\left(t^* - \tfrac{5}{4}\right)e^{t^*} = \frac{4\eta}{\omega}. \tag{2.6}$$

令 $u = t^* - \frac{5}{4}$。则

$$ue^u = \frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}.$$

B根据朗伯 W 函数的定义（更多细节请参见 Jodrá [4]），我们得到 t

$$u = W\left(\frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}\right), \qquad t^* = W\left(\frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}\right) + \frac{5}{4}$$

注意，对于 $0 \leq t < t^*$，$h'(t) > 0$；对于 $t > t^*$，$h'(t) < 0$，因此 $h(t)$ 在 t^* 处取得唯一最大值，

$$h_{\max} = h(t^*) = \omega\frac{8\eta t^* + 2\eta + \omega e^{t^*}}{4\eta t^* + 3\eta + \omega e^{t^*}}, \qquad t^* = \omega y^*.$$

由 (2.6)，我们有 $\omega e^{t^*} = \left(\frac{4\eta}{t^* - \frac{5}{4}}\right)$，于是得到

$$h_{\max} = h(t^*) = \omega\,\frac{2(16(t^*)^2 - 16t^* + 3)}{16(t^*)^2 - 8t^* + 1}, \qquad t^* = \omega y^*.$$

代入 $t^* = W\left(\frac{4\eta}{\omega}e^{-5/4}\right) + \frac{5}{4}$、$t^* = \omega y^*$，即可得出结果。

□

注 1。Shiha 分布的风险率函数满足

$$h(0;\omega,\eta) = \frac{\omega(\omega+2\eta)}{\omega+3\eta} < \omega, \qquad \lim_{y\to\infty} h(y;\omega,\eta) = \omega.$$

由于 $W(\cdot) > 0$ 对于正自变量成立，因此有 $h_{\max} > \omega$。此外，

$$\lim_{\eta\to 0^+} h_{\max} = \omega, \qquad \lim_{\eta\to\infty} h_{\max} = 2\omega,$$

因此，对于所有 $\eta > 0$，$\omega < h_{\max} < 2\omega$。

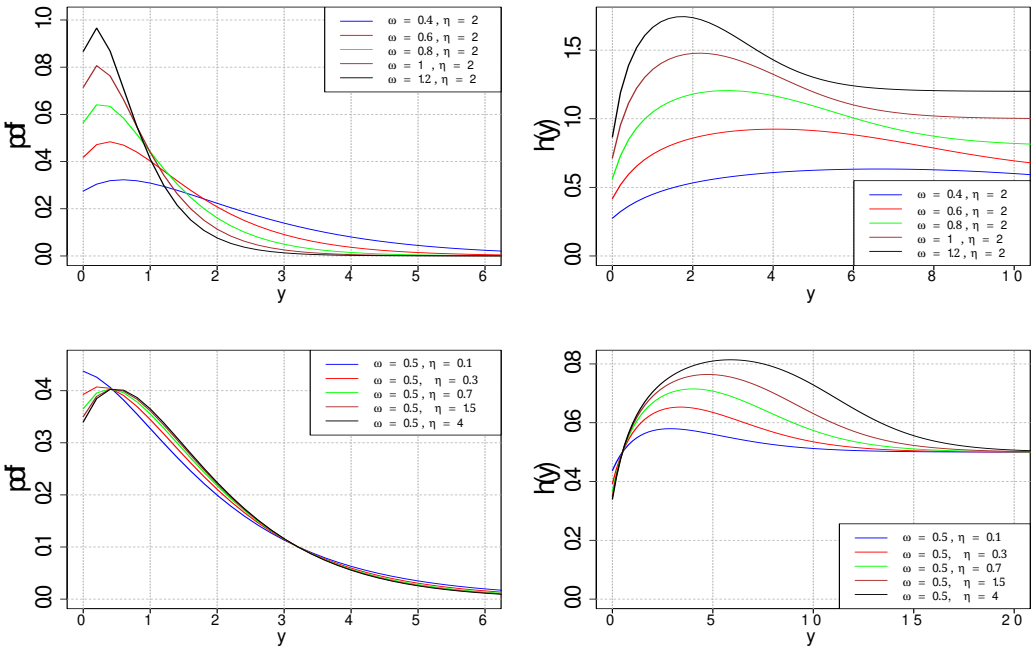


图1：不同参数值下 Shiha 分布的概率密度函数和风险函数。

图1展示了 Shiha 分布在ω和 η取不同值时的概率密度函数和风险率曲线。图中显示，随着 ω 增大，分布向左移动，峰值变得更尖锐，并向较小的 y 值移动，表明概率更加集中在零附近。相反，增大η会使概率密度函数变平缓，尾部变化更加渐进。风险率呈现多种形态，包括递增、递减、单峰以及倒浴盆形，这表明该分布能够有效地对具有重尾或轻尾的各类右偏寿命数据建模，因此适用于工程和环境领域。

2.1 应力–强度可靠性

应力–强度可靠性参数定义为 $R = P(Y_1 > Y_2)$，其中 Y_1（强度）和 Y_2（应力）是独立随机变量。参数 R 被广泛用于可靠性分析，作为系统性能的度量。当施加的应力超过其强度时，系统即被认为发生失效，因此失效概率为 $P(Y_2 > Y_1)$。

设 Y_1 和 Y_2 为两个相互独立的 Shiha 随机变量，其参数分别为（ω_1，η_1）和（ω_2，η_2）。则应力–强度可靠性参数 R 为

$$R = \int_0^\infty f(y;\omega_1,\eta_1)\,F(y;\omega_2,\eta_2)\,dy.$$

将 (2.1) 和 (2.3) 代入，得到

$$R = 1 - \frac{\omega_1}{(\omega_1+3\eta_1)(\omega_2+3\eta_2)} \int_0^\infty \left[\omega_1 + (2\eta_1 + 8\omega_1\eta_1 y)e^{-\omega_1 y}\right] e^{-(\omega_1+\omega_2)y} \times \left[\omega_2 + (3\eta_2 + 4\omega_2\eta_2 y)e^{-\omega_2 y}\right] dy.$$

使用以下方法计算上述积分

$$\int_0^\infty y^n e^{-ay}\,dy = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0,$$

应力–强度可靠性简化为

$$R = 1 - \frac{\omega_1}{(\omega_1+3\eta_1)(\omega_2+3\eta_2)}\left[\omega_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}+\frac{2\eta_1}{2\omega_1+\omega_2}+\frac{8\omega_1\eta_1}{(2\omega_1+\omega_2)^2}\right)\right.$$
$$+3\eta_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_1+2\omega_2}+\frac{\eta_1}{\omega_1+\omega_2}+\frac{2\omega_1\eta_1}{(\omega_1+\omega_2)^2}\right) \tag{2.7}$$
$$\left.+4\omega_2\eta_2\left(\frac{\omega_1}{(\omega_1+2\omega_2)^2}+\frac{\eta_1}{2(\omega_1+\omega_2)^2}+\frac{2\omega_1\eta_1}{(\omega_1+\omega_2)^3}\right)\right].$$

现在我们来研究式 (2.7) 的一些特殊情形。

1. 令 $\eta_1=\eta_2=0$，可得

$$R = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_1\omega_2}\left(\frac{\omega_2\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\right) = \frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}, \tag{2.8}$$

这与两个独立随机变量 $Y_1 \sim \text{Exp}(\omega_1)$ 和 $Y_2 \sim \text{Exp}(\omega_2)$ 的应力–强度可靠性一致。

2. 令 $\eta_1=\eta_2=\eta$, $\omega_1=\omega_2=\omega$，即 $Y_1 \sim$Shiha分布(ω,η) 和 $Y_2 \sim$Shiha分布(ω,η)，可得

$$R = 1 - \frac{\omega}{(\omega+3\eta)^2}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{2\eta}{3}+\frac{8\eta}{9}+\eta+\frac{3\eta^2}{\omega}+\frac{4\eta}{9}+\frac{3\eta^2}{2\omega}\right)$$
$$= 1 - \frac{\omega}{(\omega+3\eta)^2}\left(\frac{\omega}{2}+3\eta+\frac{9\eta^2}{2\omega}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. 令 $\omega_1=\omega_2=\omega, \eta_2=0$，即 $Y_1 \sim$Shiha分布(ω,η)、$Y_2 \sim$指数分布(ω)，则

$$R = 1 - \frac{1}{\omega+3\eta}\left[\frac{\omega}{2}+\frac{2\eta}{3}+\frac{8\eta}{9}\right] = \frac{9\omega+26\eta}{18(\omega+3\eta)}.$$

4. 若 $\omega_1 \to \infty$，随机变量 Y_1 将高度集中在零附近，并且

$$R \to 1 - \frac{1}{\omega_2+3\eta_2}(\omega_2\cdot 1+3\eta_2\cdot 1+0) = 1-\frac{\omega_2+3\eta_2}{\omega_2+3\eta_2} = 0.$$

3 统计性质

本节考察所提出的 Shiha模型的若干结构性质和统计性质，包括分位数、矩母函数、前四阶矩、方差、偏度、峰度和熵。

3.1 分位数函数

对于概率 $0<p<1$，第 p 个分位数 y_p 定义为

$$F(y_p;\omega,\eta) = p. \tag{3.1}$$

由式（2.3）和（3.1）可得

$$1-p = \frac{1}{\omega+3\eta}\left[\omega+\left(3\eta+4\omega\eta y_p\right)e^{-\omega y_p}\right]e^{-\omega y_p},$$

整理后可得

$$\omega e^{-\omega y_p} + 3\eta e^{-2\omega y_p} + 4\omega\eta y_p e^{-2\omega y_p} - (1-p)(\omega + 3\eta) = 0. \tag{3.2}$$

代换 $x = e^{-\omega y_p}$（因此 $y_p = -\frac{1}{\omega}\ln x$）将（3.2）转化为

$$\omega x + 3\eta x^2 - 4\eta x^2 \ln x = (1-p)(\omega + 3\eta), \qquad 0 < x < 1. \tag{3.3}$$

由于多项式项与对数项混合，方程（3.3）是非代数的，因此 x（以及 y_p）不存在闭式解。使用 R 程序软件，通过求解 $F(y;\omega,\eta) - p = 0$数值计算得到分位数。由于 $F(y;\omega,\eta)$ 是连续且严格递增的，对于每个 $p \in (0,1)$，都存在唯一的分位数 y_p。表 1 列出了不同 ω,η 组合下的部分分位数值，图 2 展示了它们随概率水平的变化。

表 1：不同参数值对应的分位数值。

概率	$\omega = 0.4, \eta = 0.2$	$\omega = 0.4, \eta = 3$	$\omega = 1.2, \eta = 0.2$	$\omega = 1.2, \eta = 3$
0.01	0.0311	0.0363	0.0094	0.0117
0.05	0.1544	0.1741	0.0473	0.0566
0.10	0.3069	0.3363	0.0955	0.1100
0.25	0.7736	0.8036	0.2500	0.2658
0.40	1.2886	1.2943	0.4279	0.4310
0.42	1.3635	1.3643	0.4543	0.4547
0.43	1.4016	1.3998	0.4677	0.4667
0.45	1.4795	1.4722	0.4952	0.4912
0.50	1.6841	1.6611	0.5680	0.5552
0.60	2.1495	2.08456	0.7355	0.6991
0.75	3.0927	2.9203	1.0815	0.9846
0.90	4.8874	4.4343	1.7547	1.5079
0.95	6.2642	5.5294	2.2759	1.8925
0.99	9.6642	8.0174	3.5386	2.7954

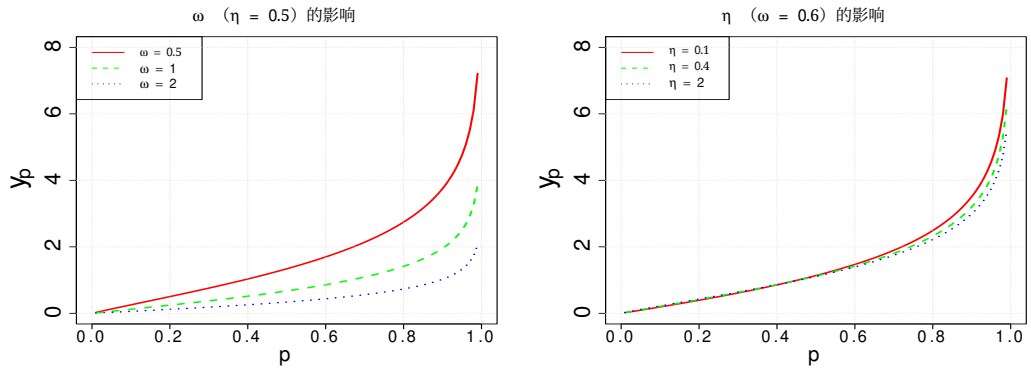


图 2：Shiha 分布的分位数。

从表 1 和图 2 可以看出，对于固定的 ω，增大 η会略微提高较低概率下的分位数（$p \in (0, 0.43]$），而在较高概率下（$p \in (0.43, 1)$）则会产生较小的分位数。这表明，η 对分位数函数具有非单调影响：它会提高分布的低值部分，并压缩上尾。相反，较高的 ω值会降低所有分位数，证实其作为尺度参数控制分布总体大小的作用。为进一步说明参数的影响，图 3 展示了四分位数的变化趋势。

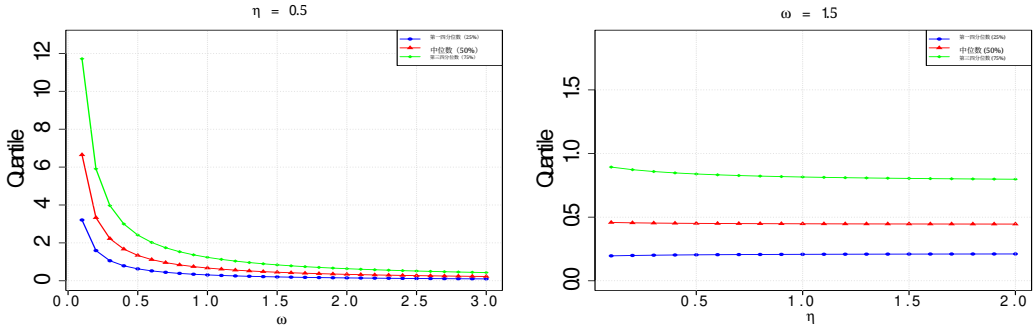


图 3：Shiha 分布的四分位数。

随着 ω 增大，所有四分位数均下降，且四分位距 $Q_3 - Q_1$ 变窄，这表明离散程度降低，分布向左移至较小值。同时，η 的变化对四分位数的影响很小，这说明 η主要影响尾部，而非中心区域的离散程度。

3.2 矩母函数

矩母函数（MGF）涵盖了分布的所有矩，而由此推导出的偏度和峰度则描述了其不对称性和尾部特征。

定理 2。 Shiha 分布随机变量的矩母函数为

$$M_Y(t) = \frac{4\omega^4 + 12\omega^3\eta - 4\omega^3 t - 14\omega^2\eta t + \omega^2 t^2 + 2\omega\eta t^2}{(\omega + 3\eta)(\omega - t)(2\omega - t)^2}, \qquad t < \omega. \tag{3.4}$$

证明。根据定义，

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = \int_0^\infty e^{ty} f(y;\omega,\eta)\, dy.$$

将（2.1）中的 f (y;ω,η) 代入并化简指数函数，得到

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \frac{\omega}{\omega + 3\eta} \int_0^\infty e^{ty} \left[\omega + (2\eta + 8\omega\eta y) e^{-\omega y}\right] e^{-\omega y}\, dy \\ &= \frac{\omega}{\omega + 3\eta} \int_0^\infty \left[\omega e^{(t-\omega)y} + (2\eta + 8\omega\eta y) e^{(t-2\omega)y}\right] dy \\ &= \frac{\omega}{\omega + 3\eta} \left[\omega \int_0^\infty e^{(t-\omega)y}\, dy + 2\eta \int_0^\infty e^{(t-2\omega)y}\, dy + 8\omega\eta \int_0^\infty y e^{(t-2\omega)y}\, dy\right] \\ &= \frac{\omega}{\omega + 3\eta} \left[\frac{\omega}{\omega - t} + \frac{2\eta}{2\omega - t} + \frac{8\omega\eta}{(2\omega - t)^2}\right], \qquad t < \omega, \end{aligned}$$

这与（3.4）等价。 □

关于原点的第 k 阶矩 $\mu'_k = E(Y^k)$，可通过对 $M_Y(t)$ 关于 t 求 k 阶导数，再代入 $t = 0$ 得到。

$$\mu'_k = \frac{\left(2^k\omega + 2\eta k + 3\eta\right)\Gamma(k+1)}{2^k\omega^k(\omega + 3\eta)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.5}$$

令 $k = 1$、2、3 和 4，即可得到 Shiha 分布的前四阶矩。

$$\mu'_1 = \frac{2\omega + 5\eta}{2\omega(\omega + 3\eta)}, \quad \mu'_2 = \frac{4\omega + 7\eta}{2\omega^2(\omega + 3\eta)}, \quad \mu'_3 = \frac{3(8\omega + 9\eta)}{4\omega^3(\omega + 3\eta)}, \quad \mu'_4 = \frac{3(16\omega + 11\eta)}{2\omega^4(\omega + 3\eta)}.$$

表2列出了 Shiha 分布在若干组 η 和 ω取值下的前四阶矩数值。可以看出，矩会随着参数增大而减小。

表2：前　　不同模型参数取值下 Shiha 分布的前四阶矩　　s.

ω	$\eta=0.2$				$\eta=0.6$				$\eta=1$			
	μ_1'	μ_2'	μ_3'	μ_4'	μ_1'	μ_2'	μ_3'	μ_4'	μ_1'	μ_2'	μ_3'	μ_4'
0.2	4.375	34.375	398.437	6328.125	4.25	31.25	328.125	4593.75	4.219	30.469	310.547	4160.156
0.4	2.25	9.375	58.594	503.906	2.159	8.239	45.81	346.236	2.132	7.904	42.05	299.862
0.6	1.528	4.398	19.097	113.812	1.458	3.819	14.757	78.125	1.435	3.627	13.31	66.229
0.8	1.161	2.567	8.58	39.237	1.106	2.224	6.648	27.325	1.086	2.097	5.936	22.936
1	0.938	1.688	4.594	17.062	0.893	1.464	3.589	12.107	0.875	1.375	3.188	10.125
1.2	0.787	1.196	2.749	8.6	0.75	1.042	2.17	6.221	0.734	0.976	1.922	5.201
1.4	0.679	0.893	1.777	4.803	0.647	0.781	1.418	3.539	0.633	0.731	1.255	2.964
1.6	0.597	0.692	1.215	2.892	0.57	0.609	0.98	2.168	0.557	0.569	0.868	1.821
1.8	0.532	0.553	0.868	1.846	0.509	0.489	0.707	1.405	0.498	0.457	0.627	1.185
2	0.481	0.452	0.642	1.233	0.461	0.401	0.528	0.952	0.45	0.375	0.469	0.806
2.2	0.438	0.376	0.488	0.855	0.42	0.336	0.405	0.669	0.411	0.314	0.36	0.569
2.4	0.403	0.318	0.38	0.612	0.387	0.285	0.318	0.484	0.378	0.267	0.283	0.414
2.6	0.373	0.273	0.301	0.449	0.358	0.245	0.254	0.36	0.35	0.23	0.227	0.308
2.8	0.347	0.236	0.243	0.337	0.334	0.214	0.206	0.273	0.326	0.2	0.185	0.235
3	0.324	0.207	0.199	0.258	0.312	0.187	0.17	0.211	0.306	0.176	0.153	0.182
3.2	0.304	0.182	0.165	0.201	0.294	0.166	0.142	0.165	0.287	0.156	0.128	0.144
3.4	0.287	0.162	0.138	0.159	0.277	0.148	0.12	0.132	0.271	0.139	0.108	0.115
3.6	0.271	0.145	0.117	0.127	0.262	0.133	0.102	0.106	0.257	0.125	0.092	0.093
3.8	0.257	0.131	0.1	0.103	0.249	0.12	0.087	0.087	0.244	0.113	0.079	0.076
4	0.245	0.118	0.086	0.084	0.237	0.109	0.076	0.071	0.232	0.103	0.069	0.063

偏度和峰度是描述概率分布形状和离散程度的重要度量。它们提供了有关数据不对称性、尖峰性以及可能存在的离群值的有用信息。利用 Shiha 分布的前四阶矩，可推导出 Shiha 分布的偏度 Sk(Y) 和峰度 Ku(Y):

Shiha 分布的方差为

$$\mathrm{Var}(Y)=\mu_2'-(\mu_1')^2=\frac{17\eta^2+18\eta\omega+4\omega^2}{4\omega^2(\omega+3\eta)^2}.$$

偏度和峰度为

$$\mathrm{Sk(Y)}=\frac{\mu_3'-3\mu_2'\mu_1'+2(\mu_1')^3}{(\mathrm{Var}(Y))^{3/2}}=\frac{106\eta^3+234\eta^2\omega+114\eta\omega^2+16\omega^3}{\left(17\eta^2+18\eta\omega+4\omega^2\right)^{3/2}},$$

$$\mathrm{Ku(Y)}=\frac{\mu_4'-4\mu_3'\mu_1'+6\mu_2'(\mu_1')^2-3{\mu_1'}^4}{(\mathrm{Var}(Y))^2}=\frac{3\left(611\eta^4+2076\eta^3\omega+1608\eta^2\omega^2+472\eta\omega^3+48\omega^4\right)}{\left(17\eta^2+18\eta\omega+4\omega^2\right)^2},$$

$$\text{Excess kurtosis}=\mathrm{Ku(Y)}-3=\frac{966\eta^4+4392\eta^3\omega+3444\eta^2\omega^2+984\eta\omega^3+96\omega^4}{\left(17\eta^2+18\eta\omega+4\omega^2\right)^2}.$$

注意到

$$\lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Sk}(Y)=2,\qquad\lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Ku}(Y)=9.$$

表3列出了计算得到的 σ^2、Sk(Y) 和 Ku(Y) 的值。此外，图4展示了 Sk(Y) 和 Ku(Y) 随 ω 和 η 取值不同而发生的变化。

表3和图4显示，偏度和峰度均为正值，证实了 Shiha 分布具有右偏和重尾特征。随着 ω 增加，这两个指标先上升至峰值，然后下降； η值较小时，下降幅度更大。此外，随着 η增加，在较低的 ω值下，偏度和峰度总体呈下降趋势，但在较大的 ω值下则略有上升

表3： ω和 η取不同值时的方差、偏度和峰度。

ω	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.6$			$\eta = 1$			$\eta = 1.5$		
	σ^2	偏度(Y)	峰度(Y)	σ^2	偏度(Y)	峰度(Y)	σ^2	偏度(Y)	Ku(Y)	σ^2	偏度(Y)	Ku(Y)
0.2	15.234	1.93	9.497	13.187	1.738	8.186	12.671	1.665	7.618	12.395	1.621	7.26
0.4	4.312	2.02	9.917	3.577	1.859	9.054	3.357	1.768	8.412	3.234	1.704	7.923
0.6	2.064	2.047	9.942	1.693	1.93	9.497	1.567	1.84	8.925	1.492	1.768	8.412
0.8	1.22	2.055	9.886	1.001	1.974	9.731	0.919	1.892	9.266	0.868	1.818	8.777
1	0.809	2.057	9.815	0.667	2.002	9.855	0.609	1.93	9.497	0.572	1.859	9.054
1.2	0.577	2.056	9.748	0.479	2.02	9.917	0.437	1.958	9.655	0.408	1.892	9.266
1.4	0.432	2.054	9.687	0.362	2.033	9.944	0.33	1.98	9.763	0.307	1.918	9.43
1.6	0.337	2.051	9.634	0.284	2.041	9.95	0.259	1.997	9.836	0.241	1.94	9.556
1.8	0.27	2.049	9.587	0.229	2.047	9.942	0.209	2.01	9.886	0.194	1.958	9.655
2	0.221	2.046	9.547	0.189	2.051	9.927	0.172	2.02	9.917	0.16	1.974	9.731
2.2	0.184	2.044	9.511	0.159	2.054	9.908	0.145	2.029	9.937	0.135	1.986	9.791
2.4	0.156	2.042	9.479	0.136	2.055	9.886	0.124	2.035	9.947	0.115	1.997	9.836
2.6	0.134	2.04	9.451	0.117	2.056	9.863	0.107	2.04	9.95	0.099	2.006	9.871
2.8	0.116	2.038	9.426	0.102	2.057	9.839	0.094	2.044	9.948	0.087	2.014	9.898
3	0.102	2.036	9.404	0.09	2.057	9.815	0.083	2.047	9.942	0.077	2.02	9.917
3.2	0.09	2.034	9.384	0.08	2.057	9.792	0.073	2.05	9.934	0.068	2.026	9.931
3.4	0.08	2.033	9.365	0.071	2.056	9.769	0.066	2.052	9.924	0.061	2.031	9.941
3.6	0.072	2.032	9.348	0.064	2.056	9.748	0.059	2.053	9.912	0.055	2.035	9.947
3.8	0.064	2.03	9.333	0.058	2.055	9.727	0.054	2.055	9.899	0.05	2.038	9.949
4	0.058	2.029	9.319	0.053	2.054	9.706	0.049	2.055	9.886	0.045	2.041	9.95
4.2	0.053	2.028	9.306	0.048	2.054	9.687	0.045	2.056	9.872	0.042	2.044	9.948
4.4	0.049	2.027	9.294	0.044	2.053	9.668	0.041	2.057	9.858	0.038	2.046	9.944
4.6	0.045	2.026	9.283	0.041	2.052	9.651	0.038	2.057	9.844	0.035	2.048	9.94
4.8	0.041	2.025	9.273	0.037	2.051	9.634	0.035	2.057	9.829	0.033	2.05	9.934
5	0.038	2.025	9.264	0.035	2.05	9.618	0.032	2.057	9.815	0.03	2.051	9.927

。这表明， η 在 ω较小时起稳定参数的作用，而在 ω较大时，则会在一定程度上加剧尾部厚度和不对称性，反映出η 与 ω在塑造分布时复杂的相互作用。

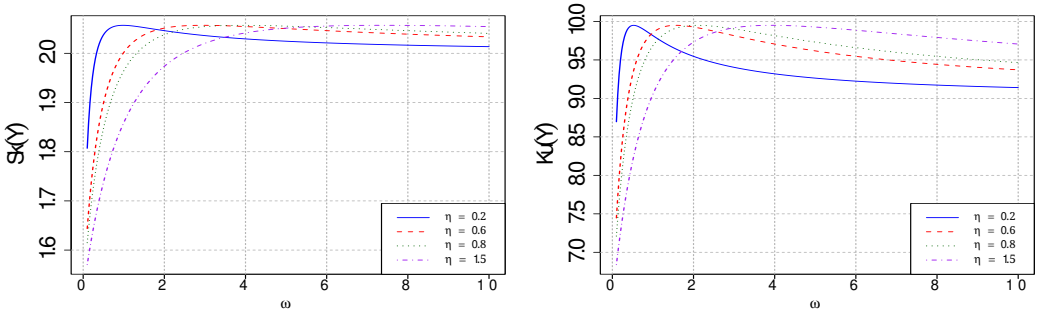


图4：Shiha 分布的偏度和峰度度量。

3.3 熵

熵是衡量不确定性的重要指标，并在统计学、物理学和机器学习中有广泛应用。对于具有概率密度函数 f (y) 的连续随机变量 Y，香农熵（微分熵）定义为 $H(y) = E[-\ln f(y)]$。

定理 3. Shiha 分布的香农熵为

$$H(y)=\ln\frac{\omega+3\eta}{\omega}+\frac{2\omega+5\eta}{2(\omega+3\eta)}-E\left[\ln\left(\omega+(2\eta+8\omega\eta Y)e^{-\omega Y}\right)\right]. \tag{3.6}$$

证明。设 Y 为一个概率密度函数为 f (y;ω,η) 的连续随机变量。Y 的香农熵为

$$H(y)=E[-\ln f(y;\omega,\eta)]=-\int_0^{\infty} f(y;\omega,\eta)\ln f(y;\omega,\eta)\,dy. \tag{3.7}$$

使用式 (2.1) 中给出的 Shiha 分布的概率密度函数，可得

$$-\ln f(y;\omega,\eta)=-\ln\omega+\ln(\omega+3\eta)-\ln\left[\omega+(2\eta+8\omega\eta y)e^{-\omega y}\right]+\omega y. \tag{3.8}$$

取期望,

$$H(y)=-\ln\omega+\ln(\omega+3\eta)-E\left[\ln\left(\omega+(2\eta+8\omega\eta Y)e^{-\omega Y}\right)\right]+\omega E[Y]. \tag{3.9}$$

已知 $E[Y]=\mu_1'=\frac{2\omega+5\eta}{2\omega(\omega+3\eta)}$，可得式 (3.6)。 □

式 (3.6) 中的期望值无法通过解析方法求得，因此 H(y) 采用数值方法计算。可使用 R 编程计算模型参数取不同值时的熵，如图 5 所示。

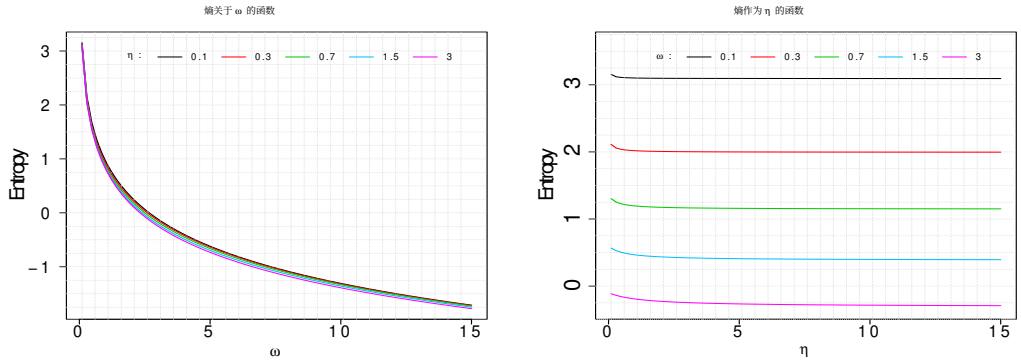


图 5：Shiha 分布的熵。

对于 Shiha 分布，熵会随着 ω 增大而降低，这表明较大的 ω 值会使分布更加集中（峰值更高、分散程度更低），不确定性也更小（更容易预测）。在所考察的参数范围内，参数 η 对分布不确定性的影响似乎很小，而 ω 则主要决定熵的变化。请注意，连续分布的微分熵可能为负。

4 随机样本生成与模拟

以下两种等价算法可用于从 Shiha 分布中生成随机变量。首先，设置参数值 ω、η。

算法 1（逆累积分布函数法）。

1. 生成 u ∼U(0, 1)。

2. 数值求解下列关于 x ∈ (0,1) 的方程

$$\omega x+3\eta x^2-4\eta x^2\ln x-(\omega+3\eta)u=0. \tag{4.1}$$

3. 令 $Y = (-\ln x)/\omega$。

算法 2（三种分布的混合形式）。计算混合权重 p_1、p_2，和 p_3。

1. 生成 $u \sim U(0, 1)$。

2. 生成 $v_1 \sim$ 指数分布(ω)、$v_2 \sim$ 指数分布(2ω)，以及 $v_3 \sim$ 伽马分布$(2, 2\omega)$。

3. 若 $u \le p_1$，，则令 $Y = v_1$，；若 $p_1 < u \le p_1 + p_2$，，则令 $Y = v_2$，；否则，令 $Y = v_3$。

在随后的模拟研究中，从 Shiha 分布生成随机样本。对于每个样本量 $n = 30$，50、100、200、300 和 600，将模拟重复 $N = 10000$次，以确保结果的稳定性和可靠性。

随后开展蒙特卡洛模拟研究，以评估所提出分布参数的最大似然估计量的性能。依据以下准则对估计量 $\hat{\omega}$和 $\hat{\eta}$ 进行评估：偏差（估计精度）和均方误差（均方误差）。估计量的偏差和均方误差计算为

$$\mathrm{Bias}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\theta}_i - \theta, \quad \mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\theta}_i - \theta\right)^2,$$

其中，θ_i 表示在第 i 次重复试验中获得的参数估计值（ ω或 η），θ表示相应的真实参数值。该评估为不同样本量下估计量的性能提供了可靠的见解。模拟结果汇总于表 4 中。所有估计量都是一致的，因为随着样本量增加，$\hat{\omega}$ 和$\hat{\eta}$的偏差和均方误差均减小，这证实了 Shiha 分布的最大似然估计法具有一致性和可靠性。

表 4：估计的 ω和 η的偏差和均方误差。

$\omega = 0.5, \eta = 0.5$					$\omega = 1, \eta = 0.5$				
n	偏差($\hat{\omega}$)	偏差($\hat{\eta}$)	均方误差($\hat{\omega}$)	均方误差($\hat{\eta}$)	n	偏差($\hat{\omega}$)	偏差($\hat{\eta}$)	均方误差($\hat{\omega}$)	均方误差($\hat{\eta}$)
30	0.0287	0.1753	0.0100	0.2702	30	0.0480	0.1463	0.0398	0.2625
50	0.0203	0.1507	0.0059	0.2480	50	0.0337	0.1311	0.0240	0.2396
100	0.0118	0.1398	0.0029	0.2183	100	0.0189	0.1165	0.0120	0.2069
200	0.0073	0.1219	0.0015	0.1807	200	0.0122	0.0985	0.0063	0.1674
300	0.0057	0.1133	0.0010	0.1633	300	0.0093	0.0955	0.0044	0.1455
600	0.0023	0.1043	0.0005	0.1236	600	0.0033	0.0822	0.0022	0.1049
$\omega = 0.5, \eta = 1$					$\omega = 1, \eta = 1$				
30	0.0320	0.2313	0.0098	0.7653	30	0.0579	0.2410	0.0398	0.8409
50	0.0237	0.1903	0.0059	0.7206	50	0.0413	0.2026	0.0238	0.7759
100	0.0142	0.1751	0.0029	0.6441	100	0.0244	0.1929	0.0115	0.6830
200	0.0087	0.1548	0.0014	0.5593	200	0.0153	0.1732	0.0061	0.5681
300	0.0067	0.1498	0.0009	0.5105	300	0.0120	0.1627	0.0041	0.5127
600	0.0031	0.1436	0.0004	0.4223	400	0.0049	0.1538	0.0020	0.3952
$\omega = 0.5, \eta = 1.5$					$\omega = 1, \eta = 1.5$				
30	0.0331	0.1091	0.0097	1.1293	30	0.0637	0.0566	0.0401	1.1088
50	0.0248	0.0571	0.0059	1.0913	50	0.0474	0.0300	0.0243	1.0424
100	0.0157	0.0280	0.0029	0.9955	100	0.0282	0.0250	0.0116	0.9098
200	0.0097	0.0248	0.0014	0.8718	200	0.0177	0.0233	0.0058	0.7683
300	0.0074	0.0187	0.0009	0.7911	300	0.0144	0.0148	0.0038	0.6933
600	0.0038	0.0108	0.0004	0.6626	600	0.0067	0.0116	0.0018	0.5503
$\omega = 0.5, \eta = 2$					$\omega = 1, \eta = 2$				
30	0.0338	0.1501	0.0097	2.0222	30	0.0648	0.1041	0.0390	1.9827
50	0.0253	0.0812	0.0059	1.9704	50	0.0485	0.0498	0.0239	1.8855
100	0.0156	0.0434	0.0029	1.8135	100	0.0294	0.0480	0.0114	1.6686
200	0.0099	0.0318	0.0014	1.6171	200	0.0184	0.0445	0.0056	1.4372
300	0.0075	0.0173	0.0009	1.4908	300	0.0142	0.0387	0.0037	1.2858
600	0.0039	0.0157	0.0004	1.2554	600	0.0071	0.0345	0.0017	1.0501

5 应用

本节分析四个真实数据集，以展示所提出的 Shiha 分布的适用性，并将其与一些著名分布进行比较。

数据集1： [8], 讨论的第一个数据集是三个不同温度（100、120、140）下八个组件的失效时间。数据如下: 14.712, 32.644, 61.979, 65.521, 105.50, 114.60, 120.40, 138.50, 8.610, 11.741, 54.535, 55.047, 58.928, 63.391, 105.18, 113.02, 2.998, 5.016, 15.628, 23.040, 27.851, 37.843, 38.050, 48.226

数据集 2：该数据集包含来自 [2]清洁上游监测井的34个氯乙烯浓度测量值（mg/l）： 5.1, 1.2, 1.3, 0.6, 0.5, 2.4, 0.5, 1.1, 8, 0.8, 0.4, 0.6, 0.9, 0.4, 2, 0.5, 5.3, 3.2, 2.7, 2.9, 2.5, 2.3, 1, 0.2, 0.1, 0.1, 1.8, 0.9, 2, 4, 6.8, 1.2, 0.4, 0.2

数据集3：该数据集包含1950–2009 [1]年间在巴基斯坦卡拉奇记录的59个年最大降水量观测值: 117.6, 157.7, 148.6, 11.4, 5.6, 63.6, 62.4, 11.8, 6.5, 54.9, 39.9, 16.8, 30.2, 38.4, 76.9, 73.4, 85, 256.3, 24.9, 148.6, 160.5, 131.3, 77, 155.2, 217.2, 105.5, 166.8, 157.9, 73.6, 291.4, 210.3, 315.7, 107.7, 33.3, 302.6, 159.1, 78.7, 33.2, 52.2, 92.7,150.4, 43.7, 68.3, 20.8, 179.4, 245.7, 19.5, 30, 270.4, 160, 96.3, 185.7, 429.3, 184.9, 262.5, 80.6, 138.2, 28, 39.3

数据集4：以下观测值是对接受加速寿命试验 [6] 的15个电子元件抽样后获得的失效时间（分钟）： 1.4, 5.1, 6.3, 10.8, 12.1, 18.5, 19.7, 22.2, 23, 30.6, 37.3, 46.3, 53.9, 59.8, 66.2

表5简要介绍了这些数据及其主要特征

表5：所考虑数据集的汇总统计量

Data	Min	Q1	中位数	Q3	Max	Mean	方差	Sk	Kur
1	2.998	21.187	51.38	75.436	138.5	55.123	1685.495	0.555	5.108
2	0.1	0.5	1.15	2.475	8	1.879	3.813	1.604	8.005
3	5.6	39.6	92.7	160.25	429.3	118.397	8688.987	1.024	6.766
4	1.4	11.45	22.2	41.8	66.2	27.547	431.117	0.566	5.06

作为初步的非参数检验，我们对每个数据集绘制总检验时间（TTT）变换图，以评估所提出分布的适用性。我们还考察了核密度图、箱线图和小提琴图。从图6-8可以明显看出，所有数据集均呈右偏。此外，数据集1、3和4呈现递增失效率，而数据集 2 则呈现递减失效率。这些特征表明，Shiha 分布适合用于拟合这些数据。

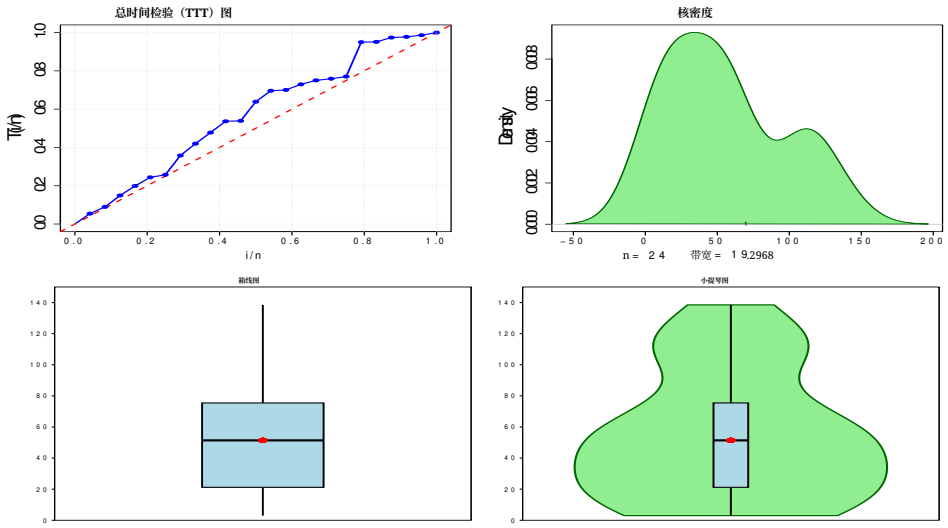


图6：数据集1的图形表示。

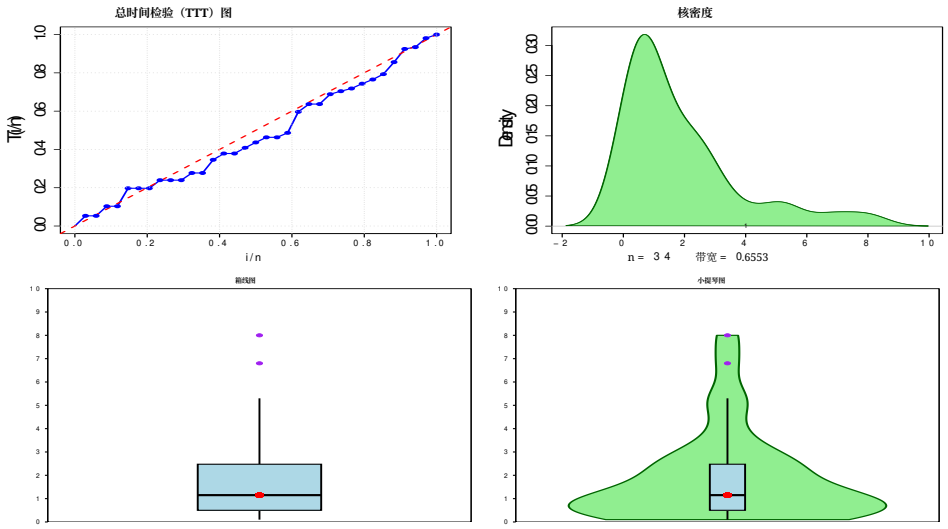


图 7：数据集 2 的图形表示。

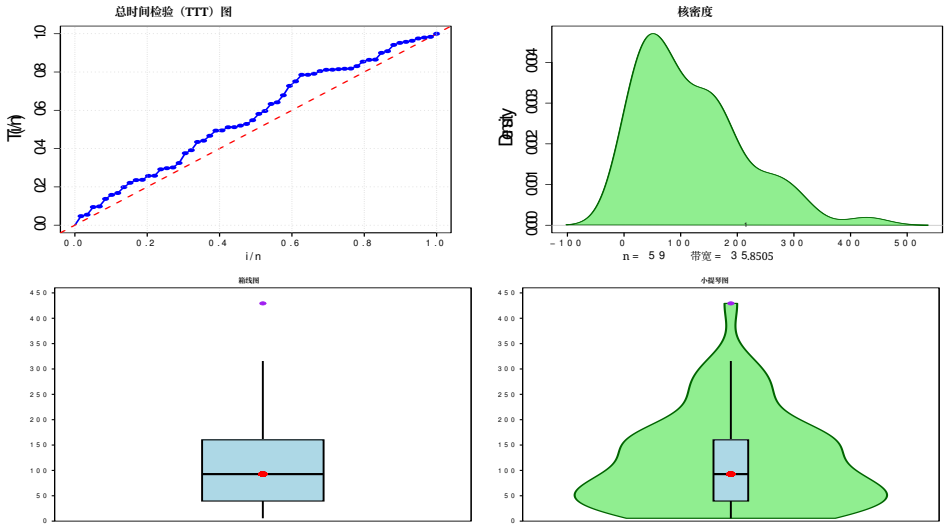


图8：数据集3的图形表示。

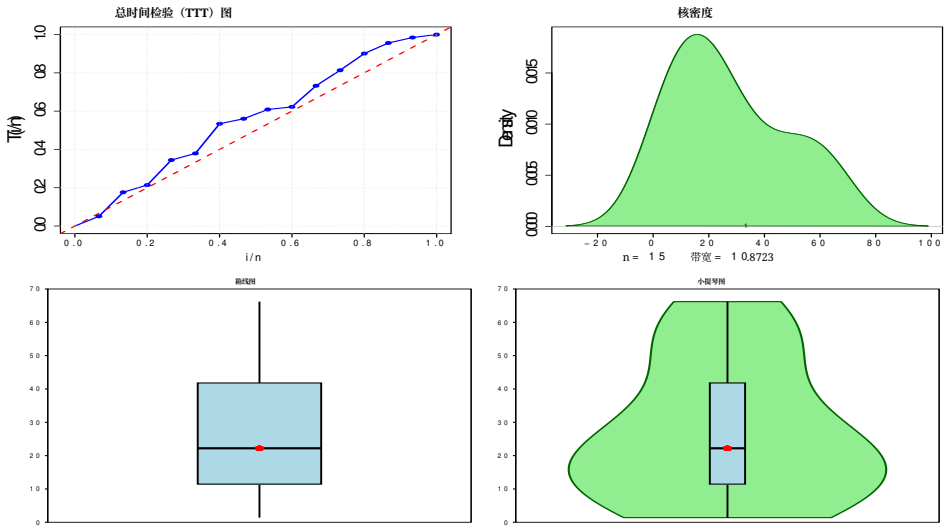


图9：数据集4的图形表示。

为检验 Shiha 分布能否充分拟合观测数据，我们采用了若干拟合优度检验。柯尔莫戈洛夫–斯米尔诺夫（K-S）统计量用于衡量经验分布函数与理论分布函数之间的最大差异。由于 K-S 检验对尾部不够敏感，我们还采用安德森–达令（A-D）检验，该检验对分布尾部的偏差赋予更高权重。为此，模型选择基于在极大似然估计量（MLEs）处计算的基于似然的度量。具体而言，我们使用赤池信息准则 AIC $=2\mathrm{k}-2\log\mathrm{L}$ 和贝叶斯信息准则 BIC $=\mathrm{k}\log\mathrm{n}-2\log\mathrm{L}$，其中 logL 表示参数在 MLE 处的对数似然函数，k 为参数个数，n 为样本量。上述统计量取值最低的模型被视为拟合效果最佳的候选模型。为进一步评估所提出的 Shiha 分布的性能，我们将其与若干知名的寿命分布进行比较：

1. Alpha 幂变换 Xgamma 分布（APTXGD） [17]

$$f(y;\omega,\eta)=\begin{cases}\frac{\log\eta}{\eta-1}\frac{\omega^2}{(1+\omega)}\left(1+\frac{\omega}{2}y^2\right)e^{-\omega y}\eta^{1-u_0}, & \eta>0,\eta\neq1\\ \frac{\omega^2}{(1+\omega)}\left(1+\frac{\omega}{2}y^2\right)e^{-\omega y}, & \eta=1\end{cases} \tag{5.1}$$

其中

$$u_0=\frac{\left(1+\omega+\omega y+\frac{\omega^2y^2}{2}\right)}{(1+\omega)}e^{-\omega y},\quad y>0,\omega>0.$$

2. 幂 Lindley 分布（PLD） [5]

$$f(y;\omega,\eta)=\frac{\eta\,\omega^2}{1+\omega}(1+y^\eta)y^{\eta-1}e^{-\omega y^\eta},\quad y>0,\ \omega>0,\ \eta>0, \tag{5.2}$$

3. 三参数广义林德利分布（TPGLD） [3]

$$f(y;\omega,\eta,\alpha)=\frac{\alpha\,\omega^2(\eta+y^\alpha)y^{\alpha-1}e^{-\omega y^\alpha}}{1+\omega\eta},\quad y>0,\omega,\eta>0,\alpha>0 \tag{5.3}$$

4. Chris-Jerry 分布（CJD） [10]

$$f(y;\omega)=\frac{\omega^2}{\omega+2}(1+\omega y^2)e^{-\omega y}\quad ,y>0,\omega>0. \tag{5.4}$$

5. Akash 分布（AKD） [13]

$$f(y;\omega)=\frac{\omega^3}{\omega^2+2}(1+y^2)e^{-\omega y}\quad ,y>0,\omega>0. \tag{5.5}$$

表6–9列出了各参数的最大似然估计量，以及四个数据集中每个拟合分布对应的拟合优度统计量。此外，四个数据集的图形化拟合优度评估结果见图10–13。每幅图展示了直方图及其拟合密度、理论累积分布函数和经验累积分布函数，以及六个竞争模型的QQ图和PP图。

表6：数据集1的参数估计值和拟合优度度量。

模型	估计值	AIC	BIC	安德森-达令检验（p值）	柯尔莫戈洛夫-斯米尔诺夫检验（p值）
Shiha	$\hat{\omega} = 0.0152, \hat{\eta} = 1.4689$	**242.5978**	**244.9539**	0.2988 (0.9385)	0.1210 (0.8326)
APTXGD	$\hat{\omega} = 0.0447, \hat{\eta} = 0.3623$	246.9883	249.3444	1.2148 (0.2616)	0.1665 (0.4693)
PLD	$\hat{\omega} = 0.0602, \hat{\eta} = 0.8744$	243.0938	245.4499	0.3691 (0.8776)	0.1231 (0.8177)
TPGLD	$\hat{\omega} = 0.0118, \hat{\eta} = 1.1825, \hat{\alpha} = 109.8619$	244.0922	247.6263	0.3134 (0.9271)	0.1259 (0.7963)
CJD	$\hat{\omega} = 0.0527$	247.4051	248.5831	1.8339 (0.1140)	0.1862 (0.3340)
AKD	$\hat{\omega} = 0.0544$	250.5197	251.6977	2.3536 (0.0597)	0.1944 (0.2859)

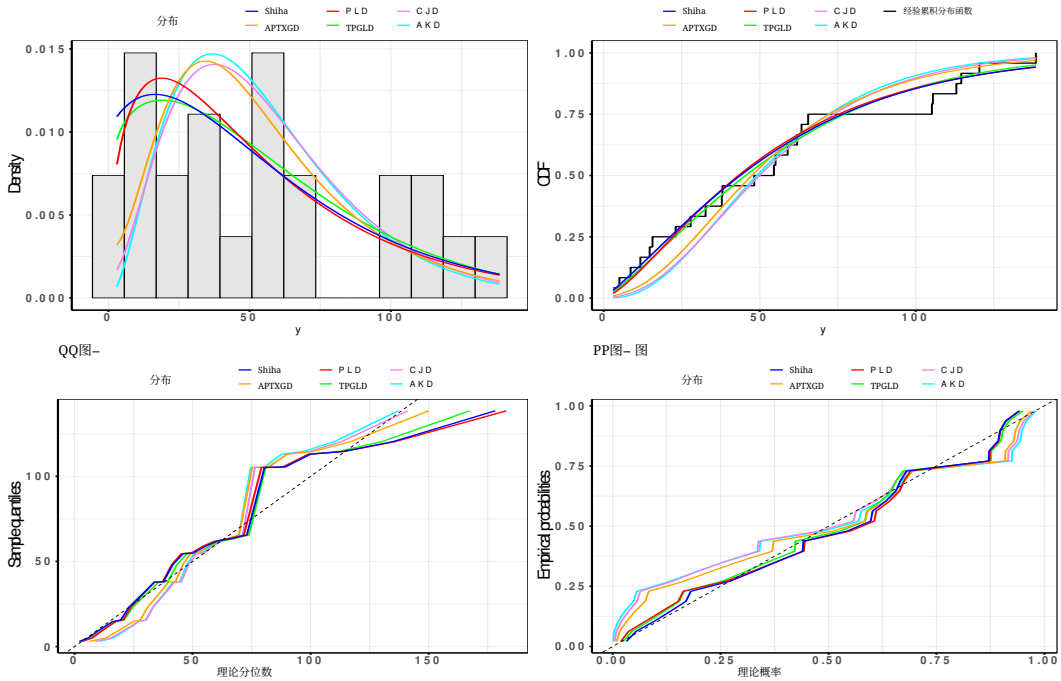


图10：数据集1的拟合概率密度函数、累积分布函数、QQ图和PP图

表7：数据集 2的参数估计值和拟合优度度量。

模型	估计值	AIC	BIC	安德森-达令检验（p值）	柯尔莫戈洛夫-斯米尔诺夫检验（p值）
Shiha	$\hat{\omega} = 0.532$、$\hat{\eta} = 1$ 和 -04	**114.9055**	**117.9582**	0.2720 (0.9573)	0.0890 (0.9506)
APTXGD	$\hat{\omega} = 0.6911$、$\hat{\eta} = 0.1182$	115.2675	118.3202	0.2979 (0.9394)	0.1012 (0.8774)
PL	$\hat{\omega} = 0.9139, \hat{\eta} = 0.8832$	115.5198	118.5726	0.3119 (0.9285)	0.0944 (0.9226)
TPGLD	$\hat{\omega} = 0.5272, \hat{\eta} = 1.0102, \hat{\alpha} = 1000$	116.8992	121.4783	0.2826 (0.9504)	0.0918 (0.9366)
CJD	$\hat{\omega} = 1.1644$	117.8536	119.3800	1.2426 (0.2517)	0.1783 (0.2301)
AKD	$\hat{\omega} = 1.1657$	117.1493	118.6756	0.9436 (0.3876)	0.1564 (0.3762)

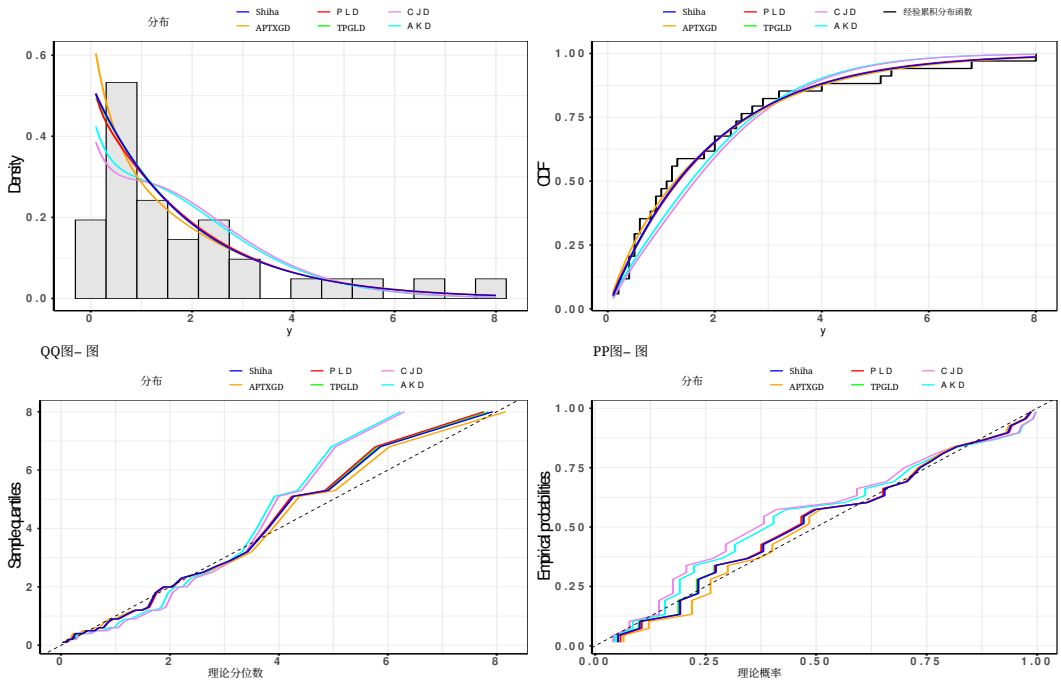


图11：数据集 2 的拟合概率密度函数、累积分布函数、QQ图和PP图

表8：数据集3的参数估计值和拟合优度度量。

模型	估计值	AIC	BIC	安德森-达令检验（p值）	柯尔莫戈洛夫-斯米尔诺夫检验（p值）
Shiha	$\hat{\omega} = 0.0071, \hat{\eta} = 0.0586$	**681.6567**	**685.8118**	0.2854 (0.9485)	0.0973 (0.6317)
APTXGD	$\hat{\omega} = 0.0207, \hat{\eta} = 0.2844$	696.3373	700.4924	3.3364 (0.0187)	0.1669 (0.0748)
PLD	$\hat{\omega} = 0.0354, \hat{\eta} = 0.8498$	681.7449	685.9000	0.3749 (0.8728)	0.1057 (0.5255)
TPGLD	$\hat{\omega} = 0.0389, \hat{\eta} = 0.8333, \hat{\alpha} = 0.231$	683.6996	689.9322	0.3870 (0.8610)	0.1069 (0.5106)
CJD	$\hat{\omega} = 0.0249$	699.7348	701.8123	4.6818 (0.0041)	0.1852 (0.0350)
AKD	$\hat{\omega} = 0.0253$	703.7940	705.8715	5.2981 (0.0021)	0.1886 (0.0301)

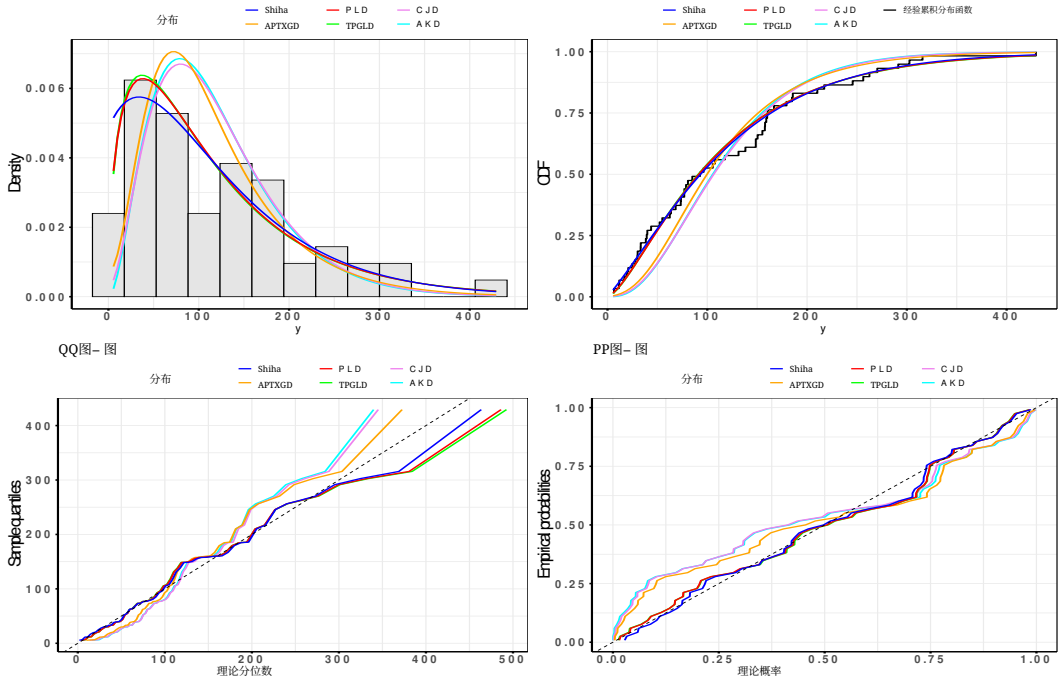


图12：数据集3的拟合概率密度函数、累积分布函数、QQ图和PP图

表9：数据集4的参数估计值和拟合优度度量。

模型	估计值	AIC	BIC	安德森-达令检验（p值）	柯尔莫戈洛夫-斯米尔诺夫检验（p值）
Shiha	$\hat{\omega} = 0.0304, \hat{\eta} = 5.6774$	**132.2349**	**133.6510**	0.1661 (0.9973)	0.0979 (0.9958)
APTXGD	$\hat{\omega} = 0.0861, \hat{\eta} = 0.3527$	133.4417	134.8578	0.4649 (0.7801)	0.1342 (0.9169)
PLD	$\hat{\omega} = 0.0977, \hat{\eta} = 0.9043$	132.4768	133.8929	0.1950 (0.9920)	0.0986 (0.9954)
TPGLD	$\hat{\omega} = 0.02231, \hat{\eta} = 1.2231, \hat{\alpha} = 71.4391$	133.9388	136.0629	0.1819（0.9948）	0.0971（0.9962）
CJD	$\hat{\omega} = 0.1034$	132.9871	133.6951	0.8732（0.4291）	0.1731（0.6978）
AKD	$\hat{\omega} = 0.1085$	135.6842	136.3922	1.2757 (0.2400)	0.1841 (0.6248)

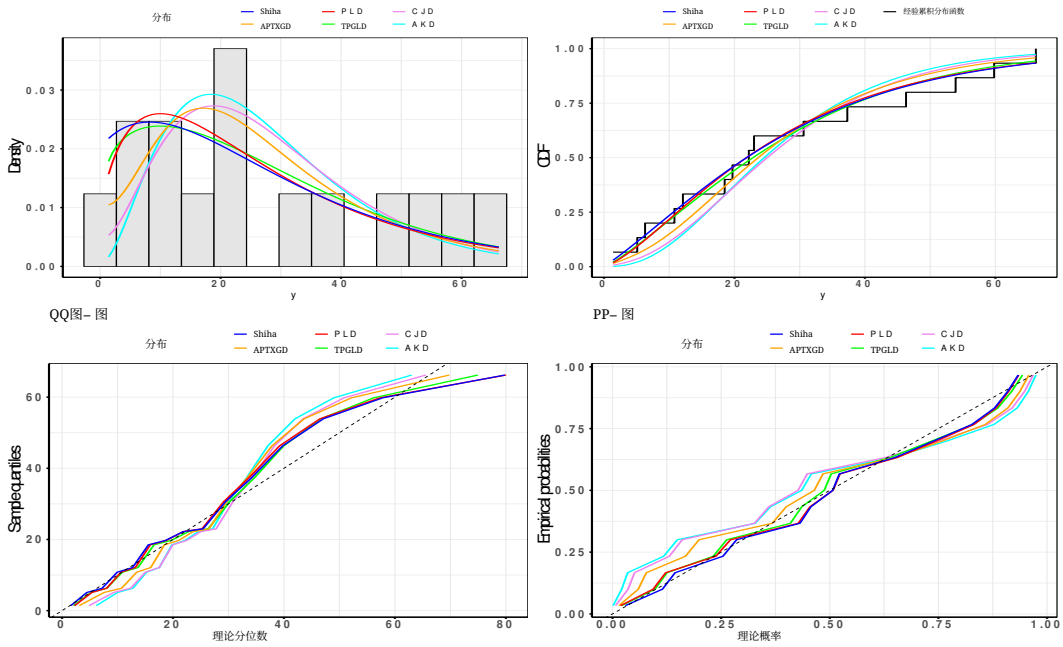


图13：数据集4的图形表示。

根据表6–9报告的结果，Shiha 分布的 AIC、BIC、安德森–达林统计量和柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫统计量较低，而安德森–达林统计量和柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫统计量的 p值较高。结合图10–13所示的视觉证据（这些图表明 Shiha 分布与经验数据高度吻合），我们得出结论：在所考虑的所有数据集中，与 APTXGD、PLD、TPGLD、CJD 和 AKD 分布相比，Shiha模型的拟合效果最佳。

6 结论

本文介绍了 Shiha 分布，这是一种新型且灵活的寿命模型，适用于可靠性工程和环境应用中常见的右偏数据。理论研究涵盖了若干重要的统计性质，包括矩、风险率函数、分位数函数和熵，揭示了该分布捕捉不同数据形态及尾部行为的能力。应力–强度可靠性分析进一步展示了所提出模型在可靠性研究中的适用性。采用最大似然法进行参数估计，并开展了蒙特卡洛模拟研究，以考察估计量的表现。结果表明，最大似然估计量具有预期的一致性，且随着样本量增加，偏差和均方误差均有所降低。通过将 Shiha 分布应用于四个真实数据集，进一步验证了其实际价值。与若干知名寿命模型的比较显示，所提出的分布在所有情况下均具有更优的拟合优度，证实了其有效性和灵活性。

利益冲突

作者声明，对于本文的发表不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] F.A. Bhatti、A. Ali、G.G. Hamedani、M. Ahmad（2019年）。广义对数 Burr III 分布：发展、性质、特征及应用。《巴基斯坦统计学杂志》35，25-51。[2] D. K. Bhaumik、K. Kapur、R.D. Gibbons（2009年）。小样本下伽马分布参数的检验。《计量技术学》51(3)，326–334。[3] N. Ekhosuehi、F. Opone（2018）。三参数广义林德利分布：性质与应用。《统计学》78(3)，233–249。https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/8123[4] P. Jodrá（2010）。通过朗伯 W 函数计算生成服从 Lindley 或 Poisson–Lindley 分布的随机变量。《数学与计算机模拟杂志》81，851–859。[5] M. E. Ghitany、D. K. Al-Mutairi、N. Balakrishnan、L. J. Al-Enezi（2013年）。幂Lindley分布及相关推断。《计算统计与数据分析》64，20–33。[6] J. F. Lawless（2003年）。寿命数据的统计模型与方法。威利出版社，纽约。[7] D. V. Lindley（1958年）。枢轴分布与贝叶斯定理。《英国皇家统计学会杂志》B辑，20，102–107。[8] D.N.P. Murthy、M. Xie、R. Jiang（2004年）。威布尔模型。约翰·威利父子公司，霍博肯。[9] S. Nadarajah、H.S. Bakouch、R. Tahmasbi（2011年）。广义Lindley分布。《Sankhya B》73，331–359。https://doi.org/10.1007/s13571-011-0025-9[10] C. K. Onyekwere、O.J. Obulezi（2022）。Chris-Jerry 分布及其应用。《亚洲概率与统计杂志》20(1)：文章编号 AJPAS.91475。DOI: 10.9734/AJ- PAS/2022/v20i130480[11] A. M. Sarhan、L. Tadj 和 D. C. Hamilton（2014年）。一种新的寿命分布及其幂变换。《概率与统计杂志》2014，1–14。doi:10.1155/2014/532024[12] S. Sen、S. S. Maiti 和 N. Chandra（2016年）。xgamma分布：统计性质与应用。《现代应用统计方法杂志》15(1)，文章38。DOI: 10.22237/jmasm/1462077420[13] R. Shanker（2015年）。Akash 分布及其应用。《国际概率与统计杂志》4(3)，65–75[14] R. Shanker（2016年）。Aradhana 分布及其应用。《统计学与应用杂志》6(1)，23—34。[15] R. Shanker（2016年）。Sujatha 分布及其应用。《统计学转型——新系列》17，391–410。https://doi.org/10.21307/stattrans-2016-029[16] F. A. Shiha、Abdulrahman M. A. Aldawsari、Reid Alotaibi、Alia M. Magar（2025年）。变换单参数 Sarhan-Tadj-Hamilton 分布：性质与应用。《数学科学》。https://doi.org/10.57647/mathsci.2025.1904.18008

[17] S. Shukla、A. S. Yadav、G. S. Rao、M. Saha、H. Tripathi（2022）。Alpha 幂变换 Xgamma 分布及其在可靠性、生存和环境数据中的应用。《J Sci Res.》66(3)。DOI: 10.37398/JSR.2022.660338

[18] D. Welday、S. Shanker（2018）。具有相关性质和应用的广义 Aradhana 分布。《生物测定与生物统计国际期刊》，7(4)。