arXiv:2602.02911v1 [math.NT] 2 Feb 2026

仿射对角系统的结构与稀少性，I

JULIA BRANDES 和 TREVOR D. WOOLEY

ABSTRACT. 设 $\varepsilon > 0$ 且 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3$。我们证明，只要 P 足够大，且该方程组
$$x_1^j + x_2^j - y_1^j - y_2^j = h_j \quad (j = 1,2,3)$$
的整数解多于 P^{ε} 个，其中 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P$，那么就存在自然数$a$ 和 b，使得 $h_j = a^j - b^j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$。这个例子体现了这样一个主题：丢番图方程组要么整数解稀少，要么系数元组$\mathbf{h}$具有高度结构性。我们将考察相关的稀少性问题，以及其对涉及更多变量的问题所产生的一些影响。

1. INTRODUCTION

本文探讨系数结构对某些仿射对角方程组中整数解稀少性的影响。我们要讨论的问题，最适合通过引入第一个感兴趣的例子来说明。设 P 是一个较大的自然数，并考虑一个系数三元组 $(h_1,\ h_2,\ h_3) \in \mathbb{Z}^3$。我们用 $S_2(P;\mathbf{h})$ 表示该方程组的整数解数

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 - y_1^3 - y_2^3 &= h_3 \\ x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 &= h_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 &= h_1 \end{aligned}\right\}, \tag{1.1}$$

其中 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P (i = 1,\ 2)$。显然，对于某些三元组 $\mathbf{h} = (h_1,\ h_2,\ h_3)$，方程组 (1.1) 有许多整数解，这些解由 $S_2(P;\mathbf{h})$ 计数。例如，当 $\mathbf{h} = (0,\ 0,\ 0)$ 时，有 $2P^2 - P$个对角解，且满足 $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$。此外，当 a 和 b 是互不相同的自然数，且 $1 \leqslant a,\ b \leqslant P$ 时

$$h_j = a^j - b^j \quad (j = 1,2,3), \tag{1.2}$$

存在 P 个解，满足 $x_1 = y_1, x_2 = a, y_2 = b$。我们的目标是证明，不属于这些结构化集合之一的整数解为数甚少。

定理 1.1. 固定 $\eta \in (0,1)$，并设 P 相对于 η充分大。假设 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3$ 是一个满足性质 $S_2(P;\mathbf{h}) > P^{\eta}$的系数三元组。那么，元组 $\mathbf{h}$满足以下两个条件之一：

(a) 对于某些整数 a 和 b，满足 $a \neq b$ 和 $1 \leqslant a,\ b \leqslant P$，有 $h_j = a^j - b^j (j = 1,\ 2,\ 3)$，此时 $S_2(P;\ \mathbf{h}) = 4P$；(b) 有 $h_j = 0 (j = 1,\ 2,\ 3)$，此时 $S_2(P;\ \mathbf{0}) = 2P^2 - P$。

特别是，若$\mathbf{h}$ 既不满足条件 ***(a)***，也不满足条件 ***(b)***，则 $S_2(P;\mathbf{h}) = O(P^{\varepsilon})$.

2020 数学主题分类。11D45，11D72，11D41。关键词和短语。稀少性，对角方程，多变量丢番图方程。

注意，在情形 (a) 中，(1.1) 的解具有$\mathbf{x},\mathbf{y}$ 的形式，其中

$$\{x_1, x_2\} = \{a, z\} \quad \text{and} \quad \{y_1, y_2\} = \{b, z\},$$

其中，z 是满足 $1 \leqslant z \leqslant P$ 的任意整数。同时，情形 (b) 中的解是满足 $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ 的对角解。

本文所探讨的更广泛主题，在定理 1.1 中得到了很好的体现。方程组 (1.1) 要么只有极少的整数解，要么系数元组$\mathbf{h}$ 具有高度的结构性，其明确结构与构成 (1.1) 的方程相一致。这些思想可以推广到变量数更多的方程组。当 $t \in \mathbb{N}$ 时，记 $S_t(P; \mathbf{h})$ 为该方程组的整数解数

$$\sum_{i=1}^{t} (x_i^j - y_i^j) = h_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

其中 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P\,(1 \leqslant i \leqslant t)$。在改进 Brandes 和 Hughes 的早期工作 $[1]$, 后，Wooley $[7, \text{定理 } 1.1]$ 证明了，当 $h_1 \neq 0$ 且 $1 \leqslant t \leqslant 5$，以及当 $h_2 \neq 0$ 且 $1 \leqslant t \leqslant 4$ 时，$S_t(P; \mathbf{h}) \ll P^{t-1/2+\varepsilon}$。我们还注意到，在 $h_1 \neq 0$ 或 $h_2 \neq 0$ 的条件下，$S_6(P; \mathbf{h})$ 的渐近公式已在 $[6, \text{定理 } 1.1 \text{ 和 } 1.2]$, 中得到确立。此外，当 $h_1 = 0$ 且 $h_2 \neq 0$ 时，由 $[7, \text{定理 } 1.2]$ 可知，$S_3(P; \mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon}$。与此前引用的所有结果一样，这给出了超越平方根抵消的估计：当 $h_1 = 0$ 且 $h_2 \neq 0$ 时，上界 $S_3(P; \mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon}$，相较于平方根障碍节省了一个因式 $P^{1-\varepsilon}$。定理 1.1 的一个直接推论是，这一上界现在扩展到了所有 $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$。

推论 1。 *2. 假设 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 且 $\varepsilon > 0$。则有 $S_3(P; \mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon}$.*

我们指出，当 $\mathbf{h}$ 具有由 (1.2) 所确定的形式，且 $1 \leqslant a, b \leqslant P$ 与$a \neq b$时，则有 $S_3(P; \mathbf{h}) \gg P^2$。这一结论可由读者从该推论的证明中轻易辨识出的论证得出。因此，该推论的结论可视为本质上是尖锐的。

从我们在 §2 中对定理 1.1 证明的讨论可以明显看出，方程组 (1.1) 因其作为仿射 Vinogradov 系统的地位而具有特别便利的特征。在其他方程组中，可能会遇到额外的困难。我们通过考察一个与 (1.1) 密切相关的方程组来说明这些挑战。于是考虑一个系数三元组 $(h_1, h_2, h_4) \in \mathbb{Z}^3$。我们用 $T_2(P; \mathbf{h})$ 表示该方程组的整数解个数

$$\left.\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 - y_1^4 - y_2^4 &= h_4 \\ x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 &= h_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 &= h_1 \end{aligned}\right\}, \tag{1.3}$$

与 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P\,(i = 1,\ 2)$。在第 3 节中，我们将证明定理 1.1 的以下一个相关结果。

定理 1.3。 *设 $\eta \in (0,\ 1)$ 为固定值，并设 P 相对于 η充分大。假设 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3$ 是一个满足性质 $T_2(P;\ \mathbf{h}) > P^{\eta}$的系数三元组。那么，元组 $\mathbf{h}$ 满足以下两个条件之一：*

(a) 对于某些整数 a 和 b，满足 $a \neq b$ 和 $1 \leqslant a, b \leqslant P$，有 $h_j = a^j - b^j (j = 1, 2, 4)$，此时 $T_2(P;\ \mathbf{h}) = 4P$；(b) 有 $h_j = 0\,(j = 1, 2, 4)$，此时 $T_2(P;\ \mathbf{0}) = 2P^2 - P$。

特别地，如果 $\mathbf{h}$ 既不满足条件 *(a)*，也不满足条件 *(b)*，那么 $T_2(P;\ \mathbf{h}) = O(P^{\varepsilon})$。

关于定理 1.1 的陈述之后所讨论的情形 (a) 与 (b) 中解的结构，类似的说明同样适用。此外，正如关于 $S_t(P;\mathbf{h})$ 的类似讨论那样，也可以考察增加变量后的情形。用 $T_t(P;\mathbf{h})$ 表示该方程组的整数解个数

$$\sum_{i=1}^{t}(x_i^j - y_i^j) = h_j \quad (j = 1, 2, 4), \tag{1.4}$$

其中 $1 \leqslant x_i, y_i \leqslant P\ (1 \leqslant i \leqslant t)$。我们给出与方程组 (1.4) 有关的推论 1.2 的一个类似结论。

推论 1。 4. 设 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 且 $\varepsilon > 0$。则有 $T_3(P;\mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon}$。

正如我们在推论 1.2 的陈述之后的评注中所述，当 $h_j = a^j - b^j\ (j = 1,2,4)$，且 $1 \leqslant a, b \leqslant P$和 $a \neq b$ 时，这一结论本质上是精确的。

我们再举一个说明性例子，来完成对结构与稀少性交互关系的初步探讨。当 s 和 k 是自然数，且 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k$时，记由$U_{s,k}(P;\mathbf{h})$表示丢番图方程组的解的数量

$$\sum_{i=1}^{s} x_i^{2j-1} = h_j \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{1.5}$$

其中 $|x_i| \leqslant P\ (1 \leqslant i \leqslant s)$。这个方程组是 Br¨udern 和 Robert [2]的工作中所研究方程组的仿射版本。我们首先给出一个类似于定理 1.1 和 1.3 的定理，证明稀少性结果的强度受到限制会蕴含元组 $\mathbf{h}$具有某种结构。

定理 1.5. 设 $\eta \in (0,1)$ 为固定值，且 k 和 r 为满足 $k \geqslant 2$的非负整数。令 P 相对于 η、k 和 r充分大。假设 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k$ 是一个系数k-元组，且具有如下性质：

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) > P^{r+\eta}. \tag{1.6}$$

那么有 $0 \leqslant r \leqslant (k-1)/2$，并且对于某些满足 $|a_i| \leqslant P\,(1 \leqslant i \leqslant k-1-2r)$的整数 a_i，有

$$h_j = a_1^{2j-1} + \ldots + a_{k-1-2r}^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{1.7}$$

特别地，当 r 是使得下界 (1.6)对某个$\eta \in (0,1)$成立的最大整数时，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们有

$$P^{r+1} \ll U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{r+1+\varepsilon}.$$

我们给出一个与定理 1.5 基本等价、带有逆向意味的结论，表明系数元组 $\mathbf{h}$中的结构会对稀疏性估计给出精确结论。

定理1.6。 设 P 相对于 k足够大，并假设$\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ 是一个系数 k元组。令 $r_0(\mathbf{h})$ 为满足以下性质的最小自然数 r：存在整数 a_i，使得 $|a_i| \leqslant P\,(1 \leqslant i \leqslant r)$ 满足这些方程

$$h_j = a_1^{2j-1} + \ldots + a_r^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{1.8}$$

并记

$$\tau(k;\mathbf{h})=\left\lfloor\frac{k+1-r_0(\mathbf{h})}{2}\right\rfloor.$$

则对每一个 $\varepsilon>0$，我们有

$$P^{\tau(k;\mathbf{h})}\leqslant U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})\ll P^{\tau(k;\mathbf{h})+\varepsilon}.$$

这些定理表明，计数函数 $U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})$ 的较大取值与系数 k 元组 $\mathbf{h}$ 中较高程度的结构相关联。此处，定义$\mathbf{h}$所需的 (1.7) 中加数个数越少，对 $\mathbf{h}$ 所蕴含的结构约束就越强。当$s>k+1$时，对量 $U_{s,k}(P;\mathbf{h})$ 也可得出类似结论，不过我们在此不拟详述此事。相反，我们给出一个非平凡的稀少性结果，它以类似于上述推论的方式由定理 1.5 推出。我们强调，这一结论超越了所谓的平方根障碍，其意义在于，为 $U_{2t,k}(P;\mathbf{h})$ 所建立的上界比 P^t 增长得更慢，而 P^t 是底层可用变量供给量的平方根。

推论 1.7. 假设 $k\geqslant 2$ 且 $\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^k\setminus\{\mathbf{0}\}$。那么，对每个 $\varepsilon>0$，有一 s

$$U_{2t,k}(P;\mathbf{h})\ll P^{t-1+\varepsilon}\quad(1\leqslant t\leqslant k).$$

与以往对稀少性问题和拟稀少性问题的研究（例如见[3, 5]）一样，我们证明定理 1.1、1.3、1.5 和 1.6 的方法，依赖于应用乘法型多项式恒等式。在条件有利时，这类恒等式可使约数函数估计发挥作用，从而表明，对于典型的元组$\mathbf{h}$，相关丢番图方程组的整数解很少。然而，对于$\mathbf{h}$的非典型取值，则必须考虑这样一种可能性：这些多项式恒等式只能说明底层变量受到 0 的因数约束，因此无法提供有用信息。因此，需要仔细分析这些非典型情形及其与相关丢番图方程组中对角结构的关系。读者可从第 2 节的讨论中了解研究相关问题所需的思路。

我们的基本参数是 P，一个充分大的正整数。每当陈述中出现 ε （无论是隐含还是显式出现）时，我们都断言该陈述对每个$\varepsilon>0$都成立。我们经常使用如下形式的向量记号：$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_r)$。这里，维数 r 取决于论证的进展。

本文的工作是在第一作者获得 Vetenskapsr˚adet（瑞典科学基金会）项目资助 2022-03717 的支持、第二作者获得美国国家科学基金会资助 DMS-2502625 以及西蒙斯数学奖学金 SFM-00011955 的支持期间进行的。第一作者感谢普渡大学的热情接待。第二作者感谢普林斯顿高等研究院接待其学术休假，本文即在此期间完成。两位作者感谢米塔-莱夫勒研究所和奥伯沃尔法赫数学研究所在本文取得进展的若干时期接待他们。

2. Paucity in the affine cubic Vinogradov system

定理 1.1 证明的关键是一个具有乘法特征的多项式恒等式。为描述这一恒等式，我们通过如下方式定义多项式 $s_j = s_j(x, y)$

$$s_j(x, y) = x^j - y^j \quad (j \geqslant 1). \tag{2.1}$$

简单地在小信封背面验算一下，就会发现有如下恒等式

$$s_1^4 + 3s_2^2 - 4s_1 s_3 = 0. \tag{2.2}$$

由关系式 (2.2) 可得一个恒等式，该恒等式关联了由下式定义的四变量多项式 $\sigma_j = \sigma_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\sigma_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1^j + x_2^j - y_1^j - y_2^j \quad (j \geqslant 1). \tag{2.3}$$

引理 2.1. 有

$$\sigma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})^4 + 3\sigma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - 4\sigma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\sigma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 12(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2). \tag{2.4}$$

证明。令 $x_2 = y_2$，作特化，可得

$$\sigma_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s_j(x_1, y_1) \quad (j = 1, 2, 3).$$

在此情形下，(2.4) 的左端等于 $s_1^4 + 3s_2^2 - 4s_1 s_3$，即为 0。由此可知，(2.4) 的左端可被 $x_2 - y_2$ 整除，而由对称论证可知，$x_1 - y_1$、$x_1 - y_2$ 与 $x_2 - y_1$ 亦为因式。再注意到 (2.4) 的左右两端次数同为 4，且常数因式 12 由该方程左端 $x_1^2 x_2^2$ 的系数所确定，于是恒等式 (2.4) 随之成立。□

我们现在已具备条件来确认定理 1.1 的结论。

定理 *1.1* 的证明。 设 $\eta \in (0, 1)$，且 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3$。每当 $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ 是由 $S_2(P; \mathbf{h})$ 所计数的 (1.1) 的整数解时，由 (2.3) 可知 $\sigma_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_j (j = 1, 2, 3)$。因此，由引理 2.1，我们有

$$12(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2) = \Psi(\mathbf{h}), \tag{2.5}$$

其中

$$\Psi(\mathbf{h}) = h_1^4 + 3h_2^2 - 4h_1 h_3.$$

S由于 $1 \leqslant x_i, \ y_i \leqslant P (i = 1, \ 2)$，我们有 $|\Psi(\mathbf{h})| < 12P^4$。我们分情况讨论 s.

首先假设 $\Psi(\mathbf{h}) \neq 0$。那么，标准的除数函数估计表明，具有以下性质的整数 $d_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 有 $O(P^{\varepsilon})$ 种可能的选择：

$$x_1 - y_1 = d_1, \quad x_1 - y_2 = d_2, \quad x_2 - y_1 = d_3, \quad x_2 - y_2 = d_4. \tag{2.6}$$

固定任意一个这样的$\mathbf{d}$，我们可以将其代入

$$y_1 = x_1 - d_1, \quad y_2 = x_1 - d_2, \quad x_2 = x_1 - d_1 + d_3 \tag{2.7}$$

方程组 (1.1) 中。因此，我们得到

$$x_1^2 + (x_1 - d_1 + d_3)^2 - (x_1 - d_1)^2 - (x_1 - d_2)^2 = h_2, \tag{2.8}$$

由此

$$2x_1(d_2 + d_3) + (d_1 - d_3)^2 - d_1^2 - d_2^2 = h_2. \tag{2.9}$$

这个方程确定了 x_1 的值，除非 $d_3 = -d_2$，我们从现在起假设情况确实如此。同样，有

$$x_1^3 + (x_1 - d_1 + d_3)^3 - (x_1 - d_1)^3 - (x_1 - d_2)^3 = h_3,$$

由此

$$3x_1((d_1 + d_2)^2 - d_1^2 - d_2^2) - (d_1 + d_2)^3 + d_1^3 + d_2^3 = h_3.$$

该方程确定了 x_1 的值，除非

$$(d_1 + d_2)^2 - d_1^2 - d_2^2 = 0. \tag{2.10}$$

因此，我们不得不得出结论： x_1 的值是确定的，除非有 $2d_1d_2 = 0$，也就是说 d_1 与 d_2 中至少有一个等于0。后一种情况意味着 $x_1 = y_1$ 或 $x_1 = y_2$。这两种情形中的任何一种都通过(2.5)意味着 $\Psi(\mathbf{h}) = 0$，这与我们在此情形下先前的假设相矛盾。因此， x_1 确实由$\mathbf{h}$ 与$\mathbf{d}$确定，从而我们可以由(2.7)推知 y_1、 y_2 与 x_2 也被确定。在 $\Psi(\mathbf{h}) \neq 0$的这第一种情形中，我们因此得出结论： $S_2(P;\mathbf{h}) \ll P^{\varepsilon}$。

如果 $S_2(P;\mathbf{h}) > P^{\eta}$成立，那么只要 P相对于 ε与η足够大，我们就不可能处于这第一种情形。因此，我们有 $\Psi(\mathbf{h}) = 0$，并且由(2.5)可得

$$x_1 = y_1, \quad \text{or} \quad x_1 = y_2, \quad \text{or} \quad x_2 = y_1, \quad \text{or} \quad x_2 = y_2. \tag{2.11}$$

通过重新标记变量，不失一般性，可假设 $x_2 = y_2$。于是由 (1.1) 可推出

$$x_1^j - y_1^j = h_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.12}$$

特别地，存在整数 a 和 b，满足 $1 \leqslant a,\ b \leqslant P$，使得关系 (1.2) 成立，即 $h_j = a^j - b^j$ ($j = 1,\ 2,\ 3$)。若有 $a = b$，从而 $h_j = 0$ ($j = 1,\ 2,\ 3$)，那么显然 $x_1 = y_1$。考虑到我们对变量所作的重新标记，便有

$$S_2(P;\mathbf{0}) = 2P^2 - P.$$

与此同时，当 $a \neq b$ 时，由 (2.12) 可得

$$x_1 - y_1 = a - b \quad \text{and} \quad x_1 + y_1 = \frac{x_1^2 - y_1^2}{x_1 - y_1} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

因此 $x_1 = a$ 和 $y_1 = b$，而由 $S_2(P;\mathbf{h})$ 计数的这类 (1.1) 的解满足

$$\{x_1, x_2\} = \{a, t\} \quad \text{and} \quad \{y_1, y_2\} = \{b, t\},$$

其中 $1 \leqslant t \leqslant P$。再次注意到先前对变量所作的重新标记，当 $a \neq b$ 时，有

$$S_2(P;\mathbf{h}) = 4P.$$

定理的证明至此完成。 □

证明定理 1.1 的推论无需付出太多额外努力 .

推论 *1.2* 的证明。我们始终假设 $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$。有

$$S_3(P;\mathbf{h}) = \sum_{1 \leqslant x_3, y_3 \leqslant P} S_2(P;\mathbf{h}'(x_3, y_3)), \tag{2.13}$$

其中 $\mathbf{h}' = (h_1',\ h_2',\ h_3')$ 且

$$h_j'(u, v) = h_j - u^j + v^j \quad (j \geqslant 1). \tag{2.14}$$

令 $\eta > 0$ 任意小。由定理 1.1 可知， $S_2(P;\mathbf{h}') \leqslant P^{\eta}$，除非存在某些正整数 a 和 b，满足 $1 \leqslant a,\ b \leqslant P$，使得 $h_j' = a^j - b^j (j = 1,\ 2,\ 3)$，此时

$$x_3^j - y_3^j + a^j - b^j = h_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.15}$$

当 $a \neq b$ 时，有 $S_2(P;\ \mathbf{h}') = 4P$；而当 $a = b$ 时，有 $S_2(P;\ \mathbf{h}') = 2P^2 - P$。因此，由（2.13）可得

$$S_3(P;\mathbf{h}) \ll P^{2+\eta} + P\Upsilon_1 + P^2\Upsilon_2, \tag{2.16}$$

其中， Υ_1 表示满足（2.15）且 $1 \leqslant a,\ b,\ x_3,\ y_3 \leqslant P$ 以及 $a \neq b$ 的解的数量，而 Υ_2 表示满足 $a = b = 1$ 的相应解的数量。

再次应用定理 1.1 表明，当 $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ 时， $\Upsilon_1 = O(P)$。接下来转而估计 Υ_2，在这种情况下我们可以假设 $a = b = 1$。我们注意到，方程（2.15）给出：当 $h_1 = 0$ 时， $h_2 = h_3 = 0$ 。因此，当 $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ 时，必有 $h_1 \neq 0$，从而得到

$$x_3 - y_3 = h_1 \quad \text{and} \quad x_3 + y_3 = h_2/h_1.$$

因此，我们推知，当$\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$时， x_3 和 y_3 由 h_1 和 h_2 唯一确定。因此，当 $a = b = 1$时，可知 $\Upsilon_2 = O(1)$。然后由(2.16)得出，只要$\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$，就有 $S_3(P;\mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon}$。推论的证明至此完成。□

我们注意到，定理 1.1 的情形 (a) 可以作更明确的描述。因此，若$h_j = a^j - b^j (j = 1,\ 2, 3)$且 $a \neq b$，则

$$h_1 = a - b \quad \text{and} \quad h_2/h_1 = a + b,$$

由此可得

$$a = \tfrac{1}{2}(h_2/h_1 + h_1) \quad \text{and} \quad b = \tfrac{1}{2}(h_2/h_1 - h_1).$$

于是有

$$h_3 = a^3 - b^3 = \frac{1}{8}\Big(\Big(\frac{h_2}{h_1} + h_1\Big)^3 - \Big(\frac{h_2}{h_1} - h_1\Big)^3\Big),$$

因此 $4h_1h_3 = h_1^4 + 3h_2^2$，这应当已可从定理 1.1 的证明中已经遇到的条件 $\Psi(\mathbf{h}) = 0$看出。

3. Paucity in a relative of the affine Vinogradov system

在着手证明定理 1.1 时，很快便会发现，定理 1.3 的核心方程组 (1.3) 比定理 1.1 所依据的方程组更难分析。我们再次按照 (2.1) 定义多项式 $s_j = s_j(x, y)$。然后稍微多花些工夫便可验证，有如下恒等式

$$s_2^3 + s_1^4 s_2 - 2s_1^2 s_4 = 0. \tag{3.1}$$

由此关系可得一个恒等式，它将 (2.3) 中定义的四变量多项式$\sigma_j(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 与下面这个附加多项式联系起来

$$\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2). \tag{3.2}$$

引理 3.1。有

$$\begin{aligned}\sigma_2(\mathbf{x},\mathbf{y})^3 + \sigma_1(\mathbf{x},\mathbf{y})^4\sigma_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2\sigma_1(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\sigma_4(\mathbf{x},\mathbf{y})&\\ = 8(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}).&\end{aligned} \tag{3.3}$$

证明。我们再次观察到，通过特化 $x_2 = y_2$，有

$$\sigma_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s_j(x_1, y_1) \quad (j = 1, 2, 4).$$

因此，鉴于恒等式 (3.1)，如同引理 2.1 的证明中那样，显然 (3.3) 的左端可被 $x_2 - y_2$ 整除，而对称的论证则揭示出额外的因式 $x_1 - y_1$、$x_1 - y_2$ 和 $x_2 - y_1$。于是可将 (3.3) 的左端除以乘积

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)$$

从而得到商 $8\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，其中 $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 由 (3.2) 定义。希望节省精力的读者可在此计算中使用计算机代数助手。至此引理的证明完成。□

尽管我们已具备借助引理 3.1 来证明定理 1.3 的条件，但其细节比定理 1.1 证明中所用相应论证更为复杂。

定理 *1.3* 的证明。设 $\eta \in (0, 1)$ 且 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3$。每当 $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ 是由 $T_2(P; \mathbf{h})$ 计数的 (1.3) 的一个整数解时，由 (2.3) 可知 $\sigma_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_j (j = 1, 2, 4)$。因此，应用引理 3.1，我们看出

$$8(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{h}), \tag{3.4}$$

其中 $\Phi(\mathbf{h}) = h_2^3 + h_1^4 h_2 - 2h_1^2 h_4$。这一次，由于 $1 \leqslant x_i, y_i \leqslant P (i = 1,2)$，我们有 $|\Phi(\mathbf{h})| < 24P^6$。我们分情况讨论。

首先，假设 $\Phi(\mathbf{h}) \neq 0$。那么，标准的约数函数估计表明，对于满足关系 (2.6) 的整数 d_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$，可能的选择有 $O(P^\varepsilon)$ 种。固定 $\mathbf{d}$ 的任意一种这样的选择，我们再次可以将 (2.7) 代入方程组 (1.3)。正如在定理 1.1 的证明中那样，我们再次得到 (2.8) 和 (2.9)。后一个方程确定了 x_1 的值，除非 $d_3 = -d_2$，对此我们以下假设成立。这一次，我们有

$$x_1^4 + (x_1 - d_1 + d_3)^4 - (x_1 - d_1)^4 - (x_1 - d_2)^4 = h_4,$$

由此

$$6x_1^2\big((d_1 + d_2)^2 - d_1^2 - d_2^2\big) - 4x_1\big((d_1 + d_2)^3 - d_1^3 - d_2^3\big) + (d_1 + d_2)^4 - d_1^4 - d_2^4 = h_4.$$

该方程将 x_1 的值限定为二次方程的两个根之一，除非 (2.10) 成立。因此，我们不得不认定，除非 d_1 和 d_2 中至少有一个为 0，否则 x_1 的值是固定的；而这一情况又意味着 $x_1 = y_1$ 或 $x_1 = y_2$。无论哪种情况，由 (3.4) 可知 $\Phi(\mathbf{h}) = 0$，这与我们先前的假设矛盾。因此我们得出结论：x_1 确实由 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{d}$ 的固定取值确定，进而由 (2.7) 可知，y_1、y_2 和 x_2 也都确定。在第一种情形中，也就是 $\Phi(\mathbf{h}) \neq 0$ 的情况下，因此我们不得不认定

$$T_2(P; \mathbf{h}) \ll P^\varepsilon.$$

若 $T_2(P; \mathbf{h}) > P^\eta$，那么只要 P 相对于 ε 和 η 足够大，我们就不可能处于第一种情形。因此，我们有 $\Phi(\mathbf{h}) = 0$，由 (3.4) 可知，关系 (2.11) 至少有一个必须成立，否则

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) - (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = 0. \tag{3.5}$$

在开始分析第二种情形之前，我们先考察关系 (3.5) 成立这一假设的后果。在这种情况下，由方程组 (1.3) 可得

$$\begin{aligned}(y_1+y_2+h_1)^2-2(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)+(y_1^2+y_2^2+h_2)\\ =(x_1+x_2)^2-2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1^2+x_2^2)=0,\end{aligned}$$

由此

$$2h_1(y_1+y_2)+h_1^2+h_2=0. \tag{3.6}$$

将此关系代入 (1.3) 的线性方程，可得

$$2h_1(x_1+x_2)-h_1^2+h_2=0. \tag{3.7}$$

现在分别利用 (3.6) 和 (3.7)，推导出以下两个关系

$$\begin{aligned}8h_1^2(y_1^2+y_2^2+h_2)&=2\big(4h_1^2(y_1^2+h_2)+(h_1^2+h_2+2h_1y_1)^2\big)\\ &=\big(4h_1y_1+(h_1^2+h_2)\big)^2+8h_1^2h_2+(h_1^2+h_2)^2\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}8h_1^2(x_1^2+x_2^2)&=2\big(4h_1^2x_1^2+(h_1^2-h_2-2h_1x_1)^2\big)\\ &=\big(4h_1x_1-(h_1^2-h_2)\big)^2+(h_1^2-h_2)^2.\end{aligned}$$

因此，将这些公式代入 (1.3) 的二次方程，可得

$$\big(4h_1x_1-(h_1^2-h_2)\big)^2-\big(4h_1y_1+(h_1^2+h_2)\big)^2=12h_2h_1^2. \tag{3.8}$$

现在我们开始考察如下情形

$$\Phi(\mathbf{h})=h_2^3+h_1^4h_2-2h_1^2h_4=0,$$

但关系 (2.11) 均不成立。在这种情形下，我们因此必须有 (3.5)，进而有 (3.8)。我们的目标是证明，这些条件实际上与假设 $T_2(P;\mathbf{h})>P^\eta$ 不相容。为此，首先考虑 $h_1=0$ 的情形。由于 $\Phi(\mathbf{h})=0$，可知 $h_2=0$，于是我们有

$$\left.\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=y_1^2+y_2^2\\ x_1+x_2&=y_1+y_2\end{aligned}\right\}.$$

这迫使我们得出结论：$\{x_1,x_2\}=\{y_1,y_2\}$，这与关系 (2.11) 均不成立的假设相矛盾。因此，我们必须有 $h_1\neq 0$。

接下来考虑 $h_1\neq 0$ 但 $h_2=0$ 的情形。这意味着 $h_4=0$，因此我们必须有

$$\left.\begin{aligned}x_1^4+x_2^4&=y_1^4+y_2^4\\ x_1^2+x_2^2&=y_1^2+y_2^2\end{aligned}\right\}.$$

这些方程意味着 $\{x_1^2,x_2^2\}=\{y_1^2,y_2^2\}$，而且由于 $1\leqslant x_i,\ y_i\leqslant P$，因此可得 $\{x_1,x_2\}=\{y_1,y_2\}$。这再次与我们的假设相矛盾，即关系（2.11）均不成立。

因此，我们可以假设 $12h_2h_1^2 \neq 0$。在这种情况下，通过初等因子函数估计，由（3.8）可知，整数 e_1 和 e_2 至多有 $O(P^{\varepsilon})$ 种可能的取值，使得

$$\left.\begin{aligned}\big(4h_1x_1-(h_1^2-h_2)\big)-\big(4h_1y_1+(h_1^2+h_2)\big)=e_1\\ \big(4h_1x_1-(h_1^2-h_2)\big)+\big(4h_1y_1+(h_1^2+h_2)\big)=e_2\end{aligned}\right\}.$$

固定任意一组 e_1 和 e_2 的取值后，可知 x_1 和 y_1 均已确定。再由 (3.6) 和 (3.7) 可知，x_2 和 y_2 也已确定。因此，这类解的数量至多为 $O(P^{\varepsilon})$。由于我们假设 $T_2(P;\mathbf{h}) > P^{\eta}$，故也可排除这种情形。这证实了我们的断言：假设关系 (2.11) 均不成立，与条件 $T_2(P;\mathbf{h}) > P^{\eta}$ 不相容。

剩下需要考虑的是关系 (2.11) 中有一个成立的情形。在此，通过重新标记变量，不失一般性地可假设 $x_2 = y_2$。由此根据 (1.3) 得到

$$x_1^j - y_1^j = h_j \quad (j = 1, 2, 4). \tag{3.9}$$

特别地，存在整数 a 和 b，满足 $1 \leqslant a, b \leqslant P$，且有 $h_j = a^j - b^j (j = 1,2,4)$。若满足 $a = b$，从而有 $h_j = 0\,(j = 1, 2, 4)$，那么显然 $x_1 = y_1$，此时我们属于定理的情形 (b)。鉴于我们对变量进行了重新标记，便有

$$T_2(P;\mathbf{0}) = 2P^2 - P.$$

当 $a \neq b$时，同时，正如定理 1.1 的证明中那样，我们由 (3.9) 得到$x_1 = a$ 和 $y_1 = b$，而由 $T_2(P;\mathbf{h})$ 计数的这类方程组 (1.3) 的解满足

$$\{x_1, x_2\} = \{a, t\}, \quad \{y_1, y_2\} = \{b, t\},$$

其中 $1 \leqslant t \leqslant P$。再次考虑到此前对变量的重新标记，我们看到这里属于定理的情形 (a)，并且当 $a \neq b$ 时，有

$$T_2(P;\mathbf{h}) = 4P.$$

我们已经证明，当 P足够大且 $T_2(P;\mathbf{h}) > P^{\eta}$时，我们要么属于定理的情形 (a)，要么属于情形 (b)。在其他所有情况下，我们已确认$T_2(P;\mathbf{h}) = O(P^{\varepsilon})$。因此，定理得证。□

在证明推论 1.4 时，我们采用了证明推论 1.2 的策略。

推论 *1.4* 的证明。我们采用与证明推论 1.2 几乎完全相同的论证。整个过程中可以假设 $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$。于是有

$$T_3(P;\mathbf{h}) = \sum_{1 \leqslant x_3, y_3 \leqslant P} T_2(P;\mathbf{h}'(x_3, y_3)), \tag{3.10}$$

其中 $\mathbf{h}' = (h_1', h_2', h_4')$ 按 (2.14) 定义。设 $\eta > 0$ 任意小。由定理 1.3 可知，$T_2(P;\mathbf{h}') \leqslant P^{\eta}$，除非对某些满足$1 \leqslant a, b \leqslant P$的正整数 a与 b，有 $h_j' = a^j - b^j\,(j = 1, 2, 4)$，在此情形下

$$x_3^j - y_3^j + a^j - b^j = h_j \quad (j = 1, 2, 4). \tag{3.11}$$

当 $a \neq b$ 时，有 $T_2(P;\mathbf{h}') = 4P$；而当改为有 $a = b$ 时，则有$T_2(P;\mathbf{h}') = 2P^2 - P$。因此由 (3.10) 可得

$$T_3(P;\mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon} + P\Upsilon_1 + P^2\Upsilon_2, \tag{3.12}$$

其中，Υ_1 现在表示方程 (3.11) 在 $1 \leqslant a, b, x_3, y_3 \leqslant P$和$a \neq b$条件下的解的数量，而 Υ_2 表示在 $a = b = 1$ 条件下相应的解的数量。

再次应用定理 1.3，我们发现当$\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$时，$\Upsilon_1 = O(P)$。为了给 Υ_2 取上界，我们可以假设 $a = b = 1$，并注意到方程 (3.11) 在 $h_1 = 0$ 时给出$h_1 = h_2 = h_4 = 0$。与此同时，当 $h_1 \neq 0$ 时，如推论 1.2 证明结尾处的讨论所示，我们发现

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(h_2/h_1 + h_1) \quad \text{and} \quad y_3 = \tfrac{1}{2}(h_2/h_1 - h_1).$$

因此，当 $a = b = 1$ 时，可见 $\Upsilon_2 = O(1)$。然后由 (3.12) 可得，当$\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$时，有 $T_3(P;\mathbf{h}) \ll P^{2+\varepsilon}$。这就完成了该推论的证明。□

4. Paucity in affine Brüdern-Robert systems

本节研究先前讨论过的丢番图方程组 (1.5)，其中$\mathbf{h} = \mathbf{0}$，由 Br¨udern 和 Robert [2] 研究。为阐明我们的思路，避免表面复杂因素造成干扰，我们只考虑满足 $s = k + 1$的情形。因此，当$\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k$时，我们考察方程组的整数解数量 $U_{k+1,\,k}(P;\mathbf{h})$

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^{2j-1} = h_j \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{4.1}$$

其中 $|x_i| \leqslant P\,(1 \leqslant i \leqslant k+1)$。

考虑一个固定解 $(x_1, \ldots, x_s)$，它是由 $U_{s,\,k}(P;\mathbf{h})$ 计数的方程组 (1.5) 的解。可以重新标记变量，使得对于某个整数 j，满足$0 \leqslant j \leqslant s/2$，有

$$x_{2i-1} + x_{2i} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant j), \tag{4.2}$$

并且对于任何满足 $2j < l < m \leqslant s$ 的 l 和 m，都不会有

$$x_l + x_m = 0. \tag{4.3}$$

我们将具有此性质的 s 元组 $\mathbf{x}$ 称为具有类型 j。我们用 $V_{(j)\,s,k}(P;\mathbf{h})$ 表示满足类型 j 的$\mathbf{x}$，即由 $U_{s,k}(P;\mathbf{h})$ 计数的 (1.5) 的解的个数。

接下来，对于固定的 k 元组 $\mathbf{h}$，我们用 $I_k(\mathbf{h})$ 表示具有如下性质的最大整数 j：存在某个 $(k+1)$ 元组 $\mathbf{x}$，其类型为 j，且 $|x_i| \leqslant P(1 \leqslant i \leqslant k+1)$，并满足 (4.1)。因此，我们有 $I_k(\mathbf{h}) \leqslant (k+1)/2$，并且

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant I_k(\mathbf{h})} V_{k+1,k}^{(j)}(P;\mathbf{h}). \tag{4.4}$$

注意，当 $V_{(j)\,k+1,k}(P;\mathbf{h}) > 0$ 时，关系 (4.2) 确保 $V_{(j)\,k+1,k}(P;\mathbf{h}) \geqslant P^j$。特别地，可得

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \geqslant P^{I_k(\mathbf{h})}. \tag{4.5}$$

我们对定理 1.5 和定理 1.6 的证明关键地用到了相应的上界，该上界是以下辅助引理的推论。

引理 4.1. 有 $V_{(j)\,k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{j+\varepsilon}$.

根据此引理给出的上界，结合 (4.4) 可推得

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll \sum_{0\leqslant j\leqslant I_k(\mathbf{h})} V^{(j)}_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{I_k(\mathbf{h})+\varepsilon}. \tag{4.6}$$

引理 *4.1* 的证明。若 $j = (k+1)/2$，这仅在 k 为奇数时才可能成立，则由关系 (4.2) 与 (4.1) 可知 $h_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$。我们重新标记变量，使其满足关系 (4.2)。于是，在固定变量 $x_{2i-1}(1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(k+1))$ 的取值后，其余变量由关系 (4.2) 唯一确定。因此，在 $j = (k+1)/2$ 的情况下，我们有 $V_{((k+1)/2)\,k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{(k+1)/2}$，引理的结论随即得证。

现在考虑 $j < (k+1)/2$ 的情形。此处，通过重新标记变量，由 (4.2) 和 (4.3) 可得

$$V^{(j)}_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^j V^{(0)}_{k+1-2j,k}(P;\mathbf{h}). \tag{4.7}$$

$2j \in \{k-1,k\}$ 的情形很容易处理。此处，我们有$k+1-2j \in \{1,2\}$。方程

$$x_1 = h_1$$

的解的个数显然为 1，因此 $V_{(0)\,1,\ k}(P;\mathbf{h}) \leqslant V_{(0)\,1,\ 1}(P;\ h_1) = 1$。同时，方程组

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= h_2 \\ x_1 + x_2 &= h_1 \end{aligned}\right\}$$

当 $x_1 + x_2 \neq 0$ 时，其解的个数也为 $O(1)$。为确认这一断言，我们注意到，由于 $h_1 = x_1 + x_2 \neq 0$，有

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = h_2/h_1 \quad \text{and} \quad x_1 + x_2 = h_1,$$

因此

$$h_2/h_1 = x_1^2 - x_1(h_1 - x_1) + (h_1 - x_1)^2 = 3x_1^2 - 3x_1h_1 + h_1^2.$$

这个二次方程关于 x_1 至多有 2 个解，每个解都唯一确定$x_2 = h_1 - x_1$。因此，在这两种情形下，我们都有 $V_{(0)\,k+1-2j,\ k}(P;\mathbf{h}) = O(1)$，而估计 (4.7) 随即给出界 $V_{(j)\,k+1,\ k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{j+\varepsilon}$。因此，当 $2j \in \{k-1,k\}$ 时，引理的结论也随之成立。

而当 $0 \leqslant 2j \leqslant k-2$ 时，我们则采用更精巧的方法。舍弃 (4.1) 中最高次方程所提供的信息后，我们便可由关系式 (4.7) 得到如下估计

$$V^{(j)}_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^j V^{(0)}_{k+1-2j,k-2j}(P;\mathbf{h}') \quad (0 \leqslant j \leqslant \tfrac{1}{2}(k-2)), \tag{4.8}$$

其中我们记

$$\mathbf{h}' = (h_1,\dots,h_{k-2j}). \tag{4.9}$$

令 $\kappa = k - 2j$，并考察上界 (4.8) 中出现的表达式 $V_{(0)\,\kappa+1,\kappa}(P;\mathbf{h}')$。通过令以下表达式来定义多项式 $t_j = t_j(\mathbf{x})$：

$$t_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\kappa-1} x_i^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant \kappa).$$

于是由 Br¨udern 与 Robert [2, 引理 1]可知，存在一个非零多项式 $\Upsilon(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_\kappa]$ 具有如下性质：

$$\Upsilon(t_1(\mathbf{x}), \dots, t_\kappa(\mathbf{x})) = 0. \tag{4.10}$$

正如 [2, 第 227], 页所指出的，该恒等式也以另一种形式出现在佩龙 [4, 定理 1]的工作中。此外， [2, 第 227]页的讨论表明， $\Upsilon(\mathbf{z})$ 的加权次数等于 $\kappa(\kappa+1)/2$，其含义是：在 $\Upsilon(\mathbf{z})$ 的每一个形如

$$c_{\boldsymbol{\alpha}} z_1^{\alpha_1} \cdots z_\kappa^{\alpha_\kappa},$$

其中 $c_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{Z}$ 且 $\alpha_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant \kappa)$，则有

$$\sum_{i=1}^{\kappa} (2i-1)\alpha_i = \kappa(\kappa+1)/2. \tag{4.11}$$

接下来，我们定义多项式

$$\tau_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\kappa+1} x_i^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant \kappa).$$

这些方程

$$\sum_{i=1}^{\kappa+1} x_i^{2j-1} = h_j \quad (1 \leqslant j \leqslant \kappa) \tag{4.12}$$

现在变为 $\tau_j(\mathbf{x}) = h_j$ $(1 \leqslant j \leqslant \kappa)$。根据 [2], 中围绕方程(5)的讨论，我们通过(4.10)发现，当进行特殊化 $x_\kappa + x_{\kappa+1} = 0$时，则有

$$\Upsilon(\tau_1(\mathbf{x}), \dots, \tau_\kappa(\mathbf{x})) = \Upsilon(t_1(\mathbf{x}), \dots, t_\kappa(\mathbf{x})) = 0,$$

因而多项式 $\Upsilon(\tau_1(\mathbf{x})$……， $\tau_\kappa(\mathbf{x}))$可被 $x_\kappa + x_{\kappa+1}$整除。对称论证表明，每当 $1 \leqslant i < j \leqslant \kappa + 1$时， $x_i + x_j$ 同样是一个因式。鉴于关系式(4.11)，我们推断存在一个非零整数 $C = C(\kappa)$，其具有如下性质：

$$\Upsilon(\tau_1(\mathbf{x}), \dots, \tau_\kappa(\mathbf{x})) = C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \kappa+1} (x_i + x_j).$$

When变量 x_1，……， $x_{\kappa+1}$ 满足(4.12)时，因此可得one h as

$$C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \kappa+1} (x_i + x_j) = \Upsilon(h_1, \dots, h_\kappa). \tag{4.13}$$

回想我们在 (4.9) 中对 $\mathbf{h}'$ 的定义，并假设 $\Upsilon(\mathbf{h}') = 0$。那么由 (4.13) 可知，对于某些指标 i 和 j，有 $x_i + x_j = 0$ $1 \leqslant i < j \leqslant \kappa + 1$。这一结论与 $V_{(0)\,\kappa+1,\kappa}(P;\mathbf{h}')$ 的定义相矛盾，因为 (4.12) 中计入的任何解都……

该量的类型为 0。事实上，这一矛盾表明，不可能有$\Upsilon(\mathbf{h}')=0$。

因此，我们可以在假设 $\Upsilon(\mathbf{h}')\neq 0$的前提下继续讨论。于是，由于 $\Upsilon(\mathbf{z})$的加权次数为 $\kappa(\kappa+1)/2$，我们看到 $|\Upsilon(\mathbf{h}')|\ll P^{\kappa(\kappa+1)/2}$，从而由除数函数的一个初等估计可知，存在 $O(P^{\varepsilon})$种可能的整数 $d_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant \kappa+1)$选择，使得它们具有如下性质：

$$x_i+x_j=d_{ij}\quad (1\leqslant i<j\leqslant \kappa+1).$$

固定这些整数 $d_{ij}\,(1\leqslant i<j\leqslant \kappa+1)$的任意一种这样的选择。由于对 $1\leqslant i\leqslant \kappa+1$，有

$$\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant \kappa+1\\ j\neq i}}(x_i+x_j)=(\kappa-1)x_i+\sum_{j=1}^{\kappa+1}x_j=(\kappa-1)x_i+h_1,$$

我们看到

$$(\kappa-1)x_i=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant \kappa+1\\ j\neq i}}d_{ij}-h_1.$$

我们可以假定 $\kappa\geqslant 2$。因此，对 $1\leqslant i\leqslant \kappa+1$而言，整数 x_i 由$\mathbf{h}'$以及我们对$\mathbf{d}$的选择所确定，并且可以推知 $V_{(0)\,\kappa+1,\kappa}(P;\mathbf{h}')\ll P^{\varepsilon}$。

我们已经证明，在所有情况下，均有

$$V^{(0)}_{\kappa+1,\kappa}(P;\mathbf{h}')\ll P^{\varepsilon}.$$

结合我们此前对 $2j\in\{k-1,k\}$ 情形的分析，回顾（4.8）即可得出引理的结论。□

有了引理 4.1，我们现在可以完成定理 1.5 和定理 1.6 的证明。

定理 *1.5* 的证明。设 $\eta\in(0,1)$，且 r 是一个非负整数，并进一步假设 $\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^k$ 是一个系数元组，满足$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})>P^{r+\eta}$。于是由（4.6）可知

$$P^{r+\eta}<U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})\ll P^{I_k(\mathbf{h})+\varepsilon},$$

因此 $I_k(\mathbf{h})\geqslant r+1$。这个下界保证，在$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})$计数的某个元组 $\mathbf{x}$ 中，其类型至少为 $r+1$。于是可以重新标记变量，使得

$$x_{2i-1}+x_{2i}=0\quad (1\leqslant i\leqslant r+1).$$

当然，当 $2r+2>k+1$时这是不可能的。参照 (4.1)，我们发现存在整数 a_i，使得具有 $|a_i|\leqslant P(1\leqslant i\leqslant k-2r-1)$ 的性质：

$$h_j=\sum_{i=1}^{k-2r-1}a_i^{2j-1}\quad (1\leqslant j\leqslant k).$$

由于 $I_k(\mathbf{h})\geqslant r+1$，此外，由 (4.5) 可知$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})\gg P^{r+1}$。取具有性质$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})>P^{r+\eta}$（对某个 $\eta>0$ 成立）的最大 r，我们推知

$$P^{r+1}\ll U_{k+1,k}(P;\mathbf{h})\leqslant P^{r+1+\eta}.$$

由于 η 可以任意小，我们得出 $P^{r+1} \ll U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{r+1+\varepsilon}$。至此，我们已验证定理 1.5 的所有结论。□

接下来，我们转向证明系数元组 $\mathbf{h}$ 中的结构蕴含精确稀疏性估计这一问题。

定理*1.6*的证明。 按照定理1.6的陈述定义 $r = r_0(\mathbf{h})$，并假设整数 $a_1, \dots, a_r$ 满足 $|a_i| \leqslant P(1 \leqslant i \leqslant r)$和方程(1.8)。回顾定理陈述中 $\tau = \tau(k;\mathbf{h})$的定义。于是，鉴于估计(4.5)和(4.6)，只要确认$I_k(\mathbf{h}) = \tau(k;\mathbf{h})$，定理的证明便告完成。接下来注意到，由(1.8)可知，任何形如$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{k+1-r}, a_1, \dots, a_r)$的$(k+1)$元组$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{k+1}$，若满足方程

$$\sum_{i=1}^{k+1-r} x_i^{2j-1} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

是（4.1）的一个解。显然，任取 $x_1, \dots, x_{k+1-r}$，其中 $x_{2i-1} + x_{2i} = 0$for $1 \leqslant i \leqslant \tau$，并在 $k+1-r$ 为奇数时补上 $x_{2\tau+1} = 0$，便可得到这样的解。因此， $I_k(\mathbf{h}) \geqslant \tau$。同样显然，不可能存在类型超过 τ 的解，因为这将意味着存在一个如（1.8）所示的 $\mathbf{h}$ 表示，但满足 $r = k+1-2(\tau+1) < r_0(\mathbf{h})$，这与 $r_0(\mathbf{h})$ 隐含的最小性相矛盾。因此，如所声称的， $I_k(\mathbf{h}) = \tau(k;\mathbf{h})$，定理的结论也随之成立。□

最后，我们转向推论 1.7 的证明。

推论 *1.7* 的证明。设 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ 且 $1 \leqslant t \leqslant k$。我们首先注意到，只需在 $\lceil (k+1)/2 \rceil \leqslant t \leqslant k$ 的情形下证明推论的结论，便可将其推广至 $1 \leqslant t \leqslant k$ 的一般情形。为确认这一点，设 t 是一个满足 $1 \leqslant t < \lceil (k+1)/2 \rceil$的整数。考虑 $s = 2t+2$ 且 $x_{2t+1} = -x_{2t+2}$ 的情形下方程组（1.5）的解，我们可知

$$PU_{2t,k}(P;\mathbf{h}) \ll U_{2t+2,k}(P;\mathbf{h}). \tag{4.14}$$

通过反复应用这一关系，可以得出，只要已知

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{T-1+\varepsilon} \quad (\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}), \tag{4.15}$$

存在某个整数 T 满足 $T \geqslant \lceil (k+1)/2 \rceil$，那么便可推出

$$U_{2t,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{t-T} \cdot P^{T-1+\varepsilon} \ll P^{t-1+\varepsilon} \quad (1 \leqslant t \leqslant T).$$

这证实了我们的断言。

接下来我们着手证明 $\lceil (k+1)/2 \rceil \leqslant T \leqslant k$ 的上界 (4.15)。我们注意到

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) = \sum_{|x_{k+2}| \leqslant P} \cdots \sum_{|x_{2T}| \leqslant P} U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}'), \tag{4.16}$$

其中我们记

$$h_j' = h_j - (x_{k+2}^{2j-1} + \ldots + x_{2T}^{2j-1}) \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

令 $\eta > 0$ 任意小，并假设 $\mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^k$ 是一个系数 k-元组，具有如下性质：对于某个非负整数 r，有

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') > P^{r+\eta}. \tag{4.17}$$

我们将 $r = r(\mathbf{h}')$ 取为具有此性质的最大值，并注意到，根据定理 1.5，有 $0 \leqslant r \leqslant (k-1)/2$。其余不等式 (4.17) 对任何此类 r 值都不成立的元组 $\mathbf{h}'$ 必须具有如下性质：

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') \ll P^{\varepsilon}. \tag{4.18}$$

注意，当 (4.17) 在 $0 \leqslant r \leqslant (k-1)/2$ 下成立时，由定理 1.5 也可推出存在整数 a_i，满足 $|a_i| \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant k-1-2r)$，且

$$h_j - (x_{k+2}^{2j-1} + \ldots + x_{2T}^{2j-1}) = a_1^{2j-1} + \ldots + a_{k-1-2r}^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{4.19}$$

在这些情形下，定理 1.5 表明

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') \ll P^{r+1+\varepsilon}.$$

这种类型的 $\mathbf{h}'$ 的可能选择数由 (4.19) 确定，因此该数以该方程组的整数解个数为上界

$$\sum_{i=1}^{2T-2r-2} y_i^{2j-1} = h_j \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

且满足 $|y_i| \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant 2T-2r-2)$。于是，我们由 (4.16) 与 (4.18) 得出

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{2T-k-1+\varepsilon} + \sum_{0 \leqslant r \leqslant (k-1)/2} P^{r+1+\varepsilon} U_{2T-2r-2,k}(P;\mathbf{h}).$$

利用 (4.14)，可见对于 $0 \leqslant r \leqslant (k-1)/2$，有

$$P^{r+1+\varepsilon} U_{2T-2r-2,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{1+\varepsilon} U_{2T-2,k}(P;\mathbf{h}).$$

因此，我们现在可以得出结论，当 $\lceil (k+1)/2 \rceil \leqslant T \leqslant k$ 时，有

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{T-1+\varepsilon} + P^{1+\varepsilon} U_{2T-2,k}(P;\mathbf{h}). \tag{4.20}$$

现在我们根据 k 的奇偶性分情况讨论。当 k 为奇数时，我们可以反复应用 (4.20)，从而得出

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{T-1+\varepsilon} + P^{T-(k+1)/2} U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}). \tag{4.21}$$

现在由定理 1.5 可知

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{(k-1)/2+\varepsilon}$$

除非 $h_j = 0 (1 \leqslant j \leqslant k)$。由于假设中特别排除了后一种情形，由 (4.21) 可知

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{T-1+\varepsilon} + P^{T-(k+1)/2} \cdot P^{(k-1)/2+\varepsilon} \ll P^{T-1+\varepsilon}.$$

这就证实了在 k 为奇数的情形下，(4.15) 成立。

接下来考虑 k 为偶数的情况。此时，由 (4.20) 可推得

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{T-1+\varepsilon} + P^{T-(k+2)/2} U_{k+2,k}(P;\mathbf{h}). \tag{4.22}$$

在这种情况下，我们利用以下界

$$U_{k+2,k}(P;\mathbf{h}) = \sum_{|x| \leqslant P} U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}'),$$

其中现在令

$$h_j' = h_j - x^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{4.23}$$

在这种情况下，由定理 1.5 可知

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') \ll P^{(k-2)/2+\varepsilon},$$

unless存在一个整数 a，且 $|a| \leqslant P$ 满足该方程组

$$h_j' = a^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{4.24}$$

在这种情况下，我们有

$$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') \ll P^{k/2+\varepsilon}.$$

回顾 $k \geqslant 2$，我们由方程(4.23)和(4.24)可知 $h_1 = x+a$。与先前的论证一样，我们注意到，若 $h_1 = 0$，则有 $h_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$，这与我们关于$\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$的假设相矛盾。因此 $h_1 \neq 0$，并且我们有

$$h_3/h_1 = x^2 - ax + a^2 = (x+a)^2 - 3a(a+x) + 3a^2 = h_1^2 - 3ah_1 + 3a^2.$$

这把 a 确定到至多相差一个二次方程根的可能选取，从而也经由方程 $h_1 = x+a$确定 x。因此，在$U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') > P^{(k-2)/2+\eta}$对某个 $\eta > 0$成立的情形中，变量 a 和 x有 $O(1)$种选择。于是

$$U_{k+2,k}(P;\mathbf{h}) = \sum_{|x| \leqslant P} U_{k+1,k}(P;\mathbf{h}') \ll P \cdot P^{(k-2)/2+\varepsilon} + 1 \cdot P^{k/2+\varepsilon} \ll P^{k/2+\varepsilon}.$$

将这一估计代入(4.22)，我们得出

$$U_{2T,k}(P;\mathbf{h}) \ll P^{T-1+\varepsilon} + P^{T-(k+2)/2+\varepsilon} \cdot P^{k/2+\varepsilon} \ll P^{T-1+2\varepsilon}.$$

这证实了 k 为偶数时的情形下的 (4.15)。

鉴于本论证开头的初步讨论，推论的证明至此完成。□

References

[1] J. Brandes 和 K. Hughes，《关于非齐次 Vinogradov 系统》，《澳大利亚数学会通报》**106**（2022），第 3 期，396–403 页。[2] J. Br¨udern 和 O. Robert，《与奇数次牛顿和相关的稀少性估计》，Mathematika**58**（2012），第 2 期，225–235 页。[3] S. T. Parsell 和 T. D. Wooley，《一个拟稀少性问题》，《密歇根数学杂志》**50**（2002），第 3 期，461–469 页。.[4] O. Perron，《论幂和与 P¨olya 的一个定理之间的依赖关系》，《数学杂志》**63**（1955），19–30 页。[5] T. D. Wooley，《关于对称对角方程的注记》，《以马尔可夫谱为重点的数论》（犹他州普罗沃，1991），编者：A. D. Pollington 和 W. Moran，Dekker，纽约，1993 年，第 317–321 页。[6] T. D. Wooley，《非齐次三次 Vinogradov 系统中的次凸性》，《伦敦数学会杂志》**107**（2023），第 2 期，798–817 页。[7] T. D. Wooley，《非齐次 Vinogradov 方程组中的次凸性》，Quart J. Math. **74**（2023），第 1 期，389–418 页。

Mathematical Sciences, University of Gothenburg and Chalmers Institute of Technology, 412 96 Göteborg, Sweden电子邮箱地址：brjulia@chalmers.se

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, West Lafayette,IN 47907-2067, USA电子邮箱地址：twooley@purdue.edu