arXiv:2602.02926v1 [math.OA] 2 Feb 2026

拓扑自由非豪斯多夫群胚

LISA ORLOFF CLARK[a]、RYAN THOMPSON[a]、*和 ILIJA TOLICH[a]

[a]惠灵顿维多利亚大学数学与统计学院，惠灵顿邮政信箱 *600*，惠灵顿 *6140*，新西兰

Abstract. 我们研究控制 ´étale 群胚中各向同性行为的三个条件，以及在附加第二可数性和豪斯多夫性假设下它们之间的关系。我们考察了一些例子，表明这些性质彼此不同。在不采用选择公理的情况下，基于策梅洛–弗兰克尔公理，我们随后研究了拓扑自由性的一种等价刻画。这一刻画最初由 Anantharaman-Delaroche 提出，并在非豪斯多夫情形下进行考察。最后，我们证明贝尔纲定理与一个 ´étale 群胚定理之间的等价性，以及它们与选择公理其他弱化形式之间的类似等价性。

1. Introduction

´Étale 群胚长期以来一直是算子代数学家研究的对象，因为它们能够为许多重要类别的 C*-代数建立模型。各向同性的性质尤其受到关注——也就是说，源与目标相同的态射所构成的集合。在 ´étale 群胚文献中，存在若干用于控制 ´étale 群胚中各向同性的存在及其性质的条件：有效、拓扑主以及拓扑自由。文献中关于这些性质的术语并不一致，因此我们的目标之一是提供一份明确无歧义的参考。对于第二可数豪斯多夫群胚，这三个条件彼此等价（定理 3.6），但一般而言它们彼此不同（见例 3.7）。

随着非豪斯多夫群胚和非第二可数群胚在 C*-代数理论及环论中的研究日益普遍，这些条件之间的细微差别也愈发显著；要确定哪种条件才是“正确”的选择并不总是显而易见，而且可能需要附加假设（参见 [20] 和 [9]）。本文提出证据，表明在 ´étale 群胚的语境下，应优先采用拓扑自由这一条件。为此，我们既以综述的方式汇集了文献中的结果，也提出了一些新的支持性结果。

我们在第 3 节首先定义三个主要条件，阐明它们之间的关系（见图 3.1），并简要讨论文献中出现的相关观点。随后我们给出例子，说明这些条件确实彼此不同（例 3.7）。在第 4节，我们给出拓扑自由条件的一个等价刻画（见命题 4.1）。这一条件

2020 数学主题分类。 03E25,22A22, 54E52.关键词和短语。 拓扑自由群胚，有效群胚，拓扑主群胚，非豪斯多夫群胚，选择公理，贝尔范畴定理

*通讯作者电子邮箱： ryan.thompson@vuw.ac.nz。本研究由新西兰皇家学会马斯登基金资助（21-VUW-156and 24-VUW-014）。

由 Anantharaman-Delaroches 于 20 世纪 90 年代在豪斯多夫且第二可数的情形下确立 [1, 命题 2。3], 并已证明在更一般的豪斯多夫情形下也很有用，例如见 [7, 引理 3。1]。

在最后一节中，我们仅在策梅洛–弗兰克尔（ZF）公理范围内工作，并考察这三种群胚条件与贝尔纲定理的各种变体之间的关系——参见推论 5.5、5.6和 5.7。这些结果改进了第一作者与 J.H Brown 在 [6], 中的工作，其中针对一种特殊情形建立了更为复杂的关系。

2. Preliminaries

2.1. 群胚。 一个群胚 是一个小范畴 G，其中每个态射都有逆。 G 的单位空间 是 G 的对象集，我们将其等同于恒等态射的集合，并记为 $G^{(0)}$。存在源 映射和值域 映射 s, r: $G \to G^{(0)}$，由 $s(\gamma) := \gamma^{-1}\gamma$ 以及 $r(\gamma) := \gamma\gamma^{-1}$ 对所有 $\gamma \in G$给出。 G 的可复合对是集合 $\{(\alpha, \beta) \in G \times G : r(\beta) = s(\alpha)\}$，我们将其记为 $G^{(2)}$。若$(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$，则我们将它们的乘积写作 $\alpha\beta$。

如果 $U, V \subseteq G$，那么我们记作

$$UV := \{\alpha\beta : (\alpha, \beta) \in U \times V \cap G^{(2)}\}. \tag{2.1}$$

如果 $u \in G$，我们将 uG 记作 $\{u\}G$，将 Gu 记作 $G\{u\}$。注意， $uGv = uG \cap Gv$。 x 处的各向同性群是 xGx，而 G的各向同性子群胚是

$$\mathrm{Iso}(G) := \bigcup_{x \in G^{(0)}} xGx.$$

如果 $x \in G^{(0)}$ 具有平凡各向同性，我们就称之为如此； $xGx = \{x\}$ ——否则，称其具有非平凡各向同性。如果 $V \subseteq G^{(0)}$，那么 G 在 V上的限制记作 $G|_V$，它是群胚 $s^{-1}(V) \cap r^{-1}(V)$。子集 $U \subseteq G$ 若满足对所有 $\gamma \in G$， $s(\gamma) \in U$ 蕴含$r(\gamma) \in U$，则称其为不变。

拓扑群胚是一个群胚 G，其配备了一个拓扑，使得乘法映射和求逆映射连续。因此，值域映射和源映射也连续。开子集 $B \subseteq G$ 若满足 $r|_B$（等价地， $s|_B$）是到 $G^{(0)}$ 的开子集上的同胚，则称为开双截集——特别地，它们是单射。拓扑群胚 G 若满足 ´*étale*，则其值域映射（等价地，源映射）是局部同胚。

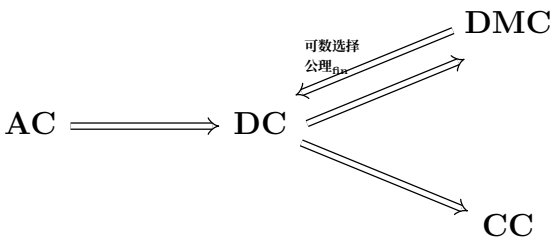
众所周知，若 G 是 ´平展的，则 $G^{(0)}$ 在 G 中是开的（见 [11, 命题3.2]），并且对所有$x \in G^{(0)}$， xG与 Gx 关于子空间拓扑都是离散的（见 [25, 推论2.4.10]）。此外，若 G 是一个 ´平展群胚，则 G具有开双射的基（见 [11, 命题3.5]）。值得注意的是，一个 ´平展群胚中所有开双截面的集合构成一个逆半群，使得对于开双截面 U 与 V，它们按(2.1)所定义的乘积本身是一个开双截集 [23, 命题2.2.3]。

2.2. 选择公理。 我们回顾选择公理的下列形式，并请读者参阅 [18] 以了解更多细节。

(i) 选择公理（**选择公理**）指出，每个集合族都存在一个选择函数。(ii) 可数选择公理（**可数选择公理**）指出，每个可数集合族都存在一个选择函数。

(iii) 可数有限选择公理（**可数选择公理$_{\mathbf{fin}}$**）指出，每个由有限集组成的可数集合族都存在一个选择函数。(iv) 依赖选择公理（**依赖选择公理**）指出，对于每个非空集合X 以及其上的每个全关系 R X，都存在一个序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 x_iRx_{i+1} 对所有 $i \in \mathbb{N}$都成立。(v) 依赖多重选择公理（**依赖多重选择公理**）指出，对于每个非空集合 X 以及其上的每个全关系 R X，都存在一个由非空有限集组成的序列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 和所有 $x \in X_i$，都存在 $y \in X_{i+1}$，使得 xRy。

下图概述了选择公理之间的关系（例如，参见 [15]）。此外，我们注意到**可数选择公理$_{\mathbf{fin}}$** 和**依赖多重选择公理** 共同推出**依赖选择公理** ([17])。



3. Groupoid isotropy conditions

现在我们介绍主要的各向同性条件，并简要讨论文献中出现过的相关概念。

定义 3.1。一个 ´étale 群胚 G 是有效的，当且仅当 Int(Iso(G)) $= G^{(0)}$。

文献中对有效群胚的定义相当一致。在某些情况下，“本质主”一词被用来表示有效（例如，见 [12] 和 [21]），但通常本质主有着不同的含义。若一个 ´étale 群胚 G 满足：只要$V \subseteq G^{(0)}$ 是一个闭不变子集（赋予子空间拓扑），那么 $G|_V$就是有效的，则称其为强有效群胚。显然，若 G 是强有效的，则它也是有效的，因为 $G^{(0)}$ 在自身中是闭且不变的（参见 [8]）。

在 [6] 中，第一作者用“有效”一词指代我们现在称为拓扑自由的性质。

定义 3.2. 若一个 ´étale 群胚 G 中，具有平凡各向同性的单位元集合在 $G^{(0)}$中稠密，则称其为拓扑主。

在 [14, 定义 3.4.6], 中，Exel 和 Pitts 将“拓扑自由”和“拓扑主”这两个表达互换使用，均指拓扑主群胚。此外，他们还引入了我们称为强拓扑主的概念，要求只要 $V \subseteq G^{(0)}$ 是闭不变的（赋予子空间拓扑），那么 $G|_V$ 就是拓扑主的。同样显然，强拓扑主蕴含拓扑主。

从纯代数的意义上说，群胚 G 是主的，当且仅当 Iso(G) $= G^{(0)}$。显然，所有主群胚都是强拓扑主的，也是拓扑主的。

定义 3.3。若一个 ´étale 群胚 G 满足 Int(Iso(G) $\setminus G^{(0)}$) $= \emptyset$，则称其为拓扑自由的。

拓扑自由性这一概念最初由 Archbold 和 Spielberg 在作用和动力系统的背景下进行研究（例如参见 [2]）。Kwa´sniewski

和 Meyer 明确将拓扑自由定义为 ´etale 群胚的一种性质，见 [19]。后来在 [20]，他们将一个 ´etale 群胚 G 称为剩余拓扑自由的，如果每当 $V \subseteq G$ 是闭的不变子集时，群胚 $G|_V$ 就是拓扑自由的。为与有效和拓扑主这两种相应的“强”性质保持一致，我们将这一性质称为强拓扑自由。

此外，Kwa´sniewski 和 Meyer 提出了 étale 群胚是*AS* 拓扑自由这一概念（AS 是 Archbold-Spielberg 的缩写），其要求是：对于任意有限个双截面$U_1, \dots, U_n \subseteq G \setminus G^{(0)}$，其并

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in G^{(0)} : xGx \cap U_i \neq \emptyset\}$$

具有空内部。

于是我们得到以下蕴含关系：

强拓扑自由 $\Rightarrow$ 拓扑自由 $\Leftarrow$ AS 拓扑自由。

关于这些条件及其相互关系的进一步讨论，请参阅 [3, 备注 2。1] 此外，在 [26], 中，作者在 Steinberg 代数单纯性的背景下讨论了这些条件，并给出了若干与自相似作用相关的 étale 群胚示例；这些示例满足其中一些条件，但并非全部。

以下这些条件之间的关系仅使用 ZF 公理即可建立。

Th定理 3.4。 设 G 是一个单位元空间为豪斯多夫的局部紧 ´*etale* 群胚 *e.* （a）如果 G是有效的，则 G是拓扑自由的。（b）如果 G 是拓扑主的，则 G 是拓扑自由的。（c）如果 $G^{(0)}$ 在 G中是闭的，且 G 是拓扑主的，则 G 是有效的（也是拓扑自由的）。

注 3.5。 当 $G^{(0)}$ 是豪斯多夫时，条件 $G^{(0)}$ 在 G 中为闭集（见定理3.4 （c）等价于 G为豪斯多夫；例如参见 [13, 命题 310]。然而，我们并未假设 $G^{(0)}$ 是豪斯多夫的。因此，按上述表述的条件弱于 G为豪斯多夫。

证明。 条目（a）可直接由定义得到。条目（b）是一个直接的逆否命题论证：假设 G 不是拓扑自由的。那么，存在某个开 $U \subseteq \mathrm{Iso}(G) \setminus G^{(0)}$，因此 $s(U)$ 是 $G^{(0)}$ 的一个开子集，其中完全由具有非平凡各向同性的单位元组成。因此， G 不是拓扑主的。

最后，第（c）项类似于 [24, 命题 3.6(i)]。我们再次通过逆否命题论证给出细节。假设 G 不是有效的。则存在$U \subseteq \mathrm{Iso}(G)$，使得 U 不包含在单位空间中。因此，$U \setminus G^{(0)}$ 是 G 的一个非空开子集，且完全由非平凡各向同性组成。由于 r 是开映射，$r(U \setminus G^{(0)})$ 是 $G^{(0)}$ 的一个开子集，完全由具有非平凡各向同性的单位元组成。因此，G 不是拓扑主的。□

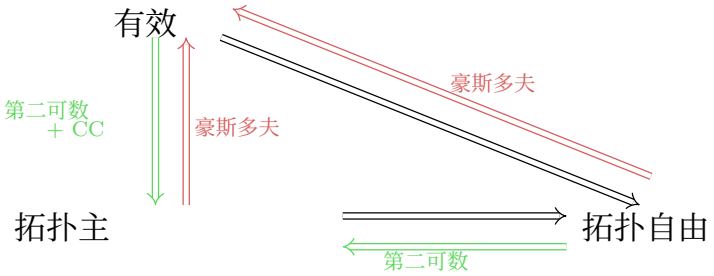
通过加入**可数选择公理**，我们得到如下定理。

Theorem 3.6. 设 G 为一个局部紧 ´平展群胚，其单位空间为豪斯多夫 *ce.*(a) 如果 G 是第二可数且有效的，那么它是拓扑主的（也是拓扑自由的）。

(b) 如果 G是第二可数且豪斯多夫的，那么这三个条件彼此等价。

证明。 项（a）由 [24, 命题 3.6(ii)] 得出。注意，**可数选择公理** 用于证明的最后一节。项（b）由项（a）和定理 3.4 得出。□

以图示形式，我们已建立如下结论：



(3.1)

例子 3.7. 我们汇集了若干例子，以说明这三个条件确实彼此不同。第一个例子广为人知，例如可参见： [10, 例 2。1]。

(a) 考虑具有标准拓扑的 $[0,1]$ τ，并令 p 为一个附加点。双头蛇群胚由以下集合给出

$$G := [0,1] \cup \{p\}$$

赋予拓扑

$$\tau_G := \tau \cup \{U \cup \{p\} - \{1\} \colon U \in \tau \text{ and } 1 \in U\}.$$

可复合对定义为

$$G^{(2)} := \{(x,x) \colon x \in [0,1]\} \cup \{(1,p),(p,p),(p,1)\},$$

并令 $pp = x$。

则 G 是一个非豪斯多夫的 ′群胚。显然， G 是拓扑主的，因为 $[0,1)$ 完全由平凡各向同性组成，并且在 $[0,1]$ 中稠密。然而， G 不是有效的，因为 $\mathrm{Iso}(G) = G$。

（b）以下例子来自 [7, 例 6.3， 6.4]。设 K 表示康托尔集，并定义拓扑乘积空间 $X :=$ （$K \cap$ （0， 1）） $\times \mathbb{T}$。我们定义实数 $\mathbb{R}$ 的连续作用，其中实数赋予离散拓扑，作用在 X 上，定义为

$$t \cdot (s, e^{i\theta}) := (s, e^{i(\theta + 2st\pi)}).$$

我们将该作用的变换群胚记为 G，其元素为 $\mathbb{R} \times$（$K \cap$（0， 1））$\times \mathbb{T}$（有关此构造的详细信息，请参见 [23]）。我们将单位空间 $G^{(0)}$ 与（$K \cap$（0， 1））$\times \mathbb{T}$ 视为相同。于是， G 是一个具有全不连通单位空间的 ′豪斯多夫群胚，但不是第二可数的。

对于每个 $x \in G^{(0)}$，各向同性群 xGx 由形如 $(\binom{n}{s}$，（x， $e^{i\theta}$)) 的元素组成，其中 $n \in \mathbb{Z}$，因此单位空间中的每个元素都有非平凡各向同性——所以， G不是拓扑主的。为证明它是有效的，设$U \subseteq G$ 为开集——我们断言 $U \setminus \mathrm{Iso}(G) \neq \emptyset$。由于 U 是开集，存在$a < b \in$(0， 1)、 $\theta \in$(0， 2π) 和 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，使得

$$\{t\} \times (((a,b) \cap K) \times \{e^{i\theta}\}) \subseteq U.$$

设 $s \in (a, b)$。若 $st \notin \mathbb{Z}$，则 $(t, (s, e^{i\theta})) \in U \setminus \mathrm{Iso}(G)$，证毕。假设 $st \in \mathbb{Z}$。那么，存在 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{t})$，使得 $s^{-1} + \varepsilon \in (a, b)$。于是，

$$st < (s+\varepsilon)t < st + 1,$$

因此 $(s+\varepsilon)t \notin \mathbb{Z}$，且 $(t, (s+\varepsilon, e^{i\theta})) \in U \setminus \mathrm{Iso}(G)$。因此，$G$ 是有效的。

(c) 以下是我们在定理 5.3 的证明中稍后使用的群胚构造的一种改造。设 $X := \mathbb{Q}$，并为每个 $x \in X$ 添入一个点 γ_x，使得 $\gamma_x \gamma_x = x$。令 $G := X \cup \{\gamma_x : x \in X\}$。设 $\mathcal{B}$ 是 X 从 $\mathbb{R}$ 继承的子空间拓扑的一个基；对每个 $x \in X$ 和 $B \in \mathcal{B}$，若 $x \in B$，令 $B_x := (B - \{x\}) \cup \{\gamma_x\}$。那么，集合

$$\mathcal{B} \cup \{B_x : x \in X\}$$

是开双截面的基，使得 G 成为一个 étale 群胚。注意，X完全由非平凡各向同性构成，因此 G 不是拓扑主的。同样，G 全部都是各向同性，所以 G 无效。然而，G 的每个开子集都与 X 相交，因此 G 是拓扑自由的。

4. Non-Hausdorff Topological Freeness

在本节中，我们给出拓扑自由性的另一种刻画。原始陈述由 C. Anantharaman-Delaroche 提出（见 [1, 命题 2.3]），并在如下附加假设下与拓扑主群胚相关联：G 既是第二可数的，又是豪斯多夫的。对于豪斯多夫有效群胚，等价性建立于 [7, 引理 3.1]。我们尚未见到有人考虑非豪斯多夫情形。当 G不假定为豪斯多夫时，单位空间在 G中可能不是闭的。这迫使我们采用与 [1, 命题 2.3]不同的方式来处理证明。

命题 4.1. 设 G 是局部紧 *étale* 群胚，并考虑以下内容。

(a) 对每一个开的 $U \subseteq G^{(0)}$ 与紧的 $K \subseteq G \setminus G^{(0)}$，存在非空开集 $V \subseteq U$，使得 $VKV = \emptyset$。(b) 群胚 G 是拓扑自由的。

则 (a) $\implies$ (b)。若 $G^{(0)}$ 是豪斯多夫的，则有 (a) $\iff$ (b)。

证明。为证明 (a) 蕴含 (b)，我们证明其逆否命题。假设 G 不是拓扑自由的。设 $W \subseteq \mathrm{Iso}(G) \setminus G^{(0)}$ 为一个非空开集。由于 G 是 étale，我们可以假设 W 是一个双截面。固定 $\gamma \in W$。利用 G 是局部紧的，我们可以找到一个包含 γ 的开集 $B \subseteq W$，使得 B 包含在一个紧集K中。不失一般性，我们可以假设 K 包含在 $G \setminus G^{(0)}$ 中——若不然，则用 $K \cap (G \setminus G^{(0)})$ 替换它。于是，由于 G 是 étale，$G \setminus G^{(0)}$ 是闭的，从而 $K \cap (G \setminus G^{(0)})$ 在 K 中是闭的，因此是紧的。

现在考虑 $r(B) \subseteq G^{(0)}$ 并固定 $u \in r(B)$。于是 $r|_B^{-1}(u) \in B \subseteq K$。由于$B \subseteq \mathrm{Iso}(G)$，我们还有 $s(r|_B^{-1}(u)) = u$。因此 $r|_B^{-1}(u) \in uKu$。所以，对于每个非空开集 $V \subseteq r(B)$，都有 $VKV \neq \emptyset$。

对于反向蕴含，假设 $G^{(0)}$ 是豪斯多夫的，并设 G 是拓扑自由的。固定一个紧 $K \subseteq G \setminus G^{(0)}$ 和一个开 $U \subseteq G^{(0)}$。由于 K 是紧的，存在有限多个开双截面 $\{B_i\}_{i=0}^n$ 使得 $K \subseteq \bigcup_{i=0}^n B_i$。我们还可以进一步假设对每个 $i \in \{0, \ldots, n\}$有 $K \cap B_i \neq \emptyset$。我们对覆盖 K所需的双截集个数使用归纳法。

对于基例，设 B 是满足 $K \subseteq B$的开双截集。若 $UKU = \emptyset$，则令 $V := U$，即完成。假设 $UKU \neq \emptyset$。我们还可以假设$U \cap B = \emptyset$，否则 $V := U \cap B$ 将满足 $VKV = \emptyset$。因此，在这些假设下， $UBU \subseteq G \setminus G^{(0)}$ 是一个非空开集。

由于 G 是拓扑自由的，我们有 $\mathrm{Int}(\mathrm{Iso}(G) \setminus G^{(0)}) = \emptyset$，因此开集 UBU并非完全由各向同性元素构成。因此，存在 $\gamma \in UBU \setminus \mathrm{Iso}(G)$，使得$u := r(\gamma) \in U$。

我们声称存在 u 的一个邻域 V，使得 $VBV = \emptyset$。令$\{V_j\}_{j\in J}$ 为包含于 U中的 u 的一个邻域基。为导出矛盾，假设对每个 $j \in J$，都存在某个 $\alpha_j \in V_j B V_j$——也就是说， $r(\alpha_j)\ s(\alpha_j) \in V_j$。由此可得 $r(\alpha_j) \to u$，因此根据 [27, 命题 1.15]，，存在一个包含于 B 中的子网$\{\alpha_{j_l}\}$，使得 $\alpha_{j_l} \to s|_B^{-1}(u) = \gamma$。由于 r 是连续的，且 $G^{(0)}$是豪斯多夫的，我们有 $r(s^{-1}|_B(u)) = s(s^{-1}|_B(u)) = u$。由于 B 是一个双截面，必有 $\gamma = s^{-1}|_B(u)$，从而 $\gamma \in \mathrm{Iso}(G)$，矛盾。因此，存在 u 的某个邻域 V满足 $VBV = \emptyset$。

对于归纳假设，假设存在 $m > 1$，使得对每一个开集 $U \subseteq G^{(0)}$ 以及每一个紧集 $K \subseteq G \setminus G^{(0)}$，只要存在覆盖 K的 m个双截集 $\{B_i\}_{i=1}^m$，就存在一个非空开集 $V \subseteq U$，使得$VKV = \emptyset$.

固定一个紧集 $K \subseteq G\setminus G^{(0)}$，并令 $\{B_i\}_{i=1}^{m+1}$为覆盖 K的 $m+1$个双截集的集合。我们将 K 划分为两个紧分支——定义

$$K_{m+1} := K \setminus \cup_{i=1}^m B_i, \qquad K_m := K \setminus B_{m+1}$$

我们看到 $K = K_{m+1} \cup K_m$ 且 K_{m+1} 是紧的，并且仅由 B_{m+1} 即可覆盖。因此，存在一个非空开集 $U' \subseteq U$，使得 $U'K_{m+1}U' = \emptyset$.

此外， $K_m := K \setminus B_{m+1}$是紧的，并且可由 m 个双截集 $\{B_i\}_{i=1}^m$覆盖。因此，存在一个非空开集 $V \subseteq U' \subseteq U$，使得 $VK_mV = \emptyset$。由于$V \subseteq U'$且 $U'K_{m+1}U' = \emptyset$，从而可得 $VKV = \emptyset$。

□

5. Analogue of the Baire Category Theorem

一个拓扑空间具有贝尔性质，是指任意可数个内部为空的闭集之并的内部也为空（见 [22, 章 8]）。在本节中，我们在不使用**选择公理**的情况下，建立贝尔空间与叶状群胚的拓扑自由性质和拓扑主性质之间关系的联系。作为推论，我们将这一联系推广到**选择公理**的各种弱化形式，包括**可数选择公理**和**依赖选择公理**。

Brown与Clark在 [6]中考察了一个特殊情形。在带有额外假设的（不必是 ´ 叶状）拓扑群胚的背景下，贝尔纲定理的某一特定表述被证明等价于一个将有效与拓扑主联系起来的陈述。特别地，所使用的关于完备度量空间的贝尔纲定理表述等价于**依赖选择公理** [16]。 [6] 中该结果的假设颇为技术化且不很自然——它们以牺牲开性为代价，优先保证值域映射与源映射的单射性。在下文中，我们牺牲单射性以换取开性。

定义 5.1. 设 G 是一个拓扑群胚。若开集 $B \subseteq G$ 满足 $r|_{B\setminus G^{(0)}}$ 是单射，则称 $B \subseteq G$ 为开 *iso*-截面。

若 $U \subseteq G^{(0)}$，则记 U^0 表示 U 在 $G^{(0)}$ 中关于子空间拓扑的闭包。若 G 是豪斯多夫的，则 $U^0 = U$；但一般而言，它们未必相等。下面的引理改编自 [6,引理 4。3]。

引理 5.2。设 G 是一个拓扑自由的 *´etale* 群胚，且 $B \subseteq G$ 是一个开 *iso*-截面。则，

(a) $r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)})$ *has empty interior;*
(b) $\overline{r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)})}^0$ *has empty interior.*

证明。对于第（a）项，我们采用反证法。假设存在一个开集 $W \subseteq r$（Iso(B）$\setminus G^{(0)}$）。则

$$r^{-1}(W) \cap B \subseteq \mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)} \subseteq \mathrm{Iso}(G) \setminus G^{(0)}.$$

由于 r 是连续的且 B 是开集，r^{-1}(W) $\cap B$ 是开集，这与 G是拓扑自由的相矛盾。

对于第（b）项，首先我们断言 r（Iso(B）$\setminus G^{((0))}$）在 r（B）中关于子空间拓扑是闭的。由于 G 是一个拓扑群胚，Iso(G）在 G中是闭的，并且由于 G 是 ´etale，$G^{(0)}$ 在 G中是开集。我们有

$$\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)} = B \cap (\mathrm{Iso}(G) \setminus G^{(0)})$$

因此 Iso(B) $\setminus G^{(0)}$ 在 B中是闭的。由于 r 在 Iso(B) $\setminus G^{(0)}$上是单射的，容易验证 r (Iso(B) $\setminus G^{(0)}$) 在 r(B) 中是闭的，正如所断言的那样。因此

$$\overline{r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)})}^0 \cap r(B) = r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)}).$$

现在我们用反证法证明（b）。假设存在一个非空开集

$$U \subseteq \overline{r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)})}^0.$$

那么 $U \cap r$(B) 是开集，因为 r 是开映射，并且包含 $U \cap r$(Iso(B) $\setminus G^{(0)}$)，所以它非空。但是，

$$U \cap r(B) \subseteq \overline{r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)})}^0 \cap r(B) = r(\mathrm{Iso}(B) \setminus G^{(0)}),$$

这与条目（a）矛盾，因此不存在这样的 U。 □

定理 5.3。设 X 是一个拓扑空间。以下条件等价：

(a) 拓扑空间 X 是贝尔空间。(b) 设 G 是一个带有 $G^{(0)} = X$ 的 ´群胚，并假设 G 有一个由开同构截面构成的可数覆盖。如果 G 是拓扑自由的，那么 G 是拓扑主的。

证明。对于（a），$\Rightarrow$（b）的论证与 [19, 命题 2。24] 以及[24, 命题 3。6]类似。假设 X 是贝尔空间，并设 G 是一个拓扑自由的、´带有 $G^{(0)} = X$的 étale 群胚。设 $\{B_n\}$ 是 G 的一个由开同构截面构成的可数覆盖。我们证明，G 中具有平凡各向同性的单位元集合在 $G^0 = X$中稠密。

对每个 $n \in \mathbb{N}$，令

$$C_n := \overline{r(\mathrm{Iso}(B_n) \setminus G^{(0)})}^0 \subseteq G^{(0)}.$$

则每个 C_n 由引理 5.2 （b）具有空内部。由于 X 是贝尔的，集合C ：$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ 也具有空内部。因此 $G^{(0)}$ 中的每个开集都与 C的补集有非平凡交。由于 $\{B_n\}$ 是一个覆盖，所有具有非平凡各向同性的单位元都包含在 C 中，因而C 的补集中的每个单位元都具有平凡各向同性。因此，具有平凡各向同性的单位元是稠密的。

为证明（b）蕴含（a），固定一个拓扑空间 X，其具有基 $\mathcal{B}$，以及一可数族闭集 $\{C_n\}$，其中每个都具有空内部。我们构造一个群胚G，如 [6, 例3.2] 中那样，它是一条广义双头蛇，我们对 C_n的每个元素附加一个头。特别地，我们令 $G^{(0)} := X$，并对每个 $x \in C_n$添加一个群胚元素 γ_x，使得 $s(\gamma_x) = r(\gamma_x)$ 且 $\gamma_x\gamma_x = x$。

为了定义 G 上的拓扑，对于每个 $x \in X$ 和每个满足 $x \in B$ 的 $B \in \mathcal{B}$，我们定义 $B_x = (B - \{x\}) \cup \{\gamma_x\}$，从而得到一个基

$$\mathcal{B} \cup \left(\bigcup_{x \in X} \bigcup_{\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}} \{B_x\} \right)$$

在该拓扑下，G 是拓扑群胚。由于每个基本开集都是双截面，G 是 ´纤维丛。我们不妨假设 $X \in \mathcal{B}$（否则，可以将其添加进去，而不改变 X 上的拓扑）。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$B_n = \bigcup_{x \in C_n} X_x.$$

显然，$r|_{B_n \setminus G^{(0)}}$ 是单射，并且作为基元素的并集，它是开集，因而 B_n 是开同构截面。因此，集合 $\{B_n\} \cup \{X\}$ 是 G 的一个由开同构截面构成的可数覆盖。

注意，G中的每个开集都与 $G^{(0)}$有非平凡交集，因此 G 是拓扑自由的，故（b）可知 G 也是拓扑主的。也就是说，具有平凡各向同性的单位元集合在 $G^{(0)}$ 中稠密；在本例中，这意味着 $C := \cup_n C_n$ 的补集是稠密的。因此，C 的内部为空，故 X 是贝尔空间。□

注 5.4.由于开双截集自动是开 iso-截面，任一第二可数 ´etale群胚都具有开同构截面的可数覆盖。然而，若一个 ´etale群胚具有开同构截面的可数覆盖，这并不意味着该群胚是第二可数的。例如，如上构造一个群胚，使得对某个 $n \in \mathbb{N}$，C_n 不可数。于是，该群胚具有开同构截面的可数覆盖，但不是第二可数的。

5.1. **贝尔范畴定理**。由于定理5.3的证明不需要任何形式的选择公理，我们建立了与选择公理各种表述之间的新等价关系。在每个推论中，定理5.3给出了条目（a）与（c）的等价性。

推论5.5. 下列各项等价：

(a) 每个第二可数完备伪度量空间都是贝尔空间，(b) **可数选择公理**，(c) 设 G 是一个 ´*étale* 群胚，且有一个由开同构截面构成的可数覆盖，使得 $G^{(0)}$ 是第二可数完备伪度量空间。若 G 拓扑自由，则它拓扑主。

证明。(a) 与 (b) 的等价性见 [4, 定理 3。4]。 □

推论 5.6。以下命题等价：

(a) 每个完备度量空间都是贝尔空间，(

b) **依赖选择公理**，

(c) 设 G 是一个 ´群胚，具有开同构截面的可数覆盖，且 $G^{(0)}$ 是一个完备度量空间。如果 G 是拓扑自由的，则它是拓扑主导的。

证明。 (a) 与 (b) 的等价性见 [5]。 □

推论 5.7。 以下各项等价：

(a) 每个紧豪斯多夫空间都是贝尔空间，(b) **依赖多重选择公理**(c) 设 G 是一个 ´*étale* 群胚，且有一个由开同构截面组成的可数覆盖，使得 $G^{(0)}$ 是紧豪斯多夫空间。若 G 拓扑自由，则它是拓扑主群胚。

证明。 (a) 与 (b) 的等价性见 [15, 推论 3]。 □

注 5.8。 一般来说，存在由开同构截面组成的可数覆盖这一条件，比存在由开双截面组成的可数覆盖这一条件更弱。然而，若 $G^{(0)}$ 在 G 中是闭的，则这两个条件等价。特别地，若 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是由同构截面组成的 G 的可数覆盖，则对每个 $i \in \mathbb{N}$，我们可以令 $D_i := B_i \setminus G^{(0)}$。于是，每个 D_i 都是开双截面，因此 $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{X\}$ 是由开双截面组成的 G 的可数覆盖。

References

[1] Claire Anantharaman-Delaroche. 源自动力系统的纯无限 C*-代数。法国数学会通报，125(2):199–225，1997。[2] Robert J. Archbold 和 Jack S. Spielberg. 离散 C*-动力系统中的拓扑自由作用与理想。爱丁堡数学学会会刊，37(1):119–124，1994。[3] Becky Armstrong、Gilles G. de Castro、Lisa Orloff Clark、Kristin Courtney、Ying Fen Lin、Kathryn McCormick、Jacqui Ramagge、Aidan Sims 和 Benjamin Steinberg. 扭曲 Steinberg 代数的重构。国际数学研究通知，2023(3):2474–2542，2023。[4] Herschel L. Bentley 和 Horst Herrlich. 可数选择与伪度量空间。拓扑学及其应用，85(1-3):153–164，1998。[5] Charles E. Blair. 贝尔纲定理蕴含依赖选择原理。波兰科学院通报 *S* ´系列：数学、天文学与物理科学，25(10):933–934，1977。[6] Jonathan Brown 和 Lisa Orloff Clark. 贝尔纲定理的群胚表述。基础数学，226(2):123–130，2014。[7] Jonathan Brown、Lisa Orloff Clark、Cynthia Farthing 和 Aidan Sims. 与 ´étale 群胚相关的代数的单纯性。半群论坛，88(2):433–452，2014。[8] Lisa Orloff Clark、Cain Edie-Michell、Astrid an Huef 和 Aidan Sims. 强有效群胚的 Steinberg 代数的理想及其在 Leavitt 路径代数中的应用。美国数学会汇刊，371(8):5461–5486，2019。[9] Lisa Orloff Clark、Ruy Exel、Enrique Pardo、Aidan Sims 和 Charles Starling. 与非豪斯多夫群胚相关的代数的单纯性。美国数学会汇刊，372(5):3669–3712，2019。[10] Lisa Orloff Clark 和 Joel Zimmerman. 一种 Steinberg 代数方法，用于处理 ´étale 群胚 C^*-代数。算子理论杂志，91(2):349–371，2024。[11] Ruy Exel. 逆半群与组合 C*-代数。新系列，39(2):191–313，2008。[12] Ruy Exel. 非豪斯多夫 ´étale 群胚。美国数学会会刊，139(03):897–897，2011。[13] Ruy Exel 和 Enrique Pardo. 逆半群的紧群胚。半群论坛，92(1):274–303，2016。[14] Ruy Exel 和 David R. Pitts. 刻画非豪斯多夫C*-*étale* 群胚的 *C**-代数 ´，数学讲义第 2306 卷。Springer，Cham，2022。

[15] Jules Fossy 和 Marianne Morillon. 贝尔纲性质与若干紧性概念。伦敦数学学会杂志（第二辑），57(1):1–19，1998。[16] Robert Goldblatt. 贝尔纲定理与依赖选择公理在逻辑基础中的作用。符号逻辑杂志，50(2):412–422，1985。[17] Horst Herrlich. 选择公理，数学讲义第 1876 卷。数学讲义。Springer 出版社，柏林／海德堡，2006。[18] Horst Herrlich 和 Kyriakos Keremedis. 贝尔纲定理与选择公理。拓扑学及其应用，108(2):157–167，2000。[19] Bartosz K. Kwa´sniewski 和 Ralf Meyer. 逆半群作用的本质交叉积：单纯性与纯无限性。《数学文献》，26(2021):271–335，2021。[20] Bartosz K. Kwa´sniewski 和 Ralf Meyer. 逆半群交叉积的理想结构与纯无限性。非交换几何杂志，17(3):999–1043，2023。[21] Hiroki Matui. 全不连通空间上 ´étale 群胚的同调与拓扑全群。伦敦数学学会会刊，104(1):27–56，2012。[22] James R. Munkres. 拓扑学。普伦蒂斯霍尔公司，2000。[23] Alan L. T. Paterson.群胚、逆半群及其算子代数。1999。[24] Jean Renault. C^*-代数中的 Cartan 子代数。爱尔兰数学学会通报，(61):29–63，2008。[25] Aidan Sims. 豪斯多夫 étale 群胚及其 C*-代数。2018。[26] Benjamin Steinberg 和 N´ora Szak´acs. 逆半群代数与 ´étale 群胚代数的单纯性。《数学进展》，380(799419):107611，2021。[27] Dana P. Williams. *C** 代数的交叉积 C^*，数学调查与专著第 134 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2007。

电子邮箱,L.O.Clark: lisa.orloffclark@vuw.ac.nz电子邮箱,R. Thompson: ryan.thompson@vuw.ac.nz电子邮箱,
I. Tolich: ilija.tolich@vuw.ac.nz