arXiv:2602.02933v1 [math.GR] 3 Feb 2026

非标准自由群

ALEXEI MIASNIKOV 和 ANDREY NIKOLAEV

Abstract. 在 $\mathbb{B}$ 中对结构 $\mathbb{A}$进行解释，可以从与 $\mathbb{B}$初等等价的结构出发，构造出与 $\mathbb{A}$ 初等等价的结构。特别是，在 $\mathbb{N}$ 中解释自由群，使我们能够引入并研究一类初等自由群，我们称之为非标准自由群。更一般地，对于一大类群，我们引入由在 $\mathbb{N}$中的解释所产生的非标准模型。我们利用解释证明，在温和的假设下，群的超幂可以视为该群的非标准模型。这使我们能够根据自然数集的非标准模型的结构来描述超幂的结构，从而为 Malcev 提出的一个长期未解问题提供了新的见解。我们还介绍了非标准组合群论的基本概念，例如非标准子群、非标准正规子群和非标准群表示。

Contents

1. 动机与主要思想 2 1.1. 一阶分类与初等等价 2 1.2. 超幂与非标准群 3 2. 可解释性 4 2.1. 解释 4 2.2. 双解释 5 3. 非标准元组 6 3.1. 算术的非标准模型 6 3.2. 列表超结构 7 3.3. 列表超结构在算术中的解释 8 3.4. 非标准列表超结构 10 3.5. 非标准元组的性质 11 3.6. 给定结构上的非标准元组与弱二阶逻辑。13 4. 自由群 16 5. 非标准自由群的结构与基本性质 18 5.1. 非标准自由群的子群。19 5.2. 非标准自由群的性质。20 6. 非标准群 21 6.1. 可定义同态 22 6.2. 非标准表示 23 参考文献 24

Key words and phrases. 双重可解释性、丰富结构、非标准模型、皮亚诺算术、多项式。

1. Motivation and main ideas

设 G 是一个可数群，其乘法并非极其古怪；例如，存在一个生成集，使得字问题是可判定的、递归可枚举的，或者仅仅是算术的，也就是说，它由算术公式定义（在算术中可定义）。那么， G可通过某个解释 Γ在 $\mathbb{Z}$ 中解释，记作 $G \cong \Gamma(\mathbb{Z})$（相关定义见第 2.1 节）。若 $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$ ，则 Γ 在 $\mathbb{Z}$中解释出一个群 $G = \Gamma(\mathbb{Z})$，我们称之为 G的非标准模型。若 G 是有限生成的，那么群 $\Gamma(\mathbb{Z})$不依赖于具体的解释 Γ；因此，若 $G \cong \Gamma(\mathbb{Z})$且 $G \cong \Delta(\mathbb{Z})$，那么对于任意环 $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$ ，都有 $\Gamma(\mathbb{Z}) \cong \Delta(\mathbb{Z})$（定理 2.2）。在这种情况下， G 的非标准版本完全由 G 和 $\mathbb{Z}$决定，所以归根结底讨论的是群，而非解释。

有鉴于此，我们将 $\Gamma(\mathbb{Z})$记作 $G(\mathbb{Z})$或 G。若 G 不是有限生成的，我们仍将 $\Gamma(\mathbb{Z})$记作 $G(\mathbb{Z})$或 G ，只要解释 Γ 无关紧要或可由上下文明确得知。

核心思想是，非标准群 $G(\mathbb{Z})$ 是 G 最接近的版本：一方面，它们保留了我们想要研究的 G 的主要性质；另一方面，它们又足够一般，使得 G 的许多非本质特征在其中消失。此外，由于 $G(\mathbb{Z}) = \Gamma(\mathbb{Z})$，我们可以从 Γ 和 $\mathbb{Z}$ 中看出并还原这些本质性质所依赖的一般构造和框架。这有助于我们通过考察 G 的各种非标准模型，更好地理解它，并为研究关于 G 的各种开放问题提供一种通用方法。有些问题可以直接借助非标准群解决；对于另一些问题，非标准群则能指明寻找解答的方向以及应使用何种工具。本文将把注意力限制在前一类问题上，下面将在第 1.1 节和第 1.2 节中加以说明。

当 G 是一个自由群 $G = F$时，我们将相应的非标准模型 $\Gamma(\mathbb{Z})$称为非标准自由群，并记作 F。在许多方面，它的表现与标准自由群 F相似，关键区别在于， F “天然地”允许某些无限乘积。为此，主要工具是所谓的非标准列表超结构（见第3.4节）。这一特性延伸到群论中的许多其他常见概念，促使我们引入非标准子群、非标准群表示和第一同构定理；这些内容将在第5节和第6节中探讨。

1.1. 一阶分类与初等等价。 用 $Th(G)$表示 G 在群论语言 $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$中的一阶理论。本项目的初衷之一，是发展一种通用方法，以代数方式刻画所有与给定群 G初等等价的群 H 。这就是著名的塔斯基群的一阶分类问题。

由解释的性质（定理 2.1），G 适用于任意 $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$。然而，一般来说， $Th(G)$ 的模型并非全都是 G的非标准版本。例如，自由非阿贝尔群 F 或非阿贝尔无挠双曲群 G便是如此（这源于塔斯基问题对这些群 [7, 20]的解决）。尽管如此，非标准群 $G(\mathbb{Z})$ 仍是 $Th(G)$ 的重要模型；与 $Th(G)$ 的其他所有模型相比，它们与 G “更加等价”。事实上，在一种比群语言中的一阶逻辑强得多的逻辑中，它们与 G 等价。这是一种新型逻辑，值得专门研究。我们将在

第 3.6 节中对此作简要介绍，尤其是第3.6.1小节。

此外，事实证明， G的非标准模型提供了一种理解 Th的所有其他模型（G）的方法。事实上，首先，与非标准~~算术一样，群 G 嵌入每个 G（$\mathbb{Z}$）中，作为 G（$\mathbb{Z}$）的标准部分，且该嵌入是初等的（定理 6.2）。其次，每个 H Th（G）的模型都是某个与其具有相同基数的非标准模型 G（$\mathbb{Z}$）的初等子模型（定理 6.3）。第三，在广义~~连续统假设下， Th（G）的每个饱和模型都是某个 $\mathbb{Z}$算术饱和模型的非标准版本 G（$\mathbb{Z}$）（定理 6.4）。

~~注意，如果~$\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$，则非标准自由群 $F = F$（$\mathbb{Z}$）不是有限生成的。事实上，与自由群初等等价的有限生成群必须是双曲的，因此具有循环中心化子。然而，很容易看出，在 F中，中心化子同构于 $\mathbb{Z}^+$ 加法群（命题5.2），而该群不是循环的（见第3.1节）。

受 [10] 中关于与自由群 F初等等价的可数群所提出的问题启发，论文 [12] 描述了具有循环中心化子的群 $G \equiv F$，并给出了一个例子 $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}^+)$：该群与 F 初等等价~，但具有非循环中心化子。所有非标准自由群 F 都是具有非循环中心化子的群的全新~例子。事实上，由于 F中的所有中心化子都是非循环的，因此可知上述群 $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z} + \mathbb{Q}^+)$ 并非非标准自由群。

1.2. 超幂与非标准群。 另一个研究动机是解决 Malcev 提出的一个老问题：给定一个非阿贝尔自由群 F、一个集合 I，以及一个定义在 I 上的非主超滤子 D，描述超幂F^I/D的代数结构。当时，这个问题最终通过 Keisler–Shelah定理（两个群初等等价，当且仅当它们的非平凡超幂同构）与塔斯基问题联系起来，即两个非阿贝尔自由群（例如 F_2 和 F_3）是否初等等价。后来，人们也对其他群 G 提出了这个问题。如果 G是“有限维”的，例如是某个域 K （或某个适当的环 R）上的代数，那么G^I/D 仍是具有相同代数框架的代数，只不过底域换成了 K^I/D （或底环换成了 R^I/D），因此我们知道 G^I/D的代数结构。这一思路成功应用于经典矩阵群或幂零群，但对 F这类“无限维”群，或非阿贝尔无挠双曲群则行不通。然而，若 $G \simeq \Gamma$（$\mathbb{Z}$）对某个 Γ成立，那么$G^I/D \cong G$（$\widetilde{\mathbb{Z}}$），其中$\widetilde{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^I/D \equiv \mathbb{Z}$；在这里， Γ对 G起着“一阶代数框架”的作用。因此， G^I/D 是 G 的一个非标准模型，并具有一些源自环 $\mathbb{Z}^I/D$的额外性质。这为研究将 G^I/D 视为 G（$\widetilde{\mathbb{Z}}$）时的代数结构问题提供了一种方法。特别是，回到 Malcev 最初提出的问题，我们可以看到，$F^I/D \cong F$（$\widetilde{\mathbb{Z}}$）是一个以 X为基的非标准自由群（见第 4 节），正是本节前面引入的那个对象。这使我们能够像描述一般非标准模型那样描述 F^I/D，见定理 4.1、4.1、6.1；事实上，很容易看出，同样的方法也适用于一大类代数结构，见定理 6.5。

2. Interpretability

本节讨论结构的各种可解释性，其中一些众所周知，另一些则是新的。它们各自有不同的用途。我们主要关注正则可解释性，因为它很适合经典一阶分类问题。

设 L为一个语言（签名），它带有一组函数（运算）符号$\{f,\dots\}$及其元数 $n_f \in \mathbb{N}$、一组常元符号 $\{c,\dots\}$，以及一组关系（或谓词）符号 $\{R,\dots\}$及其元数$n_R \in \mathbb{N}$。我们记 $f(x_1,\dots,x_n)$或 $R(x_1,\dots,x_n)$，以表明 $n_f = n$或 $n_R =n$。群的标准语言 $\{\cdot, {}^{-1}, e\}$ 包含乘法二元运算的符号 $\cdot$、求逆一元运算的符号 $^{-1}$ 以及群单位元的符号 e；含幺环的标准语言是 $\{+,\cdot,0,1\}$。常元符号 c 在集合 A 中的解释是一个元素 $c^A \in A$。对于函数符号 f，其在 A中的解释是一个函数 f^A: $A^{n_f} \to A$；对于谓词 R，其解释是一个集合 $R^A \subseteq A^{n_R}$。

语言 L中的代数结构（一个 L-结构），其基集为A，记作 $\mathbb{A} = \langle A;\ L\rangle$，或简记为 $\mathbb{A} = \langle A;\ f,\dots,R,\dots,c,\dots\rangle$，或记作$\mathbb{A} = \langle A;\ f^A,\dots,R^A,\dots,c^A,\dots\rangle$。对于给定的结构 $\mathbb{A}$，用 $L(\mathbb{A})$表示其语言 $\mathbb{A}$。

我们通常用小写字母 $x,y,z,a,b,u,v,\dots$表示变量，而在相同符号上加横线 $\bar{x},\bar{y},\dots$则表示相应变量构成的元组，例如 $\bar{x} =(x_1,\dots,x_n)$；此外，$\bar{\bar{x}}$ 是由元组组成的元组 $\bar{\bar{x}} =(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m)$，其中$|\bar{x}_i| = n$。

默认情况下，我们在语言 $\{+,\cdot,0,1\}$ 中考察集合 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$。值得注意的是，算术 $\mathbb{N}$ 中的可定义集，即所谓的算术集，已得到充分研究。特别是，已知 $\mathbb{N}$ 中的每个可计算枚举集都是可定义的。整数环 $\mathbb{Z}$ 也有同样的性质。此外，$\mathbb{N}$（或 $\mathbb{Z}$，或 $\mathbb{Q}$）中的每个元素在 $\mathbb{N}$（$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$）中都是绝对可定义的，因此 $\mathbb{N}$（$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$）中的每个可定义集都是绝对可定义的。

2.1. 解释。

定义 2.1。 代数结构 $\mathbb{A} = \langle A;\ f,\dots,R,\dots,c,\dots\rangle$ 在代数结构 $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$ 中是**0-可解释**（或绝对可解释，或无参数可解释）的，如果满足以下条件：

1) 存在一个在 $\mathbb{B}$ 中 $A^* \subseteq B^n$ 0-可定义的子集，**2)** 存在一个在 $\mathbb{B}$ 中 $\sim$在 A^* 0 上的可定义等价关系，**3)** 存在解释 f^A，……，R^A，……，c^A，…… ，它们将符号 f，……，R，……，c，…… 解释在商集 $A^*/\sim$ 上，且都在 $\mathbb{B}$ 中 0-可定义；**4)** 结构 $\mathbb{A}^* = \langle A^*/\sim;\ f^A,\dots,R^A,\dots,c^A,\dots\rangle$ 与 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}$ 的 L-同构。

定义 2.1 中的结构 $\mathbb{A}^*$ 可由语言 $L(\mathbb{B})$ 中的以下公式集完全描述：

$$\Gamma = \{U_\Gamma(\bar{x}), E_\Gamma(\bar{x},\bar{x}'), Q_\Gamma(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{t_Q}) \mid Q \in L(\mathbb{A})\}, \tag{1}$$

其中，$\bar{x}$、$\bar{x}'$ 和 $\bar{x}_i$ 是由变量组成的 n-元组。也就是说，U_Γ 在 $\mathbb{B}$ 中定义了一个集合 $A_\Gamma =U_\Gamma(B^n) \subseteq B^n$（定义 2.1 中的集合 A^*），E_Γ 在 A_Γ 上定义了一个等价关系 $\sim_\Gamma$（定义 2.1 中的等价关系 $\sim$），而公式 Q_Γ 定义了常数、函数和谓词 $Q \in L(\mathbb{A})$在商集 $A_\Gamma/\sim_\Gamma$ 上的图的原像，使得结构 $\Gamma(\mathbb{B}) = \langle A_\Gamma/\sim_\Gamma;\ L(\mathbb{A})\rangle$ 与

同构。这里，对于常数 $c \in L(\mathbb{A})$， $t_c = 1$；对于函数$f \in L(\mathbb{A})$， $t_f = n_f + 1$；对于谓词 $R \in L(\mathbb{A})$， $t_R = n_R$。注意，在结构 $\Gamma(\mathbb{B})$中，我们将常数$c \in L(\mathbb{A})$解释为 $\mathbb{B}$ 中由公式 $c_\Gamma(\bar{x})$定义的某个元组 $b_c \in A_\Gamma$的 $\sim_\Gamma$-等价类。数 n称为 Γ的维数，记作 $n = \dim\Gamma$。

我们将 Γ称为该解释$\mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$的解释代码，或简称代码。有时，我们把解释 $\mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$ 与其代码 Γ视为同一事物。我们也可以写作 $\mathbb{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$ 或 $\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{B})$，表示 $\mathbb{A}$ 可借助 Γ在 $\mathbb{B}$ 中解释。

我们用 μ_Γ 表示一个满射 $A_\Gamma \to A$，它导出一个同构$\bar{\mu}_\Gamma$: $\Gamma(\mathbb{B}) \to \mathbb{A}$。我们将 μ_Γ 称为解释 Γ的坐标映射。请注意，这样的 μ_Γ 可能并不唯一，因为 $\bar{\mu}_\Gamma$ 只在模去$\mathbb{A}$的一个自同构后才有定义。因此，有时会将坐标映射 μ_Γ 加入解释记号中：（Γ， μ_Γ）。坐标映射 μ_Γ: $A_\Gamma \to A$会在相应的笛卡尔幂上导出映射 μ_Γ^m: $A_\Gamma^m \to A^m$，我们通常将其记作 μ_Γ。

当公式 E_Γ 定义恒等关系 $(x_1 = x_1') \wedge \ldots \wedge (x_n = x_n')$ 时，满射 μ_Γ 是单射。在这种情况下，(Γ, $\bar{p}$, μ_Γ) 称为单射解释。

我们尤其关注下面这个众所周知的观察。

定理 2.1 (引理 4.4(2)， [11])。设 $\mathbb{A}$ 可在 $\mathbb{B}$ 中通过 $\mathbb{A} \cong_\sim \Gamma(\mathbb{B})$绝对解释。那么对于任意 $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}$，代数结构 $\Gamma(\mathbb{B})$ 与 $\mathbb{A}$初等等价。

注 2.1。尽管超出了本文的讨论范围，定理 2.1 仍可通过将绝对解释的要求放宽为正则解释，推广到更一般的情形。定义及详细说明请参阅 [4] 。

定理 *2.2*（非标准模型的唯一性， [4]）。设有限签名下的有限生成结构 $\mathbb{A}$ 可通过两种方式在 $\mathbb{Z}$ 中绝对解释，分别为$\Gamma_1(\mathbb{Z})$ 和 $\Gamma_2(\mathbb{Z})$。那么存在公式 $\theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$，$|\bar{x}_i| =$ 维Γ_i，其定义了一个同构 $\Gamma_1(\mathbb{Z}) \to \Gamma_2(\mathbb{Z})$。此外，若 $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$，则 $\theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 定义了一个同构 $\Gamma_1(\mathbb{Z}) \to \Gamma_2(\mathbb{Z})$。

若 $\mathbb{A}$ 如定理 2.2 所述，则结构 $\mathbb{A}(\mathbb{Z})$ 称为相对于 $\mathbb{Z}$的非标准模型的 $\mathbb{A}$ 相对于 $\mathbb{Z}$。若 $\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中的一个解释，则 $\mathbb{A}(\mathbb{Z}) \cong \Gamma(\mathbb{Z})$，而 $\mathbb{A}(\mathbb{Z})$ 的代数结构可通过解释 Γ揭示。

2.2. **双解释**。

定义 2.2. 代数结构 $\mathbb{A}$和 $\mathbb{B}$ 称为绝对双可解释，当且仅当

1）存在绝对解释 $\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{B})$ 和 $\mathbb{B} \cong \Delta(\mathbb{A})$；2）在 $L(\mathbb{A})$ 中存在公式 $\theta_\mathbb{A}(\bar{u}, x)$，其中 $|\bar{u}| = \dim\Gamma \cdot \dim\Delta$，该公式定义某个坐标映射 $U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{A}) \to A$；3）在 $L(\mathbb{B})$ 中存在公式 $\theta_\mathbb{B}(\bar{u}, x)$，其中 $|\bar{u}| = \dim\Gamma \cdot \dim\Delta$，该公式定义某个坐标映射 $U_{\Delta\circ\Gamma}(\mathbb{B}) \to B$。

绝对双可解释性使我们能够借助另一种代数结构来描述一种代数结构的非标准模型。

定理 2.3 ([4])。设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$彼此绝对双可解释，因此$\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{B})$ 且 $\mathbb{B} \cong \Delta(\mathbb{A})$。那么

1）对于任意的 $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}$ 代数结构 $\Gamma(\mathbb{B})$，都与 $\mathbb{A}$初等等价；

~ ~2）每个 L（$\mathbb{A}$）-结构 $\mathbb{A}$ 若与 $\mathbb{A}$ 初等等价，则同构于 Γ（$\mathbb{B}$），其中~存在某个 $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}$；3）对于任意的 $\mathbb{B}_1 \equiv \mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_2$，都有 Γ（$\mathbb{B}_1$）$\cong \Gamma$（$\mathbb{B}_2$）$\iff \mathbb{B}_1 \cong \mathbb{B}_2$.

注 2.2. 与注 2.1 类似，定理 2.3 可以通过将双解释的要求放宽为正则可逆正则解释，表述得更为一般。有关定义和细节，请参阅 [4] 。

3. Nonstandard tuples

3.1. 非标准算术模型。这里介绍一些关于非标准算术的著名定义和事实。我们以 [6] 一书作为一般参考。

令 $\mathcal{L}_r = \{+, \cdot, 0, 1\}$ 为带单位元 1 的环的语言（签名）。用 $\mathbb{N} = \langle N;\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1\rangle$ 表示标准算术，即非负整数集 N，配以标准加法 $+$、标准乘法 $\cdot$ 以及常数 0，1。有时，按照惯例，我们会滥用记号，将集合 N 记作 $\mathbb{N}$。注意，$\langle N;\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1\rangle$ 是一个半环，而 $\langle N;\ +,\ 0\rangle$ 是一个交换半群。

通常，算术指的是任何满足皮亚诺公理、签名为 $\mathcal{L}_r$ 的结构 $\mathcal{M}$ 。然而，在本文中，算术模型是指签名为 $\mathcal{L}_r$ 、且与 $\mathbb{N}$ 初等等价的结构 $\mathbb{N}$ 。如果算术模型 $\mathbb{N}$ 不同构于 $\mathbb{N}$，就称其为非标准模型。此外，值得注意的是，$\mathbb{N}$ 是唯一一个作为加法半群或半环有限生成的算术模型。另一种等价的做法是将整数环 $\mathbb{Z}$ 作为算术；在这种情况下，~ 的非标准模型恰好是与 $\mathbb{Z}$ 初等等价、但不同构于 $\mathbb{Z}$ 的环 $\mathbb{Z}$ 。同样，$\mathbb{Z}$ 是唯一一个（在同构意义下）与 $\mathbb{Z}$ 初等等价的有限生成环。从模型论的观点来看，这两种做法确实等价，因为 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{Z}$ 彼此绝对双可解释（事实上，根据拉格朗日四平方定理，$\mathbb{N}$ 可在 $\mathbb{Z}$ 中定义）。

~每个 $\mathbb{N}$ 的非标准模型 $\mathbb{N}$，从序的角度看，都可以描述如下。回顾一下，对于有序不相交集合 A 和 B，我们用 $A + B$ 表示集合 $A \cup B$，其中 A 和 B 上给定了相应的序，并且对每个 $a \in A$ 和 $b \in B$，都有 $a < b$ 。此外，我们用$A \cdot B$表示笛卡尔积 $A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ 采用左字典序，即 $(a_1,\ b_1) < (a_2,\ b_2)$ 当且仅当 $a_1 < a_2$，或者 $a_1 = a_2$~且 $b_1 < b_2$。于是，作为线性序，$\mathbb{N}$具有形式 $\mathbb{N}+Q_\lambda\mathbb{Z}$，其中~序 Q_λ 是一个基数为 $\lambda = |\mathbb{N}|$、无端点的稠密线性序，也就是说，$\mathbb{N}$ 后接 Q_λ 个 $\mathbb{Z}$ 的副本~，如图 1 所示。注意，有序集 Q_λ 由 $\mathbb{N}$唯一确定。特别地，任何可数的算术非标准模型都具有形式 $\mathbb{N}+\mathbb{Q}\mathbb{Z}$，因为所有无端点的可数稠密线性有序集彼此同构。

~在可数情形下，尽管 $\mathbb{N}$ 的序结构~很简单，但 $\mathbb{N}$ 上的运算 $+$ 和 $\cdot$ [21], 必然是非递归的，因此，可数的非标准算术模型 $\mathbb{N}$ 分别在 Malcev [13] 或 Rabin [18], 的意义下是不可构造的或非递归的。

可以将一个自然数 $n \in \mathbb{N}$ 与一个非标准数 $\tilde{n} = \tilde{1} + \ldots + \tilde{1}$对应起来，后者是 $\mathbb{N}$ 中的 n 个非标准单位 1 之和。映射 $n \to \tilde{n}$~给出一个初等嵌入 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，也就是说，根据这种对应关系，$\mathbb{N}$~是 $\mathbb{N}$的初等子结构。换言之，$\mathbb{N}$ 是理论 Th() 的素模型。

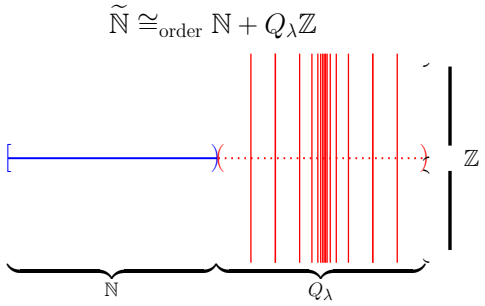

FIGURE 1. 算术的非标准模型。

~在下文中，我们总是假定 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ 是通过这个嵌入得到的。

~ ~ $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{N}$ 中的元素称为 $\mathbb{N}$中的标准自然数。它们关于序关系 $<$构成 $\mathbb{N}$ 的一个初始段；也就是说，如果 $x \in \mathbb{N}$ 且对某个~$y \in \mathbb{N}$有 $x < y$，那么 $x \in \mathbb{N}$。由此可知，在每个非标准模型 $\mathbb{N}$中，都存在一个~元素 $x \in \mathbb{N}$，使得 $x > \mathbb{N}$（后者是 $\forall y \in \mathbb{N}\ x > y$的简写）。

一个关键事实是（即使使用来自 $\mathbb{N}$的参数~的~公式也不行）。这可由皮亚诺归纳公理（实际上是一组公理模式）推出。~另一个有用的观察是，相应的非标准整数环 Z~的加法群 Z^+ 既不是循环的，也不是有限生成的。

3.2. **列表超结构**。 回顾结构 $\mathbb{A} = \langle A$的列表超结构的定义； $L\rangle$ （见 [1],[2] [8]），并作一些细微且主要是记号上的改动。设O 是一个具有固定元素 $1 \in O$的线性序。对于任意满足 $k \geq 1$的 $k \in O$，令 $[1,k] = \{x \in O \mid 1 \leq x \leq k\}$。令 List$(A, O)$ 为所有函数s: $[1,k] \to A$的集合，其中 $k \in O, k \geq 1$。我们称这样的函数为 O-元组，或称为 O-列表，其元素来自 $\mathbb{A}$；有时记作 $s = (s_1, \ldots, s_k)$。若 $O = \mathbb{N}$，则 List$(A, \mathbb{N})$ 恰好是由 A的元素构成的所有有限元组的集合。在这种情况下，有时从记号中省略 $\mathbb{N}$，并记作 List(A)。

现在，列表超结构 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 定义为如下三类结构

$$\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N}) = \langle \mathbb{A}, \text{List}(A), \mathbb{N}; t(s,a,i), l(s) \rangle,$$

其中 $\mathbb{N}$ 是标准算术，List(A) 如上所述， l: List$(A) \to \mathbb{N}$ 是长度函数，即 $l(s)$ 是元组 $s = (s_1, \ldots, s_k) \in$List$(A)$ 的长度 k，而 $t(x,y,z)$ 是 List(A) 上的谓词，满足： $t(s,a,i)$ 在 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 中成立，当且仅当 $s = (s_1, \ldots, s_k) \in$List$(A)$ $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k$ 和 $a = s_i \in A$。

注意，通常列表超结构 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 还配备了（参见上文提到的论文[1],[2] [8] ）语言中的另一个二元运算 $\frown$，它在 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 中解释为元组连接；此外还配备了 List(A) 上的一个额外二元谓词 $\in$，使得对于 $a \in A$ 和 $s \in$ List(A)， $a \in s$ 在$\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 中成立，当且仅当对于某个 i， a 是 s 的分量 s_i。然而，谓词$\in$ 和连接 $\frown$ 在 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 中是 0-可定义的（借助 $t(s,i,a)$ 和$\ell(s)$），因此我们将它们从语言中省略，但有时会视方便在公式中使用。

注记 3.1. 当 $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ 时，可以通过在 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N}) = \langle \mathbb{A}, \text{List}(A)$ $\mathbb{N}$; $t(s,a,i)$ $l(s)\rangle$ 中将 $\mathbb{A}$与 $\mathbb{N}$等同来加以简化，并使用双排序结构

$\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N}) = \langle \mathbb{N}, \mathrm{List}(\mathbb{N});\ t(s,a,i)\ l(s)\rangle$ 来代替通常的三排序结构。注意，这些结构彼此绝对双可解释，因此我们可以互换地使用这两种结构。

3.3. 算术中的列表超结构解释。为了在第3.4节定义非标准列表超结构，我们需要通过众所周知的 G¨odel 枚举，描述 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$ 在 $\mathbb{N}$ 中的解释。

为此，我们固定所有有限元组 τ 的一个可计算枚举：$\mathbb{N} \to \cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{N}^k$。用 $\tau(n)_i$ 表示 $\tau(n)$ 的第 i 个分量：

$$\tau(n)_i = a \iff \mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \models t(\tau(n),a,i).$$

于是，部分函数 $f(n,\ i) = \tau(n)_i$ 是可计算的，因此集合 $\{(n,\ a,\ i) \mid a = f(n,\ i)\} \subseteq \mathbb{N}^3$ 是递归可枚举的。因此，存在一个一阶公式（实际上是正原子公式，即丢番图公式） $T_\tau(n,\ a,\ i)$，属于 $\mathbb{N}$，使得

$$\tau(n)_i = a \iff \mathbb{N} \models T_\tau(n,a,i).$$

此外，元组 $\tau(n)$ 的长度 $k = \ell(\tau(n))$ 也是可计算的，因此可由公式 $L_\tau(n,\ k)$ 给出：

$$\ell(\tau(n)) = k \iff \mathbb{N} \models L_\tau(n,k).$$

直观地说，公式 T_τ 和 L_τ 使我们可以认为每个 $n \in \mathbb{N}$ 都对应一个元组。特别地，T_τ、 L_τ 满足以下陈述在 $\mathbb{N}$中为真：

(S1) $\quad \forall n\ \exists k\ L_\tau(n,k),$

(S2) $\quad \forall n\ \forall k\ \forall i\ [(L_\tau(n,k) \wedge i > k) \to \forall a\ \neg T_\tau(n,a,i)],$

(S3) $\quad \forall n\ \forall k\ \forall i\ [(L_\tau(n,k) \wedge i \le k) \to \exists! a\ T_\tau(n,a,i)],$

(S4) $\quad \forall n,m\ [\forall i\ \forall a\ T_\tau(n,a,i) \leftrightarrow T_\tau(m,a,i)] \to m = n$

记住这些公式后，在下文中，我们会在一阶公式里使用含有 ℓ 和 t 的表达式，并默认这些表达式分别替换为涉及 L_τ 和 T_τ的公式。例如，我们可以用 $\forall n\ \forall i \le \ell(\tau(n))\ \exists! a\ t(\tau(n)\ a,i)$ 来代替 (S3)。如上所述，连接$^\frown$ 可以通过 t和 ℓ 来定义，因此也可以通过 T 和 L来定义。具体来说，以下一阶公式陈述：对于每个 $x,y \in \mathbb{N}$ ，都存在 $z \in \mathbb{N}$ 使得$\tau(z) = \tau(x)^\frown\tau(y)$:

$$\begin{aligned}
&\forall x,y\ \exists z\\
&\ell(\tau(z)) = \ell(\tau(x)) + \ell(\tau(y))\\
&\wedge [\forall a\ \forall i \le \ell(\tau(x))\ T_\tau(z,a,i) \leftrightarrow T_\tau(x,a,i)]\\
&\wedge [\forall a\ \forall \ell(\tau(x)) < i \le \ell(\tau(x)) + \ell(\tau(y))\\
&T_\tau(z,a,i) \leftrightarrow T_\tau(y,a,i-\ell(\tau(x)))].
\end{aligned} \tag{2}$$

当且仅当 $a \in \tau(x)$ 时，下一个公式成立：

$$\exists i\ 1 \le i \le \ell(x) \wedge T(x,a,i). \tag{3}$$

更一般地，我们可以考虑算术枚举 τ （不一定是可计算的），也就是说，当 τ 由算术语言中的公式 T 和 L 给出，且满足 (S1)–(S4) 时。在这种情况下，对于每个 $n \in \mathbb{N},\ T(n,\ a,\ i)$ 的真值集定义了一个与 n 对应的元组。为了确保

List(N, $\mathbb{N}$) 中的每个元素都对应于某个由 $T(n,\ a,\ i)$ 定义的元组，我们加入一个无限公理系统。具体来说，对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们写下

$$\forall a_1, \ldots, a_k\ \exists n\ L(n,k) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} T(n, a_i, i). \tag{S5}$$

注意，只要存在某个如上所述的可计算枚举 τ，使得 $L = L_\tau$ 且 $T = T_\tau$，这些公式就成立。

定义 3.1。 满足 (S1)–(S5) 的公式对 $\mathcal{E} = (T, L)$ 称为 $\mathbb{N}$中元组的算术枚举 。对于算术枚举 $\mathcal{E}$，我们用 $\mathcal{E}(n)$ 表示在 $\mathcal{E}$ 下与 $n \in \mathbb{N}$ 对应的元组。

引理 3.1。 设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{N}$中元组的两个算术枚举。存在一个可定义双射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有 $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N},\ \mathcal{E}(n_1) = \mathcal{D}(n_2)$ 当且仅当 $f(n_1) = n_2$。

证明。 为证明该引理，只需注意到集合 $\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{E}(n_1) = \mathcal{D}(n_2)\}$在 $\mathbb{N}$中是可定义的。□

现在我们说明每个算术枚举 $\mathcal{E}$ 都定义了 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$ 在 $\mathbb{N}$ 中的绝对解释，

$$\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \cong \Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N}).$$

为简单起见，我们可以用通常的单排序结构来表示双排序结构 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$（见注 3.1）：其基集是不交并 $\mathbb{N}$ 与 List($\mathbb{N}$)，并配备两个一元谓词，分别定义子集 $\mathbb{N}$ 和 List($\mathbb{N}$)；两个谓词表示 $\mathbb{N}$ 上的运算 $+$ 和 $\cdot$；谓词 $t(s,\ a,\ i)$；以及一个表示长度函数 $l(s)$ 的谓词。

现在我们依照定义 2.1 及其中的记号来描述 Γ_ε。我们将 $\mathbb{N} \cup$ List($\mathbb{N}$) 解释为 $\mathbb{N}^2$ 的子集，其中 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \times \{1\}$ 和 List($\mathbb{N}$)$^* = \mathbb{N} \times \{2\}$（二者都是 $\mathbb{N}^2$ 的可定义子集），将等号解释为 $\mathbb{N}^* \cup$List($\mathbb{N}$)* 上的等价关系。运算 $+$ 和 $\cdot$ 通过 $\mathbb{N}^*$ 的第一分量自然地解释。要在 $\mathbb{N}^* \cup$List($\mathbb{N}$)* 上解释谓词 $t(s,\ a,\ i)$，可使用公式 $T(n,\ a,\ i)$；要解释函数 $l(s)$，则使用公式 $L(n,\ k)$。

公式 (S1)–(S5) 保证解释 $\langle \mathbb{N}^*$,List($\mathbb{N}$)$^*; t^{\mathbb{N}}, \ell^{\mathbb{N}} \rangle$ 与 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 同构。事实上，态射由公式 (S1)–(S3) 给出，而双射性则由 (S4)、(S5) 保证。

如果我们愿意，也可以轻松地在 $\mathbb{N}$ 中定义 $\mathbb{N}^*$ 和List($\mathbb{N}$)*，而不是在 $\mathbb{N}^2$ 中定义；例如，可以把第一类放在偶数中，把第二类放在奇数中。

注意，反向绝对解释 $\mathbb{N} \cong \Delta(\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N}))$ 可以通过将 $\mathbb{N}$ 解释为 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 的类 $\mathbb{N}$ 来直接构造。

命题 3.1 ([3, 19])。 用上述记号，以下结论成立：

1) $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \cong \Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 以及反向解释 $\mathbb{N} \cong \Delta(\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N}))$ 彼此给出 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 与 $\mathbb{N}$ 的绝对双解释。2) 此外，对于两个算术枚举 $\mathcal{E}$、$\mathcal{D}$，引理 *3.1* 中的可定义函数 f 给出解释 $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 与 $\Gamma_{\mathcal{D}}$ 之间的同构。

接下来我们将需要 $\mathbb{N}$ 中的元组的元组，即函数 $[1, k] \to$List($\mathbb{N}, \mathbb{N}$)。一个算术枚举 $\mathcal{E}$ 足以将 $\mathbb{S}(\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})\ \mathbb{N})$ 解释为 $\mathbb{N}$ 中的对象。事实上，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑相应的元组 $\mathcal{E}(n) = (n_1, \ldots, n_k) \in$

$\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$。对于同一个 n，我们随后将元组的元组 $(\mathcal{E}(n_i)\dots,\mathcal{E}(n_k))$ 与之对应。我们注意到，第 i 个元组的长度 $\ell(\mathcal{E}(n_1))$ 以及第 j 个元组的 i 个分量 $t(\mathcal{E}(n_i)\ a,j)$ 都可以使用原始公式 T 和 L 定义。由此观察可得出以下命题。

命题 3.2。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{N}$ 中元组的一个算术枚举。那么
(a) 对于结构 $\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{N}$ 中的每个绝对解释 Δ，都存在相应的 $\mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N})$ 在 $\mathbb{N}$ 中的绝对解释 $\Delta_{\mathcal{E}}$。*(b)* 此外，若 Δ 导出一个绝对双解释，则 $\Delta_{\mathcal{E}}$ 也如此。*(c)* 此外，若 $\mathcal{D}$ 是元组的一个算术枚举，则 $\Delta_{\mathcal{E}}$ 与 $\Delta_{\mathcal{D}}$ 可定义同构。

3.4. 非标准列表超结构。

设 $\mathcal{E}=(T,\ L)$ 是 $\mathbb{N}$ 中元组的一个算术枚举。设 $\mathbb{N}\equiv\mathbb{N}$ 是一个算术的非标准模型。

定义 3.2。设 $\mathcal{E}=(T,\ L)$ 是元组的一个算术枚举。若某个函数 $\tilde{s}:[1,k]\to\mathbb{N}$，$k\in\mathbb{N}$ 的图像是某个 $n\in\mathbb{N}$ 的 $T(n,\ a,\ i)$ 的真值集，则称该函数为非标准（或可定义的）元组（列表）。我们用 $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 表示 $\mathbb{N}$ 中所有这类非标准元组的集合。

注意，对于每个算术枚举，$\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})=\mathrm{List}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$。然而，$\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }$至少从基数方面考虑，$\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})\neq\mathrm{List}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$。

定义 3.3。根据定理 2.3，当且仅当一个结构具有某个 $\Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 的形式时，它才与 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})\tilde{\ }\tilde{\ }$初等等价，其中 $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 如第 3.3 节所述。我们将 $\Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 记作 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$，并称之为算术的非标准列表超结构$\tilde{\ }\mathbb{N}$。

我们将利用解释 $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 和初等等价，以更具体的方式理解$\sim\sim\sim\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$。

$\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }$结构 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ 是一个双类型结构，包含两个底层集合：$\mathbb{N}$ 和 $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$。$\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }$根据解释 $\Gamma_{\mathcal{E}}$，集合 $\mathbb{N}$ 被解释为 $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\times\{1\}$，而$\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 被解释为 $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})^*=\mathbb{N}\times\{2\}$。我们可以自然地将 $\mathbb{N}^*$ 和 $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})^*$ 识别为$\tilde{\ }\mathbb{N}$的两个不相交副本。

$\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }$完成这一识别后，每个固定的 $n\in\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})^*=\mathbb{N}$ 都唯一确定一个$\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }$非标准元组 $s:\ [1,k]\to\mathbb{N}$ 其中 $s(i)=a$ 当且仅当 $\mathbb{N}\models L_{\mathcal{E}}(n,k)\ \wedge T_{\mathcal{E}}(n,a,i)$，这等价于

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\widetilde{\mathbb{N}},\widetilde{\mathbb{N}})\models[\ell(s)=k]\wedge[\forall 1\leq i\leq k\ t(s,s(i),i)].$$

在这种情况下，我们记作 $s=\mathcal{E}(n)$，并称之为 n第 个非标准元组，属于$\sim\tilde{\ }\tilde{\ }\tilde{\ }\sim\mathbb{N}$。注意，如果 $\mathbb{N}$ 是可数的，那么 $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 也是可数的，这与由 $1\leq i\leq n,n\in\mathbb{N}$ 编号的 $\mathbb{N}$ 的所有 元组的集合不同。

通常，$\models$满足下式的元素 a_i 称为非标准元组$\widetilde{(\mathbb{N},\mathbb{N})}$的第 i 项，或第 i 个分量。若要表示首个元素为 a_1、末个元素为 a_k 的非标准元组$\tilde{\ }$，$k\in\mathbb{N}$，我们写作（a_1，……，a_k）。非标准元组的连接由公式 (2) 描述；隶属关系 $a\in(a_1$，……，$a_k)$ 由公式 (3) 给出。

命题 3.3。设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是 $\mathbb{N}$和$\sim\mathbb{N}\equiv\mathbb{N}$中元组的算术枚举。则以下结论成立：

1) $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N}) = \mathrm{List}_{\mathcal{F}}(\mathbb{N})$，并且环语言中存在一个公式 $\phi(x,y) \subset \mathcal{L}_r$，使得对于每个 m、$n \in \mathbb{N}$，

$$\mathcal{E}(m) = \mathcal{F}(n) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathbb{N}} \models \phi(m,n)$$

2) 解释 $\Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 与 $\Gamma_{\mathcal{F}}(\mathbb{N})$ 同构。此外，存在一个公式 $\psi(\bar{x}, \bar{y})$，它在环语言 $\mathcal{L}_r$ 中定义了 $\mathbb{N}$ 一个同构 $\Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N}) \to \Gamma_{\mathcal{F}}(\mathbb{N})$。

证明。由于 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \equiv \mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$，结论由引理 3.1 得出。 □

备注 3.2。集合 $\mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 和解释 $\Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$ 并不依赖于枚举 $\mathcal{E}$（后者在可定义同构意义下除外）。我们分别将它们记作 $\mathrm{List}(\mathbb{N})$ 和 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$。

注记 3.3。结构 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 与 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 并非初等等价，因为这种等价关系会给出一种在 $\mathbb{N}$ 中定义 $\mathbb{N}$ 的方法。例如，$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ 可以在 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 中由以下公式定义

$$\mathrm{std}(n) = \exists \mathrm{tuple}\, s\ (s_1 = 1 \wedge s_{\ell(s)} = n \wedge [\forall 1 \leq i \leq \ell(s) - 1\ s_{i+1} = s_i + 1]).$$

句子 $\forall n\, \mathrm{std}(n)$ 在 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 中成立，但在 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 中不成立。由此可知，所有非标准模型 $\mathbb{N}$ 的弱二阶理论都与 $\mathbb{N}$不同。另请参阅第 3.6 节，了解相关讨论。

3.5. 非标准元组的性质。

3.5.1. 始终存在的非标准元组。本节将介绍一些元组，它们对于每个 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$ 都属于 $\mathrm{List}(\mathbb{N})$。

引理 3.2（可定义函数）。下列结论成立。

1) 设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个算术函数，即存在算术公式 $\phi(x,y)$，使得 $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m) = n \Longleftrightarrow \mathbb{N} \models \phi(m,n).$$

则对任意 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$以及任意 $k \in \mathbb{N}$，存在非标准元组 $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathrm{List}(\mathbb{N})$，使得 $\forall i \leq k\ \mathbb{N} \models \phi(i, s_i)$。

2) 反之，设 $\phi(x,y)$ 是一个算术公式，使得对某个 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$ 以及某个无限的 $k \in \mathbb{N}$，存在元组 $s \in \mathrm{List}(\mathbb{N})$，使得 $l(s) = k$ 且 $\mathbb{N} \models \phi(i, s_i)$ 对每个 $i \leq k$成立。则 $\phi(x,y)$ 定义了一个算术函数$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。

证明。固定一个任意的元组的算术枚举 $\mathcal{E}$，其中元组取自 $\mathbb{N}$。

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，存在一个元组 $s \in \mathrm{List}(\mathbb{N}) = \mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$，使得 $l(s) = k$ 且 $\forall i \leq k\ \mathbb{N} \models \phi(i,\ s_i)$。因此

$$S(\widetilde{\mathbb{N}}, \widetilde{\mathbb{N}}) \models \forall k \in \mathbb{N}\ \exists s \in \mathrm{List}(\widetilde{\mathbb{N}})[\forall i \leq k\ \phi(i, s_i)].$$

因为

$$S(\widetilde{\mathbb{N}}, \widetilde{\mathbb{N}}) \cong \Gamma_{\mathcal{E}}(\widetilde{\mathbb{N}}) \equiv \Gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{N}) = \mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$$

有如下结论：对于任意 $k \in \mathbb{N}$，存在一个非标准元组 $s \in \mathrm{List}_{\mathcal{E}}(\mathbb{N})$，使得 $l(s) = k$ 且 $\mathbb{N} \models \phi(i, s_i)$ 对任意 $i \leq k$ 都成立。□

~ ~ ~以下语句在 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ 中成立，因此也在 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ 中成立：

$$\forall k\ \exists s\ \forall a\ \forall i\ t(s,a,i)\iff i\leq k\wedge a=i.$$

因此，由 $s(i)=i$ for $1\leq i\leq k$ 定义的函数 s 是一个非标准元组。我们将此非标准元组记作 $[1,k]$ 或 $(1,\dots,k)$。

类似的推理表明，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在一个长度为 n 的"常数"非标准元组 $(1,\dots,1)^{\sim}$。

对于每个非标准元组 s 和每个 $n\leq\ell(s)$，我们可以考虑它在 $[1,n]$ 上的限制，或其初始段 $s|_n$，分别定义为 $\ell(s|_n)=n$ 和 $\forall i\forall a\ t(s|_n,a,i)\leftrightarrow i\leq n\wedge t(s,a,i)$。

3.5.2. 非标准置换。我们称长度为 $\sim n=\ell(\sigma)\in\mathbb{N}$ 的非标准元组 σ 为 $[1,n]$ 的非标准排列，如果 σ 的每个项都至少为 1 且至多为 n，并且每个 $1\leq k\leq n$ 在 σ 中恰好出现一次。以下一阶公式 $P(\sigma,n)$ 用于判断元组 σ 是否为 $[1,n]$ 的非标准排列：

$$\begin{aligned}P(\sigma,n)=&(\ell(\sigma)=n)\\&\wedge\forall 1\leq k\leq n\ \exists!1\leq i\leq n\ t(\sigma,k,i)\\&\wedge\forall 1\leq i\leq n\ \exists!1\leq k\leq n\ t(\sigma,k,i).\end{aligned}\tag{4}$$

注意，每个非标准置换都会给出从$[1,n]$ 到其自身的一阶可定义双射。

下文中，我们常省略"非标准"一词，直接将这类 σ置换称为置换。特别要注意，如果 σ 是一个置换，就意味着它是一个非标准元组。

为了说明这一点，在下一个命题中，我们将展示：我们预期有限情形中出现的行为，在非标准情形中也会出现。特别要注意，由此命题可知，式(4)中的第二行或第三行可以省略。

~**命题3.4**。设 σ 是一个长度为 $n\in\mathbb{N}$的非标准元组。
(a) 如果每个 $1\leq i\leq n$ 都出现在 σ中，那么 σ 是一个置换。*(b)* 如果 σ 的所有分量互不相同，且每个分量都至少为1 且至多为 n，那么 σ 是一个置换。

证明。为证明(a)，注意在有限情形下，公式

$$(\ell(\sigma)=n)\ \wedge\ \forall 1\leq k\leq n\ \exists 1\leq i\leq n\ t(\sigma,k,i)$$

~推出（4）。根据初等等价关系，对于 $\mathbb{N}$和非标准元组，情况也相同。（b）的推理类似，所用公式为

$$\begin{aligned}(\ell(\sigma)=n)\ \wedge\ &\forall 1\leq i\leq n\ \exists 1\leq k\leq n\ t(\sigma,k,i)\\&\wedge\ \forall 1\leq i,j\leq n\ \forall k\ t(\sigma,k,i)\wedge t(\sigma,k,j)\to i=j.\end{aligned}$$

□

3.5.3. 非标准求和、乘积与乘方。运用上述推理，我们可以将求和、乘积及其他可定义函数扩展到非标准元组。

引理 *3.3.* 令 $f\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为 $\mathbb{N}$ 中的可定义函数。那么存在一个 $\mathbb{S}$ 中的可定义 $(\mathbb{N},\mathbb{N})$ 函数 $f\colon\mathbb{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$，使得 $f((a_1,a_2))=f(a_1,a_2)$，并且对每个 $k\in\mathbb{N},k>2$，$f(a_1,\dots,a_k)=f(f((a_1,\dots,a_{k-1}))\ a_k)$。

~ ~证明。对于元组 $(a_1, \ldots, a_k) \in$ List($\mathbb{N}$)，我们定义一个长度为 k 的新元组 $s \in$ List($\mathbb{N}$)，如下

(1) $s_1 = a_1$, (2) $s_{i+1} = f(s_i, a_{i+1})$,

$1 \le i \le k-1$。

那么，函数 $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto s_k$ 是可定义的，并满足引理的要求。□

~我们将 f 视为 f 在非标准情形下的扩展。例如，这~ ~ ~使得可以对非标准元组求和：对于元组 $s \in \mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$，考虑同长度的元组 r $\ell(s) = k$，其定义如下：

(1) $r_1 = s_1$,

(2) $r_{i+1} = r_i + s_{i+1}$, $1 \le i \le k-1$.

那么，分量 r_k 给出和 $\sum s = \sum_{i \le n} s_i$。~我们也可以类似地定义 $\prod s$。如果 a, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}$ 我们可以将 a^k 定义为 $\prod s$，其中 $\ell(s) = k$，且对每个 $1 \le i \le k$都有 $s_i = a$。容易看出（例如通过归纳法），和与乘积以如下意义继承结合律和交换律：若 s, s' 是非标准元组，则$\sum s + \sum s' = \sum s \frown s'$；若另外 s' 是 s的一个置换，则 $\sum s = \sum s'$。乘积也有同样的性质。

作为交换律和结合律的一个例子，假设 S_i、 $1 \le i \le n$ 是~非标准元组，且对每个 $1 \le i \le n$，都有 $\ell(S_i) = m$，其中 $m, n \in \mathbb{N}$，而 $(i, j) \mapsto (S_i)_j$ 是一个可定义函数。那么我们可以观察到 $\sum_i \sum_j (S_i)_j = \sum_j \sum_i (S_i)_j$。事实上，根据结合律，前一个和等于 $\sum_{k \le mn} T_k$，其中$T_{im-m+j} = (S_i)_j$ 对 $1 \le i \le n$、 $1 \le j \le m$ 成立；后一个和等于$\sum_{k \le mn}$，其中 $U_{jn-n+i} = (S_i)_j$ 对 $1 \le i \le n$、 $1 \le j \le m$ 成立。 T 和 U 显然相差一个非标准置换，因此根据交换律，这两个和相等。

我们也可以用相同的方法来组织计数：若 s是一个长度为 $k \in \mathbb{N}$的非标准元组~ ~，且 $a \in \mathbb{N}$，则按如下方式定义 r：

(1) 若 $s_1 = a$，则 $r_1 = 1$；否则 $r_1 = 0$。(2) 对于 $1 \le i \le k-1$，若 $s_{i+1} = a$，则 $r_{i+1} = r_i + 1$；否则 $r_{i+1} = r_i$。

那么 r_k 就是 s中 a 的（非标准）出现次数。等价地，若要引用引理 3.3，我们先映射 $s \mapsto s'$，其中若 $s_i = a$，则 $s'_i = 1$；否则 $s'_i = 0$（这是一个可定义映射），然后取 $\sum s'$。

3.6. 给定结构上的非标准元组与弱二阶逻辑。 非标准元组的概念可以推广到任意结构 $\mathbb{B}$，方法是考虑任意的 $\mathcal{M} \equiv \mathbb{S}(\mathbb{B}, \mathbb{N})$。然而，在本文中，我们只关注那些定义于可在 $\mathbb{N}$中解释的结构上的非标准元组，例如有限表示群。下文将介绍这类非标准元组。关于任意 $\mathbb{B}$情形的处理，请参阅 [16]。

假设 $\mathbb{A}$ 可在 $\mathbb{N}$ 中解释（因此，可在 $\mathbb{N}$中绝对解释）。那么，由于 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 可在 $\mathbb{N}$中解释，$\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 也可如此解释；例如， $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N}) \cong \Gamma(\mathbb{N})$。列表超结构是三种类的， Γ 包含 $\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{N}$ 中的解释 $\Gamma|_{\mathbb{A}}$，以及 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{N}$中的解释 $\Gamma|_{\mathbb{N}}$。接着，对每个 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$，我们考虑 $\Gamma(\mathbb{N})$。我们将 ~ ~ ~

~ ~非标准列表超结构 $\mathcal{M}$有三种类，类为 $\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}$、$\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$、~，以及一个与 List($\mathbb{A}$, $\mathbb{N}$) 对应的类 S。我们分别将这些类称为 $\mathcal{M}$的结构排序、数排序和列表排序。我们将 $\mathcal{M}$ 的~列表排序 S 中的元素称为上的非标准元组，并像处理我们在第 3.3 节中介绍的 $\mathbb{N}$ 中的~非标准元组那样处理它们。

不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{A}$ 在 Γ 下被解释为 $\mathbb{N}$ 上的元组，也就是说，是 List($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$) 的元素。于是很容易看出~，对于 $n \in \mathbb{N}$ 的函数，一个函数 s：$[1, n] \to A$ 表示一个非标准元组，当且仅当 ($\ell(s(1))$.....，$\ell(s(n))$) 和 $s(1) \frown s(2) \frown \cdots \frown s(n)$ 是 $\mathbb{N}$ 中的非标准~元组。后一个观察给出了 $\mathbb{N}$ 中非~标准元组概念的一种具体描述。由此可描述 $\mathcal{M}$中的非标准元组。不过，下文展示的关于 $\mathbb{A}$ 上非标准元组的更多细节，并不明确依赖于这种描述；事实上，它们适用于任何与 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 初等等价的结构 $\mathcal{M}$。因此，本节余下部分中，我们只假设 $\mathcal{M}$ 是任意一个这样的结构。

~请注意，对于每个 $a \in S$，其长度 $\ell(s)$均有定义，并且

$$\mathcal{M} \models \forall a \in \widetilde{S}\ \forall 1 \leq i \leq \ell(s)\ \exists! x \in A\ t(a, x, i),$$

也就是说，$\mathcal{M}$ 的列表排序中的每个元素 s，对于每个$1 \leq i \leq \ell(s)$都有唯一的第 i个分量。此外，每个 a 完全由其分量所确定。事实上，下列公式在 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$中成立，因而在 $\mathcal{M}$中也成立：

$$\forall a, b\ a = b \leftrightarrow [\forall x \in A\ \forall i\ (i \leq \ell(a) \vee i \leq \ell(b)) \to (t(a, x, i) \leftrightarrow t(b, x, i))].$$

考虑到这一点，我们常常写成 $a = (a_1, \ldots, a_k)$，意指 $\ell(a) = k$，并且谓词 $t(a, a_1, 1)$与 $t(a, a_k, k)$成立。我们还用 $a_i = x$ 表示 $t(a, x, i)$成立。

与标准元组的情形一样，我们可以定义成员关系谓词。具体而言，我们用 $x \in a$ 表示公式 $\exists i\, t(a, x, i)$。

~同样地，我们可以借助初等等价来定义 $a, b \in S$经由 t, ℓ 的连接运算 $a \frown b$。具体而言，下列公式在 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$中成立，因而在 $\mathcal{M}$中也成立：

$$\begin{aligned}\forall a, b\ \exists! c\ \ell(c) = \ell(a) + \ell(b)\ \wedge \\ \forall 1 \leq i \leq \ell(c)\ [t(c, x, i) \leftrightarrow \\ (i \leq \ell(a) \wedge t(a, x, i)) \vee (i > \ell(a) \wedge t(b, x, i - \ell(a)))].\end{aligned}$$

如同标准元组的情形，上述公式给出的唯一元素记作 $a \frown b$。

考虑到上述观察，我们称非标准元组 a 的长度为 k，如果 $\ell(a) = k$；如果 $\mathcal{M} \models t(a, x, i)$，则称 x 是非标准元组 a 的第 i 个元素。此外，我们可以定义 x 在 a 中出现的（非标准）次数 $n_x(a)$：首先定义当 a 长度有限时，x 在 a 中出现的次数 $n_x(a)$，然后定义

$$n_x(a_1, \ldots, a_k) = \begin{cases} n_x(a_1, \ldots, a_{k-1}), & x \neq a_k, \\ n_x(a_1, \ldots, a_{k-1}) + 1, & x = a_k. \end{cases}$$

~我们称 b 为 a 的非标准排列，当且仅当 $\forall x \in \mathbb{A}\ n_x(a) = n_x(b)$。也可以通过第 3.5.2 小节中引入的非标准排列来明确地定义同一概念。事实上，固定一个算术枚举 $\mathcal{E}$（见定义 3.1），并考虑

与 (4) 类似的公式，该公式表示 $n \in \mathbb{N}$ 在 $\mathcal{E}$下编码了一个置换：

$$P(n) = \exists k\ L(n,k) \wedge \forall 1 \le i \le k\ \exists! 1 \le j \le\ T(n,i,j) \\ \wedge \forall 1 \le j' \le k\ \exists! 1 \le i' \le k\ T(n,i',j').$$

由于 $\mathcal{M} \equiv \mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N})$，因此当且仅当 $\mathcal{M}$ 中满足以下公式时，b 是 a 的非标准排列：

$$\ell(a) = \ell(b) \wedge \exists n\ [P(n) \wedge L(n, \ell(a)) \wedge \forall i,j\ T(n,i,j) \to b_j = a_i],$$

其中，后一个等式 $b_j = a_i$ 是 $\forall x\ t(b,\ x,\ j) \leftrightarrow t(a,\ x,\ i)$ 的简写。

我们可以将 $\mathbb{A}$ 上可定义的二元运算（例如群乘法）扩展到 $\mathcal{M} \equiv \mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N})$ 中的元组。

引理 *3.4.* 设 $\mathbb{A} = \langle A;\ L\rangle$ 是任意结构。设 $\mathcal{M} \equiv \mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$，其列表排序为 $\tilde{}$。设 $f:\ A \times A \to A$ 是 $\mathbb{A}$ 中可定义的函数。那么存在一个在 $\mathcal{M}$ 中可定义的函数 $f\colon S \to A$，使得 $f((a_1, a_2)) = f(a_1, a_2)$，并且对每个 $k \in \mathbb{N}, k > 2$，$f(a_1, \ldots, a_k) = \tilde{} f(f((a_1, \ldots, a_{k-1}))\ a_k)$。

证明。证明基本上重复了引理 3.3 的证明。$\tilde{}$事实上，对于一个元组 $(a_1, \ldots, a_k) \in S$，我们定义一个长度为 k 的新元组 $s \in S$，如下：

(1) $s_1 = a_1$,
(2) $s_{i+1} = f(s_i, a_{i+1})$, $1 \le i \le k-1$.

那么，函数 $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto s_k$ 是可定义的，并满足引理的要求。□

与第 3.5.3 小节相同，在同样的意义下，结合律和交换律等性质也会传递到 f。具体而言，设 $(b_1, \ldots, b_k) \in S$ 是 $(a_1, \ldots, a_k) \in S$ 的一个非标准排列。那么，如果 f 满足结合律和交换律，则 $f((a_1, \ldots, a_k)) = f((b_1, \ldots, b_k))$。

注 3.4. 引理 3.4 是以下一般观察的一个具体应用。假设我们有一个由 $i \in \mathbb{N}$ 索引、关于变量 $x_1, \ldots, x_{k_i}$ 的函数族 f_i，它按以下意义由一个关于 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 的公式定义：存在一个公式$\sigma(z, \bar{x}, i)$，使得 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N}) \models \sigma(b, \bar{a}, i)$ 当且仅当 $\ell(\bar{a}) = k_i$ 并且 $b = f_i(a_1, \ldots, a_{k_i})$。$\tilde{}$那么，对于任意具有数类型 $\mathbb{N}$ 的 $\mathcal{M} \equiv \mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$，同一个公式都定义了将 f_i 推广到 $i \in \mathbb{N}$ 的推广形式，尤其是推广到 $i > \mathbb{N}$。

3.6.1. 弱二阶逻辑与非标准模型。我们所说的结构 $\mathbb{A} = \langle A; L\rangle$ 上的弱二阶逻辑公式，是指列表超结构 $\mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N})$ 上的一阶公式。还有其他等价的描述，详情请参阅 [11]。

在我们的研究中，一个至关重要的观察是：考虑非标准模型时，对元组的量化会变成对非标准元组的量化。为表述这一点，我们先从以下观察开始。

命题 3.5. 如果结构 $\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{N}$ 中是绝对可解释的，那么它的列表超结构 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 也是如此。

证明。令 $\mathbb{A} = \langle A; L\rangle$。注意，$\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 可以在 $\mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 中得到解释。事实上，元组 $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{List}(A, \mathbb{N})$ 被解释为元组 $a_1^\diamond \frown a_2^\diamond \frown \ldots \frown a_k^\diamond \in \mathrm{List}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$，其中对于每个 $1 \le i \le k$，$a_i^\diamond$ 都是等价关系的一个代表

类，用于解释 a_i。其余部分的解释以相应且直接明了的方式定义。

由于 $\mathbb{S}(\mathbb{N},\ \mathbb{N})$ 在 $\mathbb{N}$ 中是绝对可解释的，因此该结论可由复合这些解释得出。□

现在，设 $\mathbb{A}$ 可在 $\mathbb{N}$ 中作为 $\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{N})$ 绝对可解释，并设 $\mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N}) \cong \Delta(\mathbb{N})^{\sim}$ 为命题 3.5 所给出的绝对解释。假设 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个非标准模型，并考虑 $\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{N})$ 和 $\mathcal{M} = \mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N}) \cong \Delta(\mathbb{N})$。

注记 3.5。 考虑 φ，这是一个关于 $\mathbb{A}$的弱二阶公式，也就是 $\mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N})$ 的一阶公式。如果 $\mathbb{S}(\mathbb{A},\ \mathbb{N}) \models \varphi$，那么由于初等等价， $\mathcal{M} \models \varphi$。特别地，如果 φ 具有如下形式

$$\forall \bar{a} \in \mathrm{List}(A, \mathbb{N})\ \psi(\bar{a}) \quad \text{or} \quad \exists \bar{a} \in \mathrm{List}(A, \mathbb{N})\ \psi(\bar{a}),$$

那么，对于 $\mathcal{M}$ ，同一个公式可写成

$$\forall \bar{a} \in \mathrm{List}_{\widetilde{\mathbb{A}}}\ \psi(\bar{a}) \quad \text{or} \quad \exists \bar{a} \in \mathrm{List}_{\widetilde{\mathbb{A}}}\ \psi(\bar{a}),$$

$^{\sim}$ $^{\sim}$ $^{\sim}$其中 $\mathrm{List}_{\widetilde{\mathbb{A}}}$ 表示 $\mathbb{S}(\mathbb{A}, \mathbb{N})$ 的列表排序。对 ψ 的第一个量词也可以进行同样的处理，依此类推。

换言之，在这些假设下， $\mathbb{A}$ 的弱二阶理论中的一个陈述，只需将对元组的量化替换为对非标准元组的量化，就能转换为 $\mathbb{A}$ 的二阶理论中的一个陈述。

4. Free group

本节介绍自由群的非标准模型。作为附带结果，我们还将描述自由群的超幂。设 F 是由 k 个生成元 $x_1, \ldots, x_k$ 生成的自由群。沿用 Kharlampovich、Myasnikov [9], 的方法，我们在列表超结构 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ 中解释 F：将一个约化群字 $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$（其中 $x_{i_j}^{\varepsilon_j} \neq (x_{i_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}})^{-1}$）对应到元组 $(\varepsilon_1 i_1, \ldots, \varepsilon_n i_n)$，其中 $\varepsilon_j i_j \neq -\varepsilon_{j+1} i_{j+1}$。不难看出，乘法可以解释为将相应的元组连接起来，并删除关于连接点对称的最长形如 $(d_\ell, \ldots, d_1, -d_1, \ldots, -d_\ell)$ 的元组。这便得到一个绝对解释 $F \cong \Gamma(\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$。

这使我们能够给出一个非标准模型，等价于一个对应的 $\mathbb{Z}$ 模型，以及 $\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \widetilde{\mathbb{N}})$—— $\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \mathbb{N})$ 的对应模型。于是，根据 [11, 引理 4.4(2)]，$F \cong \Gamma(\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \mathbb{N}))$ 与 F 初等等价。将 $F = F(\mathbb{N})$ 记作.....（注意，根据定理 2.2，这个记号定义良好）。

现在我们固定 ω 上的一个非主超滤子 D ，并考虑相应的超幂 $F^* \cong \prod F\ /D$ 和 $\mathbb{Z}^* \cong \prod \mathbb{Z}\ /D$。由于 $\mathbb{Z}^* \equiv \mathbb{Z}$，我们像上面一样将其记作 $\mathbb{Z}$。

$^{\sim}$**定理 4.1.** 假设 $2^\omega = \omega+$。用上述记号， $F^* \cong F$。

证明。 注意，超幂 F^* 是 $\omega+$-饱和的（因此，根据连续统假设 $2^\omega = \omega+$，它是饱和的），$\mathbb{Z}$也是如此。显然，如果 $\mathbb{A}$是饱和的，那么在 $\mathbb{A}$中绝对解释的任何结构也都是饱和的。因此，$^{\sim}$ $^{\sim}$ $^{\sim}F \cong \Gamma(\mathbb{Z})$ 是饱和的。现在， $F^* \cong F$ 因为它们是基数相同的同一结构的饱和模型（例如，参见 [14,定理 4.3.20]）。□

事实上，对于广义连续统假设，也可以得出类似的结论。

定理 4.2。 设 F 是一个有限生成自由群。假设 κ 是一个无限基数，且满足 $2^\kappa = \kappa+$。设 D 是 κ 上的一个非主超滤子，并设 $F^* \cong \prod F /D$ 和 $\mathbb{Z}^* \cong \prod \mathbb{Z} /D$ 是相应的超幂。那么 $F^* \cong F_{*i\in\omega}$，其中 F 表示非标准模型 $F(\mathbb{Z}^*)$。

证明。 证明过程与定理 4.1 相同，只需将 ω 替换为 κ。 □

同样的方法也适用于描述任意群（或实际上是代数结构）在 $\mathbb{N}$ 中的可解释超幂；特别是，指那些在 G¨odel 枚举下，其字问题属于算术的群。我们将在第 6 节中对此作进一步阐述。

注 4.1。 在相同假设下，我们有 $F_2 \cong F_2^* \cong F_3^* \cong F_3$。关于同构 $F_2 \cong F_3$，若能了解更多将会很有意思。特别地，在注 5.1 中我们证明了这个同构不是弱二阶可定义的。

我们可以用 F 明确描述其元素和运算，具体表示为 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$。事实上，考察上面的解释 Γ 可知， F 的元素由非标准元组（a_1, a_2, ..., a_n）给出，其中 $1 \le |a_i| \le k$ 对每个$1 \le i \le n$成立，并且 $a_i \neq -a_{i+1}$ 对所有 $1 \le i \le n-1$成立。群乘法则通过连接相应的元组并移除最大的“相互消去”部分来定义。具体地，设

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = (a_1, \dots, a_{n-\ell}, d_\ell, \dots, d_1, -d_1, \dots, -d_\ell, b_{\ell+1}, \dots, b_m),$$

其中 $a_{n-\ell} \neq -b_{\ell+1}$，或 $\ell = n$，或 $\ell = m$。于是

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_m) = (a_1, \dots, a_{n-\ell}, b_{\ell+1}, \dots, b_m).$$

群求逆定义为

$$(a_1, \dots, a_n)^{-1} = (-a_n, \dots, -a_1). \tag{5}$$

在我们的解释中，我们不将群元素设为与“约化”元组相对应，而是令其对应于关于$\sim'$自由消去的元组的等价类。所得的群暂记为 F，它与 F 同构，这由定理 2.2可知。我们在此给出细节，因为稍后引入非标准群表示时会采用这种方法。

如果存在一个由非标准元组组成的非标准元组，我们就称两个非标准元组（a_1、.....、a_n），$1 \le |a_i| \le k$ 对每个 $1 \le i \le n$，以及（b_1、.....、b_m），$1 \le |b_i| \le k$ 对每个 $1 \le i \le m$，是自由等价的

$$\begin{aligned}((a_1, \dots, a_n) &= (c_1^1, \dots, c_{n_1}^1),\\ &\quad (c_1^2, \dots, c_{n_2}^2),\\ &\quad \dots,\\ (b_1, \dots, b_m) &= (c_1^r, \dots, c_{n_r}^r))\end{aligned}$$

使得对于每个 $1 \le i \le r-1$，元组 c^i 和 c^{i+1} 仅相差一对可自由消去的元素的删除或插入：

$$\begin{aligned}(c_1^i, \dots, c_{n_i}^i) &= (c_1^{i+1}, \dots, c_j^{i+1}, a, -a, c_{j+1}^{i+1}, \dots, c_{n_{i+1}}^{i+1}) \quad \text{or}\\ (c_1^i, \dots, c_j^i, a, -a, c_{j+1}^i, \dots, c_{n_i}^i) &= (c_1^{i+1}, \dots, c_{n_{i+1}}^{i+1}),\end{aligned}$$

其中 $1 \le |a| \le k$。群乘法和求逆的定义方式很直接：乘法通过连接等价类的代表元来定义，求逆则通过对代表元应用 (5) 来定义。每个等价类都有唯一的自由约化代表元，上述运算定义良好，并且约化代表元映射 $F \to F$ 是一个群同构。事实上，这些陈述在自由群 F的情形下都成立，并且可以用 $\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \mathbb{N})$ 的一阶公式来表达。因此，同样的公式也适用于初等等价的 $\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \mathbb{N})$，由此便得到上述陈述。

5. Structure and basic properties of nonstandard free group

本节考察非标准自由群的基本性质$\sim \quad \sim \sim \sim F \cong \Gamma(\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \mathbb{N}))$，其中 F是秩为 r、由 x_1、 . . . 、 x_r自由生成的自由群，而 Γ 如第 4 节中所引入。总体思路是，根据注3.5，标准自由群 F 的性质可以推广到 F，只需作出如下改变：每当涉及有限序列的元素时，$\sim F$ 中的相应陈述将使用非标准序列。

例如，$\tilde{F}$不是有限生成的，但它是以非标准地生成的，$\tilde{}\qquad\qquad\tilde{}$其含义是：对于每个 $f \in F$，都存在一个 $k \in \mathbb{N}$ 以及非标准元组 $(i_1$、 . . . 、 $i_k)$、$1 \le i_j \le r$ 和 $(\varepsilon_1$、 . . . 、 $\varepsilon_k)$， $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$，使得 $\prod_j x_{i_j}^{\varepsilon_j} = f$。这里以及下文中，乘积均按引理 3.4 的含义理解。虽然这可由 Γ的定义直接得出，但我们仍借此机会通过命题 3.5 和注3.5来说明这一点，它们将是本节的主要工具。事实上，考虑 $\mathbb{S}(F,\ \mathbb{N})$ 的一阶理论中的公式 Φ_r，该公式记录了存在 r 个元素x_1、 . . . 、 x_r，使得 F中的每个元素都可以表示为由 $\bar{x} = (x_1$、 . . . 、 $x_r)$及其逆元组成的有限群乘积：

$$Gen(\bar{x}) = \forall x \in F\ \exists \bar{y}\ \left(\forall 1 \le i \le \ell(\bar{y})\ \ y_i \in \bar{x} \vee y_i^{-1} \in \bar{x}\right) \wedge x = \prod \bar{y}.$$

$\tilde{}\ \tilde{}\ \tilde{}$由于对于某个 r，有 $S(F, \mathbb{N}) \models \exists \bar{x}\, (Gen(\bar{x}) \wedge \ell(\bar{x}) = r)$，因此我们有 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) \models \exists \bar{x}\, (Gen(\bar{x}) \wedge \sim \ell(\bar{x}) = r)$。后者表明， F 中的每个元素 x 都可以表示为元组 $(y_1, \ldots, y_k)$ 中各元素的乘积，其中每个 y_j 都是某个 $x_\ell^{\pm 1}$。元组$\tilde{}\ \tilde{}\ \tilde{}(y_1, \ldots, y_k)$ 是 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$ 的列表排序中的成员，即一个基于$\sim\qquad\qquad\sim F$ 的非标准元组。换句话说， F 中的每个元素都是 F 的自由生成元$\tilde{}$的非标准乘积。

考虑公式 $Red(\bar{y})$:

$$Red(\bar{y}) = \forall 1 \le i \le \ell(\bar{y})\ \ y_i \ne y_{i+1}^{-1}$$

以及 $Free(\bar{x})$:

$$\begin{aligned} Free(\bar{x}) = \forall \bar{y}, \bar{z}\ \Big[&\left(\forall 1 \le i \le \ell(\bar{y})\ \ y_i \in \bar{x} \vee y_i^{-1} \in \bar{x}\right) \wedge Red(\bar{y}) \wedge \\ &\left(\forall 1 \le j \le \ell(\bar{z})\ \ z_j \in \bar{x} \vee z_j^{-1} \in \bar{x}\right) \wedge Red(\bar{z}) \wedge \\ &\prod \bar{y} = \prod \bar{z}\ \Big] \to \bar{y} = \bar{z}. \end{aligned}$$

现在我们可以记下，某个群由某个元组 $\bar{x}$ 自由生成:

$$FreeGen(\bar{x}) = Gen(\bar{x}) \wedge Free(\bar{x}),$$

以及记录自由群秩的良定义性的公式 Φ:

$$\forall \bar{x}, \bar{x}'\ \ FreeGen(\bar{x}) \wedge FreeGen(\bar{x}') \to \ell(\bar{x}) = \ell(\bar{x}').$$

注 5.1。由此可知，注 4.1 中的同构在$\sim \sim \sim \mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$中不是可定义的，也不保持非标准乘积。

在标准自由群中，两个自由生成元的乘积相等，当且仅当存在一系列自由消去和自由插入，将一个乘积变换为另一个乘积。下面给出非标准自由群中这一陈述的一个类似版本。

命题 5.1. 设 $\bar{x}$ 是一个非标准自由群$\sim$ $\sim$ $\sim F$的自由生成元元组。设 $\bar{a}$ 和 b 是由 $\bar{x}$ 中的元素及其逆元组成的两个非标准元组，并且满足 $\prod \bar{a} = \prod b$。那么，存在一个由非标准元组组成的非标准元组$(\bar{a} = \bar{c}^1, \ldots, \bar{b} = \bar{c}^r)$，使得 $\bar{c}^i$ 和 $\bar{c}^{i+1}$ 相差一次自由消去或插入。

证明。注意，该陈述可以写成关于 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$ 的公式 φ。由于$\sim \sim \sim \mathbb{S}(F, \mathbb{N}) \models \varphi$，可得 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N}) \models \varphi$。□

5.1. 非标准自由群的子群。为了在本文余下部分中使用，我们先确立有关子群及其生成元的术语。有限生成子群可以通过四种方式推广到非标准情形。简单来说，我们可以考虑有限或非标准的生成集，也可以考虑生成集元素的有限或非标准乘积。这四种选择中的每一种都会得到 F的一个子群，但并非所有选择都可视为有限子群的自然推广。

我们将 F 的非标准子群是指一个标准子群，并且它还在非标准乘积下封闭。我们将后一种对象视为本文语境下的自然对象；因此，下文凡提及子群，均指非标准子群。相应地，记号 $G \leq F$ 表示 G 是一个非标准子群。尤为重要的是，注意到如果 G 是 F 的标准子群，并且在 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$（或在 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$）中可定义，那么它就是一个非标准子群。

考虑一个集合 $U = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$ 由 F 的元素组成。例如，U 的元素可以用一个（有限或无限的非标准）元组 $\bar{u} = (u_1, \ldots\ldots, u_k)$$\sim$ $\sim k \in \mathbb{N}$ 来枚举，其中各项均为 F 的元素。在这种情况下，姑且不拘泥于术语，我们不区分集合与元组，记作 $U = \bar{u}$。U 也可以是一个元素未按元组组织的集合，例如 $U = \{x_2^{-j} x_1 x_2^j : j \in \widetilde{\mathbb{N}}\}$。

对于上述每个 U，我们可以考虑两个子群：

$$G_s = \langle U \rangle_s = \left\{ u_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots u_{i_m}^{\varepsilon_m} \mid m \in \mathbb{N}, u_{i_j} \in U, \varepsilon_i = \pm 1 \right\} \text{ and}$$

$$G_n = \langle U \rangle_n = \left\{ u_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots u_{i_m}^{\varepsilon_m} \mid m \in \widetilde{\mathbb{N}}, u_{i_j} \in U, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

注意，G_s 是按通常意义由 U 中的元素生成的子群，即包含 U中元素的最小子群。我们将 U中元素生成的标准子群称为 G_s。相应地，U中元素非标准生成的最小非标准子群是 G_n。注意，当 $U = \bar{u}$ 是一个元组（有限或非标准）时，或者更一般地，当 U 在 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ 中是可定义的时，F中包含 $\bar{u}$中元素的最小可定义于 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ 子群是 G_n。我们将由 $\bar{u}$中元素非标准生成的子群称为 G_n。下文中，记号 $G = \langle U \rangle$（如果$U = \bar{u}$，则为 $G = \langle u_1, \ldots\ldots, u_k \rangle$）表示非标准子群 $G = G_n$。

若 G 是 F的子群，且存在一个元组 $\bar{u} = (u_1, \ldots\ldots, u_k)$，使得 $G = \langle u_1, \ldots\ldots, u_k\rangle$（遵循上述所有约定），则称 G 在 $k \in \mathbb{N}$时是有限生成的，在 $k \in \mathbb{N}$ 时是非标准生成的（特别注意，有限生成子群也是非标准生成的）。例如，很容易看出，由所有形如 $x_2^{-j}x_1x_2^j$、 $j \in \widetilde{\mathbb{N}}$的元素生成的子群不是非标准生成子群。

5.2. **非标准自由群的性质**。注意，以下所有内容都可以用 F 的弱二阶公式表示（因此，明确解释后，也可以用 $\mathbb{Z}$的弱二阶公式表示）：

(1) 元素 $x_1, \ldots, x_r \in F$自由生成 F。(2) 两个群字 w_1, w_2 在 F的自由生成元中作为 F 的元素相等，当且仅当存在一个精细序列的自由消去或插入，将 w_1 变为 w_2。(3) $y_1, \ldots, y_n$是 $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$的自由生成元。(4) x 隶属于由 $y_1, \ldots, y_k$生成的子群。(5) F 的每个有限生成子群都是自由群。(6) F 的每个有限生成子群都有一个 Nielsen生成元集。(7) F 具有 Lyndon长度函数。(8) 豪森性质，即两个有限生成子群的交是有限生成的。(9) 有限（非标准）指数。(10) Greenberg–Stallings定理，即 F 的每个有限生成子群在其交换化子中都具有有限指数。

（顺带一提，从某种意义上说，结构的所有“合理”性质都是弱二阶性质。）以上所有性质在$_\sim F$中都有非标准类似。我们不逐一详述上述列表中的每一项，而是举两个例子：我们考察 F 中的中心化子，并给出豪森性质的一个非标准版本。

命题5.2. F 中的中心化子同构于加法群 $\mathbb{Z}^+$。

证明。 考虑由下式给出的 $\mathbb{S}$的公式 $\varphi(F, \mathbb{N})$:

$$\forall x \in F\ \exists y \in F\ \forall z \in F\ \exists k \in \mathbb{Z}\quad [x, z] = 1 \to z = y^k.$$

由于 F中的中心化子是循环的，因此 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N}) \models \varphi$。于是 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N}) \models \varphi$，而对于$_\sim F$，根据注3.5，公式 φ 可写为

$$\forall x \in \widetilde{F}\ \exists y \in \widetilde{F}\ \forall z \in \widetilde{F}\ \exists k \in \widetilde{\mathbb{Z}}\quad [x, z] = 1 \to z = y^k,$$

换言之， $\widetilde{F}$中 x 的中心化子是$\{y^k \mid k \in \widetilde{\mathbb{Z}}\} \cong \widetilde{\mathbb{Z}}^+$。 □

对于豪森性质，设 $\varphi_{\text{memb}}(z, \bar{y})$ 是 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$ 的一个公式，使得 $\mathbb{S}(F, N) \models \varphi_{\text{memb}}(g, \bar{g})$ 当且仅当 $g \in \langle g_1, \ldots, g_m\rangle$，其中 $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m)$。那么，豪森性质可由公式 Φ_{H} 记录如下:

$$\Phi_{\text{H}} = \forall \bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}\ \exists \bar{y}\ \forall x \in F\ \varphi_{\text{memb}}(x, \bar{y}^{(1)}) \wedge \varphi_{\text{memb}}(x, \bar{y}^{(2)}) \leftrightarrow \varphi_{\text{memb}}(x, \bar{y}).$$

对于 F 的非标准模型 F，根据命题 3.5 和注3.5，有 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N}) \models \Phi_{\text{H}}$，即以下命题成立。

命题 *5.3*。 *</style}*如果两个子群 G_1、 $G_2 \leq F$ 是非标准生成的，那么它们的交 $G_1 \cap G_2$也是非标准生成的。

请注意，这并不是对自由群的豪森性质完全令人满意的推广，因为如果子群 G_1、 G_2 分别由有限元组$\bar{g}^{(1)}$、 $\bar{g}^{(2)}$生成（而不是由无限非标准元组生成），那么上述命题只能保证 $G_1 \cap G_2$ 由一个非标准元组生成，而该元组不一定是有限的。下面我们将给出一种方法，对公式 Φ_{H} 及随后的命题加以改进。

回顾一下， G_1、 G_2和 $G_1 \cap G_2$的秩（自由生成元的数量）之间存在一个显而易见的不等式：$\mathrm{rk}\, G_1 \cap G_2 - 1 \leq 2(\mathrm{rk}\ G_1 - 1)(\mathrm{rk}\ G_2 - 1)$（例如参见 [17]）。考虑 Φ^+ H 的扩展版本 Φ_{H}:

$$\Phi_{\mathrm{H}}^+ = \forall \bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}\ \exists \bar{y}\ [\ell(y) \leq 2(\ell(y^{(1)} - 1)(\ell(y^{(2)} - 1) + 1 \\ \wedge \forall x \in F\ \varphi_{\mathrm{memb}}(x, \bar{y}^{(1)}) \wedge \varphi_{\mathrm{memb}}(x, \bar{y}^{(2)}) \leftrightarrow \varphi_{\mathrm{memb}}(x, \bar{y})].$$

于是， $\widetilde{\mathbb{S}}(\widetilde{F}、\widetilde{\mathbb{N}}) \models \Phi^+$ H 可以记录为以下命题。

命题 5.4. 若两个子群 G_1、 $G_2 \leq F$ 分别由 F 的 m_1 个与 m_2 个元素非标准生成，则它们的交 $G_1 \cap G_2$ 至多由 F 的 $2(m_1 - 1)(m_2 - 1) + 1$ 个元素非标准生成。

上述版本并不具有我们针对命题 5.3 所指出的缺陷。另外，我们注意到，若考虑到 Hanna Neumann 猜想的肯定解决 [15, 5]，该界可改进为至多 $(m_1-1)(m_2-1)+1$。

6. Nonstandard Groups

正如我们在第 4 节末尾所述，其中的构造适用于任意具有算术乘法表的有限生成结构。考虑这样一个群 G 在 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ 中的解释，由此可得到一个非标准模型 $G = G(\mathbb{N})$。后者由定理 2.2 保证是良定义的。类似于定理 4.1 与定理 4.2，在假定连续统假设的相应版本的前提下，我们可以直接看出 $G^* \cong G$，其中 G^* 表示 G 的适当超幂。为此，我们陈述如下定理。

定理 6.1。 设 G 是一个具有算术字问题的有限生成群。假设 κ 是一个满足 $2^\kappa = \kappa+$ 的无限基数。令 D 为 κ 上的非主超滤子，且令 $G^* \cong \prod_{i \in \omega} G\,/D$ 和 $\mathbb{Z}^* \cong \prod_{i \in \omega} \mathbb{Z}\,/D$ 为相应的超幂。于是 $G^* \cong F$，其中 G 表示非标准模型 $G(\mathbb{Z}^*)$。

证明。 证明与定理 4.1 的证明相同，只需将 κ 替换为 ω，并将 G 替换为 F。□

注意到 $G \leq G$，并且 G 是 G 的初等子模型。

定理 6.2。 设 G 是一个具有算术字问题的有限生成群。于是 G 是 $G = G(\mathbb{Z})$ 的初等子模型。

证明。 </style}由于 G 在 $\mathbb{N}$ 中有解释，且 $\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$的初等子结构，故结论成立。□

定理 6.3。 若 G 是一个具有算术字问题和 $G' \equiv G$的有限生成群，则存在一个非标准群 G ，使得 G' 是 G 和 $|G| \leq |G'|$的初等子模型。

证明。 这是 [4, 定理 5，第 5 节3]的一个特例。 □

定理 6.4。 设 G 是一个具有算术字问题的有限生成群。假设 κ 是一个无限基数，使得 $2^\kappa = \kappa+$。若 $G' \equiv G$, G' 是饱和的，且 $|G'| = \kappa$，则对于某个非标准模型 G 的 G，有 $G' \cong G$ 。

证明。 考虑一个基数为 κ 的 $\mathbb{Z}$ 的超幂 $\mathbb{Z}$ 。那么 $G = G(\mathbb{Z})$ 与 G 初等等价，且是饱和的（因为 $2^\kappa = \kappa+$），其基数至多为 κ。此外，$|G| \geq \kappa$，因为 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ 满足公式 $\forall n\, \exists \bar{x} \in \mathrm{List}_{\widetilde{G}}\, \forall i, j \leq \ell(\bar{x})\ x_i \neq x_i$。

因此，由于两个初等等价的饱和模型同构，我们有 $G' \cong G$。□

事实上，上述陈述并非群所特有。例如，采用与定理 6.1 相同的推理，我们可以得到任意代数结构的类似结果。

定理 6.5. 设 $\mathbb{A}$是一个有限签名、具有算术乘法表的有限生成代数结构。假设 κ是一个满足$2^\kappa = \kappa+$的无限基数。令 D 为 κ 上的非主超滤子，并令 $\mathbb{A}^* \cong \prod_{i\in\omega} \mathbb{A}\ /D$ 和 $\mathbb{Z}^* \cong \prod \mathbb{Z}\ /D$ 为相应的超幂。那么 $\mathbb{A}^* \cong \mathbb{A}$，其中 $\mathbb{A}$ 表示$i\in\omega$非标准模型 $\mathbb{A}(\mathbb{Z}^*)$。

证明. 证明与定理 4.1 的证明相同，只需用 κ 代替 ω ，用 $\mathbb{A}$ 代替 F。□

6.1. **可定义同态**。 设 G_1 和 G_2 是两个非标准群，分别具有解释编码 Γ_1 和 Γ_2。若 $\varphi : G_1 \to G_2$ 是群同态，且集合 $\{(g,\ \varphi(g) \mid g \in G_1\}$ 在 $\mathbb{S}(\mathbb{Z},\ \mathbb{N})$中是可定义的，那么我们就称 φ 是可定义的。对于有限生成的 G_1，这一性质等价于保持非标准乘积。

命题 6.1。 设 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$，并设 $G_1 \cong \Gamma_1(\mathbb{N})$和 $G_2 \cong \Gamma_2(\mathbb{N})$ 是两个非标准群。若 G_1 是有限生成的，则群同态 $G_1 \to G_2$ 可定义，当且仅当对于每个非标准元组 $\bar{g} \in \mathrm{List}(G_1, \mathbb{N})$，都有 $\varphi(\prod \bar{g}) = \prod \varphi(\bar{g})$，其中$\varphi(\bar{g})$ 表示对 φ逐元素应用。

证明。 假设 φ 是可定义的。则下列表达式可以改写为 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$的一个公式 $\Phi(\bar{g})$:

$$\forall 1 \leq j \leq \ell(\bar{g})\ \varphi(\prod_{i=1}^{j} g_i) = \prod_{i=1}^{j} \varphi(g_i).$$

对 j使用归纳法，$\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) \models \Phi(\bar{g})$，因为 φ 是同态。

反过来，假设 φ 保持非标准乘积。假设 G_1 由有限多个元素 g_1、……、 g_k生成，其中 $\varphi(g_1) = h_1$、……、 $\varphi(g_k) = h_k$。那么对于 $g \in G_1$、 $h \in G_2$，有 $\varphi(g) = h$，当且仅当存在两个元组$(i_1$、……、$i_m)$和$(\varepsilon_1$、……、$\varepsilon_m)$、$\varepsilon_j = \pm 1$，它们属于 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$，且满足 $g = \prod(g_{i_1}^{\varepsilon_1}$、……、$g_{i_m}^{\varepsilon_m})$和 $h = \prod(h_{i_1}^{\varepsilon_1}$、……、$h_{i_m}^{\varepsilon_m})$。后者可以用 $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$的一个公式表示。□

6.2. **非标准表示**。 当 G 是有限表示的 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle \cong F/\langle\langle R\rangle\rangle$时，我们可以像标准情形那样，用自由生成元 $x_1, \ldots, x_k$上的非标准自由群来定义群 G。事实上，在 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$中定义 R 的正规闭包 R^F 以及由 R^F生成的子群是显而易见的:

$$R^F = \{w^{-1}rw : w \in F, r \in R\},$$
$$\langle\langle R\rangle\rangle = \left\{ \prod (g_1, g_2, \ldots, g_n) \middle| g_i^{\pm 1} \in R^F \right\},$$

也就是说，$\langle\langle R\rangle\rangle$ 是 R的通常意义下的正规闭包。现在，我们在 F上定义关系 $\sim_R$ 如下:

$$g_1 \sim_R g_2 \iff g_1 = g_2 h,\ h \in \langle\langle R\rangle\rangle. \tag{6}$$

最后，商群 $\langle x_1, \ldots, x_k\rangle/\langle\langle R\rangle\rangle$ 的群运算可以直接在 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$中定义（事实上是在 F 中定义，并模去用于定义 $\langle\langle R^F\rangle\rangle$的弱二阶公式）。这给出了 G 在 $\mathbb{S}(F, \mathbb{N})$中的一种解释，因此，由命题 3.5， $\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})^{\sim}$中也有这种解释，进而在 $\mathbb{N}$中也有这种解释，记作 $G \cong \Gamma_1(\mathbb{N})$。结构 $\Gamma_1(\mathbb{N})$与 G 同构，见定理 2.3。注意，在 $\mathbb{N}$上，(6)中的元素 h 变成了关系子的共轭元的一个非标准乘积。特别地，在非标准$^\sim$情形下，子群 $\langle\langle R\rangle\rangle$ 是由 R^F生成的非标准子群。因此，作为一个（标准）群， $\Gamma_1(\mathbb{N})$与（标准）群商$^\sim F/\langle\langle R\rangle\rangle$同构。此外，由命题 6.1 可直接验证，映射 $x_i \to x_i\langle\langle R\rangle\rangle$ 可唯一延拓为一个可定义同态 $\varphi\colon F \to G$ ，其核为 $\ker\varphi = \langle\langle R\rangle\rangle$，因为记录 F成立的弱二阶公式也成立。

定理 6.6。 设 F 是由有限集 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ 生成的自由群。设 $\sim$ $G = \langle X \mid R\rangle$ 是有限生成的递归表示群。设 $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$ 和 $^\sim$ $^\sim$ $^\sim$ $^\sim$分别为 $F = F(\mathbb{N})$ 和 $G = G(\mathbb{N})$ 对应的非标准群。设 $\langle\langle R\rangle\rangle$ 是由 $R^{\widetilde{F}}$ 生成的 $\widetilde{F}$ 的非标准子群。则映射 $x_i \to x_i\langle\langle R\rangle\rangle^{\sim}$ $^\sim$唯一地延拓为一个从 F 到 G 的满射可定义同态 φ，其核为$\ker\varphi = \langle\langle R\rangle\rangle$。

$^\sim$ $^\sim$注意，由此可知，作为（标准）群， $G \cong F/\langle\langle R\rangle\rangle$。因此，我们 $^\sim$ $^\sim$可以将 G 看作 F 对 R 的非标准正规闭包取商所得的商群。$^\sim$有鉴于此，我们记 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle^\sim$。

关于群字表示同一群元素的经典结果，其非标准类似如下所述成立。

$^\sim$ $^\sim$**命题6.2.** 假设 $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ 是由 G 的元素组成的元组，使得 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle^\sim$。假设 $\bar{a}$ 与 b 是由 $\bar{x}^-$ $^\sim$的元素及其逆元组成的两个非标准元组，使得 $\prod \bar{a} = \prod b$ 属于 G。则存在一个由非标准元组构成的非标准元组$(\bar{a} = \bar{c}^1, \ldots, \bar{b} = \bar{c}^r)$，使得 $\bar{c}^i$ 与 $\bar{c}^{i+1}$ 仅相差一次自由消去或插入，或仅相差一次对来自 R的关系子或其逆元的删除或插入。

$^\sim$ $^\sim$ $^\sim$证明。 注意，该陈述可以写成一个关于 $\mathbb{S}(G,\ \mathbb{N})$ 的公式 φ。由于 $\sim$ $\sim$ $\sim\mathbb{S}(G,\ \mathbb{N}) \models \varphi$，因此可得 $\mathbb{S}(G,\ \mathbb{N}) \models \varphi$。 □

由于具有有限表示的群具有算术字问题，定理 6.2、6.3 和 6.4 适用于此类群，现将其记录为以下推论。

~推论 *6.7*。 *</style}*假设 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle^{\sim}$。那么 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle$ 是 G 的初等子模型。

推论 6.8。 如果 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle$ 是一个群，且 $G' \equiv G$，那么存在一个~非标准群 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle^{\sim}$，使得 G' 是 G 的初等子模型~ ~，并且 $|G| \leq |G'|$。

推论 6.9。 令 $G = \langle x_1, \ldots, x_k \mid R\rangle$。假设 κ 是一个无限基数，且~满足 $2^{\kappa} = \kappa+$。如果 $G' \equiv G$， G' 是饱和的，并且 $|G'| = \kappa$，那么对于某个~非标准模型 G ，有 $G' \cong G$ ，其中该模型是 G 的模型。

References

[1] I.V. Ashaev、V.Ya. Belyaev 和 A.G. Myasnikov。迈向广义可计算性理论。*Algebra and Logic*, 32(4):183–205，1993。[2] Anne Bauval。多项式环与弱二阶逻辑。 *The Journal of symbolic logic*，50 4 953 972，1985 ( ): – 。[3] S.B. Cooper。 *Computability Theory*。Chapman Hall/CRC 数学丛书。CRC 出版社，2017。[4] E. Daniyarova 和 A. Myasnikov。解释理论 I。基础。 *International Journal of Algebra and Computation* 2026 ，。即将出版。[5] J. Friedman。 *Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture: with an appendix by Warren Dicks* 233 1100 *Memoirs of* ，卷 ( ), *the American Mathematical Society* 2015 出自 。美国数学学会，。[6] Richard Kaye。 *Models of Peano arithmetic*。Clarendon 出版社，1991。[7] O. Kharlampovich 和 A. Myasnikov。自由非阿贝尔群的初等理论。 *Journal of Algebra* 302 2 451 552, 2006 ，( ): – 。

[8] Olga Kharlampovich 和 Alexei Myasnikov。自由结合代数的 Tarski 型问题。 *Journal of Algebra*, 500:589–643，2018。献给 Efim Zelmanov 的专刊。[9] Olga Kharlampovich 和 Alexei Myasnikov。自由群的群代数对群“了解”些什么？ *Annals of Pure and Applied Logic*，169(6):523–547，2018。[10] Olga Kharlampovich、Alexei Myasnikov 和 Rizos Sklinos。极限群的 Fra¨ıss´e 极限。 *Journal of Algebra*，545:300–323，2020。[11] Olga Kharlampovich、Alexei Myasnikov 和 Mahmood Sohrabi。 *Rich groups weak second-* ，，，页 *order logic and applications* 127 192 2021 码 – 。De Gruyter，。[12] Olga Kharlampovich 和 Christopher Natoli。可数初等自由群。 *Finitely Presented Groups: With Applications in Post-Quantum Cryptography and Artificial Intelligence*，第 43 页，2024。[13] A.I. Mal’tsev。构造性代数 I。 *Russian Mathematical Surveys*，16(3):77，1961年6月。[14] D. Marker。 *Model theory: An introduction*。Springer，2011。[15] I. Mineyev。次乘性与 Hanna Neumann猜想。 *Annals of Mathematics*，第 393–414 页，2012。[16] A. Myasnikov 和 A. Nikolaev。非标准多项式：代数性质与初等等价关系。https://arxiv.org/abs/2409.14467，2024。[17] Hanna Neumann。论有限生成自由群的交。补遗。 *Publ.* ，( ): 。 *Math. Debrecen* 5 128 58, 1957 [18] M.O. Rabin。可计算代数、一般理论与可计算域理论。 *Transactions of the American Mathematical Society* 95 2 341 360, 1960 ，( ): – 。

[19] H. Rogers。 *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*。McGraw-Hill 高等数学丛书。McGraw-Hill，1967。[20] Zlil Sela。群上的丢番图几何 VI：自由群的初等理论。 *Geometric & Functional Analysis GAFA*，16(3):707–730，2006。[21] Stanley Tennenbaum。算术的非阿基米德模型。 *Notices of the American Mathematical Society* 6 270 44, 1959 ，( ): 。

Email address: amiasnik@stevens.edu
Email address: anikolae@stevens.edu